



Veröffentlichungen der DGK

Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe C

Dissertationen

Heft Nr. 865

Michael Lösler

**Modellbildungen zur Signalweg- und in-situ
Referenzpunktbestimmung von VLBI-Radioteleskopen**

München 2021

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

ISSN 0065-5325

ISBN 978-3-7696-5277-2

Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:

Wissenschaftliche Arbeiten des Instituts für Geodäsie und Geoinformationstechnik
der Technischen Universität Berlin

<https://doi.org/10.14279/depositonce-11364>, Berlin 2021



Veröffentlichungen der DGK

Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe C

Dissertationen

Heft Nr. 865

Modellbildungen zur Signalweg- und in-situ Referenzpunktbestimmung von VLBI-Radioteleskopen

Von der Fakultät VI – Planen Bauen Umwelt
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. (FH) Michael Lösler

Geboren am 23.05.1980 in Cottbus

München 2021

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

ISSN 0065-5325

ISBN 978-3-7696-5277-2

Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:
Wissenschaftliche Arbeiten des Instituts für Geodäsie und Geoinformationstechnik
der Technischen Universität Berlin
<https://doi.org/10.14279/depositonce-11364>, Berlin 2021

Adresse der DGK:



Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften (DGK)

Alfons-Goppel-Straße 11 • D – 80 539 München
Telefon +49 – 331 – 288 1685 • Telefax +49 – 331 – 288 1759
E-Mail post@dgk.badw.de • <http://www.dgk.badw.de>

Prüfungskommission:

Vorsitzender: Prof. Dr. rer. nat. Jens Wickert

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Frank Neitzel
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Haas
Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Harald Schuh

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 01.12.2020

© 2021 Bayerische Akademie der Wissenschaften, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

Für Karola, Frank und Susan.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Ausführungen, die anderen veröffentlichten und unveröffentlichten Schriften wörtlich oder sinngemäß entnommen wurden, habe ich kenntlich gemacht.

Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Fassung noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Michael Lösler

Bad Vilbel, den 10. Juli 2020

Zusammenfassung

Die Erde befindet sich in einem kontinuierlichen Wandel, der aus verschiedenen variierenden dynamischen Prozessen und einwirkenden Kräften resultiert. Die globale Erderwärmung, der Anstieg des Meeresspiegels oder tektonische Verschiebungen sind einige der globalen Phänomene, die diesen Veränderungsprozess sichtbar machen. Um diese Veränderungen besser zu verstehen, deren Ursachen zu analysieren und um geeignete Präventivmaßnahmen abzuleiten, ist ein eindeutiger Raumbezug zwingend notwendig. Der International Terrestrial Reference Frame (ITRF) als globales erdfestes kartesisches Koordinatensystem bildet hierbei die fundamentale Basis für einen eindeutigen Raumbezug, zur Bestimmung von präzisen Satellitenorbits oder zum Detektieren von Verformungen der Erdkruste. Die 2015 verabschiedete Resolution „A global geodetic reference frame for sustainable development“ (A/RES/69/266) der Vereinten Nationen (UN) verdeutlicht den hohen Stellenwert und die Notwendigkeit eines solchen globalen geodätischen Bezugssystems.

Das Global Geodetic Observing System (GGOS) wurde 2003 durch die International Association of Geodesy (IAG) gegründet. „Advancing our understanding of the dynamic Earth system by quantifying our planet’s changes in space and time“ lautet die 2011 formulierte Zielsetzung, auf die alle Arbeiten von GGOS ausgerichtet sind, um die metrologische Plattform für sämtliche Erdbeobachtungen zu realisieren. Die Bestimmung eines globalen geodätischen Bezugsrahmens, der weltweit eine Positionsgenauigkeit von 1 mm ermöglicht, ist eine der großen Herausforderungen von GGOS. Das Erreichen dieses Ziels setzt neben der technischen Weiterentwicklung und dem infrastrukturellen Ausbau geodätischer Raumverfahren das Identifizieren und Quantifizieren von systematischen Abweichungen sowohl im lokalen als auch im globalen Kontext voraus.

Die Bestimmung eines globalen geodätischen Bezugsrahmens erfolgt durch eine kombinierte Auswertung aller geodätischen Raumverfahren. Da diese untereinander nur eine geringe physische Verknüpfung aufweisen, stellen lokal bestimmte Verbindungsvektoren, die auch als Local-Ties bezeichnet werden, eine der wesentlichen Schlüsselkomponenten bei der Kombination dar. Ungenaue, fehlerbehaftete und inaktuelle Local-Ties limitieren die Zuverlässigkeit des globalen geodätischen Bezugssystems.

In der vorliegenden Arbeit werden ein Modell sowie verschiedene Lösungsverfahren entwickelt, die eine Verknüpfung der geometrischen Referenzpunkte von Radio-

teleskopen bzw. Laserteleskopen mit anderen geodätischen Raumverfahren durch prozessbegleitende lokale terrestrische Messungen erlauben. Während Radioteleskope zur Interferometrie auf langen Basislinien (VLBI) verwendet werden, ermöglichen Laserteleskope Entfernungsmessungen zu Erdsatelliten (SLR) oder zum Mond (LLR). Die Bestimmung des geometrischen Referenzpunktes von Laser- und Radioteleskopen ist messtechnisch herausfordernd und erfordert eine indirekte Bestimmungsmethode. Bestehende geometrische Methoden sind entweder auf eine bestimmte Teleskopkonstruktion beschränkt oder erfordern ein spezielles Messkonzept, welches ein gezieltes Verfahren des Teleskops voraussetzt. Die in dieser Arbeit hergeleitete Methode weist keine konstruktionsbedingten Restriktionen auf und erfüllt zusätzlich alle Kriterien der durch das GGOS angeregten prozessintegrierten in-situ Referenzpunktbestimmung. Hierdurch wird es möglich, den Referenzpunkt kontinuierlich und automatisiert zu bestimmen bzw. zu überwachen.

Um die Zuverlässigkeit von VLBI-Daten zu erhöhen und um die Zielsetzung von 1 mm Positionsgenauigkeit im globalen Kontext zu erreichen, wird das bestehende VLBI-Netz gegenwärtig durch zusätzliche Radioteleskope unter dem Namen VLBI2010 Global Observing System (VGOS) erweitert. Die hierbei entstehenden VGOS-Radioteleskope zeichnen sich u. a. durch eine sehr kompakte Bauweise und hohe Rotationsgeschwindigkeiten aus. Weitgehend ununtersucht ist das Eigenverformungsverhalten dieser Teleskope. Während für konventionelle Radioteleskope bspw. Signalwegänderungen von z. T. mehreren Zentimetern dokumentiert sind, existieren nur wenige vergleichbare Studien für VGOS-Radioteleskope. Hauptgründe sind zum einen die erhöhten Genauigkeitsanforderungen und zum anderen fehlende Modelle zur Beschreibung der Reflektorgeometrien, wodurch eine direkte Übertragung bisheriger Mess- und Analyseverfahren erschwert wird.

In dieser Arbeit werden für VGOS-spezifizierte Radioteleskope Modelle erarbeitet, die eine geometrische Beschreibung der Form des Haupt- und Subreflektors ermöglichen. Basierend auf diesen Modellen lassen sich u. a. Änderungen der Brennweite oder Variationen der Strahllänge infolge von lastfallabhängigen Deformationen geometrisch modellieren. Hierdurch ist es möglich, wesentliche Einflussfaktoren zu quantifizieren, die eine Variation des Signalweges hervorrufen und unkompensiert vor allem zu einer systematischen Verfälschung der vertikalen Komponente der Stationskoordinate führen.

Die Wahl eines geeigneten Schätzverfahrens, um unbekannte Modellparameter aus überschüssigen Beobachtungen abzuleiten, wird häufig als trivial und gelöst angesehen. Im Rahmen dieser Arbeit wird gezeigt, dass neben messprozessbedingten systematischen Abweichungen auch systematische Abweichungen durch das gewählte Schätzverfahren entstehen können. So resultieren aus der Anwendung eines Schätzverfahrens, welches ausschließlich in linearen Modellen Gültigkeit besitzt, i. A. keine erwartungstreuen Schätzwerte bei nichtlinearen Problemstellungen. Insbesondere in der Formanalyse des Hauptreflektors eines VLBI-Radioteleskops zeigt sich, dass die resultierenden Schätzwerte verzerrt sind, und diese Verzerrungen Größenordnungen erreichen, die als kritisch zu bewerten sind.

Abstract

Several varying forces and dynamic processes continuously affect the shape and the figure of the planet Earth. The process of global change of the Earth becomes visible by, e.g., the global climate change and global warming, the sea-level rise, or the tectonic plate movement. In order to gain a better understanding of these global changes, to analyse their causes, and to derive suitable preventive measures, a reliable global spatial reference system is mandatory. The International Terrestrial Reference Frame (ITRF) is the most accurate global Earth-fixed Cartesian reference frame. It provides the global spatial information for suitable positioning on Earth, for precise satellite orbits, or for in-depth analysis of deformations of the Earth's crust or tectonic changes. In 2015, the United Nations (UN) adopted the resolution on „A global geodetic reference frame for sustainable development“ (A/RES/69/266) and emphasized the importance of a global terrestrial reference frame.

The Global Geodetic Observing System (GGOS) was established by the International Association of Geodesy (IAG) in 2003. Since 2011, the vision of GGOS has been „Advancing our understanding of the dynamic Earth system by quantifying our planet's changes in space and time“. GGOS is perceived as the metrological basis of Earth observations. One of the challenging tasks is to provide a global geodetic frame of reference having a position accuracy of 1 mm on the global scale for the ITRF. To achieve the accuracy aim, on the one hand, technical improvements of the space geodetic infrastructure are necessary, but on the other hand, systematic errors caused by the measurement and analysis procedures must be identified and quantified on the local as well as on the global scale.

A global geodetic reference frame is derived by combining several space geodetic techniques. To overcome the weak physical connection between the space geodetic techniques during the frame derivation, the reference points and their geometrical relations are needed for inter-technique combination. In this contribution, a mathematical model and several solving procedures are derived to determine the conventional reference point of radio telescopes, used for Very Long Baseline Interferometry (VLBI), and laser telescopes, used for Satellite Laser Ranging (SLR) as well as Lunar Laser Ranging (LLR), by local terrestrial surveying methods. The geometrical relations defined between two reference points are realized by a spatial vector also known as local-tie. Since local-ties are crucial components within the inter-technique combination, these vectors must be known within the highest level of accuracy. Inaccurate,

outdated, or erroneous local-ties bias the global frame. The determination of the reference point of radio telescopes or laser telescopes is a challenging task and requires indirect methods. Existing methods are based on modelling simple geometrical shapes. These geometrical methods are restricted to a specific type of telescope construction or require a special observation procedure including predefined rotations of the telescope. The mathematical model derived in this thesis overcomes the constructional restrictions. Moreover, it allows for in-process reference point determination as envisaged by GGOS. Therefore, for the first time an automated and continuous in-situ reference point monitoring becomes possible.

The legacy VLBI network is insufficient to reach the 1 mm goal envisaged by GGOS. For that reason, new radio telescopes, which are of a more compact and stiffer design and are able to move faster, are designed and enlarge the existing VLBI network. These new radio telescopes will form the backbone of the next generation geodetic VLBI system, often referred to as VLBI2010 Global Observing System (VGOS) radio telescopes. On the one hand, several investigations focusing on systematic errors of large legacy VLBI radio telescopes exist, e. g., the signal path variation caused by deformation of the reflectors. On the other hand, equivalent studies that evaluate the deformation behaviour of new VGOS radio telescopes are rare. Main reasons are the higher-level accuracy requirements but also the lack of mathematical models that rigorously describe the shape of the reflectors. Thus, existing observation and analysis procedures derived and proved for legacy radio telescopes cannot be applied directly to the new VGOS class.

In this investigation, new mathematical models are developed to parametrize the three dimensional shape of main reflectors as well as the shape of sub-reflectors of VGOS-specified radio telescopes. Based on these models, variations of, e. g., the focal length or the ray path caused by the reflector's dead load and different structural loads can be modelled and used to derive the geometrical component of the resulting signal path variation.

The estimation of unknown parameters is often regarded as trivial. However, it will be demonstrated that the estimated results are biased, if the statistical properties of a linear substitute-problem are transferred to its underlying nonlinear model. In particular, the order of magnitude of the bias becomes critical in analysing the shape of the main reflector.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Globales geodätisches Bezugssystem	2
1.2	Referenzpunkte und Local-Ties	5
1.3	Deformationen von VLBI-Radioteleskopen	10
1.4	Motivation und Zielsetzung	13
2	Erwartungswert und Dispersion nichtlinearer Funktionen	17
2.1	Taylorreihenentwicklung	20
2.2	Monte-Carlo-Methode	24
2.3	Unscented Transformation	30
2.4	Zusammenfassung	36
3	Parameterschätzung	39
3.1	Sequentielle Quadratische Programmierung	40
3.2	SQP im Kontext der geodätischen Ausgleichungsrechnung	45
3.3	Bias-korrigierte Parameterschätzung	50
3.4	Zusammenfassung	61
4	Geometrischer Referenzpunkt geodätischer Raumverfahren	63
4.1	SLR/LLR- und VLBI-Referenzpunkt	63
4.1.1	Geometrische Modelle zur Referenzpunktbestimmung	65
4.1.2	Transformationsmethode – IRP	72
4.2	Konfigurationsabhängiges Bias	86
4.3	Zusammenfassung	97
5	Ring-Fokus-Paraboloid	101
5.1	Elliptisches Paraboloid	105
5.2	Elliptisches Ring-Fokus-Paraboloid	108
5.3	Modellierung der Variation der Strahllänge	111
5.4	Verzerrung der Schätzwerte eines Ring-Fokus-Paraboloids	117
5.5	Zusammenfassung	123
6	Fazit und Ausblick	127
A	Anhang	135
A.1	Varianz einer nichtlinearen Funktion	135
A.2	Erwartungswert und Dispersion der Unscented Transformation	136

A.3 Newtonverfahren	138
A.4 Blockmatrixreduktion	140
A.5 Erwartungswert und Dispersion der Parameterschätzung (Box 1971) .	141
Abkürzungs- und Akronymverzeichnis	145
Abbildungsverzeichnis	147
Tabellenverzeichnis	151
Literatur	153

1. Einleitung

Die Erde befindet sich in einem kontinuierlichen Wandel, der aus verschiedenen variierenden dynamischen Prozessen und einwirkenden Kräften resultiert. Sichtbar werden diese permanenten Veränderungen des dynamischen Systems Erde bspw. in der Erderwärmung, im Anstieg des Meeresspiegels, durch tektonische Verschiebungen, Erdbeben, Tsunamis und andere globale Phänomene. Der Bevölkerungszuwachs auf der Erde führt dazu, dass Gebiete urbanisiert werden, die einer erhöhten potenziellen Gefährdung unterliegen und daher eine höhere Wachsamkeit erfordern, um humanitäre Katastrophen zu vermindern oder ganz zu verhindern. Neben den humanitären Gefahren beeinflussen Naturkatastrophen durch das Wegbrechen von infrastrukturellen Einrichtungen nicht nur die nationale, sondern auch die globale Ökonomie. Um die dynamischen Prozesse und deren Wechselwirkungen besser zu verstehen, Prädiktionen abzuleiten und um ggf. geeignete Präventivmaßnahmen zu ergreifen, ist ein einheitlicher Raumbezug zwingend erforderlich. Die Grundvoraussetzung für diesen Raumbezug bildet ein präzises globales geodätisches Bezugssystem.

Die Frage nach dem „Wo bin ich?“ kann nur durch einen einheitlichen Raumbezug beantwortet werden. Es ist die inhärente Frage von Technologien, die wie selbstverständlich im Alltag und in Wertschöpfungsketten eingesetzt werden. Navigation, Logistik oder autonomes Fahren sind nur einige Beispiele, die einen globalen geodätischen Bezugsrahmen erfordern. Frühwarnsysteme für Erdbeben bzw. Tsunamis sind ohne einen globalen geodätischen Bezugsrahmen undenkbar. Eine detaillierte Übersicht über weitere Applikationen findet sich in der Zusammenstellung des National Research Council (2010).

Der Anstieg des Meeresspiegels, primär hervorgerufen durch die thermische Ausdehnung des Wassers und das Abschmelzen des Eises an den Polen, ist unstrittig eine direkte Folge der Erderwärmung bzw. des Klimawandels. Wöppelmann und Marcos (2016) zeigen, dass gegenwärtige terrestrische Referenzrahmen einen der limitierenden Faktoren darstellen, um diese Veränderungen am Meeresspiegel und die resultierenden vertikalen Landbewegungen zuverlässig zu erfassen.

Um ein besseres Verständnis für diese globalen Phänomene zu bekommen, ist ein stabiler und hochpräziser globaler geodätischer Bezugsrahmen zwingend erforderlich. Dieser sollte eine globale Genauigkeit für die Position und den Netzmaßstab von mindestens 1 mm bzw. 0,1 ppb bieten¹ und eine zeitliche Stabilität für die Position und

¹1 ppb, parts per billion, entspricht ≈ 6 mm auf der Erdoberfläche.

den Netzmaßstab von mindestens $0,1 \text{ mm a}^{-1}$ bzw. $0,01 \text{ ppb a}^{-1}$ aufweisen (Blewitt u. a. 2010; Glaser u. a. 2020).

1.1 Globales geodätisches Bezugssystem

Die International Association of Geodesy (IAG) initiierte 2003 das Global Geodetic Observing System (GGOS) mit dem Ziel, eine metrologische Plattform für sämtliche Erdbeobachtungen zu etablieren und hochwertige Beobachtungen und abgeleitete Produkte für wissenschaftliche und nichtwissenschaftliche Bereiche zur Verfügung zu stellen. „Advancing our understanding of the dynamic Earth system by quantifying our planet’s changes in space and time“ lautet die 2011 formulierte Zielsetzung, weshalb das GGOS häufig auch als geodätische Komponente des Global Earth Observing System of Systems (GEOSS) betitelt wird (Rothacher 2013). Im Wesentlichen werden hierunter Daten bzw. Produkte zur Beschreibung der Erdfigur und ihrer raumzeitlichen Veränderung (Geokinetik), zum Gravitationsfeld der Erde, sowie Erdrotationsparameter verstanden, die auch als die drei Eckpfeiler der Geodäsie bezeichnet werden (Plag u. a. 2009b, S. 7). Die hierfür notwendige Datengrundlage setzt eine internationale und interdisziplinäre Vernetzung voraus und wird durch die Dienste der IAG, d. h. International DORIS Service (IDS), International GNSS Service (IGS), International Laser Ranging Service (ILRS) und International VLBI Service for Geodesy and Astrometry (IVS), bereitgestellt. Die starke Verzahnung der drei GGOS-Eckpfeiler wird in der Ableitung eines konsistenten globalen geodätischen Bezugsrahmens deutlich.

Ein Koordinatensystem, dessen Lagerung und Orientierung durch den Massenmittelpunkt der Erde und die Erdrotationsachse definiert wird, stellt nach Heck (2003, S. 30) ein ideales Terrestrial Reference System (TRS) dar. Zur eindeutigen Festlegung eines kartesischen Koordinatensystems ist zusätzlich über den Maßstab der drei Koordinatensystemachsen zu verfügen. Die Realisierung eines so definierten TRS wird als Terrestrial Reference Frame (TRF) bezeichnet (Heck 2003, S. 29ff; Torge und Müller 2012, S. 39ff) und ergibt sich aus konkreten physischen Punkten auf der Erdoberfläche, den Referenzpunkten der geodätischen Raumverfahren (Seitz u. a. 2017). Für ein definiertes TRS können mehrere Realisierungen existieren, die sich u. a. in der Auswahl der Referenzpunkte, der Anzahl der Beobachtungen bzw. der berücksichtigten Zeitspanne sowie in der Art der Prozessierung unterscheiden.

Das International Terrestrial Reference System (ITRS) ist durch global verteilte Punkte auf der Erdoberfläche und unter Berücksichtigung linearer und nichtlinearer Variationen dieser Punkte (Geschwindigkeiten) realisiert und wird als International Terrestrial Reference Frame (ITRF) bezeichnet (z. B. Petit und Luzum 2010, S. 31ff; Métivier u. a. 2020). Der ITRF als globales erdfestes kartesisches Koordinatensystem ist die fundamentale Basis zur eindeutigen Georeferenzierung, zur Bestimmung von Satellitenorbits oder zum Detektieren von Verformungen der Erdkruste bzw. tektonischen Veränderungen. Der hohe Stellenwert und die Notwendigkeit eines solchen

globalen geodätischen Bezugssystems zur Beschreibung aller erdbezogenen Phänomene wird nicht zuletzt auch durch die 2015 verabschiedete Resolution „A global geodetic reference frame for sustainable development“ (A/RES/69/266) der Vereinten Nationen (UN) deutlich (United Nations 2015).

Die Ableitung eines erdfesten globalen geodätischen Bezugssystems wie den ITRF basiert auf der Kombination verschiedener vorprozessierter raumgeodätischer Beobachtungsverfahren. Hierunter zählen insbesondere die vier Raumverfahren

- Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite (DORIS),
- Global Navigation Satellite System (GNSS),
- Satellite Laser Ranging (SLR) bzw. Lunar Laser Ranging (LLR) und
- Very Long Baseline Interferometry (VLBI).

Jede dieser Techniken ist prinzipiell geeignet, einen technikspezifischen terrestrischen Referenzrahmen zu realisieren (Altamimi u. a. 2007). Der VLBI Terrestrial Reference Frame (VTRF) stellt bspw. einen Referenzrahmen dar, der ausschließlich auf der Basis von VLBI-Daten erzeugt wird (Bachmann u. a. 2016). Als Standardverfahren zur Realisierung des TRS hat sich eine Kombination aller vier Raumverfahren etabliert (Altamimi u. a. 2007). Neben der offiziellen Lösung, dem International Terrestrial Reference Frame (Altamimi u. a. 2016), stellt der International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) zusätzlich zwei unabhängig ermittelte Referenzrahmen zur Verfügung. Dies ist neben dem sogenannten DTRF, welches vom Deutschen Geodätischen Forschungsinstitut (DGFI) der Technischen Universität München bereitgestellt wird (Seitz u. a. 2012, 2016), der mittels Kalman-Filterung abgeleitete Referenzrahmen des Jet Propulsion Laboratory (JPL), welcher als JTRF bezeichnet wird (Abbondanza u. a. 2017).

Alle drei Realisierungen werden einheitlich durch Kombination der vier Raumverfahren bestimmt. Neben der Steigerung der Zuverlässigkeit können insbesondere durch die Kombination der Raumverfahren mögliche Schwächen der einzelnen Techniken abgefangen werden (Seitz u. a. 2017). Der sehr langen Zeitreihe und der hohen Sensitivität von bspw. VLBI-Beobachtungen für Erdrotationsparameter und den Netzmaßstab steht ein global schlecht verteiltes Stationsnetz gegenüber (Schuh und Behrend 2012). Abbildung 1.1 zeigt die globale Netzabdeckung des IGS², IDS³, ILRS⁴ bzw. IVS⁵ im ITRF2014. Während IGS- und IDS-Stationen weltweit eine gleichmäßig gute Verteilung aufweisen, konzentrieren sich die kosten- und wartungsintensiven Stationen des ILRS und des IVS vornehmlich auf der nördlichen Hemisphäre.

Die Kombination der vier Raumverfahren allein auf der Basis gemeinsamer Erdrotationsparameter, häufig als Global-Ties bezeichnet, ist nach Glaser u. a. (2017) nicht sinnvoll möglich. Zusatzinformationen, die eine geometrische Verknüpfung der

²http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF_solutions/2014/doc/ITRF2014_GNSS.SSC.txt

³http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF_solutions/2014/doc/ITRF2014_DORIS.SSC.txt

⁴http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF_solutions/2014/doc/ITRF2014_SLR.SSC.txt

⁵http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF_solutions/2014/doc/ITRF2014_VLBI.SSC.txt

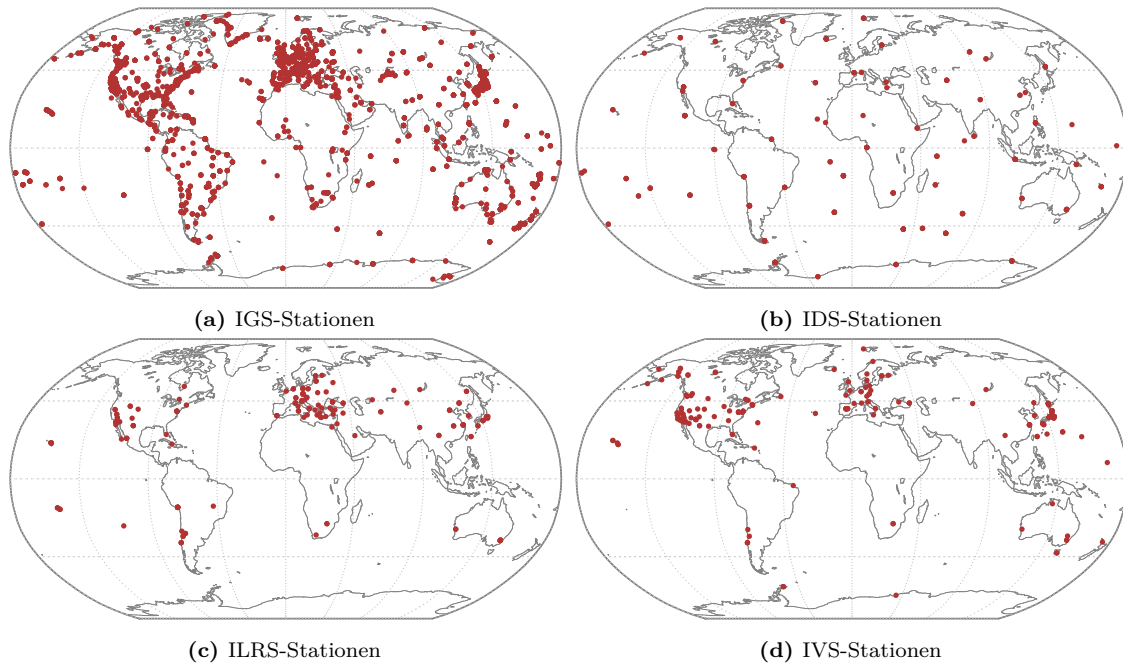


Abbildung 1.1: Globale Verteilung der berücksichtigten Stationen der vier geodätischen Raumverfahren im ITRF2014. Während das Stationsnetz des IGS (a) und des IDS (b) weltweit eine hohe Abdeckung und gleichmäßige Verteilung aufweist, befinden sich Stationen des ILRS (c) bzw. des IVS (d) vorrangig auf der nördlichen Hemisphäre.

vier Raumverfahren miteinander erlauben, sind daher zwingend erforderlich für die Inter-Technik-Kombination (Seitz u. a. 2012; Altamimi u. a. 2016; Abbondanza u. a. 2017).

Die Verknüpfung der unterschiedlichen Raumverfahren wird durch sogenannte Local-Ties realisiert. Hierbei handelt es sich um dreidimensionale geometrische Verbindungsvektoren, die zwischen den geometrischen Bezugspunkten von Raumverfahren definiert sind (Bergstrand u. a. 2014). Die Bestimmung der Local-Ties erfolgt hierbei durch lokale terrestrische Vermessung an Stationen, die mindestens zwei unterschiedliche Raumverfahren betreiben. Diese Stationen werden als Co-Location-Stationen oder auch Multi-Technik-Stationen bezeichnet (Altamimi 2005). Sie bieten weiterhin die Möglichkeit, die betriebenen Raumverfahren über gemeinsame Parameter der Erdatmosphäre, d. h. Atmospheric-Ties (Glaser u. a. 2020), sowie über ein einheitliches Zeitsystem, d. h. Clock-Ties (Kodet u. a. 2018), miteinander zu verbinden.

Während Local-Ties die dreidimensionale Verknüpfung zwischen den geometrischen Referenzpunkten der Raumverfahren auf der Erde abbilden, kann die Co-Location für bestimmte Techniken auch im All realisiert werden (Thaller u. a. 2011; Plank 2013). Bruni (2016) untersucht die Eignung dieser sogenannten Space-Ties zur Verknüpfung von SLR und GNSS für die Ableitung eines gemeinsamen terrestrischen Referenzrahmens und resümiert, dass die ausschließliche Verknüpfung durch Space-Ties gegenwärtig keine tragfähige Lösung bietet. Analog zu den Local-Ties spielen u. a. die Verfügbarkeit und die räumliche Verteilung eine wesentliche Rolle. Während die Ableitung der Local-Ties auf der Erde die Verfügbarkeit von

Co-Location-Stationen erfordert, setzt das Ableiten von Space-Ties zwischen bspw. SLR und GNSS Satelliten voraus, die für beide Techniken nutzbar sind. Auch wenn davon auszugehen ist, dass durch Projekte, wie z. B. Geodetic Reference Antenna in Space (GRASP) (Bar-Sever u. a. 2009), die Inter-Technik-Fähigkeit zukünftiger Satellitengenerationen steigen wird, werden Space-Ties gegenwärtig bei der Bestimmung des ITRF nicht berücksichtigt (Schuh u. a. 2015). Local-Ties werden auch zukünftig eine zentrale Schlüsselrolle in der Inter-Technik-Kombination besitzen, da ihre Bestimmung, Kontrolle und Überwachung an Co-Location-Stationen auf der Erde jederzeit durchführbar sind. Für multitechnikfähige Satelliten lassen sich hingegen etwaige Änderungen an den Bezugspunkten im Betrieb messtechnisch nicht mehr erfassen. Space-Ties stellen somit vielmehr eine Ergänzung zu den übrigen Ties, d. h. Atmospheric-Ties, Clock-Ties, Global-Ties und Local-Ties, dar und erlauben eine unabhängige Validierung dieser (Thaller u. a. 2011; Bruni 2016). Da viele Co-Location-Stationen GNSS als zweites Raumverfahren betreiben, erfolgt die Inter-Technik-Kombination der übrigen Raumverfahren weitgehend (implizit) über das IGS-Stationsnetz (Altamimi und Collilieux 2009). Space-Ties werden dazu beitragen, diese hohe GNSS-Abhängigkeit zu reduzieren, aber auch ungenaue oder fehlerbehaftete Local-Ties zu detektieren. Schuh u. a. (2017) identifizieren Local-Ties als Schlüsselkomponente bei der Inter-Technik-Kombination, da diese die verschiedenen Raumverfahren an Co-Location-Stationen zu einem gemeinsamen integrierten Erdsystemsensoren verknüpfen. Eine genaue Bestimmung wird somit auch zukünftig unabdingbar sein.

1.2 Referenzpunkte und Local-Ties

Die lokalen Verbindungsvektoren zwischen den geometrischen Referenzpunkten spielen eine wesentliche Rolle bei der Verknüpfung der vier Raumverfahren und der Ableitung eines einheitlichen Referenzrahmens (Altamimi 2005; Altamimi u. a. 2011, 2016). Entscheidend ist hierbei neben der Aktualität auch die Genauigkeit der verfügbaren Local-Ties. So lagen für die Bestimmung des ITRF2005 nur für 45 % der verwendeten Local-Ties vollständige Varianz-Kovarianz-Informationen vor (Altamimi u. a. 2007). Diese Anzahl konnte auf 63 % gesteigert werden für den ITRF2008 (Altamimi u. a. 2011). Für den ITRF2014 wiesen 80 % der verwendeten Local-Ties vollständige Varianz-Kovarianz-Informationen auf (Altamimi u. a. 2016). Hierbei handelt es sich zunächst jedoch nur um einen quantitativen Anstieg. Um die Qualität der Local-Ties zu bewerten, analysieren Altamimi u. a. (2012, 2017) die Diskrepanzen zwischen der lokalen Lösung und den globalen Ergebnissen. Für den ITRF2014 zeigt sich hierbei, dass lediglich für 42 %, 29 % bzw. 23 % der Local-Ties, die zwischen GNSS und VLBI, SLR bzw. DORIS vorliegen, die Diskrepanzen < 5 mm sind. Local-Ties stellen somit eine kritische Komponente im Kombinationsprozess dar, da sich Abweichungen in den lokal bestimmten Vektoren in den globalen Resultaten fortpflanzen.

Mittels Simulationen untersuchen Glaser u. a. (2019) den Einfluss von Local-Ties auf das resultierende TRF-Datum. Die Autoren zeigen, dass ungenaue und fehlerbehaftete Local-Ties die Lage und Orientierung des Referenzrahmens verzerren können. Insbesondere durch die in Abbildung 1.1 dargestellte ungleichmäßige Verteilung von ILRS- und IVS-Stationen auf der Erde können bereits wenige ungenaue bzw. fehlerbehaftete Local-Ties einen Hebeleffekt hervorrufen und das TRF-Datum verzerren. Die Autoren empfehlen eine Genauigkeit für die Local-Ties von mindestens 1 mm.

Das Erreichen der durch das GGOS angestrebten globalen Genauigkeiten hängt maßgeblich von der räumlichen Verteilung der einzelnen Stationen innerhalb des Stationsnetzes ab. Kosten- und wartungsintensivere Raumverfahren wie VLBI oder SLR/LLR sind vorrangig auf der nördlichen Hemisphäre zu finden, wohingegen wartungsärmere IGS-Stationen über den gesamten Erdball verteilt sind, siehe Abbildung 1.1. IGS-Stationen besitzen daher einen dominanten Anteil am ITRF. An den meisten Co-Location-Stationen ist GNSS als weiteres Raumverfahren vorhanden, sodass GNSS auch zur Verknüpfung der unterschiedlichen Raumverfahren eine zentrale Rolle besitzt (Altamimi u. a. 2016). Mögliche systematische Abweichungen im IGS-Stationsnetz können aufgrund fehlender direkter Verknüpfungen der übrigen Raumverfahren die resultierenden Datumparameter des TRF verzerren, insbesondere den Ursprung und den Netzmaßstab, welche durch SLR- und VLBI-Messungen realisiert werden (Altamimi und Collilieux 2009).

Durch Netzsimulationen identifizieren Schuh u. a. (2015) und Glaser u. a. (2017) geeignete Standorte für zusätzliche Co-Location-Stationen, welche diese einseitige Abhängigkeit reduzieren würde. Weiterhin weisen Glaser u. a. (2020) auf die besondere Bedeutung von Stationen in infrastrukturschwachen Regionen wie bspw. Südamerika hin, die einen signifikanten Einfluss auf die Zuverlässigkeit der geschätzten Erdrotationsparameter besitzen.

Das GGOS regt eine permanente und weitgehend automatisierte Bestimmung von Local-Ties mit einer Genauigkeit von mindestens 1 mm an (Rothacher u. a. 2009). Identische Anforderungen finden sich auch in den Zielsetzungen der Agenda VLBI2010, die den VLBI-Netzausbau im Hinblick auf die Anforderungen des GGOS definiert (Niell u. a. 2006). Die Realisierung von VLBI2010 wird auch als VLBI2010 Global Observing System (VGOS) bezeichnet (Hase u. a. 2012). Die Ableitung eines Local-Ties erfordert die Bestimmung der geometrischen Referenzpunkte von zwei Raumverfahren durch lokale terrestrische Vermessung an einer Co-Location-Station. Während für DORIS- und GNSS-Antennen der geometrische Bezugspunkt vergleichsweise einfach bestimmt werden kann (Lösler 2009a; Poyard 2017; Mähler u. a. 2018), ist die Ableitung des geometrischen Referenzpunktes von SLR/LLR- und VLBI-Teleskopen herausfordernd. Beide Teleskope besitzen zwei rotierende Achsen: eine primäre und eine sekundäre Drehachse. Der geometrische Referenzpunkt ist hierbei als Schnittpunkt beider Achsen definiert. Schneiden sich beide Achsen konstruktionsbedingt nicht, so ist der Referenzpunkt der Punkt der Primärachse, der den kürzesten Abstand zur sekundären Achse besitzt (Dawson u. a. 2006). Der so definierte Referenzpunkt ist ortsinvariant bzgl. Drehungen des Teleskops und wird

häufig auch als invarianter Referenzpunkt (IRP) bezeichnet.

Abbildung 1.2 zeigt schematisch den Aufbau und das Messprinzip eines SLR-Teleskops. Das SLR-Teleskop sendet Laserimpulse zu einem mit Retroreflektoren bestückten Satelliten. Das vom Satelliten reflektierte Signal wird wiederum vom Laserteleskop empfangen und die Laufzeit Δt registriert. Der zurückgelegte Weg eines Laserimpulses entspricht hierbei der doppelten Entfernung zwischen dem beobachteten Satelliten und dem SLR-Teleskop, sodass sich die Distanz entsprechend dem Impulsmessverfahren aus

$$d = \frac{\Delta t}{2} c_0$$

ergibt, wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit darstellt. Für eine präzise Distanzmessung sind zusätzliche Korrekturterme zur Kompensation von bspw. atmosphärischen Laufzeitverzögerungen oder möglichen Exzentrizitäten, wie bspw. ein Achsenoffset, zu berücksichtigen (Seitz 2009, S. 34ff).

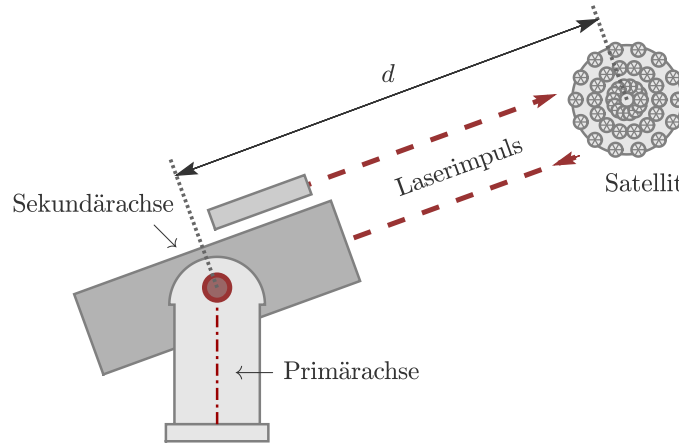


Abbildung 1.2: Schematischer Aufbau und Messprinzip eines SLR-Teleskops. Das um zwei Achsen drehbar gelagerte Laserteleskop leitet die Distanz d zu einem Satelliten mit Retroreflektoren aus einer Laufzeitmessung Δt mittels der Lichtgeschwindigkeit ab. Δt ist hierbei die Zeit, die ein ausgesandter Laserimpuls für die doppelte Entfernung zwischen Teleskop und Satellit benötigt.

Die VLBI setzt eine simultane Beobachtung von mindestens zwei Radioteleskopen zu einer weit entfernten punktförmigen Radioquelle, einem sogenannten Quasar⁶, voraus. Aufgrund der großen Entfernung zwischen der beobachteten Radioquelle und der Erde können die eintreffenden Wellenfronten als parallel angenommen werden, wie Abbildung 1.3 schematisch zeigt. Bedingt durch die räumliche Position der VLBI-Radioteleskope, dargestellt durch den Basislinienvektor $\mathbf{b}$, und der Ausbreitungsrichtung $-\mathbf{k}$ der Radiowellen empfangen die VLBI-Radioteleskope diese nicht zeitgleich, wodurch ein Laufzeitunterschied

$$\tau = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{k}}{c_0}$$

resultiert. Die beobachtete Größe in der VLBI entspricht somit τ , welche multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit c_0 eine metrische Größe ergibt. Für eine präzise

⁶Engl. Quasi-Stellar Radio Source.

