Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Flächen mit vorgegebener vektorieller Differentialinvariante

Von Frank Löbell in München

Vorgelegt am 4. Juli 1952

Eine Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ im euklidischen Raum besitzt eine vektorielle Differentialinvariante vom Gewicht 1:[1]

$$\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v. \tag{1}$$

Es ist manchmal erwünscht, alle Flächen zu bestimmen, die eine gegebene, die nötigen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllende Vektorfunktion $\mathfrak{j}_1(u, v)$ als Differentialinvariante haben; im folgenden soll ein Weg zur Lösung dieser Aufgabe gewiesen werden.

1. Vor allem sei daran erinnert, daß durch $\mathfrak{j}_1$ das Krümmungsmaß K der Flächen $\mathfrak{x}$, sofern solche existieren, bestimmt ist; wie bei einer früheren Gelegenheit gezeigt wurde und leicht verifiert werden kann, wird nämlich[2]

$$K = \mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_{1u} \mathfrak{j}_{1v} : \mathfrak{j}_1^4. \tag{2}$$

Da durch die Richtung von $\mathfrak{j}_1$ auch der Einheitsvektor

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{j}_1 : |\mathfrak{j}_1| \tag{3}$$

der Normalen der Flächen $\mathfrak{x}$ bekannt ist, so handelt es sich also darum, alle Flächen aufzufinden, deren Krümmung als Ortsfunktion auf der ihnen durch gleichgerichtete Normalen zugeordneten Einheitskugel $\mathfrak{n}$ gegeben ist.

Auf dieser Kugelfläche können wir uns zur Vereinfachung der Rechnung, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, isotherme Parameter p, q eingeführt denken, so daß

$$\mathfrak{n}_p^2 = \mathfrak{n}_q^2 = e^{2\varphi}, \quad \mathfrak{n}_p \mathfrak{n}_q = 0 \tag{4}$$

---

[1] Siehe diese Sitzungsberichte 1943, S. 217 ff.

[2] Diese Sitzungsberichte 1948, S. 6.

wird; φ darf weiterhin als bekannte Funktion von p und q angesehen werden.

Falls $K \neq 0$ ist, lassen sich $\mathfrak{x}_p$ und $\mathfrak{x}_q$ linear durch $\mathfrak{n}_p$ und $\mathfrak{n}_q$ ausdrücken, da dann $\mathfrak{n}_p \times \mathfrak{n}_q \neq 0$ ist; wenn L, M, N die Fundamentalgrößen 2. O. einer der Flächen $\mathfrak{x}$ bedeuten, wird für diese

$$e^{2\varphi}\mathfrak{x}_p = -L\mathfrak{n}_p - M\mathfrak{n}_q, \quad e^{2\varphi}\mathfrak{x}_q = -M\mathfrak{n}_p - N\mathfrak{n}_q. \tag{5}$$

Wir haben hier die Umkehrung der Weingartenschen Gleichungen vor uns. Mit Hilfe der vermöge (4) geltenden[1] Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_{pp} &= \varphi_p \mathfrak{n}_p - \varphi_q \mathfrak{n}_q - e^{2\varphi}\mathfrak{n}, \\ \mathfrak{n}_{pq} &= \varphi_q \mathfrak{n}_p + \varphi_p \mathfrak{n}_q, \\ \mathfrak{n}_{qq} &= -\varphi_p \mathfrak{n}_p + \varphi_q \mathfrak{n}_q - e^{2\varphi}\mathfrak{n} \end{aligned} \tag{6}$$

führt die, übrigens schon zur Feststellung der Gleichheit von $\mathfrak{x}_p\mathfrak{n}_q = -M = \mathfrak{x}_q\mathfrak{n}_p$ benützte Integrabilitätsbedingung $\mathfrak{x}_{pq} = \mathfrak{x}_{qp}$ auf die Beziehungen

$$L_q - M_p = (L+N)\varphi_q, \quad M_q - N_p = -(L+N)\varphi_p. \tag{7}$$

Da sich aus (5)

$$e^{4\varphi}\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q = (LN - M^2)\,\mathfrak{n}_p \times \mathfrak{n}_q \tag{8}$$

ergibt und nach Gauß' Definition des Krümmungsmaßes

$$\mathfrak{n}_p \times \mathfrak{n}_q = K\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q \tag{9}$$

ist, so tritt noch die Gleichung hinzu:

$$LN - M^2 = e^{4\varphi} : K. \tag{10}$$

Die Beziehungen (7) müssen die Codazzi-Mainardischen Gleichungen der gesuchten Flächen $\mathfrak{x}$ sein; wenn man diese auf die übliche Weise unter Benützung der aus (5) berechneten Fundamentalgrößen 1. O. von $\mathfrak{x}$ aufstellt, bestätigt sich in der Tat unsere Vermutung, allerdings auf Kosten einer längeren Rechnung.

2. Es sind aber die Beziehungen (7), wie man mit geringer Mühe erkennen kann, auch völlig gleichlautend mit den Codazzi-

[1] Vgl. diese Sitzungsberichte 1948, S. 337.

Mainardischen Gleichungen eines Paares zusammengehöriger Grundformen

$$\mathrm{I} = e^{2\varphi}(dp^2 + dq^2) \quad \text{und} \quad \mathrm{II} = L\,dp^2 + 2M\,dp\,dq + N\,dq^2.$$

So scheint hier eine Übereinstimmung mit einem der möglichen Lösungswege für das Verbiegungsproblem zutage zu treten; sie wird sich jedoch als im allgemeinen nur formal und überhaupt nur zum Teil bestehend herausstellen.

Genau genommen ist nämlich zunächst zum Vergleich nur die Aufgabe heranzuziehen, alle mit einer gegebenen I. Grundform verträglichen II. Grundformen zu bestimmen; bei ihrer Behandlung würde aber zu (7) an Stelle von (10) noch hinzutreten:

$$LN - M^2 = e^{4\varphi} \cdot \mathfrak{K}, \tag{11}$$

wo $\mathfrak{K}$ als die Krümmung der I. Grundform nach dem theorema egregium der Beziehung genügen müßte:

$$\mathfrak{K} e^{2\varphi} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0. \tag{12}$$

Bei der im Abschnitt 1 betrachteten Aufgabe ist somit $\mathfrak{K} = 1$, während K in (10) wegen (2) eine unabhängig von φ gegebene Funktion von p und q ist; es liegt hier, wie man sieht, teils eine Spezialisierung, teils eine Verallgemeinerung gegenüber dem zweiten Problem vor. Nur dann stimmen demnach die in beiden Fällen zu lösenden Gleichungssysteme auch inhaltlich überein, wenn $K = 1$ ist; das ist aber nicht überraschend, da die anfangs gestellte Aufgabe bei dieser Annahme ja nichts anderes fordert als dies, alle Flächen vom Krümmungsmaß 1 aufzustellen.

Zwischen der Aufgabe, alle Flächen mit einem gegebenen Paar verträglicher Grundformen zu bestimmen, und der, die wir am Anfang dieser Note allgemein stellten, besteht nun weiter der Unterschied, daß in diesem letzteren Fall die Ermittlung von $\mathfrak{x}$, nach Lösung des Systems der partiellen Differentialgleichungen (7) in Verbindung mit (10), auf Grund von (5) nur noch eine Quadratur verlangt, weil $\mathfrak{n}(p, q)$ von vornherein bekannt ist, während das Verbiegungsproblem als entsprechenden Endschritt bekanntlich die Integration einer totalen Riccatischen Differentialgleichung erfordert.