Bestimmung von τ sind zusätzliche Korrekturterme zur Kompensation von bspw. Uhrfehlern an den Stationen, atmosphärischen Laufzeitverzögerungen oder möglichen Exzentrizitäten, wie bspw. ein Achsenoffset, zu berücksichtigen (Seitz 2009, S. 22ff).

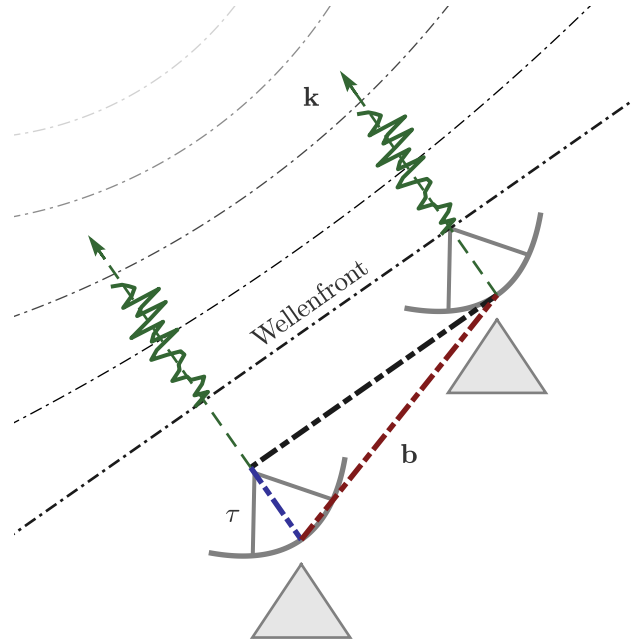


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung des Messprinzips von VLBI-Radioteleskopen. Zwei Radioteleskope empfangen das emittierte Radiosignal (grün) eines Quasars, welches aufgrund der Entfernung zwischen Radioquelle und Erde parallel auf der Erde eintrifft. Registriert wird der Laufzeitunterschied τ (blau), welcher durch die räumliche Position der Radioteleskope, d. h. den Basislinienvektor b (rot), und der Ausbreitungsrichtung $-k$ hervorgerufen wird.

Für VLBI-Radioteleskope sind drei Montierungsarten gebräuchlich, die in Abbildung 1.4 schematisch dargestellt sind. Diese können sinngemäß auch auf die Laserteleskope übertragen werden, sodass eine separate Betrachtung entfallen kann. Am verbreitetsten sind Radioteleskope mit Azimut-Elevation-Montierung. Diese bestehen aus einer ortsinvarianten Primärachse, der Azimutachse, und einer mitdrehenden Sekundärachse, der Elevationsachse. Ist die Primärachse hingegen parallel zur Erdrotationsachse, so handelt es sich um eine Polar- bzw. Äquatorialmontierung. Die Primärachse entspricht der Polarachse, und die Sekundärachse ist die Deklinationsachse. Die ortsinvariante X-Achse der XY-Montierung liegt in der lokalen Horizontalebene und ist in Nord-Süd- bzw. Ost-West-Richtung orientiert. Die mitdrehende Sekundärachse ist die Y-Achse.

Die Azimut-Elevation-Montierung ist weit verbreitet und die bevorzugte Montierung für die neue Generation von VGOS-Radioteleskopen (Petrachenko u. a. 2009, S. 24). Ein wesentlicher Vorteil dieser Montierung ist, dass die Primärachse vertikal steht und hierdurch weitgehend unempfindlich gegenüber gravitativen Kräften ist und somit strukturelle Deformationen nicht zu erwarten sind. Aufgrund der Ähnlichkeit zwischen allen Montierungen werden in dieser Arbeit stellvertretend die Azimut-Elevation-Teleskope fokussiert. Eine sinnngemäße Übertragung auf eine andere Montierung ist jedoch problemlos möglich.

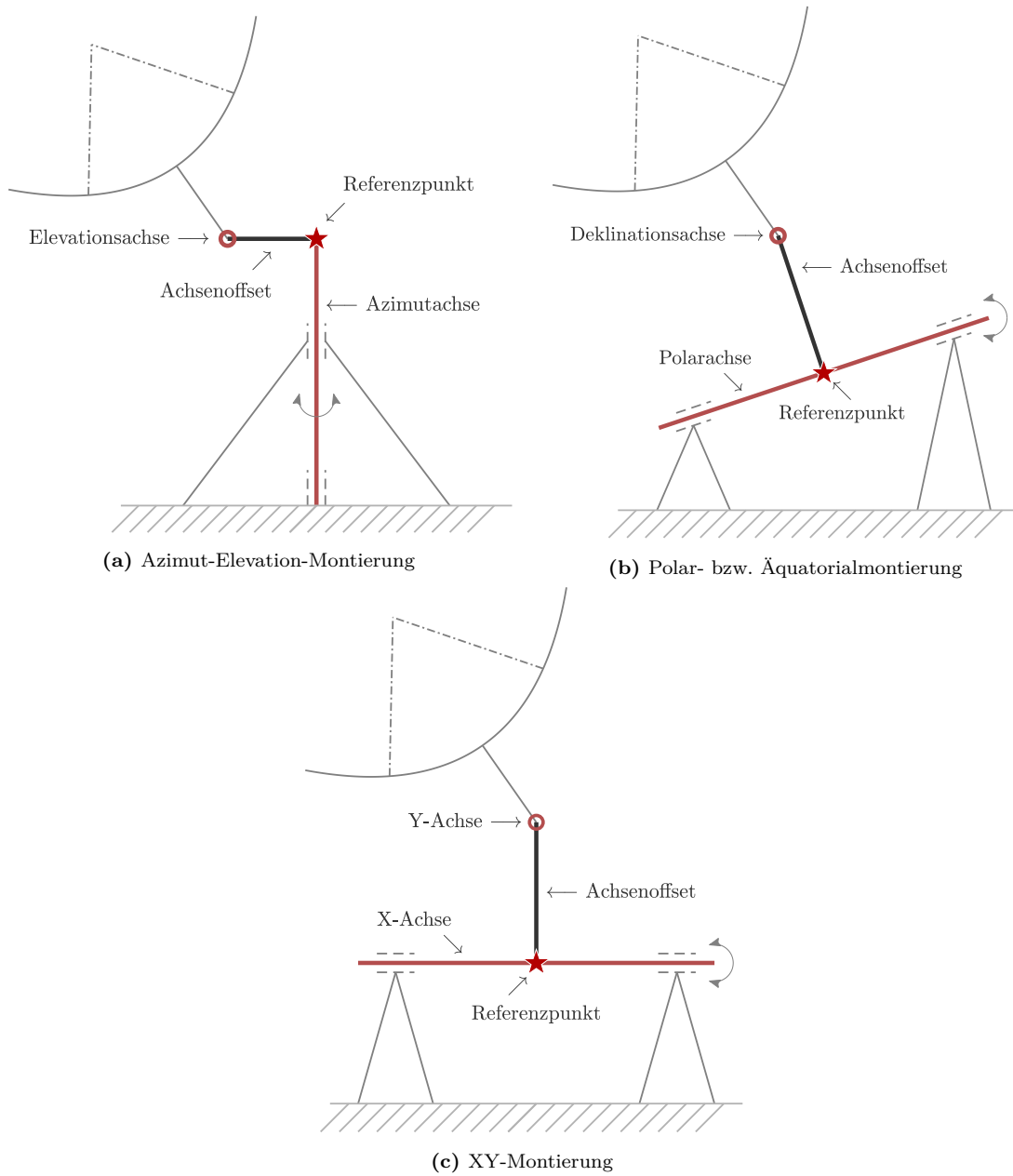


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung von Montierungsarten für Radioteleskope. Jede Montierung besteht aus einer primären und einer sekundären Achse, deren Schnittpunkt der geometrische Referenzpunkt ist. Schneiden sich beide Achsen konstruktionsbedingt nicht, so existiert ein Achsenoffset, und der geometrische Referenzpunkt resultiert aus der orthogonalen Projektion der Sekundärachse auf die Primärachse. Die Primär- und Sekundärachse der Azimut-Elevation-Montierung (a) entsprechen der Azimut- bzw. Elevationsachse. Die Primär- und Sekundärachse der Polar- bzw. Äquatorialmontierung (b) entsprechen der Polar- bzw. Deklinationsachse. Die Primär- und Sekundärachse der XY-Montierung (c) entsprechen der X bzw. Y-Achse. Darstellung in Anlehnung an Nothnagel u. a. (1995) und Haas u. a. (1999).

1.3 Deformationen von VLBI-Radioteleskopen

Neben der Verfügbarkeit qualitativ hochwertiger Local-Ties zur geometrischen Verknüpfung der Raumverfahren hängt die Zuverlässigkeit der Inter-Technik-Kombination von der Datenqualität der einzelnen Raumverfahren ab. Insbesondere VLBI-Radioteleskope sind große technische Anlagen, die unterschiedlichen genauigkeitslimitierenden Einflüssen wie Temperatur, Wind oder lastfallabhängigen Deformationen unterliegen (Kaercher u. a. 2010). Abweichungen von der idealen Teleskopgeometrie können abgeleitete Resultate wie Stationskoordinaten und Erdrotationsparameter systematisch verzerren. So rufen bspw. Temperaturschwankungen thermoelastische Veränderungen in der Teleskopstruktur hervor (Nothnagel u. a. 1995; Haas u. a. 1999). Eindimensionale Messeinrichtungen, die die Höhenvariationen von Radioteleskopen direkt erfassen, sind nur an wenigen Stationen vorhanden, bspw. am Onsala 20 m Radioteleskop (Johannson u. a. 1996) oder am 20 m Radioteleskop Wettzell (Zernecke 1999). Die jährlichen Variationen der Außentemperatur betragen für die Station in Wettzell -20°C bis 30°C . Ähnliche Außentemperaturen werden auch für die Station in Onsala erreicht. Das 20 m Radioteleskop wird hier jedoch durch ein beheizbares Radom geschützt, sodass der effektive Temperaturbereich kleiner ist (Wresnik u. a. 2006). Automatische Messungen der Höhenänderungen mittels Invardraht bzw. -stab weisen Variationen von mehreren Millimetern auf, die auf Temperaturänderungen im Monument zurückzuführen sind (Wresnik u. a. 2006; Bergstrand u. a. 2018).

Die Installation von Messsensoren zur vollständigen Erfassung der Höhenvariationen ist in Abhängigkeit der Teleskopkonstruktion schwierig, da sich die Sekundärachse bzw. der geometrische Referenzpunkt mitunter in einem mitdrehenden Konstruktionselement des Teleskops befindet. Hierdurch ist eine direkte Erfassung der vollständigen Ausdehnung nicht möglich. Alternativ zur direkten Erfassung der Höhenänderung bieten sich im Monument integrierte Temperatursensoren an (Johannson u. a. 1996; Zernecke 1999). Unter Berücksichtigung des materialspezifischen Ausdehnungskoeffizienten können diese Temperaturdaten in korrespondierende Längenänderungen umgerechnet und bei der Auswertung berücksichtigt werden (Mähler u. a. 2018).

In der Analyse von VLBI-Daten werden temperaturbedingte Höhenvariationen entsprechend den IVS-Konventionen berücksichtigt, wobei für Radioteleskope, die keine integrierten Sensoren zur direkten Erfassung der Längenausdehnung besitzen, die lokal erfasste Außentemperatur unter Berücksichtigung einer materialabhängigen Latenzzeit auf das Monument übertragen wird (Haas u. a. 1999; Nothnagel 2008). Die Prädiktion der Außentemperatur auf die Monumenttemperatur ist aufgrund von beheizbaren bzw. klimatisierten Teleskoptürmen oder Radomen mit Unsicherheiten behaftet. Sie stellt daher lediglich eine Näherung dar und kann eine direkte Erfassung nicht gleichwertig ersetzen (Wresnik u. a. 2006; Nothnagel 2008). Des Weiteren berücksichtigen die IVS-Konventionen gegenwärtig nur Variationen in der vertikalen Koordinatenkomponente. Tageszeitliche und saisonale Variationen sind jedoch auch für die beiden horizontalen Koordinatenkomponenten des Referenzpunktes zu erwar-

ten. Die hierfür nötige räumliche Überwachung der Referenzpunktposition ist jedoch aufwendiger und erfordert andere Messsensoren.

Tageszeitliche Positionsvariationen des Teleskopturms sind hauptsächlich auf eine inhomogene Erwärmung durch die Sonne zurückzuführen und können durch Permanentmessungen mit Totalstationen detektiert werden (Haas und Bergstrand 2010; Lösler u. a. 2010). Für das 20 m Radioteleskop Wettzell konnten über einen Zeitraum von drei Monaten horizontale Positionsänderungen von bis zu 0,2 mm für den Teleskopturm festgestellt werden (Lösler u. a. 2010). Dreidimensionale saisonale Veränderungen der Referenzpunktposition wurden erstmals für das Twin-Radioteleskop-Projekt in Wettzell dokumentiert (Mähler u. a. 2018). In einem Zeitraum von über drei Jahren wurden ca. 30 automatisierte Referenzpunktbestimmungen mit dem in Kapitel 4 vorgeschlagenen mathematischen Modell unter Verwendung einer Totalstation durchgeführt. Während die Amplitude der vertikalen Koordinatenkomponente von ca. 0,8 mm eindeutig auf Temperaturschwankungen zurückzuführen ist, bleibt die Ursache für die detektierte Amplitude der horizontalen Komponenten von etwa 0,2 mm weitgehend ungeklärt (Mähler u. a. 2018). Rekapituliert man das durch GGOS angeregte Genauigkeitsziel von unter 1 mm für die geometrische Referenzpunktposition, so können saisonale und tageszeitliche Variationen zukünftig nicht unberücksichtigt bleiben.

Neben Variationen in der Teleskopstruktur, die die Position des Referenzpunktes direkt beeinflussen, sind mögliche Änderungen an der Sensorik der Instrumente bei der Datenanalyse zu berücksichtigen. Insbesondere der Hauptreflektor von VLBI-Radioteleskopen, der die Empfangseigenschaften des Teleskops maßgeblich definiert, unterliegt variierenden Krafteinwirkungen. Neben Temperatur, Wind- oder Schneelast deformiert das Eigengewicht den Hauptreflektor in Abhängigkeit des Sekundärwinkels durch Lastfalländerungen. Untersuchungen an konventionellen Radioteleskopen mittels Laserscannern dokumentieren für Azimut-Elevation-Teleskope elevationsabhängige Brennweitenänderungen von mehreren Millimetern bis in den Zentimeterbereich. Sarti u. a. (2009a) weisen für das 32 m Radioteleskop in Medicina (Italien) Variationen in der Brennweite von mehr als 35 mm nach. Für das 100 m Radioteleskop in Effelsberg (Deutschland) detektieren Holst u. a. (2012) Deformationen von bis zu 13 mm. Bergstrand u. a. (2018) ermitteln für das 20 m Radioteleskop in Onsala (Schweden) Variationen in der Brennweite von bis zu 20 mm.

Weiterhin zeigen die bisherigen Untersuchungen, dass jedes Radioteleskop ein spezifisches Deformationsverhalten aufweist. Eine Übertragung auf andere Radioteleskope ist daher nicht möglich, sodass für jedes Radioteleskop oder zumindest für jeden Typ das spezifische Deformationsverhalten zu ermitteln ist (Gipson 2019). Zusätzlich werden diese Variationen in der Brennweite von Verschiebungen des Subreflektors bzw. Empfängers sowie des Scheitelpunktes überlagert. Aus den akkumulierten Deformationen resultieren in systematischen Abweichungen in der Signallaufänge (Clark und Thomsen 1988) und führen unberücksichtigt zu einer systematischen Verfälschung in der Basislinie bzw. in den korrespondierenden Stationskoordinaten, wie Abbildung 1.5 schematisch zeigt. Systematische Abweichungen in den abgeleiteten Stationskoordina-

ten – insbesondere in den vertikalen Koordinatenkomponenten – verzerren u. U. den aus VLBI-Beobachtungen resultierenden Netzmaßstab des TRF (Sarti u. a. 2010). Eine Berücksichtigung dieser Signalwegvariationen von VLBI-Radioteleskopen bei der Realisierung eines TRS erfolgte aufgrund fehlender Korrekturmodelle bisher nicht und ist erstmals für den ITRF2020 vorgesehen (Altamimi u. a. 2018).

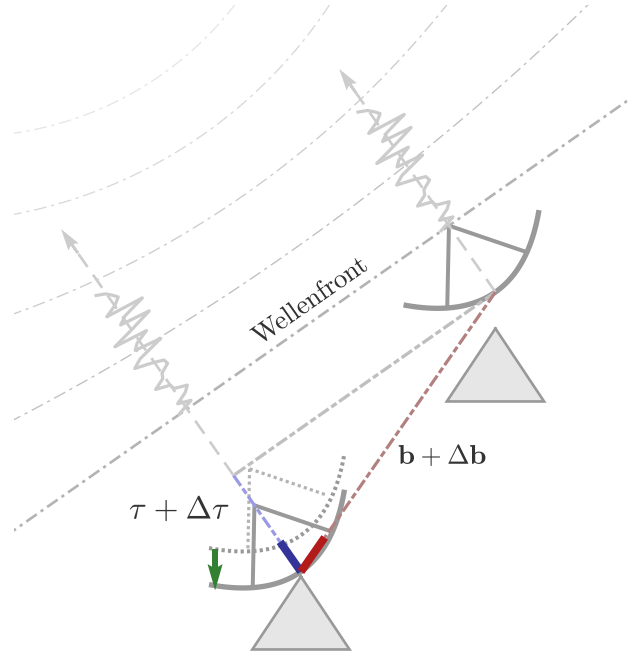


Abbildung 1.5: Schematische Darstellung der resultierenden Signallaufzeitenänderung $\Delta\tau$ infolge von Deformationen am Reflektor eines VLBI-Radioteleskops. Der undeformierte Reflektor ist grau gestrichelt dargestellt. Der registrierte Laufzeitunterschied τ ist als hellblaue Strichpunktlinie dargestellt und wird aufgrund der Deformation des Reflektors (grüner Pfeil) um $\Delta\tau$ (blau) verfälscht. Die resultierende Signallaufzeitenänderung führt uncompensiert zu einer systematischen Abweichung $\Delta\mathbf{b}$ (rot) in der Basislinie $\mathbf{b}$, die als hellrote Strichpunktlinie dargestellt ist.

Konventionelle Radioteleskope besitzen üblicherweise einen Hauptreflektor, dessen ideale geometrische Form durch ein gewöhnliches rotationssymmetrisches Paraboloid beschrieben wird. Bedingt durch Konstruktionselemente in der Nähe des Brennpunktes wird jedoch ein Teil des Hauptreflektors verschattet, sodass nicht das vollständige Signal den Empfänger erreicht. Je kompakter der Hauptreflektor ist, desto größer sind die resultierenden Intensitätsverluste (Cutler 1947). VGOS-spezifizierte Radioteleskope zeichnen sich durch hohe Drehgeschwindigkeiten und eine kompakte Bauweise mit einem Hauptreflektordurchmesser von ca. 12 m aus (Petrachenko u. a. 2009). Um unerwünschte Verschattungen des Hauptreflektors zu minimieren, besitzen die meisten VGOS-spezifizierten Radioteleskope kein gewöhnliches Rotationsparaboloid, sondern nutzen ein sogenanntes Ring-Fokus-Paraboloid (Neidhardt u. a. 2011; Haas 2013; Gómez-González u. a. 2014). Hierbei handelt es sich um eine Kombination zweier Flächen 2. Ordnung, bei welcher die Symmetrieachse des Paraboloids durch einen Zylinder ersetzt wird. Konstruktionselemente, die sich innerhalb des Zylinders befinden, beeinträchtigen den Signalweg nicht (Lösler u. a. 2017, 2018b).

1.4 Motivation und Zielsetzung

Das GGOS strebt weltweit für die Stationskoordinaten eine Positionsgenauigkeit von 1 mm im globalen geodätischen Referenzrahmen an. Die zeitliche Stabilität dieser Positionen sollte $0,1 \text{ mm a}^{-1}$ aufweisen. Der Netzmaßstab und dessen zeitliche Variation sollten $0,1 \text{ ppb}$ bzw. $0,01 \text{ ppb a}^{-1}$ nicht überschreiten (Plag u. a. 2009a; Gross u. a. 2009). Um diese Zielsetzung zu erreichen, müssen neben technischen Neuerungen und dem Ausbau bestehender geodätischer Infrastrukturen vor allem auch systematische Abweichungen im Mess- und Analyseprozess identifiziert und quantifiziert werden. Geeignete Konfigurationen oder Korrekturmodelle sind zu entwickeln, mit denen diese systematischen Abweichungen sowohl auf lokaler als auch auf globaler Ebene erfolgreich in der Datenanalyse reduziert bzw. korrigiert werden können. Hierbei ergeben sich durch die gesteigerten Genauigkeitsanforderungen des GGOS neue messtechnische, aber auch analytische Herausforderungen in der Ingenieurgeodäsie und Messtechnik. Die Bestimmung eines globalen geodätischen Referenzrahmens wie des ITRF erfolgt durch die Kombination der geodätischen Raumverfahren und erfordert repräsentative Local-Ties. Weiterhin werden bei der Realisierung des ITRF2020 erstmals gravitative Deformationen von Radioteleskopen berücksichtigt (Altamimi u. a. 2018). Die messtechnische Herausforderung für Co-Location-Stationen besteht darin, fehlende Local-Ties zu bestimmen und die Gültigkeit bestehender Local-Ties zu validieren. Weiterhin ist für möglichst viele Radioteleskope das lastfallabhängige Deformationsverhalten des Haupt- und ggf. Subreflektors zu studieren, um resultierende Signalwegänderungen zu modellieren.

Ziel dieser Arbeit ist es, funktionale Modelle bereitzustellen, die es Betreibern von Co-Location-Stationen ermöglicht, den geometrischen Referenzpunkt von SLR/LLR- bzw. VLBI-Teleskopen selbstständig und prozessbegleitend zu ermitteln bzw. zu validieren. Weiterhin werden geometrische Modelle zur Beschreibung des Haupt- und Subreflektors hergeleitet, die für viele konventionelle, aber auch für die meisten VGOS-spezifizierten Radioteleskope geeignet sind, um lastfallabhängige Deformationen zu modellieren, sodass teleskopspezifische Modelle zur Korrektur der resultierenden Signalwegänderungen entwickelt werden können.

Die Parameterschätzung ist hierbei wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit und ermöglicht die Bestimmung des geometrischen Referenzpunktes sowie das Ableiten der formbeschreibenden Parameter des Hauptreflektors aus erhobenen Beobachtungen. Unter Beobachtungen sind hierbei vorrangig kartesische Koordinaten zu verstehen, die mit einem geeigneten Messverfahren zu erheben sind oder aus einer Vorprozessierung gewonnen werden. Die hierbei auftretenden funktionalen Zusammenhänge sind i. A. nichtlinear. Werden diese nichtlinearen Zusammenhänge mit einem direkten oder iterativen Verfahren gelöst, aber die statistischen Eigenschaften aus einem linearen Ersatzproblem abgeleitet, so können diese Eigenschaften i. A. nicht auf das zugrunde liegende nichtlineare Problem übertragen werden (Neitzel 2004a, S. 20). Die lineare Lösung ist gegenüber der nichtlinearen Lösung verzerrt. So besitzt bspw. die lineare Eigenschaft des Erwartungswertes $E\{\mathbf{f}(\mathbf{I})\} = \mathbf{f}(E\{\mathbf{I}\})$ im nichtlinearen Modell

i. d. R. keine Gültigkeit (Carlton und Devore 2017, S. 87).

In Kapitel 2 werden zunächst für nichtredundante Modelle bzw. Minimalkonfigurationen drei Methoden vorgestellt, die eine geringere Verzerrung (Bias) der Schätzung gegenüber dem linearen Ersatzproblem, der Taylorreihe mit Gliedern 1. Ordnung (TS1), aufweisen. Dies sind, neben der in Abschnitt 2.2 vorgestellten Monte-Carlo-Methode (MCM), die in Abschnitt 2.3 beschriebene Unscented Transformation (UT) sowie die Darstellung der nichtlinearen Funktion durch ihre Taylorreihe mit Gliedern 2. Ordnung (TS2) in Abschnitt 2.1.

Das Lösen von überbestimmten bzw. redundanten Gleichungssystemen erfolgt allgemein iterativ. Eines der wichtigsten Verfahren in der numerischen Optimierung ist hierbei die Sequentielle Quadratische Programmierung (SQP), die in Abschnitt 3.1 eingeführt wird. Eine Übertragung auf die in der Geodäsie üblicherweise angewandten Modelle, d. h. die bedingte Ausgleichung, das Gauß-Helmert-Modell (GHM) sowie das Gauß-Markov-Modell (GMM), findet in Abschnitt 3.2 statt. Die statistischen Eigenschaften der Schätzung werden, unabhängig vom angewendeten Optimierungsverfahren, wiederum aus einem linearen Ersatzproblem abgeleitet. Eine Übertragung der in Kapitel 2 vorgestellten Verfahren für nichtredundante Modelle auf den überbestimmten Fall erfolgt in Abschnitt 3.3.

Kapitel 4 widmet sich geeigneten Modellen zur Bestimmung des geometrischen Referenzpunktes. Zunächst werden in Abschnitt 4.1.1 bestehende geometrische Methoden zur Bestimmung des Referenzpunktes vorgestellt. Hierbei zeigt sich, dass diese bestehenden geometrischen Methoden entweder auf eine bestimmte Teleskopkonstruktion beschränkt sind oder ein spezielles Messkonzept erfordern, welches ein gezieltes Verfahren des Teleskops voraussetzt. Um diese Einschränkungen zu umgehen, wird in Abschnitt 4.1.2 eine neue Methode entwickelt und den bisherigen Ansätzen gegenübergestellt. Zur Schätzung der Modellparameter werden für diese entwickelte Methode zwei Lösungsverfahren vorgeschlagen. Das in Abschnitt 4.1.2 hergeleitete Modell erlaubt eine prozessintegrierte kontinuierliche Referenzpunktbestimmung von SLR/LLR- und VLBI-Teleskopen, wie es das GGOS anregt. Hierdurch wird es möglich, den Referenzpunkt dieser Teleskope zu überwachen und deren Aktualität und Zuverlässigkeit zu steigern. Weiterhin reduziert diese in-situ Referenzpunktbestimmung die Ausfallzeiten der Teleskope, da keine Zeitfenster für die lokalen Messungen bereitzustellen sind.

Kapitel 5 widmet sich der geometrischen Beschreibung des Haupt- und Subreflektors an VLBI-Radioteleskopen. Hierzu wird zunächst in Abschnitt 5.1 das Modell eines allgemeinen elliptischen Paraboloids als Fläche 2. Ordnung beschrieben. In Abschnitt 5.2 wird anschließend ein implizites funktionales Modell zur Parametrierung eines doppelelliptischen Ring-Fokus-Paraboloids hergeleitet. Es zeigt sich, dass dieses Modell eine Verallgemeinerung der idealisierten rotationssymmetrischen Hauptreflektorgeometrie darstellt, welche von den meisten VLBI-Radioteleskopen verwendet wird. Es ist somit sowohl auf viele konventionelle Radioteleskope als auch auf die meisten VGOS-spezifizierten Radioteleskope anwendbar. Um den vollständigen Signalweg

von Sekundär-Fokus-Radioteleskopen zu beschreiben, ist neben der Form des Hauptreflektors auch die geometrische Beschreibung des Subreflektors erforderlich. Hierfür werden in Abschnitt 5.3 zugehörige Gleichungen angegeben, sodass die geometrischen Variationen des Signalweges modellierbar werden. Analog zum hergeleiteten geometrischen Modell des Hauptreflektors zeigt sich, dass auch die Modelle zur Beschreibung der Subreflektorgeometrie eines VGOS-spezifizierten Radioteleskops durch geeignete Vereinfachungen auf die meisten konventionellen VLBI-Radioteleskope anwendbar sind. Im Ergebnis dieser Arbeit liegen somit universelle Modelle zur Beschreibung des Haupt- und Subreflektors vor, die eine Modellierung des geometrischen Signalweges der meisten Radioteleskope erlauben.

Sowohl das in Kapitel 4 hergeleitete funktionale Modell zur Bestimmung des geometrischen Referenzpunktes an Teleskopen als auch das in Kapitel 5 erstellte Modell zur geometrischen Parametrierung eines Ring-Fokus-Paraboloids ist nichtlinear. Werden diese Modelle mittels TS1 gelöst, so sind die resultierenden Schätzwerte nicht erwartungstreu. Die Größe des Bias hängt sowohl vom stochastischen Modell als auch von der Mess- und Aufnahmekonfiguration ab. Mittels der Methoden aus Kapitel 2 bzw. Abschnitt 3.3 erfolgt eine Abschätzung der möglichen Verzerrung der resultierenden Referenzpunktposition in Abschnitt 4.2 bzw. der Formparameter des Ring-Fokus-Paraboloids in Abschnitt 5.4. Kapitel 6 fasst die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und diskutiert mögliche Fortführungen.

In dieser Arbeit wird stets davon ausgegangen, dass geeignete Messverfahren zur Datenerhebung existieren, problembezogen ausgewählt und sachgerecht eingesetzt werden. In der einschlägigen Fachliteratur dokumentierte Messmittel zur Referenzpunktbestimmung und zum Erfassen der Signalwegänderungen von VLBI-Radioteleskopen werden genannt. Eine Untersuchung von potenziellen Messmitteln erfolgt jedoch nicht, sodass keine Empfehlung gegeben wird. Genauigkeitsanforderungen und Messvolumen, aber auch der benötigte Messmodus (statisch bzw. dynamisch) und das Messverfahren (Einzelpunkt- bzw. Mehrpunktverfahren) sind hierbei i. A. zu berücksichtigen. Da der sachgerechte Einsatz von Messmitteln eine realistische Abschätzung auftretender Messunsicherheiten impliziert, wird das stochastische Modell stets als bekannt und zutreffend vorausgesetzt. Die benutzte Terminologie ist daher an den GUM, den Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen (JCGM100 2008), angelehnt.

2. Erwartungswert und Dispersion nichtlinearer Funktionen

Das Abschätzen von Messunsicherheiten und deren Transformation auf die gewünschten Zielgrößen spielt eine zentrale Rolle in den messenden Disziplinen und erlaubt die sachgerechte Analyse und Qualitätsbeurteilung der ermittelten Ergebnisse. Die repräsentative Abschätzung der einzelnen Unsicherheiten und ggf. deren Abhängigkeiten untereinander sind ebenso herausfordernd wie das Formulieren eines geeigneten funktionalen Zusammenhangs. Ein vollumfängliches stochastisches Modell führt u. U. zu einem speichertechnischen Problem, sodass i. d. R. ein Kompromiss zwischen dem tatsächlichen Nutzen und den verfügbaren Ressourcen geschlossen werden muss. In der Formanalyse wird häufig von unabhängigen und gleichgenauen Beobachtungsreihen ausgegangen, aber auch in der geodätischen Netzausgleichung werden i. A. Abhängigkeiten zwischen den Beobachtungen vernachlässigt.

Die im stochastischen Modell zu spezifizierende Messunsicherheit einer Zufallsvariable setzt sich i. A. aus einer Vielzahl von Komponenten zusammen, die unterschiedlich auf den Messprozess wirken. Eine Definition der Messunsicherheit findet sich im Internationalen Wörterbuch der Messtechnik (JCGM200 2012, S. 25; Brinkmann 2012, S. 39):

„Die Messunsicherheit ist ein nicht negativer Parameter, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die der Messgröße auf der Grundlage der benutzten Informationen beigeordnet ist.“

Hierbei schließt die Messunsicherheit sowohl systematische als auch zufällig wirkende Effekte ein. Auch wenn der Einfluss systematischer Messabweichungen durch eine geeignete Messanordnung, durch Kalibrierung der eingesetzten Messmittel oder durch das Erweitern des funktionalen Modells um zusätzliche Korrekturterme minimiert wird, verbleiben die Unsicherheiten der unbekannten Restsystematiken.

Durch Anwendung statistischer Methoden, z. B. durch das wiederholte Ziehen einer Stichprobe, lässt sich ein Teil der Messunsicherheit in Form einer Standardabweichung bzw. Standardunsicherheit quantifizieren. Weiterhin können Messunsicherheiten durch zusätzliche Standardunsicherheiten, die auf der Grundlage von Erfahrungen oder Zusatzinformationen basieren, ergänzt werden. Hierzu zählen bspw. Herstellerangaben, Kalibrierscheine oder Zertifikate. Üblicherweise werden die statis-

tischen Methoden als Ermittlungsmethode A und die nichtstatistischen als Methode B bezeichnet. Beide Anteile werden mittels Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung zur kombinierten Standardunsicherheit zusammengefasst (JCGM100 2008, S. 18ff).

In den meisten Fällen kann eine gesuchte Größe $\mathbf{u}$ nicht direkt beobachtet werden, sondern muss unter Verwendung eines geeigneten (funktionalen) Modells indirekt aus den erhobenen Beobachtungen bestimmt werden. Die erhobenen Beobachtungen selbst können wiederum aus einem Untermodell abgeleitete Größen darstellen. Sollen bspw. aus den Beobachtungen $\mathbf{l}$ vom Typ Strecke und Azimutwinkel die ebenen kartesischen Koordinaten eines Punktes und dessen Unsicherheiten abgeleitet werden, so ist eine nichtlineare Transformation $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{l})$ durchzuführen, wobei $\mathbf{f}$ eine vektorielle Funktion darstellt. Sowohl der Azimutwinkel als auch die Strecke sind jedoch wiederum abgeleitete Ergebnisse von (Unter-)Modellen, die verschiedenen Einflüssen unterliegen, wie bspw. Nullpunktabweichungen oder Exzentrizitäten. Hinzu kommen Faktoren, die nicht unmittelbar dem (physikalischen) Messverfahren zuzuschreiben sind, z. B. Signalisierungsabweichungen oder temperaturbedingte Variationen während des Messprozesses sowie der sachgerechte Einsatz der Messmittel und die Erfahrungen des Anwenders. Die realisierten und um systematische Effekte korrigierten Beobachtungen $\mathbf{l}$ setzen sich somit aus einem deterministischen Anteil, dem wahren Wert $\tilde{\mathbf{l}}$, und einem stochastischen Anteil zusammen, sodass $\mathbf{l} = \tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{e}}$ gilt. Der Vektor der Beobachtungsabweichungen bzw. -fehler $\tilde{\mathbf{e}}$ ergibt sich hierbei aus (Caspary 1983; Pelzer 1985)

$$\tilde{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}_{\Delta_i} \Delta_{\mathbf{e}i}, \quad (2.1)$$

wobei $\Delta_{\mathbf{e}i}$ infinitesimale Störgrößen sind und die Matrizen $\mathbf{K}_{\Delta_i}$ den Einfluss dieser Störgrößen auf $\tilde{\mathbf{e}}$ beschreiben. Diese Störgrößen werden auch als Primär- bzw. Elementarfehler bezeichnet. Für diese gilt nach Helmert (1872, S. 6):

1. Positive und negative Störgrößen gleichen Betrags sind gleich wahrscheinlich.
2. Betragsmäßig kleinere Störgrößen sind wahrscheinlicher und treten häufiger auf als betragsmäßig größere.
3. Für die Störgrößen $\Delta_{\mathbf{e}i} \rightarrow \mathbf{0}$ wird die Häufigkeit maximal.

Hieraus ergibt sich für den Vektor der Beobachtungsabweichungen der Erwartungswert $E\{\tilde{\mathbf{e}}\} = \mathbf{0}$, und es begründet sich die Annahme der normalverteilten Beobachtungsabweichungen $\tilde{\mathbf{e}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{e}})$ (Wolf 1968, S. 489ff; Großmann 1969, S. 56ff). Der Erwartungswert der Dispersion der Beobachtungsabweichungen $\tilde{\mathbf{e}}$ ergibt sich für Gl. 2.1 zu (Caspary 1983)

$$E\{\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}^T\} = \sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}_{\Delta_i} E\{\Delta_{\mathbf{e}i} \Delta_{\mathbf{e}i}^T\} \mathbf{K}_{\Delta_i}^T = \sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} \Sigma_{\Delta_i} = \Sigma_{\mathbf{e}}, \quad (2.2)$$

wobei Σ_{Δ_i} symmetrische Elementarmatrizen sind. Diese Elementarmatrizen sind weiterhin positiv semidefinit. Da jede Realisierung eines Zufallsexperimentes mindestens

eine exklusive (unabhängige) Störgröße aufweist, existiert mindestens eine Elementarmatrix Σ_{Δ_i} , die ausschließlich positive Elemente $\sigma_j^2 > 0$ auf der Hauptdiagonale besitzt, und deren Nebendiagonalelemente null sind. Diese diagonale Elementarmatrix ist somit positiv definit, sodass Σ_e ebenfalls positiv definit ist (Caspary 1983).

Hallert (1964) bezeichnet die Theorie der Elementarfehler als Vorläufer des zentralen Grenzwertsatzes, der die Annahme der Normalverteilung für die Beobachtungsabweichungen heute motiviert. Dieser besagt, dass die Summe aus unabhängigen nicht notwendigerweise normalverteilten Zufallsgrößen asymptotisch gegen eine Normalverteilung strebt, sofern keine nichtnormalverteilte Eingangsgröße einen dominanten Anteil aufweist, siehe auch (Carlton und Devore 2017, S. 293ff). Insbesondere sind gemäß dem Satz von Cramér alle unabhängigen Zufallsgrößen normalverteilt, wenn ihre Summe normalverteilt ist (Cramér 1936). Da sich gemäß Gl. 2.1 die aus Messungen gewonnen Beobachtungen aus einer unendlich großen Summe von Zufallsvariablen zusammensetzen, können diese üblicherweise als normalverteilt angesehen werden (Pelzer 1985; Koch 2007, S. 45; Lehmann 2012).

Abbildung 2.1 zeigt exemplarisch die aus der Konvolution von $m_c = 5$ unabhängigen gleichverteilten Zufallsgrößen $X_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ resultierende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit Zwischenergebnissen. Aus der Summe von $X_1 \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und $X_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ergibt sich die Simpsonverteilung. Gemäß des zentralen Grenzwertsatzes nähert sich die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit größer werdender Anzahl m_c der Dichtefunktion der Normalverteilung an. Für $m_c > 2$ ist diese Approximation bereits gut zu erkennen.

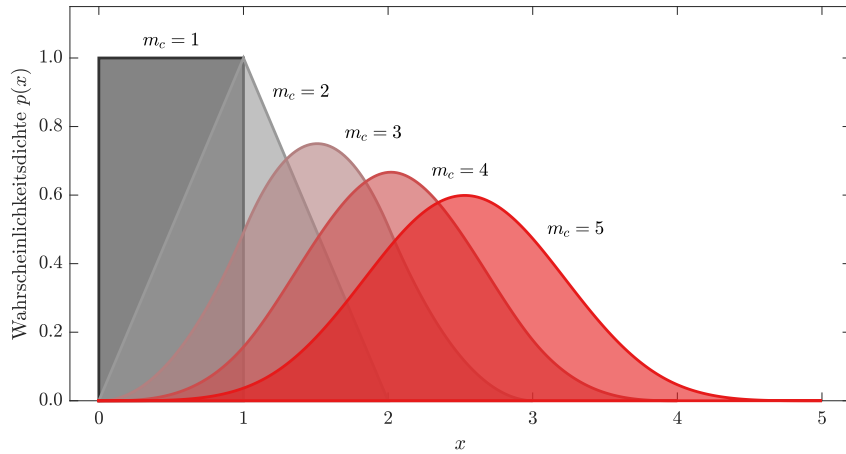


Abbildung 2.1: Konvolution von m_c unabhängigen gleichverteilten Zufallsgrößen $X_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Für die Summe aus $m_c = 2$ unabhängigen gleichverteilten Zufallsgrößen entspricht die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Dichtefunktion der Simpsonverteilung. Mit steigender Anzahl m_c strebt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gemäß des zentralen Grenzwertsatzes gegen die Dichtefunktion der Normalverteilung.

Die Schätzwerte, die mittels $\mathbf{f}$ abgeleitet werden, sollten möglichst unverzerrt sein. Dies bedeutet, dass die Differenz zwischen dem wahren Wert $\tilde{\mathbf{u}}$ und dem aus der Stichprobe resultierenden Wert $\hat{\mathbf{u}}$ möglichst klein ist. Ist der Erwartungswert $E\{\hat{\mathbf{u}}\}$ identisch mit dem wahren Wert $\tilde{\mathbf{u}}$, so ist der Schätzer erwartungstreu bzw. liefert unverzerrte Schätzwerte. Da die Beobachtungsfehler der symmetrischen Normalver-

teilung folgen, ergeben sich für lineare Funktionen $\mathbf{f}$ erwartungstreue Schätzwerte (Jäger u. a. 2005, S. 213), d. h.,

$$E\{\hat{\mathbf{u}}\} = E\{\mathbf{f}(\mathbf{l})\} = \mathbf{f}(E\{\mathbf{l}\}). \quad (2.3)$$

Diese sich aus dem Gauß-Markov Theorem ableitende Eigenschaft des Schätzers lässt sich jedoch nicht auf nichtlineare Problemstellungen übertragen (Silvey 1975, S. 51ff). Hier lassen sich nur in Ausnahmefällen strenge Formeln für den Erwartungswert bzw. die Dispersion angeben (Caspary und Wichmann 2007, S. 31). Werden demnach statistische Eigenschaften eines nichtlinearen Problems aus einem linearen Ersatzproblem abgeleitet, so sind die Schätzwerte i. d. R. verzerrt (Carlton und Devore 2017, S. 87). Der Erwartungswert der nichtlinearen Funktion entspricht allgemein nicht dem transformierten Erwartungswert, d. h.,

$$E\{\mathbf{f}(\mathbf{l})\} \neq \mathbf{f}(E\{\mathbf{l}\}). \quad (2.4)$$

Ist $\mathbf{f}$ eine schwach bzw. moderat nichtlineare Funktion, so wird der Einfluss der Nichtlinearität auf die Schätzung in den meisten Anwendungen vernachlässigt, und die statistischen Eigenschaften des linearen Ersatzproblems werden direkt auf das zugrunde liegende nichtlineare Problem übertragen. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die Verzerrung bzw. das Bias der Schätzwerte durch die Nichtlinearität im funktionalen Modell hervorgerufen wird, die Größe der Verzerrung jedoch durch die Dispersion $\Sigma_{\mathbf{e}}$ beeinflusst wird (Lehmann und Lösler 2018; Lösler u. a. 2020).

Da für nichtlineare Modelle nur in Ausnahmefällen strenge Formeln für den Erwartungswert bzw. die Dispersion existieren, werden im Folgenden Methoden vorgestellt, die für nichtlineare Modelle eine geringere Verzerrung in den Schätzwerten hervorrufen. Nach Julier u. a. (2000) lassen sich die Methoden in zwei Klassen unterteilen. Während die erste Klasse die Wahrscheinlichkeitsverteilung approximiert, erfolgt in der zweiten Klasse eine Approximation der nichtlinearen Funktion bzw. Transformation. Zur ersten Klasse zählen die Monte-Carlo-Methode und die Unscented Transformation. Die Taylorreihenentwicklung hingegen approximiert die ursprüngliche nichtlineare Funktion und ist der zweiten Klasse zuzuordnen, wobei die Differenzierbarkeit von $\mathbf{f}$ vorausgesetzt sei. Alle drei Methoden werden nachfolgend zunächst ausschließlich für nichtredundante Problemstellungen bzw. Minimalkonfigurationen betrachtet. Eine Übertragung auf den überbestimmten Allgemeinfall erfolgt in Kapitel 3.

2.1 Taylorreihenentwicklung

Die Funktion f sei eine skalare nichtlineare, differenzierbare Funktion, die den Übergang zwischen einer Eingangsgröße l und einer Ausgangsgröße u beschreibt, d. h., $u = f(l)$. Ist ferner die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsgröße l gegeben, so lassen sich bekanntermaßen der Erwartungswert $E\{f(l)\}$, die Dispersion

$\text{Var}\{f(l)\}$ oder allgemein die statistischen Momente durch die Taylorreihe von f approximieren. Mit den Funktionswerten von f und ihren Ableitungen an der Entwicklungsstelle $\tilde{l}$ lautet die Reihe (Teunissen 2003, S. 142; Caspary und Wichmann 2007, S. 18)

$$f(l) = \hat{u} = \tilde{u} + \tilde{e}_u = f + f' \tilde{e} + \frac{1}{2} f'' \tilde{e}^2 + \frac{1}{6} f''' \tilde{e}^3 + \mathcal{O}. \quad (2.5)$$

wobei $\tilde{e} = l - \tilde{l}$ die wahre Abweichung bzw. den wahren Fehler der Realisierung l darstellt und $\mathcal{O}$ die Terme höherer Ordnung beschreibt. Ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bezüglich $\tilde{e}$ symmetrisch, so sind die zentralen Momente $(2k+1)$ -ter Ordnung null. Werden die Terme höherer Ordnung in Gl. 2.5 vernachlässigt und die Erwartungswerte für jedes Reihenglied gebildet, so ergibt sich mit dem zweiten zentralen Moment $E\{\tilde{e}^2\} = \sigma_e^2$ die Näherung für den Erwartungswert zu

$$E\{f(l)\} \approx f + \frac{1}{2} f'' \sigma_e^2, \quad (2.6)$$

welche erst Glieder ab der 4. Ordnung vernachlässigt. Das zweite zentrale Moment von f ergibt sich unter Anwendung des Verschiebungssatzes von Steiner aus

$$\begin{aligned} \text{Var}\{f(l)\} &= \sigma_u^2 = E\{(f(l) - E\{f(l)\})^2\} \\ &= E\{f(l)^2\} - (E\{f(l)\})^2 \\ &= E\{\tilde{e}_u^2\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei $\tilde{e}_u = \hat{u} - \tilde{u}$ die Abweichung des Schätzwertes bzgl. des wahren Wertes beschreibt (Krystek 2012, S. 167).

Ist $\tilde{e}$ nicht nur symmetrisch, sondern normalverteilt, so können alle zentralen Momente als Funktion der Varianz σ_e^2 dargestellt werden, siehe Tabelle A.1. Insbesondere beträgt das vierte zentrale Moment $E\{\tilde{e}^4\} = 3\sigma_e^4$. Unter Berücksichtigung dieser statistischen Eigenschaft liefert Gl. 2.7 die Varianz der Funktion f

$$\text{Var}\{f(l)\} = \sigma_u^2 = f'^2 \sigma_e^2 + \left(\frac{1}{2} f''^2 + f' f'''\right) \sigma_e^4 + \mathcal{O}. \quad (2.8)$$

Mit Beschränkung auf die quadratische Annäherung ergibt sich die Approximation 2. Ordnung für die Varianz zu

$$\text{Var}\{f(l)\} = \sigma_u^2 \approx f'^2 \sigma_e^2 + \frac{1}{2} f''^2 \sigma_e^4. \quad (2.9)$$

Eine Herleitung von Gl. 2.9 findet sich in Anhang A.1.

Sind $\mathbf{l}$ und $\mathbf{u}$ Zufallsvektoren und beschreibt $\mathbf{f}$ eine nichtlineare vektorielle Funktion, so lautet die Taylorreihe (Mana und Pennecchi 2007)

$$\hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{e}}_u = \mathbf{f} + \mathbf{J}\tilde{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_1 \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{e}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_n \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} + \mathcal{O}. \quad (2.10)$$

Hierbei beschreibt $\mathbf{J}$ die Jacobimatrix mit den ersten partiellen Ableitungen der Funktion $\mathbf{f}$ an der Stelle $\tilde{\mathbf{l}}$ und $\mathbf{H}_i$ die Hessematrix mit den zweiten partiellen Ableitungen des i -ten funktionalen Zusammenhangs f_i aus $\mathbf{f}$ an der Stelle $\tilde{\mathbf{l}}$.

Ausgehend von $\tilde{\mathbf{e}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{e}})$ und unter Berücksichtigung der Erwartungswerte für den linearen Term (Jäger u. a. 2005, S. 67),

$$\mathbf{E}\{\mathbf{J}\tilde{\mathbf{e}}\} = \mathbf{J}\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{e}}\} = \mathbf{0}, \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{E}\{\mathbf{J}\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}^T\mathbf{J}^T\} = \mathbf{J}\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}^T\}\mathbf{J}^T = \mathbf{J}\Sigma_{\mathbf{e}}\mathbf{J}^T, \quad (2.11b)$$

und der Erwartungswerte für den quadratischen Term (Mathai und Provost 1992, S. 53, 76),

$$\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{e}}^T\mathbf{H}_i\tilde{\mathbf{e}}\} = \mathbf{E}\{\text{tr}(\mathbf{H}_i\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}^T)\} = \text{tr}(\mathbf{H}_i\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}^T\}) = \text{tr}(\mathbf{H}_i\Sigma_{\mathbf{e}}), \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{e}}^T\mathbf{H}_i\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}^T\mathbf{H}_j\tilde{\mathbf{e}}\} - \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{e}}^T\mathbf{H}_i\tilde{\mathbf{e}}\}\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{e}}^T\mathbf{H}_j\tilde{\mathbf{e}}\} = 2\text{tr}(\mathbf{H}_i\Sigma_{\mathbf{e}}\mathbf{H}_j\Sigma_{\mathbf{e}}), \quad (2.12b)$$

in Gl. 2.10 ergeben sich die Gl. 2.6, 2.9 in vektorieller Form zu (Mana und Penneccchi 2007; Lösler u. a. 2016a)

$$\mathbf{E}\{\hat{\mathbf{u}}\} \approx \mathbf{f} + \frac{1}{2}[\text{tr}(\mathbf{H}_i\Sigma_{\mathbf{e}})]_i, \quad (2.13a)$$

$$\text{Var}\{\hat{\mathbf{u}}\} = \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}^T\} \approx \mathbf{J}\Sigma_{\mathbf{e}}\mathbf{J}^T + \frac{1}{2}[\text{tr}(\mathbf{H}_i\Sigma_{\mathbf{e}}\mathbf{H}_j\Sigma_{\mathbf{e}})]_{ij}. \quad (2.13b)$$

Für lineare funktionale Zusammenhänge entfallen die zweiten Summanden jeweils in den Gl. 2.6, 2.9 bzw. in den Gl. 2.13 und führen mit den Gl. 2.11 unmittelbar zu den Gleichungen für eine lineare Parametertransformation bzw. zum Varianz-Kovarianz-Fortpflanzungsgesetz 1. Ordnung (TS1). Im nichtlinearen Fall stellen die Gl. 2.6, 2.9 bzw. die Gl. 2.13 Approximationen 2. Ordnung (TS2) dar und liefern Schätzwerte mit geringerer Verzerrung. Diesen Gleichungen ist auch zu entnehmen, dass der Einfluss der Nichtlinearität auf die geschätzten Parameter bzw. die geschätzte Dispersion maßgeblich von der Dispersion der Eingangsgrößen abhängt. Bei identischen funktionalen Zusammenhängen liefert somit das Verfahren die geringeren Verzerrungen, welches die kleineren Messunsicherheiten aufweist.

Die Koeffizienten in $\mathbf{J}$ bzw. $\mathbf{H}$ werden auch als Empfindlichkeits- oder Sensitivitätskoeffizienten der Transformation 1. bzw. 2. Ordnung bezeichnet und beschreiben, in welcher Größenordnung sich $\mathbf{u}$ infolge einer Änderung in $\mathbf{l}$ verändert (JCGM100 2008, S. 20). Werden alle Sensitivitätskoeffizienten in $\mathbf{J}$ an der Entwicklungsstelle zu null, oder können die Abweichungen zwischen der Approximation 1. und 2. Ordnung nicht als vernachlässigbar angesehen werden, so ist die quadratische Approximation stets vorzuziehen (JCGM100 2008, S. 19). Die Herleitung von den Gl. 2.6, 2.9 bzw. den Gl. 2.13 erfolgte anhand der wahren Werte, die i. A. jedoch unbekannt sind. Für die praktische Anwendung sind diese durch geeignete Schätzwerte zu ersetzen.

Ein illustratives Beispiel, welches das Versagen der linearen Approximation und des linearen Varianz-Kovarianz-Fortpflanzungsgesetzes demonstriert, findet sich in (Neumann 2012). Dieses Beispiel ist sinngemäß auch in (Wolf 1961; Krystek 2012, S. 72ff; Schwarz und Hennes 2017) wiedergegeben.

Beispiel 2.1.1 (Querabweichung bei der Prüfstreckenbestimmung)

Im Kontext der Prüfstreckenbestimmung auf Kalibrierbasen werden die gemessenen Teilstrecken zur Gesamtlänge der Prüfstrecke aufsummiert. Die korrekte Gesamtlänge ergibt sich dabei jedoch nur unter der Voraussetzung, dass keine Querabweichungen q vorliegen. Ist $q \neq 0$, wird die beobachtete Strecke s stets zu lang gemessen. Die Querabweichung, die beim Neueinrichten des Experimentes sowohl in ihrer Größe als auch im Vorzeichen variiert und somit eine zufällige um null streuende Abweichung darstellt, gibt Neumann (2012) mit $q \sim \mathcal{N}(0, \sigma_q^2)$ an. Für die beobachtete Strecke gilt $s \sim \mathcal{N}(\tilde{s}, \sigma_s^2)$. Die gemessene Strecke s und die Querabweichung q stellen weiterhin unabhängige Zufallsgrößen dar. Der nichtlineare funktionale Zusammenhang für eine Teilstrecke⁷ ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras

$$\hat{d} = f(s, q) = \sqrt{s^2 - q^2}.$$

Die für die Gl. 2.13 notwendigen Matrizen mit den ersten und zweiten partiellen Ableitungen lauten

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}} & -\frac{q}{(s^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{q^2}{(s^2 - q^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{s q}{(s^2 - q^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{s q}{(s^2 - q^2)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{s^2}{(s^2 - q^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}.$$

Mit $E\{q\} = 0$ wird in $\mathbf{J}$ der zweite Sensitivitätskoeffizient $\frac{\partial f}{\partial q} = 0$. Wird die Taylorreihe bereits nach dem linearen Glied abgebrochen, so wird der Einfluss von σ_q vollständig eliminiert. Mit den Gl. 2.11 folgen unmittelbar $\hat{d} = s$ und $\hat{\sigma}_d = \sigma_s$. In der Hessematrix wird die zweite partielle Ableitung mit $\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = -\frac{1}{s}$ ungleich null, sodass σ_q bei Verwendung der quadratischen Approximation sowohl $\hat{d}$ als auch $\hat{\sigma}_d$ beeinflusst, d. h.,

$$\hat{d} = s - \frac{1}{2} \frac{s^2 \sigma_q^2}{(s^2 - q^2)^{\frac{3}{2}}} = s - \frac{\sigma_q^2}{2s},$$

$$\hat{\sigma}_d^2 = \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{s^4 \sigma_q^4}{(s^2 - q^2)^3} = \sigma_s^2 + \frac{\sigma_q^4}{2s^2}.$$

⁷Auch wenn die Teilstrecke d aus einer Minimalkonfiguration resultiert, wird d hier als Schätzwert interpretiert und die Notation $\hat{d}$ verwendet. Hierdurch wird die Konsistenz zur Ergebnisdarstellung auf S. 34 sichergestellt.

Abbildung 2.2 zeigt schematisch den Messaufbau zur Bestimmung der Teilstrecke d aus der Beobachtung s unter Berücksichtigung einer um null streuenden normalverteilten Querabweichung q . Da s die Hypotenuse ist, muss $\hat{d} \leq s$ gelten. Der Erwartungswert $E\{\hat{d}\}$ der Teilstrecke ist demnach immer kleiner als der Erwartungswert $E\{s\}$ der beobachteten Strecke, wenn eine Unsicherheit $\sigma_q > 0$ in der Querabweichung vorliegt. Die Differenz zwischen der linearen und der quadratischen Approximation wird durch den zusätzlichen Term $-\frac{\sigma_q^2}{2s}$ bzw. $\frac{\sigma_q^4}{2s^2}$ quantifiziert. Je kleiner σ_q bzw. je größer s , desto geringer ist die Verzerrung der Schätzwerte.

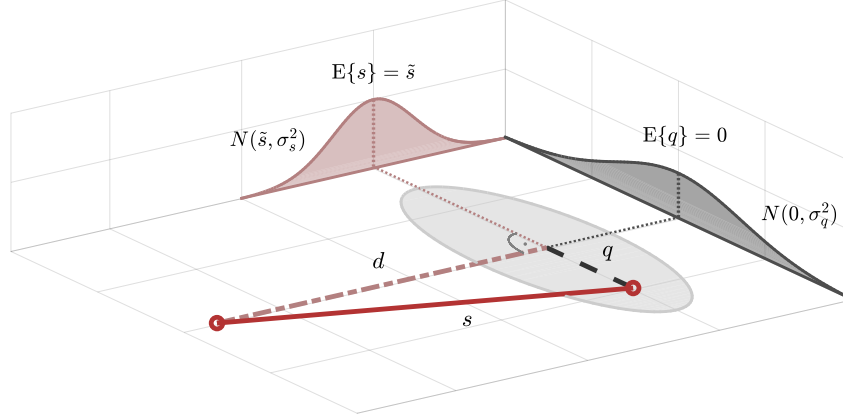


Abbildung 2.2: Bestimmung der Teilstrecke d (rot) einer Prüfstrecke aus der beobachteten Strecke s (dunkelrot) unter Berücksichtigung einer Querabweichung q (dunkelgrau). Für $s \sim \mathcal{N}(\tilde{s}, \sigma_s^2)$ und $q \sim \mathcal{N}(0, \sigma_q^2)$ sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen in hellrot bzw. hellgrau dargestellt. Die Ellipse stellt die Kombination dieser beiden Marginalverteilungen dar. Die Darstellung ist unmaßstäblich.

□

2.2 Monte-Carlo-Methode

Neben der Taylorreihenentwicklung, die eine differenzierbare Modellgleichung voraussetzt, existieren auch numerische Methoden, um Erwartungswert, Dispersion oder höhere Momente zu bestimmen. Zu den bekanntesten Methoden zählt die Monte-Carlo-Methode (MCM), bei der unter Verwendung von Pseudozufallszahlen eine approximative Lösung für diese Momente bestimmt wird (Koch 2017). Durch eine sehr große Anzahl m_{MCM} von gleichartigen Zufallsexperimenten lassen sich komplexe Aufgabenstellung lösen, für die keine analytische Lösung existiert oder deren analytische Lösung nur mit unverhältnismäßigem Aufwand bestimmt werden kann. Die MCM basiert auf dem Gesetz der großen Zahlen (Krystek 2012, S. 87) und benötigt somit einen hinreichend großen Stichprobenumfang m_{MCM} , um gesicherte Ergebnisse zu erzielen (JCGM101 2008, S. 28; JCGM102 2011, S. 25).

In der Geodäsie und in der Messtechnik wird die MCM vorrangig zum Abschätzen von Messunsicherheiten (Lösler u. a. 2016a; Schwarz und Hennes 2017), zur Simulation von komplexen Mess- und Auswerteprozessen (Lehmann und Lösler 2018; Luhmann 2018, S. 621f) oder in der Erstellung und Optimierung von Aufnahme- und Netzkonfigurationen (Schmitt 1977) verwendet. Pany u. a. (2011) analysieren z. B.

mittels MCM den Einfluss von Troposphäreneffekten, Uhrparametern und Messabweichungen auf die aus VLBI-Daten abgeleiteten Stationskoordinaten. Koch (2010) wendet die MCM an, um systematische Effekte in Messungen eines terrestrischen Laserscanners aufzudecken. Lehmann und Scheffler (2011) nutzen die MCM zur Bestimmung von Irrtumswahrscheinlichkeiten für den Global- bzw. Individualtest im Kontext der Ausreißerdetektierung in geodätischen Netzen. Um zu prüfen, ob mittels Varianzaufweitung (z. B. Cook u. a. 1982) Modellstörungen zuverlässiger aufgedeckt werden als mit dem (geodätischen) Standardverfahren, der Mittelwertsverschiebung (z. B. Baarda 1968), setzten Lehmann u. a. (2020) die MCM ein, um die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 1. Art bzw. Fehler 2. Art zu bestimmen. Lösler u. a. (2019c) weisen mit Methoden der Nahbereichsphotogrammetrie lastfallabhängige Verformungen an einem Hauptreflektor eines VGOS-Radioteleskops nach und schätzen mittels MCM sowohl die Parameter als auch die zugehörigen Messunsicherheiten ab. Eine detaillierte Darstellung der Monte-Carlo-Methode sowie weitere Anwendungsbereiche finden sich in (Rubinstein und Kroese 2017).

Die MCM ahmt hierbei ein sich wiederholendes gleichartiges Zufallsexperiment wie bspw. einen Messprozess nach und leitet den Erwartungswert und die Dispersion von $\mathbf{f}$ aus m_{MCM} unabhängigen synthetischen Zufallsexperimenten ab. Für $m_{\text{MCM}} \rightarrow \infty$ strebt die Lösung der MCM asymptotisch gegen den wahren Wert (Rubinstein und Kroese 2017, S. 108). Erwartungswert und Dispersion lauten

$$\mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{u}} \} = \frac{1}{m_{\text{MCM}}} \sum_{i=1}^{m_{\text{MCM}}} \mathbf{f}(\mathbf{l}_i), \quad (2.16a)$$

$$\text{Var} \{ \hat{\mathbf{u}} \} = \frac{1}{m_{\text{MCM}} - 1} \sum_{i=1}^{m_{\text{MCM}}} (\mathbf{f}(\mathbf{l}_i) - \mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{u}} \}) (\mathbf{f}(\mathbf{l}_i) - \mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{u}} \})^T, \quad (2.16b)$$

wobei $\mathbf{l}_i = \tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{e}}_i$ der synthetisch erzeugte Beobachtungsvektor der i -ten Stichprobenwiederholung ist und $\tilde{\mathbf{e}}_i$ einen unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsverteilung abgeleiteten Zufallsvektor der wahren Störgrößen darstellt. Die Gl. 2.16 stellen eine numerische Integration dar und entsprechen der Definition des Erwartungswertes bzw. der Dispersion für eine diskrete Zufallsvariable (Carlton und Devore 2017, S. 67ff). An die Stelle der zufälligen Störgrößen treten hier jedoch die synthetisch generierten pseudozufälligen Störgrößen.

Die MCM ist eine intuitive, transparente und leicht in bestehende Auswerte- und Analyseprozesse implementierbare Methode, da zum Erzeugen der synthetischen Stichproben lediglich ein geeigneter Zufallszahlengenerator benötigt wird. Für gleichverteilte Zufallszahlen bieten die meisten Programmiersprachen geeignete Algorithmen zur Berechnung an, wie z. B. den Mersenne-Twister-Algorithmus (Matsumoto und Nishimura 1998). Diese Zufallszahlengeneratoren können auch zur Generierung anderer Wahrscheinlichkeitsverteilungen, wie bspw. der Simpsonverteilung (Stein und Keblis 2009) oder der Normalverteilung (Box und Muller 1958), verwendet werden. Das Erzeugen von Zufallszahlen anderer Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus gleichverteilten Zufallszahlen wird allgemein als Inversionsmethode bezeichnet

(Carlton und Devore 2017, S. 221). Aufgrund der Abhängigkeit der Ergebnisse von den verwendeten Zufallszahlen empfiehlt es sich, den implementierten Algorithmus bezüglich einer Vorhersagbarkeit der generierten Zufallszahlen zu prüfen (JCGM101 2008, S. 60f) und ggf. auf Multi-Start-Algorithmen zurückzugreifen.

Weiterhin ermöglicht die MCM eine numerische Konvolution von Zufallsgrößen mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen. Abbildung 2.3 zeigt exemplarisch die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, die aus der numerischen Konvolution von $m_c = 5$ unabhängigen gleichverteilten Zufallsgrößen $X_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ resultiert, sowie die einzelnen Zwischenergebnisse. Für $m_c = 2$ ist die Dichtefunktion der Simpsonverteilung gut erkennbar. Gemäß des zentralen Grenzwertsatzes strebt die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit zunehmenden m_c gegen die Dichtefunktion der Normalverteilung, siehe hierzu auch Abbildung 2.1.

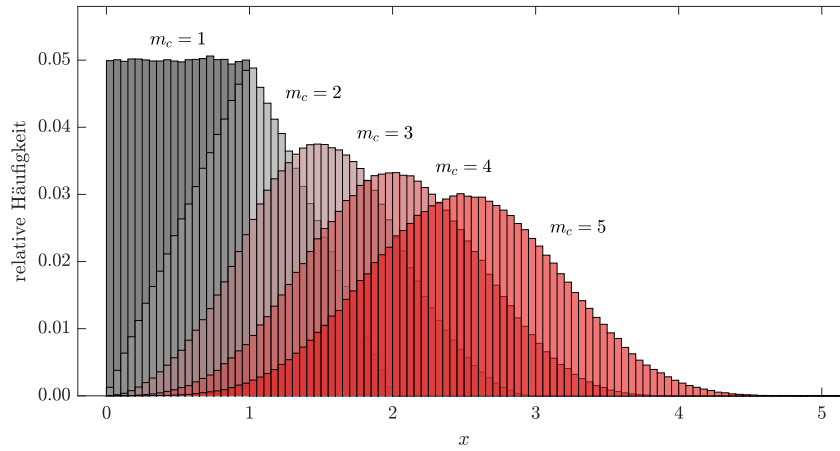


Abbildung 2.3: Numerische Konvolution von m_c unabhängigen gleichverteilten Zufallsgrößen $X_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Für $m_c = 2$ ergibt sich (genähert) die Dichtefunktion der Simpsonverteilung. Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes strebt die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegen die Dichtefunktion der Normalverteilung für $m_c \rightarrow \infty$, siehe auch Abbildung 2.1. Der Stichprobenumfang beträgt $m_{\text{MCM}} = 10^6$.

Da es sich bei der Lösung der MCM um eine asymptotische Schätzung handelt, die nur für $m_{\text{MCM}} \rightarrow \infty$ gegen den wahren Wert strebt, muss bei der praktischen Anwendung ein Kompromiss zwischen Wirtschaftlichkeit und numerischer Präzision gefunden werden. Schmitt (1977) nutzt ein sogenanntes Las-Vegas-Diagramm, um die Empfindlichkeit der Ergebnisse bzgl. der Simulationsanzahl m_{MCM} zu quantifizieren. Um die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Beobachtungen möglichst vollständig zu beschreiben, d. h.,

$$\Sigma_{\mathbf{e}} \approx \frac{1}{m_{\text{MCM}}} \sum_{i=1}^{m_{\text{MCM}}} \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i^T, \quad (2.17)$$

ist m_{MCM} zwingend größer als die Beobachtungsanzahl n zu wählen (Dykstra 1970).

Allgemein hängt die Wahl von m_{MCM} von verschiedenen Faktoren ab, wie bspw. der Form der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Parameter $\mathbf{u}$, der erforderlichen numerischen Präzision oder der angestrebten Überdeckungswahrscheinlichkeit. Da für keine a-priori gewählte Simulationsanzahl m_{MCM} garantiert werden kann, dass

die Ergebnisse der MCM zuverlässig sind, empfiehlt der GUM eine adaptive Vorgehensweise (JCGM101 2008, S. 28). Entsprechende Prozeduren und Hinweise für eine mögliche Implementierung finden sich u. a. in (JCGM101 2008, S. 32f; JCGM102 2011, S. 33f; Wübbeler u. a. 2010), sodass auf eine Wiedergabe hier verzichtet wird.

Die große Akzeptanz der MCM beruht nicht zuletzt auf dem hohen Anschauungsgrad, wodurch sie in vielen Fachdisziplinen verbreitet ist. Durch Visualisierung der einzelnen synthetischen Versuche lassen sich Ergebnisse häufig besser erfassen und nachvollziehen als durch eine äquivalente analytische Lösung. Die Berechnung der kartesischen Koordinaten aus polaren Messelementen ist hierbei ein anschauliches Beispiel, um insbesondere die Gültigkeit von Gl. 2.4 zu demonstrieren.

Beispiel 2.2.1 (Konvertierung von polaren Beobachtungen in kartesische Koordinaten)

Die Konvertierung von polaren Messelementen in kartesische Koordinaten zählt zu den geodätischen Grundaufgaben und findet breite Anwendung in der Koordinatenmesstechnik, z. B. mittels Lasertracker oder Laserscanner. Das funktionale Modell der nichtlinearen Transformation für ebene Koordinaten lautet

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(s, \phi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix},$$

wobei s die Strecke, ϕ der Azimutwinkel und x bzw. y die gesuchten kartesischen Koordinatenkomponenten sind. O. B. d. A. sei $s = \tilde{s}$ eine fehlerfreie Strecke und lediglich der Azimutwinkel eine normalverteilte Zufallsgröße, d. h., $\phi \sim \mathcal{N}(\tilde{\phi}, \sigma_\phi^2)$.

Die kartesischen Koordinaten hängen ausschließlich vom Azimutwinkel ab und ergeben sich aus $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\phi)$. Werden die korrespondierenden kartesischen Koordinaten $\mathbf{u}_i$ berechnet, die sich aus Wiederholungsmessungen des Azimutwinkels ϕ_i ergeben, so formen diese einen Kreisbogen mit dem Radius $\tilde{s}$, wie Abbildung 2.4 zeigt. Die Bogenlänge hängt hierbei offensichtlich von der Dispersion σ_ϕ^2 ab. Werden die einzelnen $\mathbf{u}_i$ entsprechend Gl. 2.16a gemittelt, ergibt sich eine weitgehend unverzerrte Schätzung für die kartesischen Koordinaten $\hat{\mathbf{u}}^T = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{pmatrix}$, sofern die Anzahl der unabhängigen Wiederholungen gegen unendlich strebt.

In Abbildung 2.4 sind die einzelnen Realisierungen der kartesischen Koordinaten $\mathbf{u}_i = \mathbf{f}(\phi_i)$ durch graue Punkte symbolisiert. Da diese auf einem Kreisbogen liegen, muss der Erwartungswert $E\{\hat{\mathbf{u}}\}$ innerhalb dieses Kreises liegen, d. h., $\hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{u}} < \tilde{s}^2$. Im Hinblick auf Gl. 2.4 ist leicht abzulesen, dass der Erwartungswert der nichtlinearen Transformation $E\{\mathbf{f}(\phi)\}$ nicht dem transformierten Erwartungswert $\mathbf{f}(E\{\phi\})$ im nichtlinearen Modell entspricht. Analog gilt dies auch für die Dispersion. Bei Verwendung der linearisierten Transformation ergibt sich aufgrund der fehlerfreien Strecke eine Konfidenzellipse, deren kleine Halbachse null ist. In Abbildung 2.4 ist diese als Gerade dargestellt. Im Vergleich zu dem aus der Gl. 2.16b resultierenden Konfidenzbereich der MCM ist der Konfidenzbereich der TS1 deutlich kleiner. Die Dispersion wird demnach zu optimistisch abgeschätzt, wenn eine Taylorreihe mit Gliedern 1. Ordnung verwendet wird. Insbesondere ist der Erwartungswert der nichtlinearen Funktion $E\{\mathbf{f}(\phi)\}$ für jedes $\sigma_\phi^2 > 0$ unabhängig von der gewählten

Überdeckungswahrscheinlichkeit hierbei in keinem der resultierenden Konfidenzbereiche der TS1 enthalten. Die Verwendung der linearen Ersatzfunktion anstelle der ursprünglichen nichtlinearen Funktion stellt demnach in diesem Beispiel eine zu starke Vereinfachung dar.

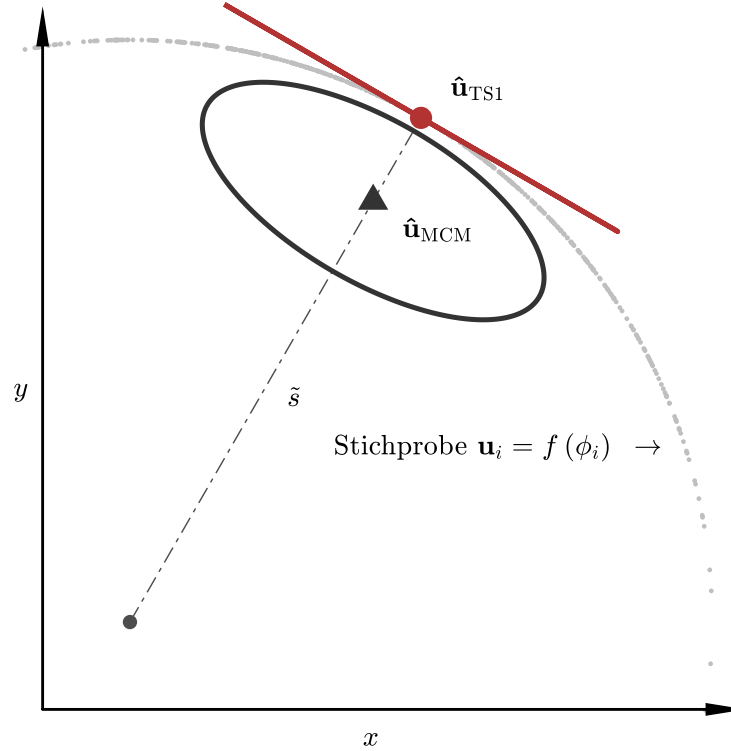


Abbildung 2.4: Nichtlineare Konvertierung von polaren Beobachtungen in kartesische Koordinaten, wobei die Strecke $\tilde{s}$ als fehlerfrei angenommen wurde und lediglich der Azimutwinkel ϕ eine normalverteilte Zufallsgröße darstellt. Die aus der nichtlinearen Transformation $\mathbf{u}_i = \mathbf{f}(\phi_i)$ resultierenden kartesischen Koordinaten sind durch kleine graue Punkte symbolisiert und bilden einen Kreisbogen. Während der rote Punkt den transformierten Erwartungswert $\hat{\mathbf{u}}_{\text{TS1}} = \mathbf{f}(\mathbb{E}\{\phi\})$ symbolisiert, stellt das schwarze Dreieck den Erwartungswert $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MCM}} = \mathbb{E}\{\mathbf{f}(\phi)\}$ der nichtlinearen Funktion dar. Während $\hat{\mathbf{u}}_{\text{TS1}}$ ein Punkt auf der Kreislinie ist, liegt $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MCM}}$ innerhalb des Kreises, d. h. $\mathbb{E}\{\mathbf{f}(\phi)\} \neq \mathbf{f}(\mathbb{E}\{\phi\})$. Ellipsen um die Schätzwerte stellen die Dispersion dar, die sich aus der Taylorreihe mit Gliedern 1. Ordnung bzw. der Monte-Carlo-Methode ergeben. Da die Strecke $\tilde{s}$ als fehlerfrei angenommen wurde, ist für die TS1-Lösung die kleine Ellipsenhalbachse null, sodass sich die Darstellung auf die rot abgebildete Gerade reduziert.

□

Der hohe Anschauungsgrad und der geringe Implementierungsaufwand dürfen jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass nur eine korrekte Anwendung der MCM zu belastbaren Ergebnissen führt. Basierend auf dem Vorschlag von Niemeier und Tengen (2017, 2020) setzt Schwarz (2020) die MCM im Kontext der Parameterschätzung eines geodätischen Lagenetzes ein, welches einen nichtlinearen funktionalen Zusammenhang aufweist (Jäger u. a. 2005, S. 213f). Die Lagekoordinaten und die zugehörige Dispersion eines Neupunktes werden mittels TS1 geschätzt und den Ergebnissen der MCM gegenübergestellt. Schwarz (2020) hebt hervor, dass die geschätzten Koordinaten beider Methoden identisch sind, die Dispersion der TS1 gegenüber der Dispersion der MCM jedoch deutlich überschätzt wird und die abgeleiteten Standardunsicherheiten um 50 % kleiner sind. Da das funktionale Modell einer Lagenetzausgleichung jedoch nichtlinear ist, steht die erste Aussage in einem Widerspruch zu Gl. 2.4.

Eine Analyse des verwendeten Algorithmus zeigt, dass Schwarz (2020) die MCM nicht auf das originäre nichtlineare funktionale Modell, sondern auf dessen linearisierte Form anwendet. Für dieses lineare Ersatzproblem gilt Gl. 2.3, wonach die Parameter der TS1 als auch die Parameter der MCM erwartungstreu geschätzt werden (Jäger u. a. 2005, S. 213). Da lediglich ein lineares Ersatzproblem betrachtet wird, können die auffällig großen Differenzen zwischen den Dispersionen beider Methoden demnach nicht auf das nichtlineare funktionale Modell zurückgeführt werden.

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese großen Differenzen in den Standardunsicherheiten maßgeblich durch die Verwendung unterschiedlicher stochastischer Modelle hervorgerufen werden. Während bei der TS1-Lösung ein zusätzlicher Skalierungsfaktor berücksichtigt wird, fehlt dieser bei der MCM. Wird die Berechnung mittels TS1 ohne diese zusätzliche Skalierung im stochastischen Modell durchgeführt, so resultieren daraus Standardunsicherheiten, die mit den Standardunsicherheiten der MCM vergleichbar sind. Die verbleibenden Differenzen sind $<1\%$ und resultieren für das Beispiel in (Schwarz 2020) aus der Kombination unterschiedlicher Verteilungsfunktionen bei der Ableitung des stochastischen Modells.

Die unsachgemäße Anwendung der Monte-Carlo-Methode kann zu nichtbelastbaren Ergebnissen und Fehlinterpretationen führen. Dies soll nachfolgend am Beispiel 2.2.1 verdeutlicht werden, indem die MCM sowohl auf das nichtlineare Problem als auch auf das lineare Ersatzproblem angewendet wird.

Beispiel 2.2.1 (Fortsetzung von S. 27)

Abbildung 2.5 zeigt die unsachgemäße Anwendung der MCM am Beispiel der nichtlinearen Konvertierung von polaren Beobachtungen in kartesische Koordinaten. Die Strecke sei wiederum fehlerfrei, und der Azimutwinkel stelle eine normalverteilte Zufallsgröße dar. Graue Punkte stellen die einzelnen Realisierungen der kartesischen Koordinaten dar, die sich bei Verwendung des nichtlinearen funktionalen Modells ergeben. Bedingt durch die fehlerfreie Strecke liegen diese Punkte auf einem Kreisbogen. Der Erwartungswert der nichtlinearen Funktion ergibt sich mittels Gl. 2.16a und ist als schwarzes Dreieck dargestellt. Dieser liegt innerhalb des Kreises, siehe auch Abbildung 2.4.

Wird anstelle des nichtlinearen Modells dessen linearisierte Form bei der MCM verwendet, so ergeben sich die hellrot dargestellten Punkte. Bedingt durch die fehlerfreie Strecke liegen diese Punkte auf einer Geraden, die tangential zum Kreisbogen verläuft. Der aus Gl. 2.16a resultierende Erwartungswert des linearen Ersatzproblems ist durch einen roten Kreis dargestellt. Dieser befindet sich auf dem Kreisbogen und entspricht der Lösung mittels TS1, wie Abbildung 2.4 zeigt.

Es ist leicht zu erkennen, dass der Erwartungswert der nichtlinearen Transformation $E\{\mathbf{f}(\phi)\}$ nicht dem transformierten Erwartungswert $\mathbf{f}(E\{\phi\})$ entspricht. Anhand der Streuung der grau bzw. hellrot dargestellten Punkte lässt sich weiterhin der Unterschied zwischen den abgeleiteten Konfidenzbereichen in Abbildung 2.4 direkt nachvollziehen.

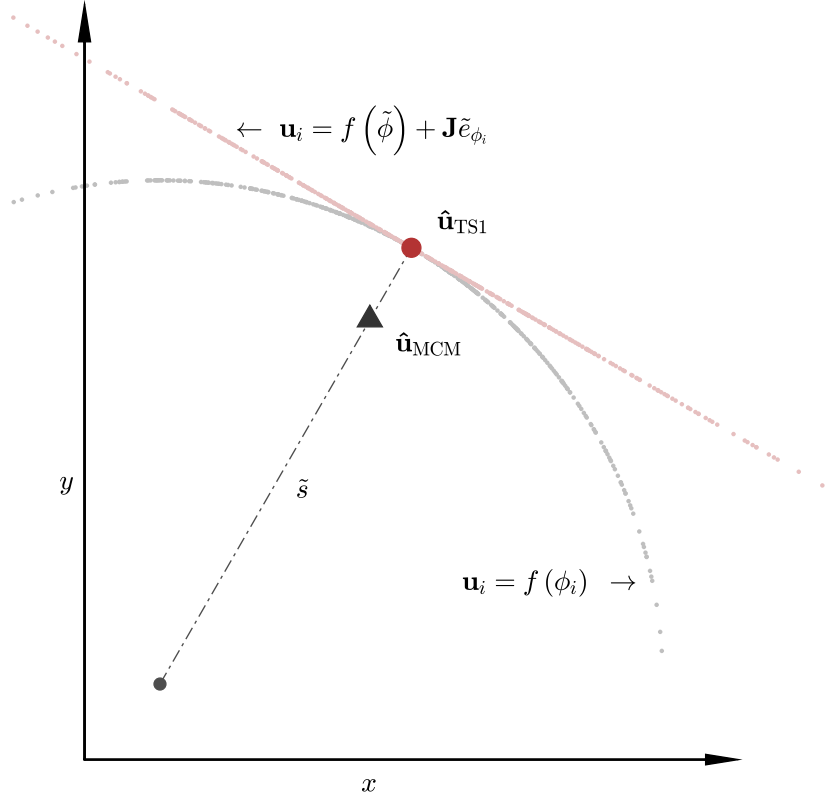


Abbildung 2.5: Unsachgemäße Anwendung der Monte-Carlo-Methode auf die nichtlineare Konvertierung von polaren Beobachtungen in kartesische Koordinaten. Die Strecke $\tilde{s}$ wurde als fehlerfrei angenommen, lediglich der Azimutwinkel ϕ stellt eine normalverteilte Zufallsgröße dar. Die aus der nichtlinearen Transformation $\mathbf{u}_i = \mathbf{f}(\phi_i)$ resultierenden kartesischen Koordinaten sind durch kleine graue Punkte symbolisiert und bilden einen Kreisbogen. Der zugehörige Erwartungswert $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MCM}} = \mathbb{E}\{\mathbf{f}(\phi)\}$ ist durch ein schwarzes Dreieck dargestellt. Die aus dem linearen Ersatzproblem $\mathbf{u}_i = \mathbf{f}(\tilde{\phi}) + \mathbf{J}\tilde{e}_{\phi_i}$ resultierenden kartesischen Koordinaten bilden hingegen eine Gerade und verlaufen tangential zum Kreisbogen. Diese sind durch kleine hellrote Punkte symbolisiert. Der Erwartungswert des linearen Ersatzproblems $\hat{\mathbf{u}}_{\text{TS1}} = \mathbf{f}(\mathbb{E}\{\phi\})$ ist durch einen roten Kreis dargestellt. Für beide Simulationen wurden identische Zufallszahlen verwendet.

□

2.3 Unscented Transformation

Ein weiteres numerisches Verfahren zur Approximation von Momenten ist die von Julier u. a. (1995) vorgeschlagene Unscented Transformation (UT). Im Unterschied zur linearen bzw. quadratischen Approximation von $\mathbf{f}$ durch eine Taylorreihe mit Gliedern 1. bzw. 2. Ordnung werden bei der UT keine partiellen Ableitungen benötigt. Die Standard Unscented Transformation (SUT) beschränkt sich auf eine Annäherung der Gl. 2.13 und stellt eine Approximation 2. Ordnung von $\mathbf{f}$ dar (Julier u. a. 1995; Julier und Uhlmann 1997; Julier u. a. 2000; Julier 2002). Eine Erweiterung der SUT, die auch höhere Momente berücksichtigt, findet sich u. a. in (Tenne und Singh 2003).

Der Erwartungswert und die Dispersion der Funktion $\mathbf{f}$ werden durch die UT aus $m_{\text{UT}} = 2n + 1$ sogenannten Σ -Punkten $\mathcal{X}_i$ geschätzt, denen ein spezifisches Gewicht w_i , mit $\sum w_i = 1$, zugeordnet ist. Die Σ -Punkte werden hierbei so gewählt, dass diese mindestens das erste und zweite Moment der Beobachtungen beschreiben (Julier u. a.

1995). Diese Σ -Punkte sowie die korrespondierenden Gewichte ergeben sich aus

$$\mathcal{X}_0 = \tilde{\mathbf{I}}, \quad w_0 = \frac{\kappa}{n + \kappa}, \quad (2.18a)$$

$$\mathcal{X}_i = \tilde{\mathbf{I}} + \left(\sqrt{(n + \kappa) \Sigma_{\mathbf{e}}} \right)_i, \quad w_i = \frac{1}{2(n + \kappa)}, \quad (2.18b)$$

$$\mathcal{X}_{i+n} = \tilde{\mathbf{I}} - \left(\sqrt{(n + \kappa) \Sigma_{\mathbf{e}}} \right)_i, \quad w_{i+n} = \frac{1}{2(n + \kappa)}, \quad (2.18c)$$

wobei n die Anzahl der Elemente in $\tilde{\mathbf{I}}$ ist und $\left(\sqrt{\Sigma_{\mathbf{e}}} \right)_i$ die i -te Spalte der Quadratwurzel der Dispersionsmatrix darstellt (Julier und Uhlmann 1997). Die Quadratwurzel der Dispersionsmatrix resultiert aus einer Eigenwertzerlegung (Kanzow 2005, S. 14), sodass

$$\Sigma_{\mathbf{e}} = \left(\sqrt{\Sigma_{\mathbf{e}}} \right) \left(\sqrt{\Sigma_{\mathbf{e}}} \right)^T \quad (2.19)$$

gilt. Die Spalten in $\left(\sqrt{\Sigma_{\mathbf{e}}} \right)$ entsprechen hierbei den Hauptachsen des Hyperellipsoids für normalverteilte Eingangsgrößen, sodass die Σ -Punkte neuralgische Punkte der Verteilung darstellen. Die zusätzliche Skalierung $\sqrt{n + \kappa}$ definiert den Abstand zwischen $\tilde{\mathbf{I}}$ und den korrespondierenden Σ -Punkten. Anstelle der Eigenwertzerlegung können auch andere Faktorisierungsverfahren zum Einsatz kommen, bspw. die Cholesky-Zerlegung (Julier u. a. 2000). Eine Gegenüberstellung möglicher Verfahren findet sich in (Straka u. a. 2013).

Durch eine gewichtete Mittelwertbildung der transformierten Σ -Punkte $\mathbf{f}(\mathcal{X}_i)$ ergibt sich Erwartungswert und Dispersion aus

$$\mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{u}} \} = \sum_{i=0}^{2n} w_i \mathbf{f}(\mathcal{X}_i), \quad (2.20a)$$

$$\text{Var} \{ \hat{\mathbf{u}} \} = \sum_{i=0}^{2n} w_i \left(\mathbf{f}(\mathcal{X}_i) - \mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{u}} \} \right) \left(\mathbf{f}(\mathcal{X}_i) - \mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{u}} \} \right)^T. \quad (2.20b)$$

Simon (2006, S. 441ff) zeigt, dass der Skalierungsparameter κ in den Gl. 2.18 für eine Approximation 2. Ordnung einen beliebigen Wert annehmen darf, sofern die Bedingung $(n + \kappa) \neq 0$ nicht verletzt wird. Für normalverteilte Eingangsgrößen kann mit $(n + \kappa) = 3$ eine verbesserte Approximation an Momente vierter und höherer Ordnung jedoch erreicht werden (Julier u. a. 2000; Julier 2003). Da κ in der SUT sowohl negative als auch positive Werte annehmen kann, ist die Dispersionsmatrix $\Sigma_{\hat{\mathbf{u}}}$ nicht zwingend positiv semidefinit. Julier u. a. (2000) schlagen daher vor, zur Bestimmung der Dispersionsmatrix anstelle von $\mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{u}} \}$ auf $\mathbf{f}(\mathcal{X}_0)$ zurückzugreifen, sodass aus der Transformation stets eine positiv semidefinite Dispersionsmatrix resultiert. Äquivalente Ergebnisse für diese modifizierte Unscented Transformation (MUT) werden erhalten, wenn in Gl. 2.20b der zusätzliche Term

$$(1 - \alpha^2) \left(\mathbf{f}(\mathcal{X}_0) - \mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{u}} \} \right) \left(\mathbf{f}(\mathcal{X}_0) - \mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{u}} \} \right)^T \quad (2.21)$$

addiert wird (Julier u. a. 2000). Für $\alpha = 1$ entfällt der zusätzliche Term, woraus die Lösung der SUT resultiert. Für $0 < \alpha < 1$ ergibt sich hingegen die MUT, die eine positiv semidefinite Dispersionsmatrix garantiert (Julier u. a. 2000; Julier 2002).

In praktischen Anwendungen wird die MUT häufig mit $\kappa = \alpha^2(n + \lambda) - n$ initialisiert. Der Koeffizient λ ist hierbei eine empirische Tuningkonstante, deren Wahl wiederum vierte und höhere Momente beeinflusst. Typische Werte sind $\lambda = 3 - n$ bzw. $\lambda = 0$ (Wan und Merwe 2000, 2001). Für den Skalierungsparameter α gilt $0 < \alpha \leq 1$, wobei üblicherweise $\alpha = 10^{-3}$ verwendet wird (Julier 2002). Weiterhin wird eine bessere Anpassung der Dispersion durch $\Sigma_{\hat{\mathbf{u}}} + \Delta\Sigma_{\hat{\mathbf{u}}}$ erreicht, worin der Zuschlag durch

$$\Delta\Sigma_{\hat{\mathbf{u}}} = (1 - \alpha^2 + \beta) (\mathbf{f}(\mathcal{X}_0) - \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{u}}\}) (\mathbf{f}(\mathcal{X}_0) - \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{u}}\})^T \quad (2.22)$$

gegeben ist, welcher gemäß Gl. 2.21 eine positiv semidefinite Dispersionsmatrix garantiert. Für den wichtigen Fall normalverteilter Eingangsgrößen empfiehlt Julier (2002) die Verwendung von $\beta = 2$, siehe auch Anhang A.2. Für $\alpha = 1$, $\beta = 0$ und $\lambda = 3 - n$ geht die MUT in die SUT über. Eine detaillierte Untersuchung, wie die Wahl von α , β bzw. λ die Ergebnisse der UT beeinflusst – insbesondere für den Fall nichtnormalverteilter Eingangsgrößen – findet sich in (Wang und Ding 2020).

In Analogie zu den Gl. 2.16 der MCM leiten sich die Gl. 2.20 direkt aus der Definition des Erwartungswertes bzw. der Dispersion für eine diskrete Zufallsvariable her (Carlton und Devore 2017, S. 67ff). Für Gl. 2.17 findet sich entsprechend

$$\Sigma_{\mathbf{e}} = \sum_{i=0}^{2n} w_i (\mathcal{X}_i - \mathcal{X}_0) (\mathcal{X}_i - \mathcal{X}_0)^T. \quad (2.23)$$

An die Stelle der zufälligen Störgrößen treten hier die neuralgischen Störgrößen. Aufgrund der geringen Anzahl von $m_{\text{UT}} = 2n + 1$ Σ -Punkten ist dieses Verfahren deutlich performanter als die Monte-Carlo-Methode, jedoch ist es auf eine quadratische Approximation beschränkt, wie Anhang A.2 zeigt.

Für lineare funktionale Zusammenhänge $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{l}) = \mathbf{J}\mathbf{l}$ liefert die SUT identische Resultate zur analytischen Lösung mittels Taylorreihenentwicklung 1. Ordnung entsprechend den Gl. 2.11. Aufgrund von Gl. 2.3 folgt für $i = 0$ unmittelbar

$$\mathbf{f}(\mathcal{X}_0) - \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{u}}\} = \mathbf{0}, \quad (2.24a)$$

sowie für $i > 0$

$$\mathbf{f}(\mathcal{X}_i) - \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{u}}\} = -\mathbf{J} \left(\sqrt{(n + \kappa) \Sigma_{\mathbf{e}}} \right)_i, \quad (2.24b)$$

$$\mathbf{f}(\mathcal{X}_{i+n}) - \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{u}}\} = +\mathbf{J} \left(\sqrt{(n + \kappa) \Sigma_{\mathbf{e}}} \right)_{i+n}. \quad (2.24c)$$

Eingesetzt in Gl. 2.20b und unter Berücksichtigung der Symmetrie der transformierten Σ -Punkte, siehe die Gl. 2.24b, 2.24c, resultiert daraus das lineare Varianz-Kovarianz-

Fortpflanzungsgesetz (Förstner und Wrobel 2016, S. 47f)

$$\begin{aligned} \text{Var} \{ \hat{\mathbf{u}} \} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2(n+\kappa)} \left(2(n+\kappa) \mathbf{J} \left(\sqrt{\Sigma_{\mathbf{e}}} \right)_i \left(\sqrt{\Sigma_{\mathbf{e}}} \right)_i^T \mathbf{J}^T \right) \\ &= \mathbf{J} \Sigma_{\mathbf{e}} \mathbf{J}^T. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Der zusätzliche Term der MUT in den Gl. 2.21, 2.22 entfällt ebenfalls für lineare funktionale Zusammenhänge, d. h. $\Delta \Sigma_{\hat{\mathbf{u}}} = \mathbf{0}$, da aus den Gl. 2.18a, 2.24a unmittelbar $\mathbf{f}(\mathcal{X}_0) = \mathbf{E} \{ \hat{\mathbf{u}} \}$ folgt.

Neben der SUT und der MUT existieren noch weitere Strategien, um Σ -Punkte für eine UT abzuleiten. Eine umfangreiche Übersicht über existierende UT findet sich in (Menegaz u. a. 2015). Erwähnenswert erscheint hier die Spherical Simplex Unscented Transformation (SSUT), die lediglich $m_{\text{UT}} = n+2$ Σ -Punkte benötigt und sich insbesondere für zeitkritische Anwendungen empfiehlt (Julier und Uhlmann 2002; Julier 2003; Lozano u. a. 2008). Durch Vorgabe des Gewichts w_0 , mit $0 \leq w_0 < 1$, ergeben sich die übrigen $n+1$ Gewichte zu

$$w_i = \frac{1 - w_0}{n + 1}. \quad (2.26)$$

Aus der modifizierten Gl. 2.18 resultieren die zugehörigen $n+2$ Σ -Punkte, d. h.,

$$\mathcal{X}_i = \tilde{\mathbf{I}} + \sqrt{\Sigma_{\mathbf{e}}} \boldsymbol{\kappa}_i. \quad (2.27)$$

Hierbei sind mit den Initialisierungswerten des i -ten Vektors $\boldsymbol{\kappa}_i$

$$\boldsymbol{\kappa}_0^{(1)} = [0], \quad (2.28a)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_1^{(1)} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2w_1}} \right], \quad (2.28b)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_2^{(1)} = \left[\frac{1}{\sqrt{2w_1}} \right], \quad (2.28c)$$

die übrigen $j = 2, \dots, n$ Elemente rekursiv zu bestimmen (Julier 2003), d. h.,

$$\boldsymbol{\kappa}_i^{(j)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_0^{(j-1)} \\ 0 \end{bmatrix} & i = 0 \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_i^{(j-1)} \\ \frac{-1}{\sqrt{j(j+1)w_i}} \end{bmatrix} & i = 1, \dots, j \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{j-1} \\ \frac{j}{\sqrt{j(j+1)w_i}} \end{bmatrix} & i = j + 1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Für $w_0 = 0$ reduziert sich die Anzahl an notwendigen Σ -Punkten auf das absolute Minimum von $n+1$ (Julier und Uhlmann 2002, 2004).

Die UT liefert für nichtlineare Problemstellungen Schätzwerte mit geringerer Verzerrung im Vergleich zur TS1-Lösung. Zur Abschätzung von Messunsicherheiten sind häufig nichtlineare Transformation zu berücksichtigen, für die sich der Einsatz der UT empfiehlt. So greifen bspw. Lösler u. a. (2015) zur Bildung des stochastischen Modells eines mobilen Lasertrackers in der Netzausgleichung auf die UT zurück, um die Verzerrung der Schätzwerte zu reduzieren. Wang und Zhao (2017) setzen die UT zur Parameterbestimmung einer ebenen Koordinatentransformation ein und demonstrieren, dass die Verwendung der TS1 zu verzerrten Schätzwerten führt. Aufgrund des geringeren numerischen Aufwands der UT gegenüber der MCM eignet sich dieses Verfahren vor allem für echtzeitfähige Anwendungen. Das erweiterte Kalman-Filter (EKF), welches häufig für diese Problemstellungen verwendet wird, setzt eine Linearisierung der nichtlinearen Modellgleichungen voraus. Wird hierbei die Annahme der lokalen Linearität verletzt, kann das EKF in einen instabilen Filter münden (Zhao u. a. 2008). Weiterhin sind die Schätzwerte des EKF verzerrt (Xu 1999). Die Integration der UT in das Kalman-Filter wird als Unscented Kalman Filter (UKF) bezeichnet. Vergleiche zwischen EKF und UKF zeigen, dass das UKF dem EKF überlegen ist und eine höhere Anpassungsgüte aufweist (Wan und Merwe 2000; Zhao u. a. 2008; Gustafsson und Hendeby 2012).

Beispiel 2.1.1 (Fortsetzung von S. 23)

Die Anwendung der Gl. 2.20 der SUT ergibt für die Teilstrecke und deren Dispersion

$$\hat{d} = \frac{1}{3} \left(2s + \sqrt{s^2 - 3\sigma_q^2} \right)$$

$$\hat{\sigma}_d^2 = \sigma_s^2 + \frac{2}{9} \left(2s^2 - 2s\sqrt{s^2 - 3\sigma_q^2} - 3\sigma_q^2 \right).$$

Aufgrund des Wurzelterms und in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Taylorreihenentwicklung 2. Ordnung ist $\hat{d} < s$ für $\sigma_q > 0$. Weiterhin vergrößert sich die Dispersion $\hat{\sigma}_d^2$ aufgrund von σ_q und wird nicht, wie bei der Anwendung der Taylorreihe 1. Ordnung, eliminiert.

Abbildung 2.6 zeigt schematisch die Verteilung der fünf Σ -Punkte $\mathcal{X}_i$ der SUT durch rote Diamanten. Das stochastische Modell Σ_e lässt sich im Beobachtungsraum durch eine Ellipse darstellen. Bei der Überführung in den Parameterraum krümmt bzw. deformiert sich diese Ellipse. Die Halbachsen der (deformierten) Ellipse wurden mit $\sqrt{n + \kappa}$ skaliert. Hierdurch wird deutlich, dass $\mathcal{X}_i$ neuralgische Punkte der (deformierten) Ellipse sind und somit die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Eingangsdaten approximieren. Der Σ -Punkt $\mathcal{X}_0$, welcher sich in der Mitte der (deformierten) Ellipse befindet, korrespondiert mit der TS1-Lösung. Die Lösung der SUT ist als dunkelrotes Dreieck dargestellt. Während drei Σ -Punkte keine Querabweichung aufweisen und sich im Mittel zu $\tilde{s}$ ergeben, weisen zwei Σ -Punkte ein $q_i \neq 0$ auf, sodass daraus Teilstrecken $d_i = \sqrt{s_i^2 - q_i^2} < s_i$ resultieren. Zum Vergleich sind zusätzlich die vier Σ -Punkte $\mathcal{X}_i$ der SSUT durch hellrote Quadrate dargestellt, die für $w_0 = 1/3$ ebenfalls auf der (deformierten) Ellipse liegen. Ein dunkelgraues Dreieck stellt die Lösung der

SSUT dar. Ein Unterschied zwischen beiden UT-Lösungen ist aufgrund der geringen Differenz nicht erkennbar.

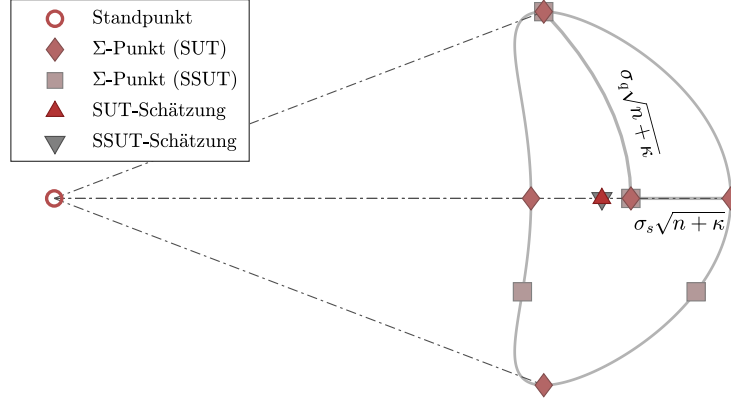


Abbildung 2.6: Unmaßstäbliche Darstellung der Messkonfiguration zur Bestimmung der Teilstrecke einer Prüfstrecke unter Berücksichtigung einer möglichen Querabweichung. Das stochastische Modell der Eingangsdaten entspricht im Beobachtungsraum einer Ellipse und wird beim Überführen in den Parameterraum deformiert. Die Halbachsen wurden mit $\sqrt{n + \kappa}$ skaliert. Die fünf Σ -Punkte der SUT befinden sich im Zentrum bzw. auf dem Rand dieser (deformierten) Ellipse und sind durch rote Diamanten symbolisiert. Der Σ -Punkte $\mathcal{X}_0$, welcher sich in der Mitte der (deformierten) Ellipse befindet, korrespondiert mit der TS1-Lösung. Das Ergebnis der SUT ist in Form eines dunkelroten Dreiecks dargestellt und liegt im Vergleich zur TS1-Lösung dichter am Standpunkt, der durch einen roten Kreis symbolisiert ist, sodass $\hat{d} < s$. Zusätzlich sind durch hellrote Quadrate die vier Σ -Punkte der SSUT mit dargestellt, die für $w_0 = 1/3$ ebenfalls auf dieser (deformierten) Ellipse liegen. Das dunkelgraue Dreieck symbolisiert das Ergebnis der SSUT, welches praktisch identisch mit der SUT-Lösung ist.

Zur besseren Einordnung und Bewertung der vorgestellten Verfahren sei die gemessene Strecke $s = 1$ m mit einer Standardabweichung von $\sigma_s = 1$ cm gegeben. Die Unsicherheit in der Querabweichung wird mit $\sigma_q = 10\sigma_s$ angenommen und stellt eine Extremkonfiguration dar. In Tabelle 2.1 sind die numerischen Ergebnisse gegenübergestellt. Hierbei sind TS1 und TS2 Taylorreihen der Funktion f , die f durch eine lineare bzw. quadratische Ersatzfunktion approximieren. Die Monte-Carlo-Methode wurde mit einer Stichprobengröße von $m_{\text{MCM}} = 10^6$ durchgeführt. Da die MCM asymptotisch gegen den wahren Wert $\tilde{d}$ strebt, kann diese als Referenzlösung betrachtet werden.

Tabelle 2.1: Gegenüberstellung der numerischen Ergebnisse einer mit $\sigma_s = 1$ cm gemessenen Teilstrecke $s = 1$ m einer Prüfstrecke und einer angenommenen Unsicherheit in der Querabweichung von $\sigma_q = 10\sigma_s$ für die Taylorreihe mit Gliedern 1. und 2. Ordnung sowie die Monte-Carlo-Methode, die Standard Unscented Transformation und die Spherical Simplex Unscented Transformation. Für die SSUT wurde ein mittleres Gewicht von $w_0 = 0,5$ gewählt.

Methode	$\hat{d}$ in m	$\hat{\sigma}_d$ in cm
TS1	1,000	1,00
TS2	0,995	1,22
SUT	0,995	1,23
SSUT	0,995	1,23
MCM	0,995	1,23

Die Ergebnisse von SUT, SSUT und TS2 weisen im relevanten Stellenbereich keine Differenzen zur MCM auf. Die größten Abweichungen sind bei Verwendung der linearen Transformation zu erkennen, da hier der Einfluss von σ_q vollständig unberücksichtigt bleibt. Die Abweichung der Strecke zwischen TS1 und MCM beträgt 5 mm. Die Differenz der Standardabweichung ist 2 mm.

Im Rahmen der Prüfstreckenbestimmung sind zum einen die gemessenen Strecken deutlich länger und zum anderen die Unsicherheiten in der Querabweichung um ein Vielfaches geringer. Bereits für $\sigma_q = \sigma_s = 1$ cm können keine Differenzen mehr zwischen den Verfahren im relevanten Stellenbereich ermittelt werden. $\square$

2.4 Zusammenfassung

Eine Vielzahl von funktionalen Zusammenhängen, die in der Praxis vorkommen, ist nichtlinear. Die statistischen Methoden, die üblicherweise zur Lösung dieser nichtlinearen Problemstellungen herangezogen werden, sind jedoch meist nur für lineare Modelle gültig. Eine Übertragung der statistischen Eigenschaften von linearen Modellen auf nichtlineare Modelle ist i. A. nicht möglich und führt zu verzerrten Ergebnissen und ggf. falschen Schlussfolgerungen. Auch wenn die Funktion nur moderat nichtlinear ist, darf ohne Berücksichtigung des stochastischen Modells nicht gemutmaßt werden, dass die Verzerrungen in den Schätzwerten vernachlässigbar sind, da das stochastische Modell den Einfluss der Nichtlinearität auf die Schätzwerte steuert, siehe Abbildung 2.4.

Ist die Dispersion der Eingangsdaten klein, verringert sich auch die Verzerrung der Schätzwerte, wie leicht aus den Gl. 2.6, 2.9 abgelesen werden kann. Stehen demnach für einen Messprozess Instrumente unterschiedlicher Genauigkeitsklassen zur Verfügung, so ist im Hinblick auf die zu erwartende Verzerrung der Schätzwerte das präzisere Messinstrument vorzuziehen. Sind Präzisionsmessungen, z. B. aufgrund von wirtschaftlichen Überlegungen, nicht sinnvoll möglich, so lässt sich das Bias u. a. durch die vorgestellten Methoden im Analyseprozess verringern. Diese Methoden lassen sich nach Julier u. a. (2000) in zwei Klassen unterteilen. Die erste Klasse approximiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ein- und Ausgangsdaten. Hierzu zählen die in Abschnitt 2.2 vorgestellte Monte-Carlo-Methode sowie die in Abschnitt 2.3 beschriebene Unscented Transformation. Die zweite Klasse approximiert hingegen die nichtlineare Funktion durch eine Ersatzfunktion und leitet aus dieser die statistischen Eigenschaften für das zugrunde liegende Problem analytisch ab. Die Ersatzfunktion entspricht üblicherweise der Taylorreihe der nichtlinearen Funktion, siehe Abschnitt 2.1.

Alle vorgestellten Methoden haben Vor- und Nachteile und sind problembezogen zu wählen. Hierbei spielen Faktoren wie die Komplexität des Problems, die Flexibilität des Verfahrens bzgl. möglicher Modellerweiterungen, wie bspw. das Hinzufügen neuer Modellparameter (Skalierbarkeit), die Akzeptanz der Ergebnisse – z. B. bei interdisziplinären Projekten –, die Größe des Bias der Schätzung und insbesondere

auch der Aufwand zur Integration und Weiterentwicklung bestehender Algorithmen eine wesentliche Rolle.

Die analytische Lösung mittels Taylorreihenentwicklung zählt zu den gebräuchlichsten Methoden in der Geodäsie, um Parameter und Dispersion abzuschätzen. Aufgrund der Empfehlung im GUM (JCGM100 2008; JCGM102 2011) ist die Akzeptanz der Methode mindestens für messende Disziplinen gegeben. Der Anschauungsgrad der analytischen Lösung ist jedoch meist begrenzt. Ein einmal implementiertes Modell liefert eindeutige und reproduzierbare Ergebnisse. Diese stehen meist schnell zur Verfügung, sodass sich das Verfahren z. B. für zeitkritische Problemstellungen eignet. Der Implementierungsaufwand für komplexe Problemstellungen ist hoch und geht häufig mit Vereinfachungen wie bspw. dem Vernachlässigen von Termen höherer Ordnung einher. Das Ändern der Parametrierung oder das Hinzufügen von Erweiterungen erfordert häufig eine Reimplementierung, sodass die Skalierbarkeit stark eingeschränkt ist. Aufwand und Bias der Ergebnisse hängen von der gewählten Ordnung der Taylorreihe ab. Aufgrund der hohen Präzision geodätischer Messmittel kann die Reihenentwicklung jedoch ohne nennenswerte Einschränkungen meist frühzeitig abgebrochen werden. Wie Beispiel 2.1.1 zeigt, ist eine Entwicklung über die 2. Ordnung hinaus meist unnötig, siehe auch die Ergebnisse in Tabelle 2.1. Ab wann die Taylorreihe ohne praktische Einschränkungen abgebrochen werden kann, ist jedoch in jedem Fall zu prüfen. Insbesondere ist zu validieren, ob ein Abbruch schon nach dem linearen Glied erfolgen darf. Die Ordnung der Taylorreihe kann mittels Monte-Carlo-Methode abgeschätzt werden, da diese für eine große Anzahl von Zufallsexperimenten gegen den wahren Wert strebt.

Die Monte-Carlo-Methode bietet die größte Flexibilität und erlaubt die Bearbeitung beliebig komplexer Probleme. Änderungen und Erweiterungen lassen sich meist schnell integrieren, sodass diese Methode eine hohe Skalierbarkeit aufweist und nicht auf einen bestimmten Gültigkeitsbereich beschränkt bleibt. Eine Integration in bestehende Algorithmen ist daher meist unproblematisch. Die Monte-Carlo-Methode ist transparent und anschaulich, sodass sie auch für Nichtmathematiker verständlich ist und akzeptiert wird, siehe auch die Abbildungen 2.4, 2.5. Insbesondere wird diese Methode vom GUM zur Approximation von Erwartungswert und Dispersion empfohlen (JCGM101 2008; JCGM102 2011). Die Monte-Carlo-Methode strebt asymptotisch gegen den wahren Wert. Die Größe der Abweichung zwischen wahren Wert und Schätzwert ist somit durch die Anzahl der Zufallsexperimente steuerbar. Die Anzahl der benötigten Zufallsexperimente ist jedoch auch gleichzeitig ein großer Nachteil dieser Methode. Rechenzeit und Ressourcenverbrauch steigen mit der Komplexität der Simulation und stehen der gewünschten numerischen Präzision bzw. der Richtigkeit der Ergebnisse konträr gegenüber. Aufgrund der Verwendung von Zufallszahlen lassen sich Ergebnisse nicht vollständig numerisch reproduzieren.

Die Unscented Transformation ist eine numerische Methode, welche die Ergebnisse der Taylorreihe 2. Ordnung approximiert. Diese Methode wird im GUM nicht explizit erwähnt. Konform zum Leitfaden ist sie dennoch, da grundsätzlich alle statistischen Methoden zulässig sind. Insbesondere wird die Taylorreihe höherer

Ordnung explizit empfohlen (JCGM100 2008, S. 19), wodurch auch der Einsatz der Unscented Transformation gerechtfertigt erscheint. Durch die Verwendung der neuralgischen Σ -Punkte anstelle von Zufallszahlen sind die Ergebnisse eindeutig numerisch reproduzierbar. Weiterhin kann hierdurch der numerische Aufwand gegenüber der Monte-Carlo-Methode deutlich reduziert werden. Die Ergebnisse der SSUT, SUT bzw. MUT beschränken sich auf eine Approximation 2. Ordnung. Für die meisten praktischen Anwendungen ist dies jedoch ausreichend und das verbleibende Bias vernachlässigbar, wie exemplarisch am Beispiel 2.1.1 einer Prüfstreckenbestimmung gezeigt wurde. Ähnlich wie die Monte-Carlo-Methode lässt sich die Unscented Transformation leicht in bestehende Applikationen integrieren. Zusätzliche Modellparameter lassen sich meist problemlos berücksichtigen. Im Vergleich zur analytischen Lösung weist die Unscented Transformation einen deutlich höheren Anschauungsgrad auf, wie bspw. Abbildung 2.6 zeigt. Aufgrund der begrenzten Anzahl an Σ -Punkten ist die Anschaulichkeit jedoch geringer als bei der Monte-Carlo-Methode.

3. Parameterschätzung

Gleichungssysteme, in denen mehr funktionale Zusammenhänge gebildet werden können als zur eindeutigen Parameterbestimmung nötig wären, werden als überbestimmt bezeichnet. Diese überbestimmten Gleichungssysteme besitzen nur dann eine eindeutige Lösung, wenn sie konsistent sind. Aufgrund der Unvollkommenheit in der Modellbildung, die ein beobachtetes Phänomen durch einen handhabbaren funktionalen Zusammenhang approximiert, aber auch durch die Imperfektion bei der Datenerfassung entstehen i. A. inkonsistente Gleichungssysteme, welche keine eindeutige Lösung für die zu schätzenden Parameter besitzen. Sowohl Gauß als auch Legendre entdeckten Anfang des 19. Jahrhunderts die sogenannte Methode der kleinsten Fehlerquadrate, die überbestimmte inkonsistente Gleichungssysteme unter der zusätzlichen Forderung nach einer minimalen Fehlerquadratsumme auflöst. Die Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme zählt heute zu den Standardverfahren in der Parameterschätzung und wird in der Geodäsie durch die DIN 18709-4 (2010) geregelt.

Allgemein kann das Lösen von überbestimmten inkonsistenten Gleichungssystemen den Optimierungsaufgaben zugeordnet werden, welche i. d. R. mittels Newtonverfahren iterativ gelöst werden. Optimierungsprobleme sind Extremwertbetrachtungen. Da das Maximum einer Funktion Ω für $\mathbf{u}$ gleichzeitig das Minimum von $-\Omega$ für $\mathbf{u}$ darstellt, beschränken sich die folgenden Ausführungen auf ein Minimierungsproblem.

Ein Standardverfahren in der numerischen Optimierung stellt die Sequentielle Quadratische Programmierung (SQP) dar, welches unter Verwendung der Lagrange-Funktion zur Berücksichtigung von Nebenbedingungen die Zielparameter mittels Newtonverfahren bestimmt. Die SQP wird insbesondere bei restringierten Optimierungsaufgaben mit nichtlinearen Nebenbedingungen empfohlen (Geiger und Kanzow 2002, S. 234; Faigle u. a. 2002, S. 303ff; Nocedal und Wright 2006, S. 529f). Das Verfahren ist geeignet, Optimierungsprobleme mit Gleichungen und Ungleichungen in den Nebenbedingungen effizient zu lösen. Da für diese Arbeit keine Optimierungsprobleme mit Ungleichungen in den Nebenbedingungen auftreten, beschränken sich die nachfolgenden Ausführungen auf restringierte Optimierungsaufgaben mit Gleichungsnebenbedingungen. Insbesondere lässt sich zeigen, dass Optimierungsaufgaben mit Ungleichungen in den Nebenbedingungen durch das Einführen von Schlupfvariablen in korrespondierende Optimierungsprobleme mit Gleichungsnebenbedingungen überführt und gelöst werden können (Nocedal und Wright 2006, S. 534).

In der Geodäsie werden quadratische Programme u. a. zum Lösen von Optimierungsaufgaben mit Ungleichungen in den Nebenbedingungen eingesetzt. Anschauliche Beispiele sind hierbei die Schätzung von zwingend positiven Vorfaktoren in der Varianz-Komponenten-Schätzung (Amiri-Simkooei 2016) oder das Ableiten von positiven Beobachtungsgewichten in der geodätischen Netzoptimierung (Roese-Koerner und Schuh 2014). Lösler u. a. (2019c) nutzen die SQP in der Formanalyse, um die Parameter des Hauptreflektors eines VLBI-Radioteleskops zu schätzen. Fang (2015) greift zur Entwicklung eines Algorithmus zur Bestimmung von Transformationsparametern auf die SQP zurück. Zur Bestimmung der Formparameter eines Zylinders mit elliptischer Grundfläche schlägt Lösler (2020a) die SQP vor. Lösler (2020b) untersucht mittels SQP, ob die geschätzten Modellparameter von der gewählten Koordinatendarstellung der Beobachtungen abhängig sind und unter welcher Voraussetzung identische Resultate erwartet werden dürfen. Lösler und Eschelbach (2020b) weisen mittels SQP nach, dass die zugesprochenen Eigenschaften einer sogenannten orthogonalen Regression nicht exklusiv sind, sondern Eigenschaften eines allgemeinen Optimierungsproblems darstellen.

Die in der Geodäsie gebräuchlichen Modelle, die bedingte Ausgleichung, das Gauß-Helmert-Modell (GHM) und das Gauß-Markov-Modell (GMM), sind quadratische Programme und können als Spezialfälle der SQP aufgefasst werden. Im Folgenden soll daher zunächst die SQP eingeführt werden. Anschließend wird in Abschnitt 3.2 eine mögliche Übertragung auf die in der Geodäsie gebräuchlichen Modelle aufgezeigt. Weiterhin werden die in Kapitel 2 angestellten Überlegungen übertragen, und es wird eine Abschätzung für die Verzerrung der Schätzung in Abschnitt 3.3 angegeben.

3.1 Sequentielle Quadratische Programmierung

Ausgehend von den zweimal stetig differenzierbaren Funktionen Ω und $\mathbf{f}$ lautet das zugehörige restringierte Optimierungsproblem

$$\min \Omega(\mathbf{u}) \tag{3.1a}$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \tag{3.1b}$$

Mithilfe der Lagrange-Funktion lässt sich unter Einführung der Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ die Ziel- bzw. Verlustfunktion mit der Nebenbedingung kombinieren, d. h.,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Omega - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}. \tag{3.2}$$

Die sogenannten Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKT) stellen in der nichtlinearen Optimierung die notwendigen und hinreichenden Optimalbedingungen zum Lösen von Gl. 3.2 bereit. Erfüllt ein Vektor $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^T & \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \end{bmatrix}$ die KKT-Bedingungen, so

wird dieser auch als KKT-Punkt des Optimierungsproblems bezeichnet. Für die hier ausschließlich betrachtete Optimierungsaufgabe mit Gleichungsnebenbedingungen gilt für den Gradienten der Lagrange-Funktion die notwendige Bedingung (Geiger und Kanzow 2002, S. 46f)

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{L}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) &= \mathbf{0}, \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{L}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Ist die Hessematrix der Lagrange-Funktion weiterhin positiv semidefinit auf $\ker \mathbf{J}$, d. h.,

$$\mathbf{y}^T \nabla_{\mathbf{uu}}^2 \mathcal{L}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \mathbf{y} \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{y} \mid \mathbf{J}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}; \mathbf{y} \neq \mathbf{0}\},$$

so ist auch die hinreichende Bedingung für ein (lokales) Minimum erfüllt (Geiger und Kanzow 2002, S. 245; Nocedal und Wright 2006, S. 332). Hierbei bezeichnet $\ker \mathbf{J}$ den Kern bzw. Nullraum der Matrix $\mathbf{J}$ (Burg u. a. 2012, S. 159).

Die Anwendung der KKT-Optimalbedingung auf die durch Gl. 3.2 gegebene Lagrange-Funktion liefert

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{L} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

wobei $\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{L} = \frac{1}{2}\nabla\Omega - \mathbf{J}^T\boldsymbol{\lambda}$ und $\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{L} = \mathbf{f}$ sind.

Die Anwendung des Newtonverfahrens liefert mittels Gl. A.23 den notwendigen Iterationsalgorithmus zur Bestimmung von $\hat{\mathbf{u}}$ und $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$, siehe Anhang A.3. Die Newtongleichung lautet

$$\boldsymbol{\Phi}'_k \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{\Phi}_k, \quad (3.4)$$

wobei $\Delta\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^k$ und $\Delta\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}^k$ die Zuschläge zu den Näherungswerten für die unbekannten Parameter $\mathbf{u}^k$ bzw. der Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}^k$ darstellen.

Die Jacobimatrix der KKT-Gleichung, siehe Gl. 3.3, die die ersten partiellen Ableitungen an der aktuellen Entwicklungsstelle $\mathbf{u}^k$ und $\boldsymbol{\lambda}^k$ enthält, lautet

$$\boldsymbol{\Phi}' = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{uu}}^2 \mathcal{L} & -\mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

wobei

$$\nabla_{\mathbf{uu}}^2 \mathcal{L} = \frac{1}{2}\nabla^2\Omega - \sum_{i=1} \lambda^{(i)} \mathbf{H}^{(i)}. \quad (3.6)$$

Hierbei sind $\nabla^2\Omega$ und $\mathbf{H}^{(i)}$ die Hessematrizen der Zielfunktion bzw. der i -ten Nebenbedingung, die wiederum an der Entwicklungsstelle $\mathbf{u}^k$, $\boldsymbol{\lambda}^k$ zu bilden sind. Durch Einsetzen der Gl. 3.3, 3.5 in Gl. 3.4 ergibt sich das zu lösende Normalgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{uu}}^2 \mathcal{L} & -\mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{L} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Durch Akkumulieren der jeweiligen Zuschläge $\Delta \mathbf{u}$ und $\Delta \boldsymbol{\lambda}$ ergeben sich die neuen Iterierten.

Wird in Gl. 3.7 von beiden Seiten der ersten Gleichung $\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}^k$ abgezogen, so gelangt man zu der gebräuchlichen Darstellung

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{uu}}^2 \mathcal{L} & -\mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \nabla \Omega \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

die eine direkte Schätzung der Lagrange-Multiplikatoren ermöglicht. Aus Gl. 3.8 wird weiterhin ersichtlich, dass in jedem Iterationsschritt das quadratische Teilproblem

$$\min \left(\frac{1}{2} \nabla \Omega^T \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \nabla_{\mathbf{uu}}^2 \mathcal{L} \Delta \mathbf{u} \right) \quad (3.9a)$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathbf{J} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.9b)$$

minimiert wird, wodurch der Name Sequentielle Quadratische Programmierung motiviert wird (Geiger und Kanzow 2002, S. 244).

Im Folgenden soll am Beispiel der Schätzung des Parameters einer Parabel, deren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung liegt, die Anwendung der SQP demonstriert werden. Dieses Beispiel ist (Lenzmann und Lenzmann 2004) entnommen. Ein sinngemäßes Beispiel findet sich u. a. auch in (Bähr 1985).

Beispiel 3.1.1 (Bestimmung einer Regressionsparabel)

Basierend auf den in Tabelle 3.1 gegebenen zwei Punkten ist der Modellparameter a einer Parabel zu schätzen, deren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Der Parameter a wirkt wie eine Skalierung und steuert die Öffnung der Parabel. Die Koordinatenkomponenten der beiden Punkte x_i bzw. y_i sind unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen und stellen somit keine fehlerfreien deterministischen Größen dar (Lenzmann und Lenzmann 2004).

Tabelle 3.1: In (Lenzmann und Lenzmann 2004) gegebene kartesische Koordinaten zur Schätzung des Parameters einer Parabel, deren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Die Koordinatenkomponenten x_i bzw. y_i sind unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen.

	P_1	P_2
x	2,5	4,0
y	4,8	5,0

Das funktionale Modell einer Parabel, deren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung liegt, lautet

$$ax_i^2 - y_i = 0.$$

Nach Einführung der Beobachtungsfehler e_{x_i} bzw. e_{y_i} für jede Koordinatenkomponente x_i bzw. y_i ergibt sich die in Gl. 3.1b zu berücksichtigende Nebenbedingung zu

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = a \begin{pmatrix} (x_1 - e_{x_1})^2 \\ (x_2 - e_{x_2})^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 - e_{y_1} \\ y_2 - e_{y_2} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

wobei die zu schätzenden unbekannten Parameter der Parabelparameter sowie die Beobachtungsabweichungen sind, d. h., $\mathbf{u} = (a \ e_{x_1} \ e_{y_1} \ e_{x_2} \ e_{y_2})^T$. Mit der Forderung nach minimaler Fehlerquadratsumme ergibt sich die zu minimierende Zielfunktion in Gl. 3.1a zu

$$\Omega = \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{u}},$$

wobei

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist, die an der Stelle des Modellparameters a eine Null und ansonsten eine Eins auf der Hauptdiagonalen aufweist. Zur Bestimmung der fünf unbekannten Parameter $\mathbf{u}$ stehen demnach sechs Gleichungen, vier Fehler- und zwei Bedingungsgleichungen, zur Verfügung, sodass mit einer Gesamtredundanz der Parameterschätzung von $f_{\text{DOF}} = 6 - 5 = 1$ ein (einfach) überbestimmtes Gleichungssystem vorliegt.

Um den Gradienten der Lagrange-Funktion $\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{L}$ an der Stelle $\mathbf{u}^k$ in Gl. 3.3 zu bilden, ist zum einen der Gradient der Zielfunktion $\nabla \Omega = 2\mathbf{W}\mathbf{u}^k$ und zum anderen die Jacobimatrix der Parabelgleichung, d. h.,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} (x_1 - e_{x_1}^k)^2 & -2a^k(x_1 - e_{x_1}^k) & 1 & 0 & 0 \\ (x_2 - e_{x_2}^k)^2 & 0 & 0 & -2a^k(x_2 - e_{x_2}^k) & 1 \end{pmatrix},$$

die als Nebenbedingung $\mathbf{f}$ nach Gl. 3.1 zu berücksichtigen ist, bereitzustellen. Zum Bilden der Jacobimatrix Φ' der KKT-Gleichung in Gl. 3.5 ist weiterhin die Hessematrix $\nabla_{\mathbf{uu}}^2 \mathcal{L}$ an der Stelle $\mathbf{u}^k$ zu bilden. Diese ergibt sich zum einen aus der Hessematrix der Zielfunktion,

$$\nabla^2 \Omega = 2\mathbf{W},$$

und zum anderen aus den beiden Hessematrizen,

$$\mathbf{H}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -2(x_1 - e_{x_1}^k) & 0 & 0 & 0 \\ -2(x_1 - e_{x_1}^k) & 2a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2(x_2 - e_{x_2}^k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - e_{x_2}^k) & 0 & 0 & 2a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

der beiden auftretenden Nebenbedingungen in $\mathbf{f}$. Mittels Gl. 3.6 ergibt sich die Hessematrix der Lagrange-Funktion zu

$$\nabla_{\mathbf{uu}}^2 \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda^{(1)}(x_1 - e_{x_1}^k) & 0 & 2\lambda^{(2)}(x_2 - e_{x_2}^k) & 0 \\ 2\lambda^{(1)}(x_1 - e_{x_1}^k) & 1 - 2\lambda^{(1)}a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda^{(2)}(x_2 - e_{x_2}^k) & 0 & 0 & 1 - 2\lambda^{(2)}a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und das zu lösende Normalgleichungssystem lautet gemäß Gl. 3.8

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{uu}}^2 \mathcal{L} & -\mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Wu} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}.$$

In Tabelle 3.2 sind die Ergebnisse der einzelnen Iterationsschritte zusammengefasst, wobei als Näherungswerte $\mathbf{u}^{k=0} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ für die fünf Parameter und $\boldsymbol{\lambda}^{k=0} = (0 \ 0)^T$ für die beiden Lagrange-Multiplikatoren für die 1. Iteration gewählt wurden. Insgesamt sind sieben Iterationen notwendig, um die gewählte Abbruchbedingung $\|\Delta \mathbf{u}\|_\infty \leq 10^{-11}$ zu erfüllen. Die von Lenzmann und Lenzmann (2004) angegebene Lösung ist in der letzten Tabellenzeile zum Vergleich angegeben und wird aufgrund der verminderten Stellenausgabe bereits nach vier Iterationsschritten erreicht. Die geringe Differenz in $\hat{e}_{y_1}$ ist auf eine unterschiedliche Rundung der Ergebnisse zurückzuführen, siehe auch (Lösler 2020b).

Tabelle 3.2: Mittels SQP geschätzte Parameter $\hat{\mathbf{u}}^k$ der unbekannten Parameter der Regressionsparabel für jeden Iterationsschritt k . In der mit einer Raute (#) gekennzeichneten letzten Tabellenzeile ist zum Vergleich die von Lenzmann und Lenzmann (2004) publizierte Lösung angegeben.

k	$\hat{a}$	$\hat{e}_{x_1}$	$\hat{e}_{y_1}$	$\hat{e}_{x_2}$	$\hat{e}_{y_2}$
1	0,4382786958	-0,3962996445	0,0792599289	0,2476872778	-0,0309609097
2	0,4441916427	-0,7125652690	0,2709488863	0,5751333140	-0,1771435687
3	0,4549157393	-0,6682951988	0,2313540233	0,6193286762	-0,2015619653
4	0,4562132544	-0,6649090634	0,2302491794	0,6231591212	-0,2022514319
5	0,4562186348	-0,6648991825	0,2302464286	0,6231699011	-0,2022526602
6	0,4562186348	-0,6648991825	0,2302464286	0,6231699012	-0,2022526602
7	0,4562186348	-0,6648991825	0,2302464286	0,6231699012	-0,2022526602
#	0,4562	-0,6649	0,2303	0,6232	-0,2023

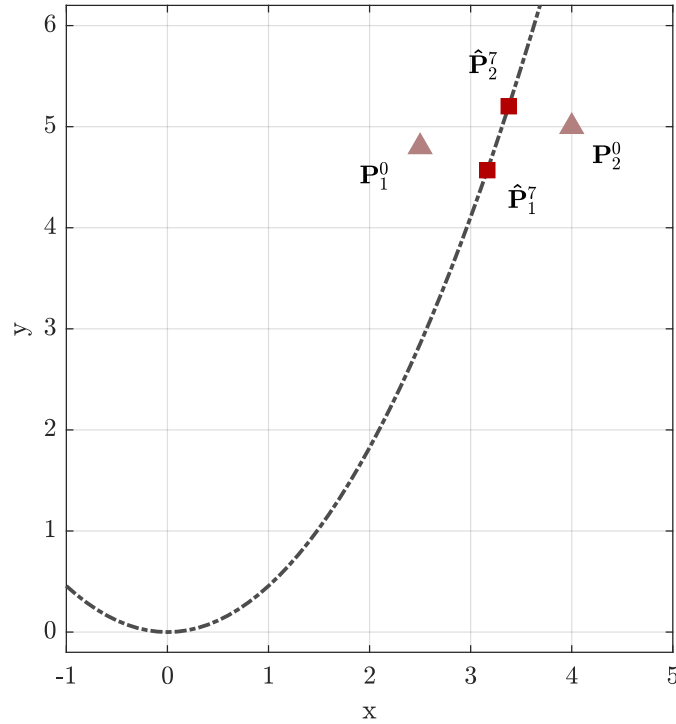


Abbildung 3.1: Visualisierung der geschätzten Regressionsparabel, die sich nach sieben Iterationen mittels SQP ergibt, durch eine dunkelgraue Strichpunktlinie. Die Punktbeobachtungen $\mathbf{P}_1$ bzw. $\mathbf{P}_2$ aus Tabelle 3.1 sind als hellrote Dreiecke dargestellt, und die um $(\hat{e}_{x_1} \ \hat{e}_{y_1} \ \hat{e}_{x_2} \ \hat{e}_{y_2})^T$ korrigierten Koordinaten der beiden Punkte $\hat{\mathbf{P}}_1$ bzw. $\hat{\mathbf{P}}_2$ sind durch rote Quadrate symbolisiert.

Abbildung 3.1 zeigt die nach sieben Iterationen erhaltene Regressionsparabel, deren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Die in Tabelle 3.1 gegebenen Punkte sind durch hellrote Dreiecke symbolisiert. Rote Quadrate stellen die um die Beobachtungsabweichungen $(\hat{e}_{x_1} \ \hat{e}_{y_1} \ \hat{e}_{x_2} \ \hat{e}_{y_2})^T$ korrigierten Punkte dar. Aufgrund von $\mathbf{W}$ stehen diese punktwweisen Beobachtungsabweichungen senkrecht auf der Regressionsparabel (Lösler 2020a; Lösler und Eschelbach 2020b), weshalb diese spezielle Lösung des Optimierungsproblems auch als orthogonale Regression bzw. Orthogonal-Distance-Fit bezeichnet wird (Späth 1996). $\square$

3.2 SQP im Kontext der geodätischen Ausgleichsrechnung

In Abschnitt 3.1 wurde für die Parameterschätzung die SQP eingeführt. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die in der Geodäsie eingesetzten Verfahren quadratische Programme sind und sich als Spezialfälle der SQP darstellen lassen. Aus der Forderung nach minimaler (gewichteter) Fehlerquadratsumme resultiert die zu minimierende quadratische Zielfunktion (Koch 2007, S. 65)

$$\Omega = \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{u}} \quad (3.10)$$

mit der symmetrischen Gewichtsmatrix $\mathbf{W}$ und dem Vektor $\mathbf{u}$, der die unbekannten Parameter enthält. Durch Aufspaltung des Parametervektors $\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^T & \mathbf{x}^T \end{bmatrix}$ in den

Anteil der Modellparameter $\mathbf{x}$ und in den Vektor der Beobachtungsabweichungen $\mathbf{e}$ ergibt sich Gl. 3.10 zu

$$\Omega = \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} & \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

wobei $\mathbf{W}_e$ und $\mathbf{W}_x$ die zu $\mathbf{e}$ und $\mathbf{x}$ gehörenden Gewichtungen darstellen. Auch wenn $\mathbf{W}$ eine vollbesetzte Matrix sein kann, wird i. A. keine Abhängigkeit bei der Gewichtung zwischen den Parametervektoren $\mathbf{e}$ und $\mathbf{x}$ angenommen, wodurch sich die Nebendiagonalmatrizen $\mathbf{W}_{ex} = \mathbf{W}_{xe}^T = \mathbf{0}$ in Gl. 3.11 begründen.

Die Matrix $\mathbf{W}$ ist das a-priori vorzugebende stochastische Modell der Ausgleichsrechnung und positiv semidefinit. Sie resultiert i. A. aus der Dispersion der Eingangsdaten (Jäger u. a. 2005, S. 148ff). Aus Erfahrungen mit dem verwendeten Instrumentarium, Herstellerspezifikationen, Kalibrierungen und Vergleichsmessungen, aber auch aus Kenntnissen zum Messprozess erfolgt üblicherweise die Abschätzung von $\mathbf{W}_e = \Sigma_e^{-1}$, siehe hierzu (JCGM100 2008; JCGM101 2008; JCGM102 2011). Unter Berücksichtigung der Theorie der Elementarfehler nach Gl. 2.2 bzw. des zentralen Grenzwertsatzes (Carlton und Devore 2017, S. 293ff) kann

$$\tilde{\mathbf{e}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_e) \quad (3.12)$$

unterstellt werden, siehe Kapitel 2.

Die Gewichtsmatrix $\mathbf{W}_x$ muss nur in wenigen Anwendungsfällen a-priori vorliegen. Hierzu zählen die rekursive Parameterschätzung (Koch 1999, S. 177f), das Kalman-Filter (Kalman 1960) oder die Partikelfiltermethode (Simon 2006, S. 466ff). Hierbei ergibt sich $\mathbf{W}_x$ aus einer vorangegangenen Ausgleichung bzw. dem letzten Filterschritt. Üblicherweise wird das Minimum für die Zielfunktion Ω ausschließlich für die Beobachtungsabweichungen $\mathbf{e}$ gefordert, sodass $\mathbf{W}_x = \mathbf{0}$ gilt. Berücksichtigt man weiterhin, dass in Gl. 3.8 die Lagrange-Multiplikatoren stets mit $\boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{0}$ initialisiert werden können, so entfällt der Summationsterm in Gl. 3.6, und das Normalgleichungssystem unter Berücksichtigung der Parameteraufteilung lautet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_e & \mathbf{0} & -\mathbf{J}_e^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_x^T \\ \mathbf{J}_e & \mathbf{J}_x & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e} \\ \Delta \mathbf{x} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{W}_e \mathbf{e}^k \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

wobei die zweite Zeile aus Konventionsgründen mit -1 multipliziert wurde. Die erste und die dritte Zeile von Gl. 3.13 lassen sich mit der Beziehung $\Delta \mathbf{e} = \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{e}^k$ umschreiben zu

$$\mathbf{W}_e \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_e^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{J}_e \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{J}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f} - \mathbf{J}_e \mathbf{e}^k = \mathbf{0}. \quad (3.14b)$$

Hierdurch entfällt der Term $\mathbf{W}_e \mathbf{e}^k$ auf der rechten Seite, woraus das Normalgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_e & \mathbf{0} & -\mathbf{J}_e^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_x^T \\ \mathbf{J}_e & \mathbf{J}_x & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} \\ \Delta \mathbf{x} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

resultiert. Hierbei ist $\mathbf{w} = \mathbf{f} - \mathbf{J}_e \mathbf{e}^k$ der sogenannte Widerspruchsvektor.

Mittels der in Anhang A.4 beschriebenen Blockzerlegung lassen sich die Beobachtungsabweichungen und die Lagrange-Multiplikatoren schrittweise eliminieren, sodass ein kompaktes Normalgleichungssystem entsteht. Mit $\Sigma_e = \mathbf{W}_e^{-1}$ lautet das um die Beobachtungsabweichungen reduzierte Normalgleichungssystem

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{J}_x^T \\ \mathbf{J}_x & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_e \end{bmatrix} \Sigma_e \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{J}_e^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

bzw. nach weiterer Zusammenfassung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{J}_x^T \\ \mathbf{J}_x & \mathbf{J}_e \Sigma_e \mathbf{J}_e^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Die Beobachtungsabweichungen sind nun nur noch indirekt parametrisiert, lassen sich mittels Gl. 3.14a bei Bedarf jedoch explizit bestimmen. Die erneute Anwendung von Gl. A.29 auf das bereits um die Beobachtungsabweichungen reduzierte Modell eliminiert zusätzlich die Lagrange-Multiplikatoren, sodass der Parametervektor nur noch die Modellparameter $\mathbf{x}$ enthält. Das zusätzlich um $\boldsymbol{\lambda}$ reduzierte Normalgleichungssystem lautet

$$(\mathbf{J}_x^T \mathbf{W}_w \mathbf{J}_x) \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{J}_x^T \mathbf{W}_w \mathbf{w}, \quad (3.17)$$

wobei $\mathbf{W}_w = (\mathbf{J}_e \Sigma_e \mathbf{J}_e^T)^{-1}$ die Gewichtsmatrix der Widersprüche ist. Durch Einsetzen von Gl. 3.17 in die zweite Zeile von Gl. 3.16 ergeben sich die Lagrange-Multiplikatoren zu

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \left(\mathbf{W}_w \mathbf{J}_x (\mathbf{J}_x^T \mathbf{W}_w \mathbf{J}_x)^{-1} \mathbf{J}_x^T \mathbf{W}_w - \mathbf{W}_w \right) \mathbf{w}, \quad (3.18)$$

sodass die Anwendung von Gl. 3.14a die zuvor eliminierten Beobachtungsabweichungen

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{J}_e^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} \quad (3.19)$$

liefert.

Gl. 3.16 entspricht der verbreiteten Darstellung für das (strenge) Gauß-Helmert-Modell (GHM) (Böck 1961; Bähr 1985; Lenzmann und Lenzmann 2004; Neitzel 2010). Durch Reduktion des GHM um die Lagrange-Multiplikatoren ergibt sich mit Gl. 3.17 die Darstellung im Gauß-Markov-Modell (GMM) (Reinking 2008). Gl. 3.17 wird häufig auch als überführtes bzw. transformiertes GMM bezeichnet (Drixler 1993, S. 20; Jäger u. a. 2005, S. 171). Seltener findet sich auch der Begriff der quasivermittelnden Beobachtungen (Wolf 1997, S. 63; Kampmann und Renner 2004). Das Modell der bedingten Ausgleichung enthält keine zusätzlichen Modellparameter (Höpcke 1980, S. 142ff; Jäger u. a. 2005, S. 161ff) und kann aus Gl. 3.15 unmittelbar abgelesen werden, d. h.,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_e & -\mathbf{J}_e^T \\ \mathbf{J}_e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Die Gl. 3.16, 3.17, 3.20 beschreiben quadratische Programme und können als Spezialfälle eines allgemeinen Optimierungsproblems angesehen werden, die auf das explizite Bilden der zweiten partiellen Ableitungen für die Nebenbedingungen verzichten. Es ist daher wenig überraschend, dass diese Gleichungen Ergebnisse liefern, die identisch mit der SQP-Lösung nach Gl. 3.7 sind. Die Berücksichtigung der zweiten Ableitung wird zwar u. a. für das Gauß-Markov-Modell empfohlen, um das Konvergenzverhalten mindestens in der Nähe des Minimums zu erhöhen (Schenk und Maier 1976; Lenzmann und Lenzmann 2007), findet aber in der Geodäsie gegenwärtig kaum Anwendung. Entsprechende Überlegungen für das Gauß-Helmert-Modell finden sich u. a. in (Bopp und Krauss 1978; Bähr 1985). Sind die Näherungswerte hingegen nicht in der Nähe des gesuchten Optimums, kann durch die Hinzunahme der zweiten Ableitung die Konvergenzgeschwindigkeit sinken oder das Gleichungssystem divergieren, wie Schenk und Maier (1976) in Untersuchungen zur Auswertung geodätischer Netze zeigen. Neben dem erhöhten Aufwand zum Bereitstellen der Hessematrizen dürfte dies einer der Hauptgründe für das Weglassen der zweiten Ableitung in der geodätischen Ausgleichsrechnung sein.

Nachfolgend wird das Beispiel 3.1.1, welches (Lenzmann und Lenzmann 2004) entnommen ist, erneut aufgegriffen. Der Parameter der Parabel, deren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung liegt, und die Beobachtungsabweichungen der Punkte werden mittels GHM nach den Gl. 3.16, 3.19 bestimmt.

Beispiel 3.1.1 (Fortsetzung von S. 42)

Erfolgt die Schätzung der unbekannten Parameter der Regressionsparabel gemäß dem Vorschlag von Lenzmann und Lenzmann (2004) mittels Gl. 3.16 im GHM, so ergeben sich die in Tabelle 3.3 zusammengefassten Ergebnisse für die einzelnen Iterationsschritte k . Die Beobachtungsabweichungen wurden für jeden Iterationsschritt mittels Gl. 3.19 bestimmt. Die von Lenzmann und Lenzmann (2004) publizierten Resultate sind in der letzten Tabellenzeile zum Vergleich angegeben und werden aufgrund der verminderten Stellenausgabe bereits nach sechs Iterationsschritten erreicht. Die Differenz in $\hat{e}_{y_1}$ ist auf eine unterschiedliche Rundung der Ergebnisse zurückzuführen, siehe auch (Lösler 2020b). Als Näherungswerte wurden wiederum $\mathbf{x}^{k=0} = \mathbf{1}$ bzw. $\mathbf{e}^{k=0} = \mathbf{0}$ gewählt.

Das Gauß-Helmert-Modell verzichtet auf die zweiten partiellen Ableitungen in der Modellbildung, indem in jedem Iterationsschritt die Lösung für die Lagrange-Multiplikatoren der letzten Iteration verworfen und der Vektor zu $\boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{0}$ gesetzt wird. Insgesamt benötigt das GHM zwölf Iterationen, um die gewählte Abbruchbedingung $\|\Delta \mathbf{u}\|_\infty \leq 10^{-11}$ zu erfüllen. Im Vergleich zur SQP mit Berücksichtigung der zweiten partiellen Ableitungen sind demnach fünf Iterationsschritte mehr notwendig, um die Lösung zu reproduzieren, vgl. Tabelle 3.2.

Der Vorteil, den die Sequentielle Quadratische Programmierung im Konvergenzverhalten in diesem Beispiel aufweist, gilt jedoch nur für Startwerte $\mathbf{u}^{k=0}$, die bereits in der Nähe des gesuchten Optimums liegen, und darf nicht verallgemeinert werden, wie u. a. Untersuchungen von Schenk und Maier (1976) zeigen. Für den bspw. ungüns-

Tabelle 3.3: Mittels Gauß-Helmert-Modell geschätzte Parameter $\hat{\mathbf{u}}^k$ der unbekannten Parameter der Regressionsparabel für jeden Iterationsschritt k . In der mit einer Raute (#) gekennzeichneten letzten Tabellenzeile ist zum Vergleich die von Lenzmann und Lenzmann (2004) publizierte Lösung angegeben.

k	$\hat{a}$	$\hat{e}_{x_1}$	$\hat{e}_{y_1}$	$\hat{e}_{x_2}$	$\hat{e}_{y_2}$
1	0,4382786958	-0,3962996445	0,0792599289	0,2476872778	-0,0309609097
2	0,4395689646	-0,7224720820	0,2845753131	0,5576549155	-0,1695454552
3	0,4556137982	-0,6640088432	0,2343838492	0,6215965880	-0,2053984678
4	0,4561351746	-0,6650443079	0,2306672979	0,6228403819	-0,2023198021
5	0,4562128178	-0,6649074193	0,2302808507	0,6231453886	-0,2022619725
6	0,4562181144	-0,6649000717	0,2302490731	0,6231678328	-0,2022530996
7	0,4562185976	-0,6648992365	0,2302466453	0,6231697452	-0,2022527164
8	0,4562186316	-0,6648991879	0,2302464454	0,6231698882	-0,2022526631
9	0,4562186346	-0,6648991828	0,2302464300	0,6231699002	-0,2022526605
10	0,4562186348	-0,6648991825	0,2302464287	0,6231699011	-0,2022526602
11	0,4562186348	-0,6648991825	0,2302464286	0,6231699012	-0,2022526602
12	0,4562186348	-0,6648991825	0,2302464286	0,6231699012	-0,2022526602
#	0,4562	-0,6649	0,2303	0,6232	-0,2023

tigeren Startwert $\mathbf{x}^{k=0} = 10^{-4}$ benötigt die SQP bereits 30 Iterationen, während die Anwendung von Gl. 3.16 auch hier nach zwölf Schritten konvergiert und die gewählte Abbruchbedingung erfüllt. $\square$

Liegt mit $\mathbf{W}$ ein geeignetes stochastisches Modell für die Eingangsgrößen vor, so liefert die Ausgleichsrechnung neben den Schätzwerten $\hat{\mathbf{u}}$ und $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ auch eine Schätzung der zugehörigen Dispersionsmatrix (Jäger u. a. 2005, S. 213ff). Aus der inversen Jacobimatrix der KKT-Gleichung in Gl. 3.5,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \mathcal{L} & -\mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (3.21)$$

können

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{u}}} = \boldsymbol{\Sigma}_{11}, \quad (3.22a)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} = -\boldsymbol{\Sigma}_{22}, \quad (3.22b)$$

direkt abgelesen werden (Förstner und Wrobel 2016, S. 106). Liegt bereits ein reduziertes Normalgleichungssystem vor, so lassen sich die einzelnen Blockmatrizen in Gl. 3.21 mittels Varianz-Kovarianz-Fortpflanzungsgesetz 1. Ordnung approximieren. Die quadratische Gewichtsmatrix der Widersprüche $\mathbf{W}_{\mathbf{w}}$ ist positiv definit und somit regulär. Ist $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}$ weiterhin spaltenregulär, so existiert die Inverse der Normalgleichungsmatrix in Gl. 3.17 (Zurmühl und Falk 1984, S. 87). Ist $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}$ hingegen nicht spaltenregulär, so ist zum Auflösen des Normalgleichungssystems in Gl. 3.17 eine verallgemeinerte Inverse nötig (Zurmühl und Falk 1984, S. 112ff). In Gl. 3.54 wird

zur Bildung einer solchen verallgemeinerten Inverse die Verwendung zusätzlicher Restriktionen vorgeschlagen. Aus den Gl. 3.17, 3.18 folgen

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} = \left(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{w}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \right)^{-}, \quad (3.23a)$$

$$\Sigma_{\hat{\lambda}} = \mathbf{W}_{\mathbf{w}} - \mathbf{W}_{\mathbf{w}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{w}}, \quad (3.23b)$$

sodass die Konfigurationsmatrix der linearen Transformation (Höpcke 1980, S. 162)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Sigma_{\mathbf{e}} \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^T \Sigma_{\hat{\lambda}} \mathbf{J}_{\mathbf{e}} \\ \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{w}} \mathbf{J}_{\mathbf{e}} \\ -\Sigma_{\hat{\lambda}} \mathbf{J}_{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

lautet. Aus der Anwendung des Varianz-Kovarianz-Fortpflanzungsgesetzes resultiert die Dispersion 1. Ordnung

$$\Sigma = \mathbf{F} \Sigma_{\mathbf{e}} \mathbf{F}^T, \quad (3.25)$$

welche für $\lambda^k = \mathbf{0}$ identisch mit Gl. 3.21 ist.

Die Variation der Eingangsgrößen lässt weiterhin eine Schätzung für den (globalen) a-posteriori Varianzfaktor der Gewichtseinheit

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{u}}}{f_{\text{DOF}}} \quad (3.26)$$

zu, wenn die Gesamtredundanz der Parameterschätzung $f_{\text{DOF}} > 0$ ist. Dieser Varianzfaktor kann zur Skalierung der Dispersionsmatrix verwendet werden. Die Skalierung wird mitunter kritisch gesehen (Xu 2013; Schwarz und Hennes 2017), da die Schätzung von $\hat{\sigma}_0^2$ voraussetzt, dass die Stichprobe genügend groß ist, d. h., $f_{\text{DOF}} \gg 0$, und die Variationen von $\hat{\mathbf{u}}$ repräsentativ im Sinne des spezifizierten stochastischen Modells $\mathbf{W}$ sind. Insbesondere bei direkten Wiederholungsmessungen ist die resultierende Streuung der Parameter aufgrund der ähnlichen Messbedingungen häufig geringer, sodass lediglich die Messpräzision durch $\hat{\sigma}_0^2$ modelliert wird und nicht die Messunsicherheit (Brinkmann 2012, S. 38). Der Varianzfaktor kann dennoch zur Modellbewertung herangezogen werden. Insbesondere wenn der geschätzte Varianzfaktor $\hat{\sigma}_0^2$ deutlich größer als dessen Erwartungswert $E\{\hat{\sigma}_0^2\} = \sigma_0^2$ ist (Jäger u. a. 2005, S. 182; Lehmann und Lösler 2016), sollte die Konformität des funktionalen Modells kritisch überprüft werden.

3.3 Bias-korrigierte Parameterschätzung

In Kapitel 2 konnte gezeigt werden, dass die Verwendung einer linearen Ersatzfunktion anstelle des nichtlinearen Problems zu einer Verzerrung in den Schätzwerten führt, da sich die statistischen Eigenschaften des linearen Ersatzmodells i. A. nicht auf den originären nichtlinearen Fall übertragen lassen. Wie stark die Schätzwerte

hierbei durch die Nichtlinearität des funktionalen Modells verzerrt werden, wird durch die Dispersion der Eingangsgrößen gesteuert, wie Gl. 2.8 zeigt. Während in Kapitel 2 das Bias für nichtredundante Modelle bzw. Minimalkonfigurationen hergeleitet wurde, soll im Folgenden der überbestimmte Fall betrachtet werden. Das Miteinbeziehen der Hessematrix, wie es das in Anhang A.3 beschriebene Newtonverfahren motiviert, beeinflusst in Abhängigkeit der gewählten Näherungswerte zwar das Konvergenzverhalten, führt aber nicht zu anderen geschätzten Parametern, wie Beispiel 3.1.1 exemplarisch zeigt; siehe hierzu auch die Untersuchungen von Schek und Maier (1976). Die in Abschnitt 3.1 vorgestellte Parameterschätzung mittels SQP löst zwar nach Gl. 3.9 in jedem Iterationsschritt ein quadratisches Teilproblem, die auftretende Nebenbedingung $\mathbf{f}$ wird jedoch nur in linearisierter Form berücksichtigt (Geiger und Kanzow 2002, S. 244).

Die geschätzten Parameter resultieren somit wiederum aus dem linearen Ersatzproblem, dessen statistische Eigenschaften i. A. nicht auf das zugrunde liegende nichtlineare Problem übertragen werden können (Neitzel 2004a, S. 20). Diese Einschränkung existiert auch für Problemstellungen, für die ein direktes Lösungsverfahren existiert. Beispiel 2.2.1 ist hierbei eine anschauliche Problemstellung, bei der der Erwartungswert der nichtlinearen Transformation $E\{\mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}})\}$ nicht dem transformierten Erwartungswert $\mathbf{f}(E\{\hat{\mathbf{u}}\})$ entspricht. Sowohl die Schätzwerte der bedingten Ausgleichung als auch die Schätzwerte des GHM bzw. des GMM sind somit nur im linearen Modell erwartungstreu. Für nichtlineare Modelle ergeben sich folglich verzerrte Schätzwerte.

Box (1971) leitet anschaulich das Bias für Modelle her, die einen expliziten funktionalen Zusammenhang $\mathbf{l} - \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ aufweisen. Hierzu entwickelt der Autor den nichtlinearen funktionalen Zusammenhang in einer Taylorreihe mit Gliedern 2. Ordnung. Äquivalente Darstellungen finden sich auch in der geodätischen Literatur, siehe hierzu (Teunissen und Knickmeyer 1988; Teunissen 1989; Xu und Grafarend 1996; Lösler u. a. 2020). Die Entwicklung von $\mathbf{f}$ in einer Taylorreihe mit Gliedern 3. Ordnung (TS3) wird von Jeudy (1988) diskutiert. Auch wenn hierdurch eine bessere Anpassung im Sinne eines geringeren Bias zu erwarten ist, steigt der Berechnungsaufwand deutlich. Der mögliche Genauigkeitsgewinn durch die Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung muss im Hinblick auf den simultan ansteigenden Berechnungsaufwand sinnvoll abgestimmt werden. Entsprechend den Ausführungen in Kapitel 2 beschränkt sich die folgende Darstellung auf eine Taylorreihe mit Gliedern 2. Ordnung als Ersatzfunktion. Hierzu werden zunächst die wesentlichen Gleichungen zur Abschätzung des Bias mit expliziten funktionalen Modellen wiedergegeben. Anschließend erfolgt eine Übertragung auf den verallgemeinerten Fall mit implizitem funktionalem Modell.

Ausgehend von dem nichtlinearen Problem in expliziter Darstellung

$$\mathbf{l} - \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad (3.27)$$

wobei $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\tilde{\mathbf{e}}$ die wahren Modellparameter und Beobachtungsabweichungen darstellen, sind die Modellparameter $\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}$ im Sinne der Methode der kleinsten

(gewichteten) Fehlerquadratsumme zu bestimmen, d. h., $\mathbf{W}_x = \mathbf{0}$. Die Zielfunktion lautet (Koch 2007, S. 65)

$$\Omega = (\mathbf{1} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}))^T \mathbf{W}_e (\mathbf{1} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})) = \min, \quad (3.28)$$

wobei $\mathbf{W}_e$ die positiv definite Gewichtsmatrix der normalverteilten Beobachtungsabweichungen $\tilde{\mathbf{e}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}_e^{-1})$ beschreibt. Die Entwicklung von $\mathbf{f}$ in einer Taylorreihe mit Gliedern 2. Ordnung liefert in Übereinstimmung mit Gl. 2.10

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}_x \tilde{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{e}}_x^T \mathbf{H}_{x,i} \tilde{\mathbf{e}}_x]_i, \quad (3.29)$$

wobei $\mathbf{J}_x$ und $\mathbf{H}_x$ die an der Entwicklungsstelle $\tilde{\mathbf{x}}$ gebildete Jacobi- bzw. Hessematrix von $\mathbf{f}$ darstellt. Aus der Substitution von Gl. 3.29 in Gl. 3.27 resultieren die geschätzten Beobachtungsabweichungen

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{1} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_x \tilde{\mathbf{e}}_x - \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{e}}_x^T \mathbf{H}_{x,i} \tilde{\mathbf{e}}_x]_i, \quad (3.30)$$

die sich in Abhängigkeit von den Parameterabweichungen $\tilde{\mathbf{e}}_x$ ergeben. Umgekehrt existiert eine inverse Funktion, die für jede wahre Beobachtungsabweichung $\tilde{\mathbf{e}}$ eine korrespondierende Parameterabweichung $\tilde{\mathbf{e}}_x$ erzeugt. Entwickelt in einer Taylorreihe, die Terme ab der 2. Ordnung wiederum vernachlässigt, ergibt sich diese zu

$$\tilde{\mathbf{e}}_x = \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_{\epsilon,i} \tilde{\mathbf{e}}]_i, \quad (3.31)$$

wobei $\mathbf{J}_\epsilon$ bzw. $\mathbf{H}_\epsilon$ die an der Stelle der wahren Beobachtungsabweichungen $\tilde{\mathbf{e}}$ gebildete Jacobi- bzw. Hessematrix ist. Ein Term 0. Ordnung existiert hierbei nicht, da aus $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$ unmittelbar $\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}$ folgt.

Der Erwartungswert für den linearen Term in Gl. 3.31 lautet gemäß Gl. 2.11a

$$\mathbb{E} \{ \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}} \} = \mathbf{J}_\epsilon \mathbb{E} \{ \tilde{\mathbf{e}} \} = \mathbf{0}, \quad (3.32)$$

wodurch sich mit Berücksichtigung von Gl. 2.3 für lineare Funktionen eine erwartungstreue Schätzung der Parameter ergibt, d. h., $\mathbb{E} \{ \tilde{\mathbf{e}}_x \} = \mathbf{0}$. Die Anwendung von Gl. 2.13a liefert den Erwartungswert für den quadratischen Term in Gl. 3.31, d. h.,

$$\mathbb{E} \{ [\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_{\epsilon,i} \tilde{\mathbf{e}}] \} = \text{tr} (\mathbf{H}_{\epsilon,i} \mathbf{W}_e^{-1}), \quad (3.33)$$

sodass sich in Übereinstimmung mit den Gl. 2.13 Erwartungswert und Dispersion zu (Box 1971; Wang und Zhao 2019; Lösler u. a. 2020)

$$\mathbb{E} \{ \tilde{\mathbf{e}}_x \} = \frac{1}{2} [\text{tr} (\mathbf{H}_{\epsilon,i} \mathbf{W}_e^{-1})]_i, \quad (3.34a)$$

$$\text{Var} \{ \tilde{\mathbf{e}}_x \} = \mathbf{J}_\epsilon \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{J}_\epsilon^T + \frac{1}{2} [\text{tr} (\mathbf{H}_{\epsilon,i} \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{H}_{\epsilon,j} \mathbf{W}_e^{-1})]_{ij} \quad (3.34b)$$

ergeben. Nicht näher spezifiziert sind bisher die Matrizen $\mathbf{J}_\epsilon$ und $\mathbf{H}_\epsilon$, für die im Folgenden geeignete Darstellungen angegeben werden.

Die Forderung nach minimaler Fehlerquadratsumme in Gl. 3.28 bedeutet, dass die notwendige Bedingung (Koch 1999, S. 160)

$$\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} (1 - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})) = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

an der Stelle $\hat{\mathbf{x}}$ erfüllt ist. Hierbei stellt $\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}}$ die Jacobimatrix an der Stelle $\hat{\mathbf{x}}$ dar, die sich mit Berücksichtigung von Gl. 3.29 zu

$$\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}} + [\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x},i}]_i. \quad (3.36)$$

ergibt (Box 1971; Wang und Zhao 2019).

Substituiert man die Gl. 3.30, 3.36 in Gl. 3.35 und betrachtet zunächst nur den linearen Anteil der Beobachtungsabweichungen, so ergibt sich mittels

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} (\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{e}}) = \mathbf{0},$$

die in Gl. 3.31 gesuchte Matrix

$$\mathbf{J}_{\epsilon} = (\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \quad (3.37)$$

der linearen Transformation $\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{e}}$.

Die Betrachtung des quadratischen Anteils der Beobachtungsabweichungen in Gl. 3.35 führt mit Berücksichtigung des Erwartungswertes und einigen algebraischen Umformungen, siehe Anhang A.5, zu (Box 1971)

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{E} \left\{ [\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_{\epsilon,i} \tilde{\mathbf{e}}]_i \right\} - \frac{1}{2} \mathbf{E} \left\{ [\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{J}_{\epsilon}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x},i} \mathbf{J}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{e}}]_i \right\} \right) = \mathbf{0}.$$

Nach weiterer Umstellung und unter Verwendung von Gl. 3.37 ergibt sich zunächst

$$\mathbf{E} \left\{ [\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_{\epsilon,i} \tilde{\mathbf{e}}]_i \right\} = -\mathbf{J}_{\epsilon} \mathbf{E} \left\{ [\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{J}_{\epsilon}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x},i} \mathbf{J}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{e}}]_i \right\} \quad (3.38)$$

und mit den Gl. 2.12 für den quadratischen Term schließlich

$$[\text{tr}(\mathbf{H}_{\epsilon,i} \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{-1})]_i = -\mathbf{J}_{\epsilon} [\text{tr}(\mathbf{J}_{\epsilon} \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{-1} \mathbf{J}_{\epsilon}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x},i})]_i, \quad (3.39a)$$

sowie

$$[\text{tr}(\mathbf{H}_{\epsilon,i} \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{-1} \mathbf{H}_{\epsilon,j} \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{-1})]_{i,j} = \mathbf{J}_{\epsilon} [\text{tr}(\mathbf{J}_{\epsilon} \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{-1} \mathbf{J}_{\epsilon}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x},i} \mathbf{J}_{\epsilon} \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{-1} \mathbf{J}_{\epsilon}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x},j})]_{i,j} \mathbf{J}_{\epsilon}^T. \quad (3.39b)$$

Durch Einsetzen der Gl. 3.37, 3.39 in Gl. 3.34 ergeben sich Erwartungswert und Dispersion zu (Box 1971; Teunissen und Knickmeyer 1988; Wang und Zhao 2019)

$$\mathbf{E} \{ \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \} = -\frac{1}{2} \mathbf{J}_{\epsilon} [\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{H}_{\mathbf{x},i})]_i, \quad (3.40a)$$

$$\text{Var} \{ \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \} = \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2} \mathbf{J}_{\epsilon} [\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{H}_{\mathbf{x},i} \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{H}_{\mathbf{x},j})]_{ij} \mathbf{J}_{\epsilon}^T, \quad (3.40b)$$

wobei $\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{J}_{\epsilon} \mathbf{W}_{\epsilon}^{-1} \mathbf{J}_{\epsilon}^T = (\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\epsilon} \mathbf{J}_{\mathbf{x}})^{-1}$ die Dispersionsmatrix 1. Ordnung ist. Die Hessematrix $\mathbf{H}_{\epsilon}$ muss somit nicht in expliziter Form vorliegen, sondern wird durch $\mathbf{J}_{\epsilon}$ und $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}$ approximiert. Wang und Zhao (2019) zeigen, dass $\mathbf{H}_{\epsilon}$ in Gl. 3.39 mittels

$$\mathbf{J}_{\epsilon} \left[\text{tr} \left(\mathbf{J}_{\epsilon} \mathbf{W}_{\epsilon}^{-1} \mathbf{J}_{\epsilon}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x}i} \right) \right]_i = \left[\text{tr} \left(\left\{ \sum_j \left[(\mathbf{J}_{\epsilon})_{ij} \mathbf{J}_{\epsilon}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x}j} \mathbf{J}_{\epsilon} \right] \right\} \mathbf{W}_{\epsilon}^{-1} \right) \right]_i$$

zu

$$\mathbf{H}_{\epsilon i} = \sum_j \left[(\mathbf{J}_{\epsilon})_{ij} \mathbf{J}_{\epsilon}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x}j} \mathbf{J}_{\epsilon} \right] \quad (3.41)$$

entwickelt werden kann, wobei $(\mathbf{J}_{\epsilon})_{ij}$ das (i, j) -te Element der Matrix $\mathbf{J}_{\epsilon}$ ist.

Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 2.1 sind bei der praktischen Anwendung die wahren Werte unbekannt und durch geeignete Schätzwerte zu ersetzen. Weiterhin setzen die Gl. 3.40 voraus, dass sich die Beobachtungen explizit als eigenständige Funktionen der unbekannten Modellparameter darstellen lassen. Die Koordinatentransformation mit variablem Start- und Zielsystem (Lenzmann und Lenzmann 2001; Koch 2002; Neitzel 2010) oder die Schätzung von geometrischen Kurven bzw. Flächen in der Formanalyse (Shakarji 1998; Lösler und Nitschke 2010; Malissiovas u. a. 2016) sind jedoch Beispiele, die diese Voraussetzung nicht unmittelbar erfüllen und mit

$$\mathbf{f}_{\mathbf{c}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_{\mathbf{c}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{e}}) = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

ein implizites funktionales Modell aufweisen. Derartige Optimierungsaufgaben werden i. A. durch eine Ausgleichung mit Nebenbedingung zwischen den Parametern $\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{e}^T \end{bmatrix}$ gelöst (Jäger u. a. 2005, S. 165ff), siehe auch die Ausführungen in Abschnitt 3.1.

Mittels des linearen funktionalen Zusammenhangs

$$\mathbf{f}_{\mathbf{e}}(\tilde{\mathbf{e}}) = \mathbf{1} - \tilde{\mathbf{I}} \quad (3.43)$$

ist hierzu das Minimum der Zielfunktion Ω unter zusätzlicher Berücksichtigung der nichtlinearen Nebenbedingung $\mathbf{f}_{\mathbf{c}}$ gemäß Gl. 3.1 zu bestimmen. Die Modellparameter $\mathbf{x}$ treten hierbei ausschließlich als zusätzliche Unbekannte in den Nebenbedingungen auf. Die Berücksichtigung von Nebenbedingungen zur Bestimmung des Bias ist jedoch in den Gl. 3.40 nicht vorgesehen. Um dennoch das Bias mit den Gl. 3.40 abzuschätzen, kann das Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen in ein äquivalentes Modell ohne Nebenbedingungen überführt werden. Hierzu sind die Nebenbedingungen als zusätzliche Pseudobeobachtungen mit der korrespondierenden Gewichtsmatrix $\mathbf{W}_{\mathbf{c}}$ zu betrachten (Jäger u. a. 2005, S. 167f). Diese Modellbildung findet u. a. in der dynamischen Netzausgleichung breite Anwendung, bei der die Anschlusspunkte sowohl als (direkte) Beobachtungen als auch als unbekannte Modellparameter auftreten. Durch die Wahl der Gewichte in $\mathbf{W}_{\mathbf{c}}$ lässt sich steuern, welchen Einfluss die so umformulierten Bedingungen auf die unbekannten Parameter im Modell besitzen sollen. Niemeier (2008, S. 197) spricht in diesem Zusammenhang auch von einer

„flexiblen Gewichtung“ der fiktiven Pseudobeobachtungen. Für $\mathbf{W}_c \rightarrow \infty$ werden die mittels Pseudobeobachtungen ausgedrückten zusätzlichen Bedingungsgleichungen wie strenge Bedingungen im Modell berücksichtigt. Ein Beweis findet sich in (Jäger u. a. 2005, S. 167f).

Zur Schätzung des Bias in den Gl. 3.34 sind die Jacobi- und Hessematrix $\mathbf{J}_\epsilon$ und $\mathbf{H}_\epsilon$ bereitzustellen, wobei $\mathbf{H}_\epsilon$ gemäß Gl. 3.39 wiederum durch $\mathbf{J}_\epsilon$ ausgedrückt werden kann. Benötigt wird demnach die zu Gl. 3.37 äquivalente Jacobimatrix $\mathbf{J}_\epsilon$ im erweiterten Modell $\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e^T & \mathbf{f}_c^T \end{bmatrix}$. Diese ergibt sich aus

$$\mathbf{J}_\epsilon = \left(\mathbf{J}_u^T \mathbf{W}_f \mathbf{J}_u \right)^{-1} \mathbf{J}_u^T \mathbf{W}_f, \quad (3.44)$$

wobei

$$\mathbf{J}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{J}_x & \mathbf{J}_e \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

die Jacobimatrix des erweiterten funktionalen Modells an der Stelle $\tilde{\mathbf{u}}$ ist und

$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_c \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

die korrespondierende Gewichtsmatrix im erweiterten Modell repräsentiert. In Analogie zu Gl. 3.31 ergibt sich mittels Gl. 3.44 die lineare Transformation

$$\tilde{\mathbf{e}}_u = \mathbf{J}_\epsilon \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \\ \mathbf{f}_c \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

welche die Beobachtungsabweichungen unter Berücksichtigung der Nebenbedingung in den Parameterraum überführen. Für den quadratischen Anteil in Gl. 3.31, der zu einer Verbesserung 2. Ordnung für die unbekannten Parameter führt, ist die Hessematrix $\mathbf{H}_u$ des erweiterten funktionalen Modells $\mathbf{f}$ an der Stelle $\tilde{\mathbf{u}}$ zu bestimmen. Aus Gl. 3.39 resultiert die quadratische Transformation

$$\tilde{\mathbf{e}}_u = \mathbf{J}_\epsilon \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \\ \mathbf{f}_c \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \mathbf{J}_\epsilon [\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{u}}} \mathbf{H}_{u,i})]_i, \quad (3.48)$$

wobei unter Berücksichtigung von $\mathbf{W}_c^{-1} \rightarrow \mathbf{0}$ die Dispersionsmatrix 1. Ordnung

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{u}}} = \mathbf{J}_\epsilon \begin{bmatrix} \mathbf{W}_e^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{J}_\epsilon^T \quad (3.49)$$

der unbekannten Parameter $\mathbf{u}$ gegeben ist.

Das funktionale Modell in Gl. 3.43 ist für $\mathbf{f}_e$ linear, sodass die resultierenden Hessematrizen ausschließlich Nullmatrizen sind. Für $\mathbf{f}_c$ existieren jedoch die partiellen Ableitungen 2. Ordnung. Da weiterhin die Jacobimatrix $\mathbf{J}_\epsilon$ i. A. eine vollbesetzte Matrix ist, sind die Modellparameter $\mathbf{x}$ und die Beobachtungsabweichungen $\mathbf{e}$ verzerrt, wenn diese aus einem linearen Ersatzmodell abgeleitet werden. Durch Einsetzen von

$\Sigma_{\hat{\mathbf{u}}}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{u}}$ und $\mathbf{J}_{\epsilon}$ in Gl. 3.40 ergibt sich das Bias für die Parameter und die Dispersion entsprechend der Herleitung von Box (1971).

Die Überführung des impliziten funktionalen Modells in eine äquivalente explizite Form nutzen Teunissen und Knickmeyer (1988), um die Verzerrung der Transformationsparameter einer ebenen Koordinatentransformation mit variablem Start- und Zielsystem abzuschätzen. Hierzu betrachten die Autoren die Koordinaten des Startsystems als zusätzliche Pseudobeobachtungen. Xu u. a. (2012) und Wang und Zhao (2019) überführen mittels Pseudobeobachtungen das implizite funktionale Modell eines Polynoms in eine explizite Darstellung, um im Kontext des sogenannten Total-Least-Squares das Bias der Parameter zu bestimmen.

Auch wenn das Überführen von impliziten funktionalen Modellen durch das Einführen von Pseudobeobachtungen in eine explizite Darstellung möglich ist, werden Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen in der Geodäsie üblicherweise direkt mittels Gl. 3.16 abgebildet und gelöst. Ausgehend von einem GHM nach Gl. 3.16 soll im Folgenden das Bias der Schätzwerte für implizite funktionale Modelle abgeleitet werden, sodass eine Überführung in eine explizite Darstellung unnötig wird. Gemäß Gl. 3.3 ist die notwendige KKT-Optimalbedingung gegeben durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\epsilon}\hat{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_{\epsilon}^T\hat{\boldsymbol{\lambda}} \\ -\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T\hat{\boldsymbol{\lambda}} \\ \mathbf{f}_{\mathbf{c}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{e}}) + \mathbf{J}_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{\epsilon}(\hat{\mathbf{e}} - \tilde{\mathbf{e}}) \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

wobei für $\mathbf{f}_{\mathbf{c}}$ Terme zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt sind. Durch Anwendung von Gl. A.30 zur Blockmatrixreduktion lassen sich $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ als lineare Transformation von $\tilde{\mathbf{e}}$ darstellen, siehe auch die Gl. 3.17, 3.18, 3.19. Mit Beschränkung auf die unbekannten Parameter $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{e}}$ lautet diese

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{J}(\mathbf{f}_{\mathbf{c}} - \mathbf{J}_{\epsilon}\tilde{\mathbf{e}}), \quad (3.50)$$

wobei $\mathbf{f}_{\mathbf{c}} - \mathbf{J}_{\epsilon}\tilde{\mathbf{e}}$ mit dem Widerspruchsvektor $\mathbf{w}$ in Gl. 3.16 korrespondiert und aus Gl. 3.24 die Jacobimatrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T\mathbf{W}_{\mathbf{w}} \\ \mathbf{W}_{\epsilon}^{-1}\mathbf{J}_{\epsilon}^T\Sigma_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} \end{bmatrix}.$$

abzulesen ist. Werden die Elemente in $\mathbf{J}$ umgeordnet, ergibt sich die zu Gl. 3.44 korrespondierende Matrix (Lösler u. a. 2020)

$$\mathbf{J}_{\epsilon} = \begin{bmatrix} -\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T\mathbf{W}_{\mathbf{w}}\mathbf{J}_{\epsilon} & \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T\mathbf{W}_{\mathbf{w}} \\ \mathbf{I} - \mathbf{W}_{\epsilon}^{-1}\mathbf{J}_{\epsilon}^T\Sigma_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}\mathbf{J}_{\epsilon} & \mathbf{W}_{\epsilon}^{-1}\mathbf{J}_{\epsilon}^T\Sigma_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

für implizite funktionale Modelle. Auf das Einführen von Pseudobeobachtungen, die das implizite Modell in eine explizite Darstellung überführt, kann somit verzichtet werden. Das Bias für die Schätzwerte in impliziten funktionalen Modellen ergibt sich schließlich aus (Lösler u. a. 2020)

$$\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\} = -\frac{1}{2}\mathbf{J}_{\epsilon}[\text{tr}(\Sigma_{\hat{\mathbf{u}}}\mathbf{H}_{\mathbf{u},i})]_i, \quad (3.52a)$$

$$\text{Var} \{\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\} = \Sigma_{\hat{\mathbf{u}}} + \frac{1}{2} \mathbf{J}_{\epsilon} [\text{tr} (\Sigma_{\hat{\mathbf{u}}} \mathbf{H}_{\mathbf{u},i} \Sigma_{\hat{\mathbf{u}}} \mathbf{H}_{\mathbf{u},j})]_{ij} \mathbf{J}_{\epsilon}^T. \quad (3.52b)$$

Teunissen (1990) zeigt mithilfe der Differentialgeometrie anschaulich, dass zwei Arten von Nichtlinearität in einem nichtlinearen Modell zu unterscheiden sind. Zum einen ist dies die Nichtlinearität, die durch die gewählte Parametrierung entsteht, und zum anderen die Nichtlinearität, die durch die Krümmung der in den Beobachtungsraum eingebetteten Mannigfaltigkeit hervorgerufen wird. Diese gekrümmte Fläche bzw. Mannigfaltigkeit resultiert hierbei aus der nichtlinearen Transformation der Modellparameter bzw. kleiner Variationen dieser in den Beobachtungsraum (Teunissen 1985a). Beide Arten sind unabhängig voneinander. Während jedoch die Nichtlinearität, die aus einer gewählten Parametrierung resultiert, durch eine alternative, aber äquivalente Parametrierung beeinflusst werden kann, beschreibt die Krümmung der Mannigfaltigkeit eine inhärente Eigenschaft des nichtlinearen Problems, so wie bspw. eine Kugel invariant bleibt, wenn diese in polarer Darstellung anstatt in kartesischer Darstellung parametrisiert wird (Teunissen 1990). Insbesondere kann durch die Wahl der Parametrierung ein lineares Problem in ein nichtlineares Problem münden. Die zweidimensionale Helmert-Transformation ist hierfür ein anschauliches Beispiel (Lehmann und Lösler 2018).

Durch eine Änderung der Parametrierung lässt sich jedes explizit formulierte Modell in ein korrespondierendes implizites Modell überführen, ohne die Krümmung der Mannigfaltigkeit selbst zu verändern. Teunissen (1990) weist nach, dass die Verzerrung in den Residuen ausschließlich auf die Krümmung der Mannigfaltigkeit zurückzuführen ist. Hierdurch wird die Äquivalenz zwischen den Gl. 3.52 im implizit formulierten Modell und den Gl. 3.34 für dessen korrespondierende explizite Darstellung deutlich.

In einigen Anwendungsfällen sind zusätzliche Restriktionen $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ zwischen den unbekannten Modellparametern zu formulieren, da $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}$ keinen vollen Spaltenrang aufweist. Die Inverse in Gl. 3.23a existiert somit nicht. Die Ausgleichung freier Netze ist ein typisches Beispiel in der Geodäsie, bei dem $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}$ aufgrund des vorhandenen Datumsdefektes keinen vollen Spaltenrang besitzt. Die erhobenen terrestrischen Beobachtungen beschreiben zwar die relativen Beziehungen zwischen den Punkten und formen die innere Netzgeometrie, sie sind jedoch insensitive bzgl. des Netzdatums, d. h. der absoluten Lage, der Netzorientierung und ggf. des Netzmaßstabs (Neitzel 2004b). Aber auch bei der Bestimmung von Regressionskurven bzw. -flächen entstehen unterbestimmte Gleichungssysteme, wenn bspw. Normalenvektoren zur Parametrierung der Orientierung verwendet werden. Ein anschauliches Beispiel ist hierbei die Regressionsebene, die in der Darstellung als Hesse'sche Normalform vier Modellparameter enthält. Dies ist zum einen der kürzeste Abstand d zwischen der Ebene und dem Koordinatenursprung und zum anderen der Normalenvektor $\mathbf{n}^T = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix}$ mit der Länge $\mathbf{n}^T \mathbf{n} = 1$. Das implizite funktionale Modell der Ebene lautet (Bronshtein u. a. 2007, S. 214)

$$\mathbf{n}^T \mathbf{P}_i - d = 0,$$

wobei $\mathbf{P}_i$ ein beliebiger Punkt der Ebene ist.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Modellparameter der Ebene nicht unabhängig voneinander sind. So führt eine Änderung der Länge des Normalenvektors $\mathbf{n}^T \mathbf{n} = m_{\mathbf{n}}$ unmittelbar zu einer korrespondierenden Abstandsänderung $\sqrt{m_{\mathbf{n}}}d$. Aufgrund dieser Mehrdeutigkeit ist eine zusätzliche Restriktion, bspw. die Forderung $\mathbf{n}^T \mathbf{n} = 1$, zwingend. Die notwendige Anzahl r_{null} an erforderlichen unabhängigen Restriktionen $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$ ergibt sich aus dem Rangdefekt nullity $(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{w}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}) = r_{\text{null}} > 0$. Die Berücksichtigung von $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$ in Gl. 3.17 führt auf die erweiterte Normalgleichungsmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{w}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}} & \mathbf{J}_{\mathbf{r}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{r}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

welche vollen Rang besitzt und somit invertierbar ist. Die Jacobimatrix $\mathbf{J}_{\mathbf{r}}$ enthält hierbei die ersten partiellen Ableitungen der Restriktionsgleichungen an der Stelle $\tilde{\mathbf{x}}$. Aus der blockweisen Auflösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{w}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}} & \mathbf{J}_{\mathbf{r}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{r}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}} & \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\hat{\lambda}_{\mathbf{r}}} \\ \Sigma_{\hat{\lambda}_{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{x}}}^T & -\Sigma_{\hat{\lambda}_{\mathbf{r}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

kann eine verallgemeinerte Inverse für $\Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{w}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}})^{-}$ in expliziter Form angegeben werden (Silvey 1975, S. 177f). Mit den Substituierten

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{w}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{\mathbf{r}}^T \mathbf{J}_{\mathbf{r}})^{-1}, \quad (3.53a)$$

$$\Sigma_{\hat{\lambda}_{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{x}}}^T = (\mathbf{J}_{\mathbf{r}} \mathbf{U}_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\mathbf{r}}^T)^{-1} \mathbf{J}_{\mathbf{r}} \mathbf{U}_{\mathbf{x}} \quad (3.53b)$$

lautet diese

$$\Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{U}_{\mathbf{x}} - \mathbf{U}_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\mathbf{r}}^T \Sigma_{\hat{\lambda}_{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{x}}}^T. \quad (3.54)$$

Wie Neitzel (2004b) im Kontext der freien Netzausgleichung anschaulich zeigt, ist das um $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$ erweiterte Modell eine Nullvarianz-Rechenbasis, bei der mithilfe der Restriktionen über die abhängigen Modellparameter verfügt wird. Die Beobachtungsabweichungen sind jedoch von diesen Restriktionen unabhängig, sodass sich mittels Gl. 3.53b die Jacobimatrix (Lösler u. a. 2020)

$$\mathbf{J}_{\epsilon} = \begin{bmatrix} -\Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{w}} \mathbf{J}_{\mathbf{e}} & \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{w}} & \Sigma_{\tilde{\mathbf{x}}\hat{\lambda}_{\mathbf{r}}}^T \\ \mathbf{I} - \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{-1} \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^T \Sigma_{\hat{\lambda}_{\mathbf{r}}} \mathbf{J}_{\mathbf{e}} & \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{-1} \mathbf{J}_{\mathbf{e}}^T \Sigma_{\hat{\lambda}_{\mathbf{r}}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

für das erweiterte Modell $\mathbf{f}^T = [\mathbf{f}_{\mathbf{e}}^T \quad \mathbf{f}_{\mathbf{c}}^T \quad \mathbf{f}_{\mathbf{r}}^T]$ ergibt.

Da der Vektor $\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}$ in Gl. 3.52a sowohl Zuschläge für die Modellparameter als auch für die Beobachtungsabweichungen enthält, ist der nach Gl. 3.26 geschätzte a-posteriori Varianzfaktor ebenfalls verzerrt, wenn das Bias unberücksichtigt bleibt (Schaffrin und Wieser 2008; Shen u. a. 2011). Die Berücksichtigung des a-posteriori Varianzfaktors in Gl. 3.52 liefert

$$\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\} = -\frac{\hat{\sigma}_0^2}{2} \mathbf{J}_{\epsilon} [\text{tr}(\Sigma_{\tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{H}_{\mathbf{u}i})]_i, \quad (3.56a)$$

$$\text{Var} \{\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\} = \hat{\sigma}_0^2 \Sigma_{\hat{\mathbf{u}}} + \frac{\hat{\sigma}_0^4}{2} \mathbf{J}_{\epsilon} \left[\text{tr} \left(\Sigma_{\hat{\mathbf{u}}} \mathbf{H}_{\mathbf{u}i} \Sigma_{\hat{\mathbf{u}}} \mathbf{H}_{\mathbf{u}j} \right) \right]_{ij} \mathbf{J}_{\epsilon}^T. \quad (3.56b)$$

Hierbei zeigt sich, dass $\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}$ und $\hat{\sigma}_0$ abhängig voneinander sind. Die Bestimmung des Varianzfaktors kann iterativ erfolgen, wobei Gl. 3.56 als Startlösung fungiert (Xu u. a. 2012; Tong u. a. 2015). Anstelle dieser iterativen Vorgehensweise greifen Shen u. a. (2011) auf die Monte-Carlo-Methode zurück, um einen unverzerrten Schätzwert für den Varianzfaktor abzuleiten.

In Kapitel 2 wurden in Anlehnung an (Julier u. a. 2000) die Methoden, die eine geringere Verzerrung in den Schätzwerten hervorrufen, in zwei Klassen eingeteilt. Während die Taylorreihenentwicklung eine Approximation der nichtlinearen Funktion bzw. Transformation beschreibt und zur 2. Klasse gehört, können die Verzerrungen auch mit Methoden der 1. Klasse, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung approximieren, abgeschätzt werden. Methoden, die zur 1. Klasse gehören, sind die in Abschnitt 2.2 vorgestellte Monte-Carlo-Methode und die in Abschnitt 2.3 beschriebene Unscented Transformation. Beide Methoden können direkt auf überbestimmte Gleichungssysteme übertragen werden, sodass eine nähere Erläuterung entfallen kann und auf die Ausführungen in Kapitel 2 verwiesen wird. Entsprechende Untersuchungen und Anwendungen in der Geodäsie finden sich u. a. in (Calkins 2002; Wang und Zhao 2017).

Am Beispiel 3.1.1 werden nachfolgend die Lösungen für den Modellparameter a der Regressionsparabel gegenübergestellt, die sich mittels TS1, TS2 sowie MCM und UT ergeben.

Beispiel 3.1.1 (Fortsetzung von S. 42)

Zur Bestimmung des Parameters a einer Parabel, deren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung liegt, sind in (Lenzmann und Lenzmann 2004) zwei Punkte gegeben, siehe Tabelle 3.1. Zur Bildung des stochastischen Modells dieser Punkte liegen nur relative Informationen vor, d. h., die Koordinatenkomponenten dieser Punkte sind lediglich gleichgenau und unkorreliert. In der bisherigen Betrachtung wurde dies durch $\mathbf{W}_{\mathbf{e}} = \mathbf{I}$ im stochastischen Modell berücksichtigt. Um diese relativen Informationen absolut zu quantifizieren, ist über den a-priori Varianzfaktor σ_0^2 zu verfügen. Da für den Modellparameter der Parabel a-priori keine stochastischen Informationen vorliegen, ergibt sich mit

$$\Sigma_{\mathbf{e}} = \sigma_0^2 \mathbf{I}$$

das stochastische Modell der Beobachtungen. Eine repräsentative Schätzung von $\hat{\sigma}_0$ erscheint aufgrund der geringen Datengrundlage von lediglich zwei Punkten nicht zielführend. Der Freiheitsgrad bzw. die Gesamtredundanz der Parameterschätzung beträgt lediglich $f_{\text{DOF}} = 1$. Die Festlegung eines geeigneten stochastischen Modells ist zwingend, da der Einfluss der Nichtlinearität des funktionalen Modells auf die Schätzwerte durch die Dispersion der Eingangsdaten gesteuert wird, wie für nicht-redundante Modelle in Kapitel 2 gezeigt wurde.

In Abbildung 3.2 ist das Bias für den geschätzten Modellparameter $\hat{a}$ dargestellt, der sich mittels TS1 bzw. TS2 sowie durch die SUT bzw. SSUT für unterschiedlich

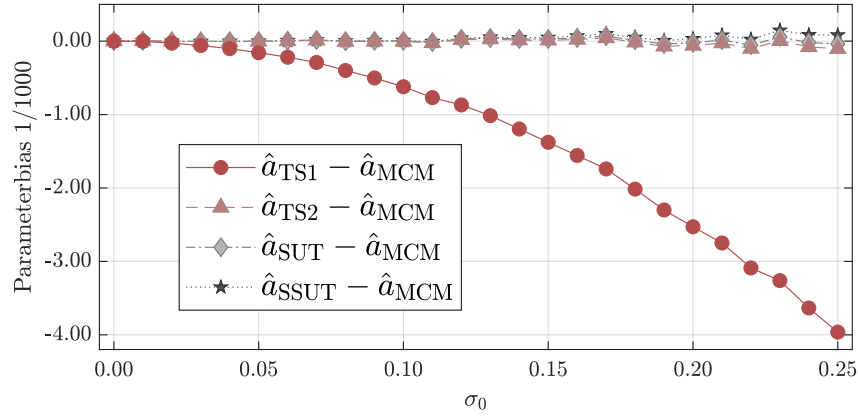


Abbildung 3.2: Bias des Modellparameters $\hat{a}$ der Regressionsparabel in Abhängigkeit des gewählten stochastischen Modells σ_0 . Hierin sind $\hat{a}_{\text{TS1}}$, $\hat{a}_{\text{TS2}}$, $\hat{a}_{\text{SUT}}$, $\hat{a}_{\text{SSUT}}$ und $\hat{a}_{\text{MCM}}$ die ermittelten Lösungen für den Parabelparameter der TS1, TS2, SUT, SSUT bzw. MCM. Zur besseren Visualisierung ist das dargestellte Bias mit dem Faktor 1000 skaliert worden.

gewählte σ_0 ergibt. Die Ergebnisse der SSUT wurden mit einem mittleren Gewicht $w_0 = 0,5$ bestimmt. Da die MCM asymptotisch gegen den wahren Wert strebt, kann $\hat{a}_{\text{MCM}}$ als Referenzlösung angesehen werden. Diese wurde aus $m_{\text{MCM}} = 10^6$ unabhängigen Stichprobenwiederholungen abgeleitet. Die dargestellten Kurvenverläufe sind aufgrund der zufälligen Charakteristik der MCM nicht glatt.

Die TS1-Lösung kann hierbei den Tabellen 3.2, 3.3 entnommen werden. Sie lautet $\hat{a}_{\text{TS1}} = 0,4562$ (Lenzmann und Lenzmann 2004; Lösler 2020a), und ist bzgl. der Wahl von σ_0 invariant. Im Vergleich zur Referenzlösung $\hat{a}_{\text{MCM}}$ der MCM zeigt sich, dass diese Lösung mit zunehmenden σ_0 die stärkste Verzerrung im geschätzten Modellparameter hervorruft. Die TS2-, SUT- bzw. SSUT-Lösungen $\hat{a}_{\text{TS2}}$, $\hat{a}_{\text{SUT}}$ und $\hat{a}_{\text{SSUT}}$ sind praktisch gleichwertig und weisen auch für sehr groß gewählte σ_0 kaum Differenzen zur Referenzlösung $\hat{a}_{\text{MCM}}$ auf. Bedenkt man weiterhin, dass die SUT bzw. die SSUT lediglich neun bzw. sechs Σ -Punkte benötigt, so wird der große Vorteil der UT gegenüber der MCM deutlich, der insbesondere für echtzeitnahe Anwendungen eine wesentliche Rolle spielt.

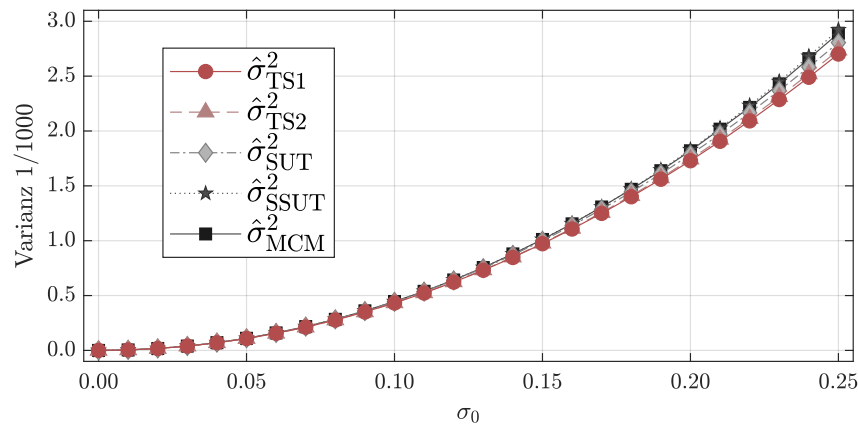


Abbildung 3.3: Geschätzte Varianz des Modellparameters a der Regressionsparabel in Abhängigkeit des gewählten stochastischen Modells σ_0 . Hierin sind $\hat{\sigma}_{\text{TS1}}^2$, $\hat{\sigma}_{\text{TS2}}^2$, $\hat{\sigma}_{\text{SUT}}^2$, $\hat{\sigma}_{\text{SSUT}}^2$ und $\hat{\sigma}_{\text{MCM}}^2$ die ermittelten Varianzen der TS1, TS2, SUT, SSUT bzw. MCM. Zur besseren Visualisierung ist diese Varianz mit dem Faktor 1000 skaliert worden.

Neben dem Modellparameter wird auch die geschätzte Dispersion durch die Nichtlinearität des funktionalen Modells verzerrt, wenn die Lösung aus einem linearen Ersatzproblem abgeleitet wird, siehe die Gl. 3.52. Das Bias der Dispersion ist in diesem Beispiel jedoch auch für sehr groß gewählte σ_0 vernachlässigbar, wie Abbildung 3.3 zeigt. Im Vergleich zur Referenzlösung $\hat{\sigma}_{\text{MCM}}$ sind die auftretenden Differenzen der übrigen Verfahren $\ll 1/1000$ und für praktische Anwendungen als unproblematisch zu bewerten. $\square$

3.4 Zusammenfassung

Zum effizienten Lösen von nichtlinearen Optimierungsproblemen hat sich die in Abschnitt 3.1 beschriebene Sequentielle Quadratische Programmierung als Standardverfahren in der numerischen Optimierung etabliert. Aufgrund des universellen Charakters zählen Geiger und Kanzow (2002, S. 234) die SQP zur „vielleicht wichtigsten Klasse von Verfahren zur Lösung von allgemeinen nichtlinearen Optimierungsproblemen“.

In der Geodäsie wird die SQP, die aufgrund des Newtonverfahrens die Hessematrix benötigt, zur Parameterschätzung bisher kaum verwendet. Die hier etablierten und bewährten Verfahren – insbesondere das Gauß-Helmert-Modell und das Gauß-Markov-Modell – lassen sich jedoch unter Verzicht der Hessematrix als Spezialfälle der SQP entwickeln. Die günstigere Konvergenzgeschwindigkeit, welche die Anwendung des Newtonverfahrens motiviert, kann nur für Startwerte erzielt werden, die sich bereits in hinreichender Nähe vom gesuchten Optimum befinden. Für ungünstig gewählte Startwerte kann die Anzahl der notwendigen Iterationen im Vergleich zu Modellen, die auf das explizite Aufstellen der Hessematrix verzichten, sogar ansteigen, wie Untersuchungen von Schek und Maier (1976) zeigen. Sowohl die geringere Empfindlichkeit bzgl. ungünstig gewählter Startwerte als auch die Reduzierung des numerischen Aufwands durch das Entfallen der zweiten partiellen Ableitungen sind wesentliche Gründe für den Einsatz des GHM bzw. GMM in der Geodäsie. Die geschätzten Parameter sind, Konvergenz vorausgesetzt, unabhängig vom verwendeten Verfahren und identisch, wie exemplarisch in Beispiel 3.1.1 gezeigt.

Unabhängig vom gewählten Optimierungsverfahren und insbesondere auch bei der Existenz eines direkten Lösungsalgorithmus sind die Schätzwerte aufgrund von Gl. 2.4 i. A. nicht erwartungstreu, wenn das zugrunde liegende funktionale Modell nichtlinear ist, jedoch die statistischen Eigenschaften aus einem linearen Ersatzmodell abgeleitet werden. Wie stark die Parameter aufgrund dieser Nichtlinearität verzerrt werden, hängt vom stochastischen Modell ab, wie Lehmann und Lösler (2018) am Beispiel der Koordinatentransformation zeigen.

Für überbestimmte Gleichungssysteme mit explizitem funktionalem Modell schätzt Box (1971) das Bias der Schätzwerte durch eine Taylorreihe mit Gliedern 2. Ordnung ab. Identische Herleitungen finden sich auch in der Geodäsie, siehe hierzu (Teunissen und Knickmeyer 1988; Xu und Grafarend 1996; Wang und Zhao 2019). In

Abschnitt 3.3 wurde die Herleitung von Box (1971) verallgemeinert und auf implizite funktionale Modelle übertragen. Hierbei zeigt sich, dass bei Verwendung des GHM bis auf die Hessematrix $\mathbf{H}_{\mathbf{u}}$ bereits alle Modellmatrizen vorliegen. Wird das SQP-Verfahren angewendet, liegen die zweiten partiellen Ableitungen bereits vor, sodass lediglich mit einem moderaten numerischen Mehraufwand zu rechnen ist. Sowohl die in Abschnitt 2.2 vorgestellte Monte-Carlo-Methode als auch die in Abschnitt 2.3 beschriebene Unscented Transformation lassen sich direkt auf den überbestimmten Anwendungsfall übertragen. Dies unterstreicht noch einmal die grundsätzlichen Vorteile dieser beiden numerischen Methoden bzgl. der Verwendung in bereits bestehenden Algorithmen. Die in Abschnitt 2.4 genannten Vor- und Nachteile der einzelnen Methoden lassen sich direkt auf den überbestimmten Anwendungsfall übertragen.

Für den geschätzten Modellparameter der Regressionsparabel im Beispiel 3.1.1 ergeben sich mittels TS2 und UT praktisch keine Unterschiede zur Referenzlösung, die mittels MCM bestimmt wurde. Wird die Taylorreihe bereits nach dem linearen Glied abgebrochen, so ergeben sich deutliche Differenzen zur Referenzlösung, siehe Abbildung 3.2. Wie Abbildung 3.3 zeigt, sind die resultierenden Varianzen in diesem Beispiel für alle Methoden praktisch identisch. Lösler u. a. (2020) zeigen jedoch am Beispiel einer ausgleichenden Ebene, dass auch das Bias der Parameterdispersion in Abhängigkeit des gewählten stochastischen Modells signifikante Größenordnungen erreichen kann.

Das stochastische Modell beeinflusst, wie stark die Schätzwerte aufgrund der Nichtlinearität des funktionalen Modells verzerrt werden, wenn ein vereinfachtes Ersatzmodell anstelle des ursprünglichen nichtlinearen Modells verwendet wird. Alle betrachteten Methoden setzen daher voraus, dass das stochastische Modell a-priori hinreichend bekannt ist. Liegen derartige Informationen nicht in repräsentativer Form vor, so bieten sich Methoden wie das Bootstrapping an (Efron 1979). Hierbei werden die gesuchten Statistiken aus einem Resampling der Eingangsdaten abgeleitet, und die theoretische, aber unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Eingangsdaten wird durch die empirische Wahrscheinlichkeitsverteilung der Stichprobe ersetzt. Das Verfahren impliziert, dass alle gesuchten Statistiken bereits in der erhobenen Stichprobe enthalten sind und keine externen Informationen zur Beschreibung der Statistik der Daten benötigt werden. Diese Eigenschaft wird häufig als Plug-in-Prinzip bezeichnet (Efron und Tibshirani 1994, S. 35ff). Anwendungen in der Geodäsie und Messtechnik finden sich u. a. in der Werkstückprüfung (Lanza und Peters 2010), in der Bewertung von Parametern (Kargoll u. a. 2019) und der Bestimmung von Unsicherheiten bzw. Konfidenzbereichen (Neuner u. a. 2014; Lösler u. a. 2018a).

4. Geometrischer Referenzpunkt geodätischer Raumverfahren

Die Definition der geometrischen Referenzpunkte der jeweiligen Raumverfahren wird durch die Technikzentren des International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) bereitgestellt. Im Gegensatz zum elektronischen Referenzpunkt, welcher bspw. durch elektromagnetische Störungen, Beobachtungsstrategien oder Abweichungen in der Instrumentenfertigung variieren kann, stellt der geometrische Referenzpunkt einen eindeutigen Bezugspunkt dar. Hierdurch wird eine nachvollziehbare und reproduzierbare Bestimmung des Bezugspunktes gewährleistet. Häufig wird der geometrische Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ auch als invarianter Referenzpunkt (IRP) bezeichnet. Die IAG/IERS-Working Group on Site Survey and Co-location empfiehlt die einheitliche Verwendung des geometrischen Referenzpunktes als technikspezifischen Bezugspunkt. Mögliche Abweichungen zwischen dem elektronischen und dem geometrischen Referenzpunkt sind hierbei durch die jeweiligen Technikzentren bei der Datenaufbereitung und -analyse zu berücksichtigen (Bergstrand u. a. 2014). Entsprechend der Resolution der IAG/IERS-Arbeitsgruppe beschränken sich die folgenden Ausführungen ausschließlich auf den geometrischen bzw. invarianten Referenzpunkt. Auf den Zusatz geometrisch wird daher im Weiteren verzichtet.

Während der Referenzpunkt an IGS- und IDS-Antennen durch das Messen von neuralgischen Referenzpositionen an der Antenne direkt und prozessbegleitend abgeleitet werden kann (Poyard 2017), ist die Bestimmung der Referenzpunkte von SLR/LLR- und VLBI-Teleskopen herausfordernd, insbesondere wenn diese im regulären Stationsprozess erfolgen soll. Daher beschränken sich die nachfolgenden Ausführungen auf die Referenzpunktbestimmung von SLR/LLR- und VLBI-Teleskopen.

4.1 SLR/LLR- und VLBI-Referenzpunkt

Der Referenzpunkt von SLR/LLR- und VLBI-Teleskopen ist als Schnittpunkt zwischen der Primär- und der Sekundärachse definiert, siehe Abbildung 1.4. Schneiden sich beide Achsen konstruktionsbedingt nicht, resultiert der Referenzpunkt aus der orthogonalen Projektion der Sekundärachse auf die Primärachse (Dawson u. a. 2006).

Da sich der Referenzpunkt im Inneren der Teleskopkonstruktion befindet, ist

dieser üblicherweise von außen unzugänglich und nicht materialisierbar, sodass eine direkte Bestimmung, z. B. durch taktile Messverfahren, nicht möglich ist. Einige wenige Teleskope, bspw. das 20 m Radioteleskop Wettzell (Deutschland), besitzen zwar eine Plattform zur Aufnahme eines Zielzeichens in der unmittelbaren Nähe des Referenzpunktes, welche sich in bestimmten Teleskopstellungen terrestrisch beobachten lässt, die Verbreitung ist jedoch begrenzt. Weiterhin steht das gezielte Verfahren des Teleskops einem prozessbegleitenden Mess- und Auswertekonzept, wie es das GGOS anregt, entgegen. Zur indirekten Bestimmung des Referenzpunktes werden üblicherweise Marken am drehbaren Teil des Teleskops befestigt und diese unter unterschiedlichen Primär- und Sekundärwinkeln des Teleskops messtechnisch erfasst. Der Referenzpunkt wird anschließend aus den resultierenden Trajektorien dieser Marken indirekt abgeleitet.

Um geeignete Strategien zur indirekten Referenzpunktbestimmung zu entwickeln, ist es zweckdienlich, zwei Koordinatensysteme zu definieren. Das erste Koordinatensystem ist ein globales terrestrisches kartesisches Koordinatensystem. In Abhängigkeit des Anwendungsfalls kann dieses ein lokales topozentrisches oder ein globales geozentrisches System sein. Dieses terrestrische Koordinatensystem ist üblicherweise Teil des Stationsnetzes und durch dauerhaft vermarkte Punkte, z. B. Messpfeiler, realisiert. Es definiert das geodätische Datum für den gesuchten Referenzpunkt. Punkte im terrestrischen Koordinatensystem werden im Folgenden mit einem großen Buchstaben bezeichnet, d. h., $\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}$. Neben dem terrestrischen Koordinatensystem existiert ein Objekt- oder Teleskopkoordinatensystem, welches sich aus der idealisierten Teleskopgeometrie ergibt. Die x - und z -Achse dieses Koordinatensystems korrespondieren mit der Sekundär- und Primärachse des Teleskops. Beide Achsen stehen senkrecht aufeinander und schneiden sich in einem Punkt. Die y -Achse komplettiert das rechtshändige kartesische System, steht senkrecht auf der x - und z -Achse und verläuft durch den gemeinsamen Schnittpunkt. Punkte, die sich auf dieses Teleskopsystem beziehen, werden nachfolgend mit Kleinbuchstaben bezeichnet, d. h., $\mathbf{p}^T = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$.

Die eindeutige Beschreibung der Marken im terrestrischen Koordinatensystem wird durch die Notation $\mathbf{P}_{i,j}$ erreicht. Hierbei ist $\mathbf{P}$ der Koordinatenvektor der i -ten Marke. Der zusätzliche Index j beschreibt die Orientierung des Teleskops zum Messzeitpunkt, welche durch den Primärwinkel κ_j und den Sekundärwinkel ω_j definiert wird. Der korrespondierende Punkt im Teleskopkoordinatensystem ist $\mathbf{p}_i$.

In Abschnitt 4.1.1 wird zunächst ein Überblick über bestehende geometrische Modelle gegeben, die eine Bestimmung des Referenzpunktes und ggf. zusätzlicher Teleskopparameter erlauben. Vor- und Nachteile dieser Verfahren werden hinsichtlich der geometrischen Einschränkungen und bzgl. der Anforderungen des GGOS genannt. Anschließend wird als Alternative zu den geometrischen Modellen in Abschnitt 4.1.2 das Transformationsmodell hergeleitet, welches die GGOS-Anforderung an eine prozessintegrierte Referenzpunktbestimmung erfüllt. Für dieses hergeleitete Transformationsmodell, welches keine geometrischen Einschränkungen aufweist, werden zwei Lösungsstrategien entwickelt.

4.1.1 Geometrische Modelle zur Referenzpunktbestimmung

Die Bestimmung des Referenzpunktes erfolgt gegenwärtig i. A. mittels geometrischer Modelle. Die beobachteten Punkttrajektorien werden hierbei zunächst in geometrische Primitive zerlegt. Basierend auf diesen geometrischen Primitiven wird anschließend auf die Referenzpunktposition zurückgeschlossen. Im Folgenden werden das Kugelmodell, das Torusmodell sowie verschiedene Kreismodelle vorgestellt.

Kugelmodell

Stehen beide Teleskopachsen senkrecht aufeinander und schneiden sich in einem Punkt, beschreiben alle beobachteten Punkttrajektorien an der Teleskopstruktur Kugeln mit unterschiedlichen Radien r_i , aber einem identischen Mittelpunkt $\mathbf{P}_{C,i} = \mathbf{P}_{\text{IRP}}$. Das funktionale Modell der Kugel lautet

$$\|\mathbf{P}_{i,j} - \mathbf{P}_{C,i}\|_2 = r_i \quad (4.1)$$

und wird u. a. zur Referenzpunktbestimmung an Laserteleskopen eingesetzt (Klügel u. a. 2012; Riepl u. a. 2019). Abbildung 4.1 zeigt exemplarisch für die beiden Marken $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ die resultierenden Kugeln mit den Radien r_1, r_2 sowie den Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ als gemeinsamen Kugelmittelpunkt.

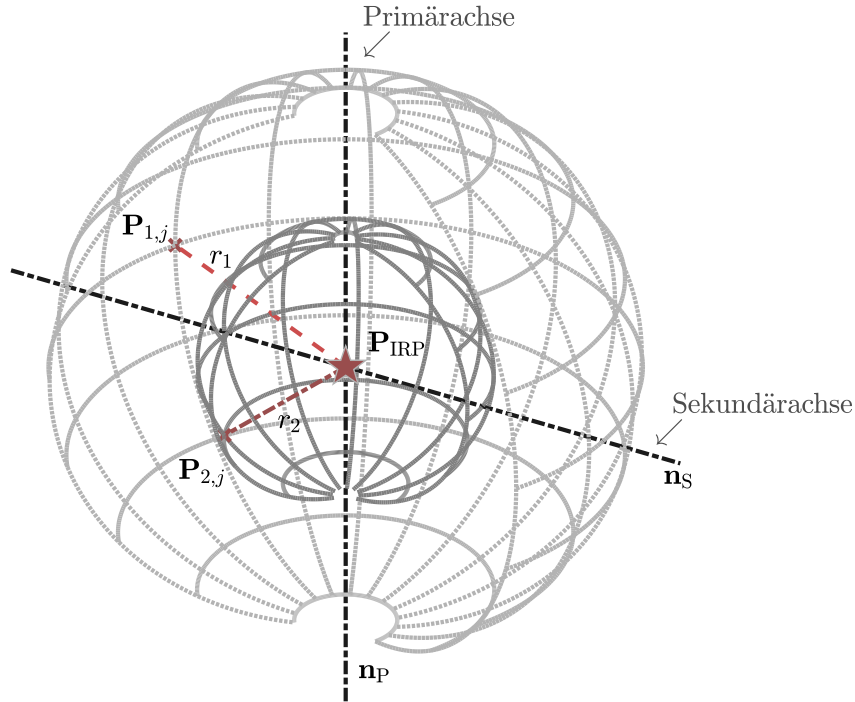


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der Referenzpunktbestimmung mittels Kugeln. Der Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ im Kugelmodell entspricht dem Schnittpunkt zwischen der Primärachse und der Sekundärachse. Die Normaleneinheitsvektoren $\mathbf{n}_P, \mathbf{n}_S$ korrespondieren mit der Primär- bzw. Sekundärachse des Teleskops. Der Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ ist identisch mit den Mittelpunkten der Kugeln, die durch die Trajektorien der Punkte $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ definiert sind. Da die Positionen für $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ frei wählbar sind, ergeben sich für die einzelnen Kugeln unterschiedliche Radien r_1, r_2 .

Torusmodell

Schneiden sich beide Teleskopachsen nicht in einem Punkt, ist der vorhandene Offset zwischen der Primär- und Sekundärachse e_{AO} zu berücksichtigen. Ein unberücksichtigter Achsenoffset führt bei der globalen Analyse von SLR/LLR- bzw. VLBI-Daten zu einer systematischen Verfälschung der globalen Stationskoordinaten, insbesondere in der vertikalen Koordinatenkomponente (Combrinck und Merry 1997; Nilsson u. a. 2016) und beeinflusst u. U. den geschätzten TRF-Netzmaßstab. Die Trajektorie eines Punktes $\mathbf{p}_i$, der in der yz -Ebene des Teleskopkoordinatensystems liegt, beschreibt unter Berücksichtigung von e_{AO} die Geometrie eines Rotationstorus

$$\left(\sqrt{x_{i,j}^2 + y_{i,j}^2} - e_{AO}\right)^2 + z_{i,j}^2 = R_i^2, \quad (4.2)$$

wobei R_i den Abstand zur Kreislinie in der xy -Ebene beschreibt, von welcher der Oberflächenpunkt $\mathbf{p}_i$ den Abstand e_{AO} besitzt (Nitschke 2018, S. 45). R_i korrespondiert mit dem Abstand von $\mathbf{p}_i$ zur Sekundärachse, siehe Abbildung 4.2.

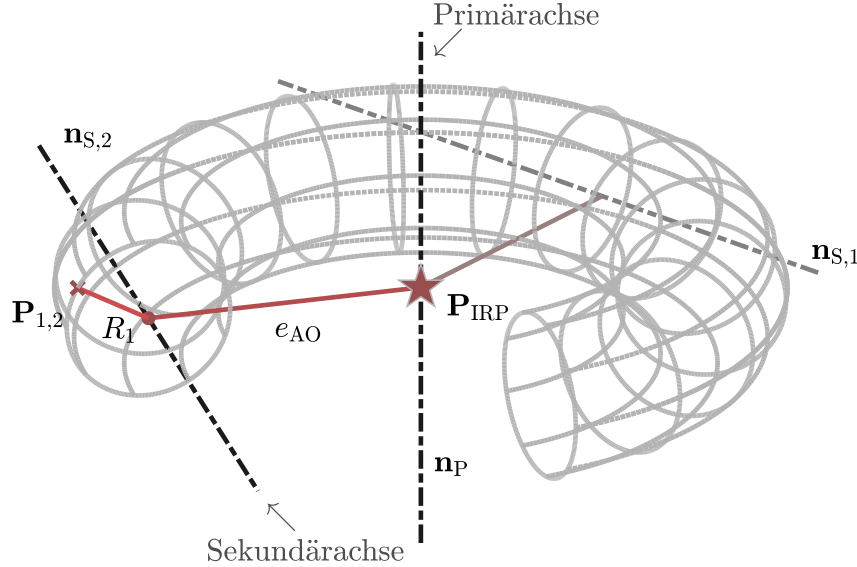


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der Referenzpunktbestimmung mittels rotationssymmetrischem Torus. Der Referenzpunkt $\mathbf{P}_{IRP}$ im Torusmodell befindet sich auf der rotationssymmetrischen Achse des Torus. Diese korrespondiert mit der Primärachse des Teleskops und ist durch den Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}_P$ parametrisiert. Im Gegensatz zum Kugelmodell, siehe Abbildung 4.1, berücksichtigt das Modell des rotationssymmetrischen Torus einen Abstand e_{AO} zwischen beiden Teleskopachsen. Der Radius R_1 entspricht dem Abstand des Punktes $\mathbf{p}_1$ von der Kreislinie und korrespondiert mit dem Abstand zur Sekundärachse $\mathbf{n}_S$. Der Referenzpunkt $\mathbf{P}_{IRP}$ und der Abstand e_{AO} zwischen der primären und sekundären Achse sind invariant bzgl. der Teleskoporientierung.

Zur Beschreibung des Referenzpunktes im übergeordneten terrestrischen Koordinatensystem ist eine Koordinatentransformation notwendig. Die allgemeine räumliche Koordinatentransformation ohne Maßstab ist gegeben durch (Lösler 2011; Lösler und Eschelbach 2014)

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_T + \mathbf{R}_x(\epsilon_x) \mathbf{R}_y(\epsilon_y) \mathbf{R}_z(\epsilon_z) \mathbf{p}_i, \quad (4.3)$$

wobei $\mathbf{p}_i$ und $\mathbf{P}_i$ korrespondierende Koordinaten des i -ten identischen Punktes im Start- bzw. Zielsystem sind, $\mathbf{P}_T$ der Translationsvektor ist und die Matrizen $\mathbf{R}$

orthogonale Rotationsmatrizen repräsentieren, die eine Drehung um den geklammerten Eulerwinkel um die indexierte Koordinatenachse beschreiben (Nitschke und Knickmeyer 2000), d. h.,

$$\mathbf{R}_x(\epsilon_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon_x & -\sin \epsilon_x \\ 0 & \sin \epsilon_x & \cos \epsilon_x \end{pmatrix}, \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{R}_y(\epsilon_y) = \begin{pmatrix} \cos \epsilon_y & 0 & \sin \epsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \epsilon_y & 0 & \cos \epsilon_y \end{pmatrix}, \quad (4.4b)$$

$$\mathbf{R}_z(\epsilon_z) = \begin{pmatrix} \cos \epsilon_z & -\sin \epsilon_z & 0 \\ \sin \epsilon_z & \cos \epsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4c)$$

Mittels der allgemeinen Transformationsvorschrift nach Gl. 4.3 lässt sich der Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ im gewünschten Datum bestimmen, d. h.,

$$\mathbf{P}_{i,j} = \mathbf{P}_{\text{IRP}} + \mathbf{R}_x(\beta) \mathbf{R}_y(\alpha) \mathbf{p}_i. \quad (4.5)$$

Der Translationsvektor, der die Verschiebung zwischen dem Ursprung des Teleskopkoordinatensystems und dem Ursprung des terrestrischen Koordinatensystems beschreibt, entspricht hierbei dem Referenzpunkt. Die Eulerwinkel α und β parametrieren die Neigung der xy -Ebene des Teleskopkoordinatensystems gegenüber der XY -Ebene des terrestrischen Koordinatensystems. Die dritte Drehung $\mathbf{R}_z$ entfällt aufgrund der Rotationssymmetrie des Torus.

Bedingt durch die Restriktion, dass $\mathbf{p}_i$ exakt in der yz -Ebene des Teleskopkoordinatensystems liegen muss, ist das Modell eines Tours in der praktischen Anwendung mindestens herausfordernd. Sobald sich $\mathbf{p}_i$ an einer beliebigen Position außerhalb der yz -Ebene befindet, entsteht eine Torsion innerhalb des gekrümmten Zylinders, der Toruswulst, die durch Gl. 4.2 nicht berücksichtigt wird. Ein ähnlicher Effekt tritt auf, wenn Primär- und Sekundärachse nicht orthogonal aufeinander stehen. Lanotte u. a. (2008) nutzen das geometrische Modell eines Rotationstorus zur Bestimmung des VLBI-Referenzpunktes an der Station in Matera (Italien). Die Autoren lassen jedoch offen, wie die vier verwendeten Corner-Cube-Reflektoren am Hauptreflektor des VLBI-Radioteleskops positioniert wurden. Der geschätzte Antennenachsenoffset e_{AO} weist jedoch eine Diskrepanz von bis zu 5 mm im Vergleich zu globalen VLBI-Lösungen verschiedener Analysezentren auf (Lanotte u. a. 2008). Dies legt eine Positionierung der vier Reflektoren außerhalb der yz -Ebene des Teleskopkoordinatensystems nahe, welche unzulässig ist und eine systematische Verfälschung in den Ergebnissen hervorruft.

Kreismodelle

Gelingt es, Marken in Verlängerung der Sekundärachse zu montieren, z. B. an den beiden Endpunkten der Sekundärachse, so beschreiben die Trajektorien dieser Marken bei Rotation um die Primärachse Kreise mit unterschiedlichen Radien. Die Kreismittelpunkte liegen auf der Primärachse und sind identisch mit dem Referenzpunkt, wenn beide Teleskopachsen senkrecht aufeinander stehen. Stehen diese nicht senkrecht aufeinander, resultiert $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ durch orthogonale Projektion der Sekundärachse auf die Primärachse. Hierzu ist zunächst das Kreuzprodukt zwischen den Richtungsvektoren der Primär- und Sekundärachse $\mathbf{n}_P$ und $\mathbf{n}_S$ zu bilden, sodass hieraus der Richtungsvektor des Achsenoffsets resultiert. Die Ebene, die dieser Richtungsvektor zusammen mit $\mathbf{n}_S$ aufspannt, enthält den Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ als Durchstoßpunkt der Primärachse. Für Drehungen um die Sekundärachse sind die Markenpositionen invariant, sodass dieser Ansatz im Folgenden als Modell mit Primärachsenkreisen (P-Kreismodell) bezeichnet wird. Abbildung 4.3 zeigt eine schematische Darstellung dieses geometrischen Modellansatzes für zwei Teleskoporientierungen. Die dargestellten Teleskopachsen schneiden sich nicht in einem Punkt und bilden keine orthogonale Basis.

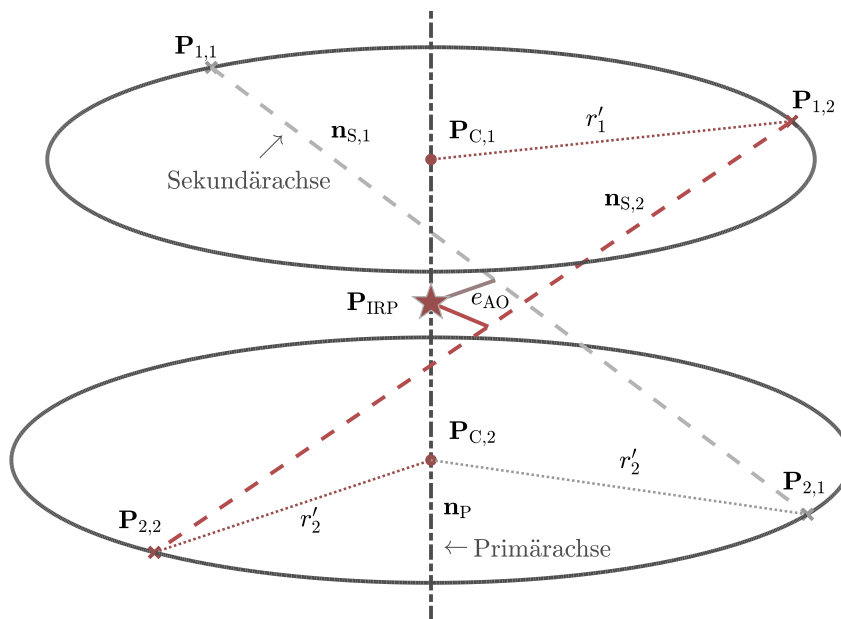


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung der Referenzpunktbestimmung mittels Primärachsenkreisen. In Verlängerung der Sekundärachse befinden sich $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$. Durch Drehung um die Primärachse $\mathbf{n}_P$ beschreiben die Trajektorien beider Marken Primärachsenkreise mit den Kreismittelpunkten $\mathbf{P}_{C,1}, \mathbf{P}_{C,2}$ und den Radien r'_1, r'_2 . $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ sind gegenüber Drehungen um die jeweils mittedrehende Sekundärachse $\mathbf{n}_{S,1}$ bzw. $\mathbf{n}_{S,2}$ invariant. Der Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ ergibt sich durch orthogonale Projektion von $\mathbf{n}_S$ auf $\mathbf{n}_P$. Sowohl der Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ als auch der Abstand e_{AO} zwischen der primären und sekundären Achse sind invariant bzgl. der Teleskoporientierung.

Der Kreis ist eine zweidimensionale Figur, sodass keine geschlossene Modellgleichung zur expliziten Parametrierung eines räumlichen Kreises existiert. Im Kontext der Referenzpunktbestimmung sind unterschiedliche Lösungsansätze dokumentiert. Nothnagel und Binnenbruck (2000) zerlegen die Koordinaten der Kreispunkte in ihre

horizontalen und vertikalen Koordinatenkomponenten. Basierend auf den abgetrennten horizontalen Koordinatenkomponenten der Punkte erfolgt die Bestimmung von horizontalen Kreisen. Der Kreismittelpunkt korrespondiert in dieser Modellannahme mit den horizontalen Koordinatenkomponenten des Referenzpunktes. Die fehlende vertikale Koordinatenkomponente ergibt sich durch Mittelwertbildung von allen vertikalen Koordinatenkomponenten der Kreispunkte (Nothnagel und Binnenbruck 2000; Nothnagel u. a. 2001). Diese Modellbildung führt jedoch nur dann zu unverfälschten Ergebnissen, wenn die Primärachse des Teleskops parallel zur Z -Achse des übergeordneten terrestrischen Koordinatensystems steht, sodass die Kreisebene parallel zur XY -Ebene liegt (Sarti u. a. 2004). Für die in Abbildung 1.4b dargestellte Äquatorialmontierung ist dieses Bestimmungsverfahren somit ungeeignet. Untersuchungen von Becker und Fischer (2003) am 20 m Radioteleskop Wettzell zeigen weiterhin, dass auch Teleskope mit Azimut-Elevation-Montierung, siehe Abbildung 1.4a, gegenüber der Z -Achse des übergeordneten terrestrischen Koordinatensystems geneigt sind und die notwendige Parallelitätsbedingung nicht erfüllen. Die Verwendung des von Nothnagel und Binnenbruck (2000) vorgeschlagenen Lösungsverfahrens ist daher mit starken Einschränkungen verbunden und besitzt keine allgemeine Gültigkeit.

Um die Schiefstellung der Primärachse in der Auswertung zu kompensieren, schlagen Leinen u. a. (2007) eine zweistufige Analyse vor. Hierbei wird zunächst die Regressionsebene des Kreises geschätzt. Der Normalenvektor dieser Kreisebene korrespondiert mit dem Richtungsvektor $\mathbf{n}_p$ der Primärachse. Dieser muss nicht notwendigerweise parallel zur Z -Achse des terrestrischen Koordinatensystems stehen. Die Schätzung des Kreises erfolgt anschließend auf der Basis der projizierten Punkte in der Kreisebene. Die horizontalen Koordinatenkomponenten des Referenzpunktes ergeben sich wiederum aus dem geschätzten Kreismittelpunkt. Die vertikale Komponente resultiert aus der Regressionsebene an der Stelle des geschätzten Kreismittelpunktes. Ähnlich wie beim Ansatz von Nothnagel und Binnenbruck (2000) wird auch in diesem Fall nicht das originäre räumliche Problem gelöst, sondern zwei Teilprobleme, welche eine Trennung bzw. Zerlegung der Koordinatenkomponenten vorsehen. Da die Lösung dieser beiden Teilprobleme nicht notwendigerweise mit der Optimallösung des originären Problems gleichgesetzt werden darf, ist diese Herangehensweise nicht unproblematisch (Eschelbach und Haas 2003).

Die sachgerechte Parametrierung eines Kreises in allgemeiner Raumlage gelingt durch das Verschneiden zweier Flächen zweiter Ordnung (Quadrik). Schnittkreise resultieren u. a. aus der Verschneidung von zwei Kugeln, einem Zylinder und einer Ebene, oder einer Kugel und einer Ebene. Insbesondere die Kombination aus Kugel und Ebene wird häufig verwendet, da diese besonders anschaulich ist und weitgehend unempfindlich gegenüber ungünstig gewählten Startwerten. Die Ebene in Hesse'scher Normalform ist gegeben durch (Bronshtein u. a. 2007, S. 214)

$$\mathbf{n}_i^T \mathbf{P}_{i,j} = d_i. \quad (4.6)$$

Hierbei beschreibt d den kürzesten Abstand zum Koordinatenursprung und $\mathbf{n}$, mit $\mathbf{n}^T \mathbf{n} = 1$, den normierten Normalenvektor der Ebene. Weiterhin ist eine zusätzliche

Schnittbedingung zu berücksichtigen, die beide Geometrien miteinander verknüpft. Üblicherweise wird gefordert, dass der Kugelmittelpunkt in Gl. 4.1 gleichzeitig ein Punkt der Ebene ist, d. h.,

$$\mathbf{n}_i^T \mathbf{P}_{C,i} = d_i. \quad (4.7)$$

Im Gegensatz zur zweistufigen Herangehensweise bei der Kreisschätzung, bei der lediglich ein Optimum für das jeweilige Teilproblem bestimmt wird, wird durch die direkte Kombination zweier Quadriken das originäre räumliche Problem für den Kreis gelöst (Eschelbach und Haas 2003; Lösler und Nitschke 2010).

Ähnlich wie bei der Verwendung des Torus besitzt das Modell der Primärachsenkreise modellbedingte Einschränkungen bzgl. der Wahl der Markenpositionen. Diese müssen sich innerhalb der Sekundärachse befinden und können nicht nach messtechnischen Vorgaben, z. B. Sichtbarkeiten, ausgewählt werden. Befinden sich die Marken nicht exakt in der Sekundärachse, entsteht eine systematische Abweichung, die u. U. die geschätzte Referenzpunktposition verfälscht. Weiterhin erlauben die meisten Teleskope nur das Anbringen von zwei Marken, jeweils ein pro Sekundärachsenendpunkt. Da eine Achse bzw. eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig definiert ist, liegt keine Überbestimmung vor. Die Gesamtredundanz beim P-Kreismodell ist daher gering im Vergleich zu Verfahren, die das Anbringen von mehreren Marken erlauben.

Um die Nachteile der eingeschränkten Wahl der Markenpositionen aufzuwiegen, die systematischen Abweichungen aufgrund einer inexakten Montierung der Marken zu eliminieren, und um die Gesamtredundanz durch weitere Marken zu erhöhen, wird häufig ein modifiziertes Verfahren zur Bestimmung des Referenzpunktes mittels Kreisen verwendet. Die Trajektorie einer Marke, die an einer beliebigen Position am drehbaren Teil des Teleskops befestigt wird, beschreibt einen Kreisbogen, wenn das Teleskop nur um eine der beiden Achsen rotiert. Aus dem Festhalten der Sekundärachse resultiert ein Primärachsenkreis, dessen Mittelpunkt zusammen mit dem Normalenvektor der Kreisebene die Primärachse eindeutig parametrisiert. Erfolgt die Drehung hingegen um die Sekundärachse bei feststehender Primärachse, liefert der resultierende Sekundärachsenkreis analog die Parameter der Sekundärachse in Abhängigkeit des eingestellten Primärwinkels. Zur Bestimmung des Referenzpunktes wird das Kreuzprodukt aus den Normalenvektoren der Primär- und Sekundärachse gebildet. Der resultierende Vektor steht senkrecht auf beiden Achsen und liefert zusammen mit der Sekundärachse eine Ebene, die den Referenzpunkt als Schnittpunkt mit der Primärachse enthält. Der Offset zwischen beiden Teleskopachsen entspricht dem kürzesten Abstand zwischen diesem Referenzpunkt und der Sekundärachse. Nachfolgend wird der Ansatz als Modell mit Primär- und Sekundärachsenkreisen (PS-Kreismodell) bezeichnet.

Durch die Verwendung mehrerer Marken und das Parametrieren der Sekundärachse unter unterschiedlichen Primärwinkeln sind geometrische Zusatzbedingungen zu berücksichtigen (Eschelbach und Haas 2003; Dawson u. a. 2006; Lösler 2008):

1. Der Abstand zwischen den Marken ist unabhängig von der Teleskoporientierung und bleibt konstant.
2. Kreise, die durch Rotation um eine Achse gleichzeitig entstehen, besitzen identische Normalenvektoren und sind somit parallel.
3. Kreise, die durch Rotation um eine Achse gleichzeitig entstehen, besitzen kollineare Mittelpunkte.
4. Der Abstand zwischen den Kreisebenen der Sekundärachsen ist konstant für alle parametrisierten Sekundärachsen.
5. Sekundärachsenkreise einer Marke, die unter unterschiedlichen Primärwinkeln beobachtet wurden, besitzen identische Radien.
6. Sowohl Winkel als auch Abstand zwischen der Primärachse und der jeweils parametrisierten Sekundärachse sind konstant.

Dawson u. a. (2006) zeigen, dass das Vernachlässigen dieser geometrischen Restriktionen zu signifikanten Abweichungen in der geschätzten Referenzpunktposition führt, welche die Messunsicherheit gegenwärtiger Instrumente z. T. um ein Vielfaches überschreitet.

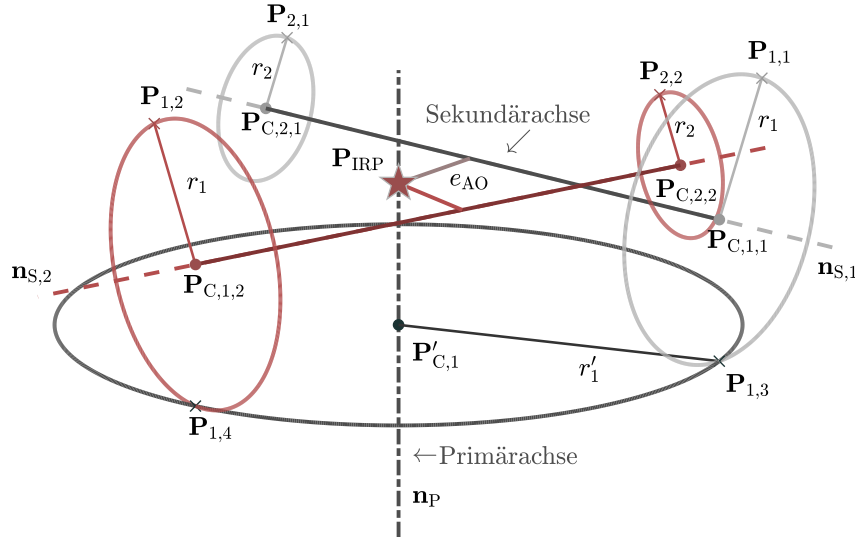


Abbildung 4.4: Schematische Darstellung der Referenzpunktbestimmung mittels Primär- und Sekundärachsenkreisen. Durch Rotation um die Sekundärachse bei feststehender Primärachse beschreiben die beiden Marken $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ jeweils eine Kreistrajektorie. Die Mittelpunkte $\mathbf{P}_{C,1,1}$, $\mathbf{P}_{C,2,1}$ der resultierenden Kreise sind kollinear zur Sekundärachse $\mathbf{n}_{S,1}$. Wird diese Messkonfiguration unter einem anderen (dann wiederum festen) Primärwinkel wiederholt, ergeben sich die Kreise mit den Mittelpunkten $\mathbf{P}_{C,1,2}$, $\mathbf{P}_{C,2,2}$, die wiederum kollinear zur mitgedrehten Sekundärachse $\mathbf{n}_{S,2}$ sind. Unabhängig vom Primärwinkel sind sowohl die Radien r_1 , r_2 als auch die Abstände zwischen den Kreisen $\|\mathbf{P}_{C,2,2} - \mathbf{P}_{C,1,2}\|_2 = \|\mathbf{P}_{C,2,1} - \mathbf{P}_{C,1,1}\|_2$ identisch. Für $\mathbf{P}_1$ ist zusätzlich auch der resultierende Primärachsenkreis mit dem Mittelpunkt $\mathbf{P}'_{C,1}$ und dem Radius r'_1 dargestellt, der sich durch Drehung um die Primärachse bei feststehender Sekundärachse ergibt. Die Mittelpunkte der Primärachsenkreise sind kollinear zur Primärachse $\mathbf{n}_P$. Der Referenzpunkt $\mathbf{P}_{IRP}$ und der Abstand e_{AO} zwischen der primären und sekundären Achse sind invariant bzgl. der Teleskoporientierung.

Abbildung 4.4 zeigt schematisch für zwei Marken das Prinzip zur Referenzpunktbestimmung unter Verwendung von Primär- und Sekundärachsenkreisen. Durch gezieltes Drehen um jeweils nur eine der beiden Teleskopachsen ergeben sich für die angebrachten Marken Kreistrajektorien, deren Mittelpunkte kollinear zur Primär- bzw. Sekundärachse sind.

Im Vergleich zu den vorherigen Bestimmungsverfahren mittels Kugel, Torus oder Primärachsenkreisen ist das PS-Kreismodell somit deutlich komplexer. Es ermöglicht aber eine freie Wahl der Markenpositionen und berücksichtigt konstruktionsbedingte Abweichungen vom idealen geometrischen Teleskopmodell. Auf der anderen Seite ist dieses Modell nur dann anwendbar, wenn das Teleskop ausschließlich um eine der beiden Achsen gedreht wird. Für Referenzpunktbestimmungen sind daher entsprechend große Zeitfenster zu definieren, die für konventionelle Radioteleskope häufig nicht zur Verfügung stehen (Kallio und Poutanen 2012). Im Kontext von GGOS wird ein $24^{\text{h}}/7\text{d}$ -Betrieb diskutiert (Rothacher u. a. 2009), sodass tendenziell mit geringer werdenden Zeitfenstern zu rechnen ist. Eine prozessintegrierte Referenzpunktbestimmung, wie es das GGOS anregt, ist mit diesem Verfahren somit nicht möglich.

4.1.2 Transformationsmethode – IRP

Während im vorherigen Abschnitt Modelle vorgestellt wurden, die zur Referenzpunktbestimmung geometrische Primitive aus einem Teil der beobachteten Trajektorien extrahieren, wird im Folgenden ein Transformationsmodell hergeleitet, welches die Trajektorien der Marken direkt beschreibt. Für dieses Modell werden zwei Lösungsvorschläge erarbeitet, die denselben funktionalen Zusammenhang verwenden, aber sich hinsichtlich der zu beobachtenden und zu parametrierenden Größen unterscheiden.

Das Transformationsmodell zur Bestimmung des invarianten Referenzpunktes (IRP) stellt den funktionalen Zusammenhang zwischen einer Position $\mathbf{p}_i$ im Teleskopkoordinatensystem und der korrespondierenden Position $\mathbf{P}_{i,j}$ im terrestrischen Koordinatensystem her. Hierbei sind insbesondere die drei möglichen konstruktionsbedingten Abweichungen zu berücksichtigen.

1. Die Primär- und Sekundärachse des Teleskops schneiden sich nicht in einem Punkt, sodass der Achsenoffset e_{AO} zu berücksichtigen ist.
2. Die Primär- und Sekundärachse des Teleskops stehen nicht senkrecht aufeinander und weichen um einen kleinen Winkel γ von der Orthogonalität ab.
3. Die Primärachse des Teleskops ist gegenüber der Z -Achse des terrestrischen Koordinatensystems geneigt.

Aufgrund dieser Irregularitäten in der Teleskopkonstruktion lässt sich der funktionale Zusammenhang nicht durch eine klassische Helmert-Transformation abbilden, wie Lösler und Hennes (2008) anschaulich zeigen.

IRP-Modell mit Eulerwinkel

Wird zunächst von einem idealen Teleskopsystem ohne Irregularitäten ausgegangen, welches kongruent mit dem terrestrischen Koordinatensystem ist, dann wird ein Punkt in beiden Koordinatensystemen durch

$$\mathbf{p}_i^{(1)} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \quad (4.8)$$

eindeutig beschrieben. Zur besseren Darstellung wird die Herleitungsschrittfolge im Folgenden durch einen hochgestellten Index angegeben.

Rotiert das Teleskop um die Sekundärachse, welche in einem idealen Teleskopsystem mit der x -Achse korrespondiert, um den Sekundärwinkel ω , ergibt sich mittels Gl. 4.4a die rotierte Position

$$\mathbf{P}_{i,j}^{(2)} = \mathbf{R}_x(\omega_j) \mathbf{p}_i^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_i. \quad (4.9)$$

Die Berücksichtigung von e_{AO} als Offset zwischen der primären und der sekundären Teleskopachse verschiebt den Punkt $\mathbf{P}_{i,j}^{(2)}$ entlang der y -Achse, d. h.,

$$\mathbf{P}_{i,j}^{(3)} = \mathbf{e}_{AO} + \mathbf{P}_{i,j}^{(2)} = \begin{pmatrix} x \\ e_{AO} + y \cos \omega - z \sin \omega \\ y \sin \omega + z \cos \omega \end{pmatrix}_{i,j}, \quad (4.10)$$

wobei $\mathbf{e}_{AO} = \begin{pmatrix} 0 & e_{AO} & 0 \end{pmatrix}^T$ die vektorielle Darstellung des Achsenoffsets beschreibt. Hierdurch wird die erste konstruktionsbedingte Restriktion im Modell berücksichtigt. Die zweite zu modellierende Restriktion ist die Nichtorthogonalität zwischen beiden Teleskopachsen. Diese lässt sich durch einen Korrekturwinkel γ beschreiben und mittels Gl. 4.4b ins Modell integrieren, sodass

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,j}^{(4)} &= \mathbf{R}_y(\gamma) \mathbf{P}_{i,j}^{(3)} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e_{AO} + y \cos \omega - z \sin \omega \\ y \sin \omega + z \cos \omega \end{pmatrix}_{i,j} \end{aligned} \quad (4.11)$$

folgt.

Eine Drehung des Teleskops um die Primärachse mittels Gl. 4.4c um den Winkel κ ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,j}^{(5)} &= \mathbf{R}_z^T(\kappa_j) \mathbf{P}_{i,j}^{(4)} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} x \cos \gamma + \sin \gamma (y \sin \omega + z \cos \omega) \\ e_{AO} + y \cos \omega - z \sin \omega \\ -x \sin \gamma + \cos \gamma (y \sin \omega + z \cos \omega) \end{pmatrix}_{i,j}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei der Drehsinn zu berücksichtigen ist. Ausgehend von einer Azimut-Elevation-Montierung, bei der die positive Drehung um die Sekundärachse gemäß Gl. 4.9 gegen

den Uhrzeigersinn definiert ist (Drehsinn des Elevationswinkels), erfolgt eine positive Drehung um die Primärachse in Gl. 4.12 hingegen im Uhrzeigersinn (Drehsinn des Azimutwinkels). Die in Gl. 4.4c definierte Rotationsmatrix beschreibt eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn. Da jede Rotationsmatrix eine orthogonale Matrix ist, für die gilt (Nitschke und Knickmeyer 2000; Bronshtein u. a. 2007, S. 257)

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad (4.13a)$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \quad (4.13b)$$

ist in Gl. 4.12 die Rotation durch $\mathbf{R}_z^T$ parametrisiert.

Da die Primärachse des Teleskops üblicherweise nicht parallel zur Z -Achse des terrestrischen Koordinatensystems verläuft – insbesondere wenn eine Äquatorialmontierung vorliegt oder ein geozentrisches Koordinatensystem als Datum verwendet wird –, ist diese Schiefstellung in der Modellgleichung zu berücksichtigen. Diese Achsschiefe lässt sich mit den Gl. 4.4a, 4.4b durch zwei aufeinanderfolgende Drehungen um die Korrekturwinkel α und β durch die Rotationssequenz

$$\mathbf{R}_{yx}(\alpha, \beta) = \mathbf{R}_x(\beta) \mathbf{R}_y(\alpha) \quad (4.14)$$

beschreiben, siehe Gl. 4.5. Weiterhin besitzen beide Koordinatensysteme keinen gemeinsamen Koordinatenursprung, sodass neben dieser Schiefstellung noch ein Translationsvektor zu berücksichtigen ist, d. h.,

$$\mathbf{P}_{i,j}^{(6)} = \mathbf{P}_{\text{IRP}} + \mathbf{R}_{yx}(\alpha, \beta) \mathbf{P}_{i,j}^{(5)}. \quad (4.15)$$

Der Translationsvektor enthält hierbei die kartesischen Koordinaten des zu bestimmenden Referenzpunktes $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$.

Die direkte Verwendung der Primärwinkel in Gl. 4.12 setzt voraus, dass das terrestrische System gegenüber dem Teleskopkoordinatensystem keine Verdrehung aufweist. Um eine unabhängige Datumsdefinition für das terrestrische Koordinatensystem zu gewährleisten, ist die Nullstellung des Teilkreises der Primärachse als Orientierungsunbekannte κ_0 im Modell zu berücksichtigen. Durch Zusammenfassen der Gl. 4.8 bis 4.15 ergibt sich der finale funktionale Zusammenhang

$$\mathbf{P}_{i,j} = \mathbf{P}_{\text{IRP}} + \mathbf{R}_{yx}(\alpha, \beta) \mathbf{R}_z^T(\kappa_j + \kappa_0) \mathbf{R}_y(\gamma) (\mathbf{e}_{\text{AO}} + \mathbf{R}_x(\omega_j) \mathbf{p}_i), \quad (4.16)$$

der eine Transformation von Punkten im Teleskopkoordinatensystem ins übergeordnete terrestrische Koordinatensystem beschreibt (Lösler und Hennes 2008; Lösler 2008, 2009b). Während das Modell der PS-Kreise noch zusätzliche Bedingungsgleichungen benötigt, sind diese geometrischen Restriktionen bereits implizit in Gl. 4.16 berücksichtigt (Kallio und Poutanen 2011).

Abbildung 4.5 zeigt schematisch das funktionale Modell zur Bestimmung des Referenzpunktes unter Berücksichtigung der geometrischen Irregularitäten. Für die i -te Marke $\mathbf{p}_i$ sind exemplarisch die Positionen $\mathbf{P}_{i,j}$ im globalen terrestrischen Koordinatensystem angegeben, die durch Rotation um die Sekundärachse entstehen.

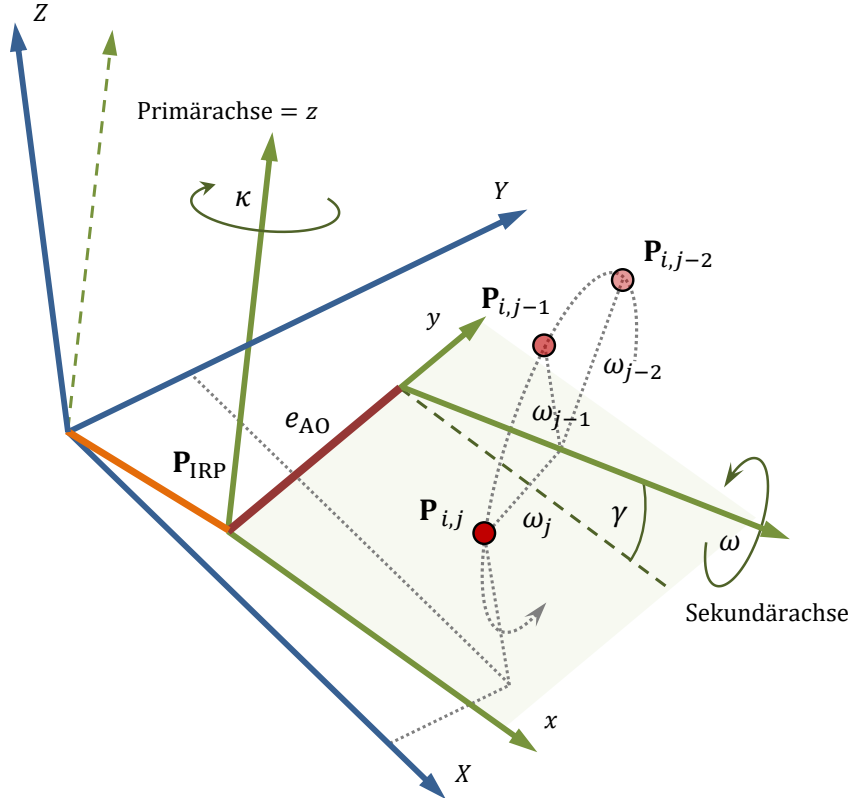


Abbildung 4.5: Schematische Darstellung des funktionalen Zusammenhangs zur Bestimmung des Referenzpunktes $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ unter Berücksichtigung des Achsenoffsets e_{AO} und der Nichtorthogonalität zwischen der primären und sekundären Achse γ . Die beiden Korrekturwinkel α, β zur Kompensation der Neigung der Primärachse des Teleskops gegenüber der Z-Achse des übergeordneten terrestrischen Referenzsystems sind nicht eingezeichnet, da es sich hierbei um eine Rotationssequenz um mitdrehende Koordinatenachsen handelt. Die Neigung der Achse ist jedoch angedeutet. Während das übergeordnete terrestrische Koordinatensystem blau dargestellt ist, ist das Koordinatensystem des Teleskops in Grün dargestellt. Für die i -te Marke im Teleskopsystem sind die durch Rotation um die Sekundärachse im Winkel ω resultierenden Positionen $\mathbf{P}_{i,j}$ exemplarisch im terrestrischen Koordinatensystem eingezeichnet.

IRP-Modell mit Eulerachse und -winkel

Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist wiederum eine orthogonale Matrix (Zurmühl und Falk 1984, S. 32; Bronshtein u. a. 2007, S. 257), sodass das Produkt mehrerer Drehmatrizen wiederum eine Drehmatrix beschreibt, die als zusammengesetzte Rotationssequenz von Einzeldrehungen interpretiert werden kann. Im Gegensatz zu den in Gl. 4.4 definierten Matrizen, die eine Drehung um jeweils eine Koordinatenachse beschreiben, rotiert das Produkt mehrerer räumlicher Einzeldrehungen i. A. um eine beliebige im Raum orientierte Achse $\mathbf{r}^T = \begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{r}^T \mathbf{r} = 1$, d. h.,

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_r(\epsilon) \mathbf{r}. \quad (4.17)$$

Hierbei entspricht $\mathbf{r}$ den zum Eigenwert $+1$ gehörenden Einheitseigenvektor der Drehmatrix

$$\mathbf{R}_r(\epsilon) = \cos \epsilon \mathbf{I} + (1 - \cos \epsilon) \mathbf{r} \mathbf{r}^T - \sin \epsilon [\mathbf{r}]_{\times}, \quad (4.18)$$

wobei $\mathbf{I}$ eine Einheitsmatrix ist und $[\mathbf{r}]_{\times}$ die schiefsymmetrische Matrix

$$[\mathbf{r}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt (Nitschke und Knickmeyer 2000). Der Drehwinkel ergibt sich aus

$$\cos \epsilon = \mathbf{r}_{\perp}^T \mathbf{R}_r(\epsilon) \mathbf{r}_{\perp}, \quad (4.19)$$

wobei $\mathbf{r}_{\perp}$ ein Einheitsvektor ist, der rechtwinklig auf $\mathbf{r}$ steht. Die Darstellung einer Drehung durch eine beliebig im Raum orientierte Achse und einen Drehwinkel wird als Eulerachse und -winkel bezeichnet (Knickmeyer und Nitschke 1994; Nitschke und Knickmeyer 2000).

Mittels dieser Darstellung lässt sich die Rotation um die Primärachse $\mathbf{R}_P(\kappa)$ und die Rotation um die Sekundärachse $\mathbf{R}_S(\omega)$ direkt parametrieren. Hierdurch ergibt sich die zu Gl. 4.16 äquivalente Darstellung (Kallio und Poutanen 2011, 2012)

$$\mathbf{P}_{i,j} = \mathbf{P}_{\text{IRP}} + \mathbf{R}_P(\kappa_j)(\mathbf{E}_{\text{AO}} - \mathbf{P}_{\text{IRP}} + \mathbf{R}_S(\omega_j)\mathbf{p}_i), \quad (4.20)$$

wobei $\mathbf{E}_{\text{AO}}$ der Punkt der Sekundärachse ist, der durch orthogonale Projektion der Primärachse auf die Sekundärachse entsteht, und

$$\mathbf{R}_P(\kappa_j) = \mathbf{R}_{yx}(\alpha, \beta) \mathbf{R}_z^T(\kappa_j) \mathbf{R}_y(\gamma) \quad (4.21)$$

die Rotation um die Primärachse beschreibt. Im Gegensatz zu Gl. 4.16 definiert der Richtungsvektor $(\mathbf{E}_{\text{AO}} - \mathbf{P}_{\text{IRP}})$ die Orientierung des Primärwinkels, sodass κ_0 entfällt. Die Länge dieses Richtungsvektors entspricht dem Abstand zwischen beiden Teleskopachsen, d. h.,

$$e_{\text{AO}} = \|\mathbf{E}_{\text{AO}} - \mathbf{P}_{\text{IRP}}\|_2. \quad (4.22)$$

In Gl. 4.20 wird unterstellt, dass die Normalenvektoren $\mathbf{n}_P$ bzw. $\mathbf{n}_S$ der primären bzw. sekundären Teleskopachse Einheitsvektoren sind und der Vektor $(\mathbf{E}_{\text{AO}} - \mathbf{P}_{\text{IRP}})$ sowohl senkrecht auf $\mathbf{n}_P$ als auch auf $\mathbf{n}_S$ steht. Die zu berücksichtigenden Nebenbedingungen lauten

$$\mathbf{n}_P^T \mathbf{n}_P = 1, \quad (4.23a)$$

$$\mathbf{n}_S^T \mathbf{n}_S = 1, \quad (4.23b)$$

$$(\mathbf{E}_{\text{AO}} - \mathbf{P}_{\text{IRP}})^T \mathbf{n}_P = 0, \quad (4.23c)$$

$$(\mathbf{E}_{\text{AO}} - \mathbf{P}_{\text{IRP}})^T \mathbf{n}_S = 0. \quad (4.23d)$$

Die mögliche Schiefstellung zwischen den Teleskopachsen ergibt sich aus

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \arccos \mathbf{n}_P^T \mathbf{n}_S. \quad (4.24)$$

Li u. a. (2013) zeigen, dass Gl. 4.16 und Gl. 4.20 ineinander überführbare Modellgleichungen sind. Die Darstellung mittels Eulerwinkel und die Darstellung mittels Eulerachse und -winkel beschreiben somit dasselbe mathematische Problem und stellen daher keine unterschiedlichen Verfahren zur Referenzpunktbestimmung dar. Während Gl. 4.16 teleskopspezifische Parameter wie bspw. den Abstand e_{AO} zwischen Primär- und Sekundärachse direkt parametrisiert, sind diese z. T. nur implizit in Gl. 4.20 modelliert, siehe auch die Gl. 4.22, 4.24. Gl. 4.20 lässt sich aufgrund der Rotationsdarstellung mittels Eulerachse und -winkel jedoch geometrisch einfacher interpretieren, da die physischen Elemente des Teleskops explizit in der Gleichung erkennbar sind.

Lösung im impliziten funktionalen Modell – IRP I

Die zu bestimmenden Modellparameter in Gl. 4.16 sind neben der Referenzpunktposition $\mathbf{P}_{IRP}$ der Abstand zwischen der Primär- und Sekundärachse e_{AO} , die Winkel α, β zur Beschreibung der Neigung der Primärachse sowie der Korrekturwinkel γ zur Modellierung der Nichtorthogonalität zwischen beiden Teleskopachsen und die Orientierungsunbekannte des Primärwinkels κ_0 . Weiterhin sind die Positionen der Marken $\mathbf{p}_i$ im Teleskopkoordinatensystem unbekannte Modellparameter. Insgesamt ergeben sich $8 + 3m_P$ Modellparameter, wobei m_P die Anzahl der Punkte im Teleskopkoordinatensystem ist (Lösler und Hennes 2008; Lösler 2008).

In Gl. 4.20 ergeben sich hingegen $12 + 3m_P$ Modellparameter. Dies sind die Referenzpunktposition $\mathbf{P}_{IRP}$, die Richtungsvektoren der Primär- und Sekundärachse $\mathbf{n}_P$ bzw. $\mathbf{n}_S$, die projizierte Position $\mathbf{E}_{AO}$ des Achsenoffsets sowie die Positionen der Marken $\mathbf{p}_i$ im Teleskopkoordinatensystem (Kallio und Poutanen 2011). Diese Parameter sind jedoch nicht unabhängig voneinander, da die vier Restriktionen aus den Gl. 4.23 noch zu berücksichtigen sind. Da jede Restriktion als direkte Bestimmung eines Modellparameters interpretiert werden kann, beträgt die effektive Anzahl an unbekannten Modellparametern $12 + 3m_P - 4$ und ist identisch mit der Anzahl, die sich für Gl. 4.16 ergibt.

Zur indirekten Bestimmung der Modellparameter sind die in unterschiedlichen Teleskoporientierungen beobachteten Positionen $\mathbf{P}_{i,j}$ sowie die korrespondierenden Teleskopwinkel κ_j und ω_j vorzugeben. Weiterhin ist die Dispersion der Beobachtungen a-priori abzuschätzen und in Hinblick auf Gl. 3.10 als Gewichtsmatrix $\mathbf{W}$ bereitzustellen. Während die Abschätzung der Messunsicherheiten für das terrestrische Messverfahren i. A. keine Schwierigkeiten bereitet, ist die sachgerechte Ermittlung der Winkelmessunsicherheiten des Teleskops herausfordernd. Vollbesetzte Dispersionsmatrizen, wie sie Lösler u. a. (2016b) herleiten und während der Datenanalyse berücksichtigen, werden häufig durch vereinfachte stochastische Modelle ersetzt, z. B.

durch Dispersionsmatrizen mit diagonalen Struktur (Lösler 2008; Kallio und Poutanen 2012; Ning u. a. 2015). Hierdurch ergibt sich eine unzureichende Dispersion für die geschätzten Modellparameter (Jäger u. a. 2005, S. 214ff).

Gl. 4.16 bzw. Gl. 4.20 liefert pro Beobachtungstupel $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_i^T & \kappa & \omega \end{bmatrix}_j$ drei implizite nichtlineare funktionale Beziehungen $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, in denen mehrere Beobachtungen und Unbekannte gemeinsam auftreten. Eine Schätzung der Modellparameter und der Beobachtungsabweichungen erfolgt mit den Verfahren aus Kapitel 3 auf der Basis von Gl. 3.7 (Lösler und Hennes 2008; Ning u. a. 2015).

Im Gegensatz zum geometrischen Modell mit Primär- und Sekundärachsenkreisen, welches ein gezieltes Rotieren um nur eine Teleskopachse erfordert, ermöglicht das IRP-Modell eine Verarbeitung von gemessenen Positionen in beliebigen Teleskoporientierungen. Eine automatisierte und prozessintegrierte Referenzpunktbestimmung während regulärer SLR/LLR- bzw. VLBI-Experimente, wie es durch das GGOS angeregt wird, ist demnach möglich.

Evaluierungen des IRP-Modells erfolgten durch Simulationen (Kallio und Poutanen 2010; Li u. a. 2013; Zhang u. a. 2018) sowie statische und dynamische Experimente u. a. am Geodätischen Observatorium Wettzell (Deutschland), am Onsala Space Observatory (Schweden), am Goddard Geophysical & Astronomical Observatory (Maryland, USA) oder am Metsähovi Radio Observatory (Finnland). Für die praktische Umsetzung sind Messmittel zu wählen, die das Beobachten von signalisierten Zielen erlauben, um die Trajektorien der Punkte zu bestimmen.

Statische Messkampagnen, in denen das Teleskop definiert bewegt wurde, um u. a. Messkonfigurationen zu optimieren und Vergleiche zum PS-Kreismodell zu ermöglichen, erfolgten bisher weitgehend mit polaren Messsystemen wie Totalstationen (Lösler 2008; Lösler u. a. 2013b, 2014; Mähler u. a. 2018) und Lasertrackern (Lösler 2009a; Klügel u. a. 2012; Lösler u. a. 2018c). Prozessintegrierte Referenzpunktbestimmungen im regulären Stationsbetrieb wurden bisher nur mit automatisierten Totalstationen (Lösler u. a. 2013a; Kallio u. a. 2016; Lösler u. a. 2016b) und trackenden GNSS-Antennen erfolgreich durchgeführt (Kallio und Poutanen 2011, 2012; Ning u. a. 2015).

Die prozessintegrierte Referenzpunktbestimmung setzt eine Synchronisation zwischen dem terrestrischen Messsystem und dem Teleskop voraus, da neben der gemessenen Position die beiden Teleskopwinkel als Beobachtungen bereitzustellen sind. Im regulären Betrieb vollziehen die Teleskope jedoch eine permanente Bewegung, um die Erdrotation auszugleichen bzw. dem Satelliten auf seiner Umlaufbahn zu folgen. Untersuchungen während CONT14⁸ am Onsala Space Observatory zeigen, dass die verwendete numerische Synchronisation (Hennes u. a. 2014) zwischen beiden Messsystemen zusätzliche Winkelmessunsicherheiten von bis zu 10^{-4} rad hervorruft, wobei in diesem Worst-Case-Szenario die Synchronisationsunsicherheit mit 1,5 sec abgeschätzt wurde (Lösler u. a. 2016b). Aus Winkelmessunsicherheiten von 10^{-4} rad resultieren korrespondierende Positionsunsicherheiten von $100 \mu\text{m m}^{-1}$.

⁸Continuous VLBI Campaign 2014 – <https://ivsc.gsfc.nasa.gov/program/cont14/>.

Die messmittelbedingte Unsicherheit eines beobachteten Punktes beträgt bei Verwendung eines optischen Messinstruments wie bspw. eines Lasertrackers $\ll 100 \mu\text{m}$ (Heunecke 2012; Eschelbach u. a. 2015; Hennes 2017). Beträgt der Abstand zwischen Rotationsachse und Marke bspw. 3 m, ergibt sich durch die Synchronisationsunsicherheit demnach eine zusätzliche Positionsunsicherheit von $300 \mu\text{m}$. Diese zusätzliche Positionsunsicherheit überschreitet die Messunsicherheit des Lasertrackers deutlich. Bezogen auf das Gesamtunsicherheitsbudget des Erfassungsprozesses kann die Synchronisationsunsicherheit daher als wesentlich bezeichnet werden. Im folgenden Abschnitt wird daher ein Lösungsvorschlag für das IRP-Modell erarbeitet, der keine Messmittelsynchronisation voraussetzt.

Lösung im expliziten funktionalen Modell – IRP II

Die Reduktion der im vorangegangenen Abschnitt genannten Synchronisationsunsicherheit erfordert idealerweise einen direkten Zugriff auf die Teleskopencoderwerte. Selbst wenn eine entsprechende Schnittstelle zur Verfügung steht, ist diese aufgrund unterschiedlicher Hersteller und differierender Steuersoftwarepakete uneinheitlich, sodass eine Übertragbarkeit auf andere Stationen bzw. Teleskope nur bedingt möglich wäre. Eine ideale Lösung sollte portabel und weitgehend frei von zusätzlichen technischen Restriktionen sein. Eine technische Lösung erscheint daher nicht zielführend und soll hier nicht weiterverfolgt werden. Insbesondere würde eine verbesserte Synchronisation das Problem lediglich in einen anderen Unsicherheitsbereich verschieben, aber nicht lösen.

Um die Abhängigkeiten zwischen den terrestrischen Beobachtungen und den jeweiligen Encoderwerten des Teleskops während der Referenzpunktbestimmung zu umgehen, ist das Beobachtungstupel, bestehend aus beobachteten Positionen $\mathbf{P}_{i,j}$ und zugehörigen Teleskopwinkeln κ_j und ω_j , aufzulösen. Entsprechend der bisherigen Vorgehensweise bei der Referenzpunktbestimmung werden die Positionen $\mathbf{P}_{i,j}$ mit einem Messsystem erfasst, welches diskret signalisierte Punkte in unterschiedlichen – nicht notwendigerweise vorzugebenden – Teleskoporientierungen registriert. Weiterhin sei die zugehörige Dispersion a-priori als bekannt vorausgesetzt. Die Teleskopwinkel, die im IRP I Ansatz als zusätzliche Beobachtungen benötigt wurden, werden hingegen den unbekannten Modellparametern zugeordnet. In Gl. 4.16 bzw. Gl. 4.20 liegt demnach für jede Beobachtung ein expliziter funktionaler Zusammenhang vor.

Gl. 4.16 bzw. Gl. 4.20 beschreibt den funktionalen Zusammenhang einer Transformation eines Punktes von einem Teleskopkoordinatensystem in ein übergeordnetes terrestrisches Koordinatensystem. Durch die Verschiebung der Teleskopwinkel in den Vektor der Modellparameter sind alle Parameter der rechten Seite in Gl. 4.16 bzw. Gl. 4.20 unbekannt. Geometrisch bedeutet dies, dass sowohl die Positionen $\mathbf{p}_i$ im Teleskopkoordinatensystem als auch die Parameter zur Beschreibung der Transformation unbekannt sind. Im Kontext einer Koordinatentransformation ist dieses Gleichungssystem nicht lösbar, da die Transformationsparameter unmittelbar abhängig von den Koordinaten im Start- und Zielsystem sind. Aufgrund der rotativen Bewegung

des Teleskops ist die mögliche Position der Punkte $\mathbf{P}_{i,j}$ jedoch eingeschränkt. Weiterhin besitzt ein Punkt $\mathbf{p}_i$ im Teleskopkoordinatensystem mehrere Realisierungen $\mathbf{P}_{i,j}$ im übergeordneten terrestrischen Koordinatensystem, sodass sich ein Teil der Singularitäten im Normalgleichungssystem durch eine angepasste Messkonfiguration auflöst.

Die Orientierung des Teleskopkoordinatensystems gegenüber dem terrestrischen Koordinatensystem ist aufgrund der unbekannten Positionen $\mathbf{p}_i$ undefiniert. Eine Bestimmung absoluter Drehwinkel im Teleskopkoordinatensystem ist daher nicht möglich, Winkeländerungen sind jedoch ableitbar. Zur Bestimmung einer Winkeländerung $(\kappa_{j+1} - \kappa_j)$ um die Primärachse bzw. $(\omega_{j+1} - \omega_j)$ um die Sekundärachse ist es notwendig, mindestens zwei Punkte $\mathbf{P}_{i,j}$ und $\mathbf{P}_{i+1,j}$ gemeinsam in den Teleskoporientierungen j und $(j + 1)$ zu beobachten. Da keine absoluten Winkel schätzbar sind, weist das Normalgleichungssystem zwei Rangdefekte auf. Im Gegensatz zu einem Konfigurationsdefekt, der bspw. durch das Fehlen von geeigneten Beobachtungen zur Bestimmung der gesuchten Modellparameter charakterisiert ist (Höpcke 1980, S. 117; Förstner und Wrobel 2016, S. 108), liegt hier ein Datumsdefekt vor. Die beobachteten Punkte $\mathbf{P}_{i,j}$ sind insensitive, um über die absolute Orientierung des Teleskopkoordinatensystems zu verfügen. Dieser Datumsdefekt lässt sich geometrisch als Rotationsdefekt bzgl. der x - bzw. z -Achse interpretieren und ist vergleichbar mit auftretenden Datumsdefekten im Kontext der Ausgleichung freier dreidimensionaler geodätischer Netze (Mittermayer 1972; Illner 1985).

In Gl. 4.16 wird die absolute Orientierung der Primärwinkel auf das terrestrische Koordinatensystem durch den zusätzlichen Orientierungsparameter κ_0 übertragen, sodass im IRP I Ansatz κ_j als Beobachtung verwendet werden konnte. Da κ_j nun Teil der Modellparameter ist, kann über die Orientierung des Teleskopkoordinatensystems frei verfügt werden. Eine Änderung von κ_0 bewirkt eine korrespondierende Änderung der Positionen $\mathbf{p}_i$. Der Winkel κ_0 ist demnach kein unabhängig schätzbarer Parameter und kann einen beliebigen festen Wert annehmen, sodass dieser in Gl. 4.16 entfallen kann. Durch das Eliminieren von κ_0 wird der Rotationsdefekt um die z -Achse unmittelbar behoben.

Ein einheitlicher Orientierungsparameter für die Sekundärwinkel existiert in Gl. 4.16 aufgrund der beliebigen Positionswahl der Marken nicht (Lösler und Hennes 2008; Lösler 2008). Ein Absolutbezug der Sekundärwinkel lässt sich jedoch durch das Festhalten eines Drehwinkels ω_d erreichen. Die korrespondierende Restriktion lautet (Lösler u. a. 2019b)

$$\omega_d = 0 \tag{4.25}$$

und entspricht einer zwangsfreien Ausgleichung. Dem beliebig ausgewählten Winkel ω_d wird hierbei eine Varianz von null zugewiesen. Dies bedeutet nicht, dass der Parameter varianzfrei ist, weshalb diese Auswahl auch als Nullvarianz-Rechenbasis bezeichnet wird (Neitzel 2004b). Nachteilig bei dieser Vorgehensweise ist, dass der Datumsdefekt durch einen willkürlich gewählten Winkel ω_d behoben wird. Entfällt die korrespondierende Position $\mathbf{P}_{i,d}$ aus den Eingangsdaten, z. B. aufgrund einer

vermuteten Modellstörung, entfällt auch ω_d im Gleichungssystem und steht zur Defektbehebung nicht mehr zur Verfügung. Die Forderung nach einer mittleren Orientierung für alle ω_j führt zur linearen Bedingung (Lösler u. a. 2019b)

$$\sum_{j=1} \omega_j = 0. \quad (4.26)$$

Sowohl Gl. 4.25 als auch Gl. 4.26 beheben den Rotationsdefekt um die x -Achse durch eine Winkelrestriktion, sodass die Orientierung des Teleskopkoordinatensystems gegenüber dem terrestrischen Aufnahmesystem festliegt. Hierdurch sind die Positionen der Marken $\mathbf{p}_i$ im Teleskopkoordinatensystem abhängig von der Bezugsorientierung. Andererseits lässt sich der auftretende Defekt auch direkt über die Positionen der Marken beheben. Dies setzt eine Datumsfestlegung für das Koordinatensystem des Teleskops voraus, durch welche auch die Bezugsorientierung der Sekundärwinkel implizit definiert wird.

Aus der freien Ausgleichung geodätischer Netze ist bekannt, dass sich die dort auftretenden Datumsdefekte geometrisch durch die Gleichungen einer differenziellen Helmert-Transformation mit infinitesimalen Drehwinkeln für differenzielle Koordinaten interpretieren lassen (Mittermayer 1972; Illner 1985). Die an einem Punkt im Zielsystem anzubringenden Koordinatenzuschläge $\delta\boldsymbol{\xi}''$ ergeben sich hierbei durch Transformation des korrespondierenden Punktes $\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi}_0 + \delta\boldsymbol{\xi}'$ im Startsystem mittels

$$\delta\boldsymbol{\xi}'' = \delta\boldsymbol{\xi}' + \mathbf{T}\mathbf{t}, \quad (4.27)$$

wobei der Vektor $\mathbf{t}$ die sieben differenziellen Transformationsparameter, d. h. drei Verschiebungen, einen Maßstab und drei Drehungen, enthält und

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 & 0 & -z_0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 & z_0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 & -y_0 & x_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

die zugehörige Transformationsmatrix beschreibt, welche sich aus den Koordinatenkomponenten $\boldsymbol{\xi}_0$ ergibt (Mittermayer 1972; Illner 1985; Lösler und Eschelbach 2012).

Zur Datumsfestlegung im Kontext der geodätischen Netzausgleichung lässt sich mit Gl. 4.28 die bekannte Bedingungsgleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T & \mathbf{T}_i^T & \dots & \mathbf{T}_{n_d}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

aufstellen, die eine im Sinne der Helmert-Transformation optimale Lagerung des Netzes im Schwerpunkt der Näherungskordinaten fordert. Optimal bedeutet hierbei, dass der Teil des Lösungsvektors bzgl. der datumsgebenden Punkte minimale Norm und die zugehörige Dispersion minimale Teilspur besitzt (Illner 1985). In Gl. 4.29 wird unterstellt, dass die Punkte, die zur Defektbehebung mit einzubeziehen sind, durch eine entsprechende Sortierung im oberen Teil des Parametervektors $\mathbf{x}$ stehen.

Gl. 4.29 kann direkt zur Behebung des Rotationsdefektes in Gl. 4.16 übernommen werden, wobei hier nur die fünfte Zeile, die den Rotationsdefekt um die x -Achse

aufhebt, benötigt wird. Für n_d im Datum zu berücksichtigende Punkte $\mathbf{p}_i$ im Teleskopkoordinatensystem ergibt sich mittels Gl. 4.29 die lineare Bedingungsgleichung (Lösler u. a. 2018c)

$$\sum_{i=1}^{n_d} (z_{0,i} \Delta y_i - y_{0,i} \Delta z_i) = 0. \quad (4.30)$$

Wird die Darstellung nach Gl. 4.20 zur Referenzpunktbestimmung verwendet, existieren zur Parametrierung der Koordinatensystemorientierung keine expliziten Modellparameter. Die hier auftretenden Rotationsdefekte sind daher implizit durch die zusätzlichen Bedingungsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{n_d} (y_{0,i} \Delta x_i - x_{0,i} \Delta y_i) = 0, \quad (4.31a)$$

$$\sum_{i=1}^{n_d} (z_{0,i} \Delta y_i - y_{0,i} \Delta z_i) = 0 \quad (4.31b)$$

zu beheben. Hierbei ist die zweite Gleichung zur Behebung des Rotationsdefektes um die x -Achse identisch mit Gl. 4.30. Die erste Gleichung entspricht der siebten Zeile in Gl. 4.29 und behebt den Rotationsdefekt um die z -Achse. Die Gl. 4.31 sind grundsätzlich auch zur Datumsfestlegung von Gl. 4.16 geeignet, wenn der Orientierungsparameter κ_0 nicht aus dem Vektor der Modellparameter eliminiert wird.

Die Lösung einer freien Netzausgleichung ist abhängig vom gewählten Datum, da die terrestrischen Beobachtungen nur relative Informationen zwischen den gemessenen Punkten bereitstellen und somit die innere Netzgeometrie definieren, aber insensitiv bzgl. eines absoluten Koordinatenbezugs sind (Illner 1985). In Abhängigkeit von den gewählten Bedingungsgleichungen, der Anzahl und räumlichen Verteilung der Datumpunkte sowie deren Näherungswerten variieren die geschätzten Modellparameter. Diese Eigenschaft trifft auf alle Gleichungssysteme zu, die nicht über eine ausreichende Anzahl von unabhängigen Gleichungen verfügen, um die Modellparameter eindeutig zu bestimmen, und einen Rangdefekt aufweisen (Neitzel 2004b).

Mit den Gl. 4.25 bis 4.31 sind geometrisch interpretierbare Bedingungsgleichungen formuliert, welche die auftretenden Rotationsdefekte in Gl. 4.16 bzw. Gl. 4.20 beheben, ohne zusätzlichen Zwang auf die Schätzwerte auszuüben. Ähnlich wie bei der freien Ausgleichung geodätischer Netze ist ein Teil der geschätzten Modellparameter jedoch datumsabhängig. Wie Neitzel (2004b) zeigt, zählen die Koordinaten in einer freien Netzausgleichung bspw. nicht zu den eindeutig schätzbaren Größen. Sie verletzen das von Grafarend und Schaffrin (1976) angegebene Äquivalenztheorem zwischen schätzbaren und invarianten Größen, da sie nicht unabhängig vom gewählten Datum immer identisch sind.

Die Datumsfestlegung im IRP II Ansatz betrifft jedoch nur die Orientierung des Teleskopkoordinatensystems, d. h. die Festlegung der Winkelorientierung für den Primär- und Sekundärwinkel. Unmittelbar abhängig von der Datumswahl sind demzufolge die Positionen im Teleskopkoordinatensystem $\mathbf{p}_i$ sowie die Winkel ω_j bzw. κ_j .

Die Referenzpunktposition $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ bezieht sich auf das übergeordnete terrestrische Koordinatensystem und ist aufgrund der geometrischen Definition die einzige Position, die invariant bzgl. rotativer Bewegungen des Teleskops ist. Die Referenzpunktposition zählt folglich zu den eindeutig schätzbaren Modellparametern. Neben dieser zählt der Abstand e_{AO} zwischen beiden Teleskopachsen zu den wesentlichen Modellparametern, welcher in der Analyse der Raumverfahren zu berücksichtigen ist. Der Achsenoffset e_{AO} entspricht einem Modellparameter, der der inneren Geometrie zuzuordnen ist und nur relative Informationen bzgl. des Abstandes zwischen den Achsen beschreibt. Analog zu den terrestrischen Beobachtungen in der freien Netzausgleichung, die lediglich relative geometrische Informationen zwischen den beobachteten Punkten bereitstellen, ist dieser Modellparameter ebenfalls datumsinvariant. Der auftretende Datumsdefekt des IRP II Ansatzes beeinflusst die Schätzung der beiden relevanten Modellparameter daher nicht, da diese zu den eindeutig schätzbaren Größen zählen. Dies gilt zwangsläufig auch für die geschätzten Unsicherheiten dieser beiden Modellparameter. Der Anteil der geschätzten Dispersionsmatrix, der sich auf $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ und e_{AO} bezieht, ist unabhängig von der Wahl der Datumsfestlegung.

Die Entscheidung für bzw. gegen eine der möglichen Bedingungsgleichungen kann daher aus praktischen Überlegungen heraus erfolgen. Im Hinblick auf eine Implementierung ist bspw. ein kompaktes Gleichungssystem erstrebenswert, da hierdurch Speicherplatz eingespart und Berechnungszeiten reduziert werden. Durch das Modellieren der Teleskopwinkel als Modellparameter erhöht sich die Parameteranzahl für jede gemessene Markenposition $\mathbf{P}_{i,j}$ um die korrespondierenden unbekannten Winkel ω_j bzw. κ_j . Für eine Marke $\mathbf{p}_i$, deren Trajektorie bspw. aus 1000 unterschiedlichen Teleskoporientierungen resultiert, werden demnach 2000 zusätzliche Modellparameter benötigt. Für die Interpretation und Bewertung der Resultate spielen diese Winkel jedoch nur eine untergeordnete Rolle. Es empfiehlt sich daher, diese Modellparameter, bspw. mit der in Anhang A.4 beschriebenen Blockzerlegungstechnik, verlustfrei aus dem Gleichungssystem zu eliminieren. Beschränkt man sich auf die Reduktion dieser Winkel, hängt die Anzahl der Modellparameter nur noch von der Anzahl der installierten Marken $\mathbf{p}_i$ ab. Für jede angebrachte Marke erhöht sich die Parameteranzahl einmalig um die drei unbekannten Koordinatenkomponenten im Teleskopkoordinatensystem. Die Anzahl der zu schätzenden Modellparameter ist demnach nur von der a-priori gewählten Anzahl der eingesetzten Marken abhängig und nicht von der Anzahl der beobachteten Teleskoporientierungen. Dies motiviert die Verwendung von Gl. 4.30 bzw. Gl. 4.31 zur Behebung des Defektes.

Zu Beginn dieses Abschnittes wurde bereits darauf hingewiesen, dass der IRP II Ansatz nur sensitiv für Winkeländerungen ist, nicht jedoch bzgl. absoluter Winkel. Im Folgenden wird diese Eigenschaft noch einmal aufgegriffen, und deren Konsequenzen werden für die praktische Umsetzung erläutert. Das GGOS strebt einen $24\text{h}/7\text{d}$ -Betrieb der Teleskope an und regt folgerichtig eine Referenzpunktbestimmung während des regulären Teleskopbetriebs an, um Ausfallzeiten aufgrund lokaler Vermessungsarbeiten zu minimieren. Winkeländerungen sind nur detektierbar, wenn mindestens zwei Marken im Teleskopkoordinatensystem vorhanden sind. Dies entspricht der

Minimalanzahl, die bereitzustellen ist. Die Änderungen der Winkel ($\kappa_{j+k} - \kappa_j$) und ($\omega_{j+k} - \omega_j$) resultieren aus der gleichzeitigen Erfassung zweier Marken in den Teleskoporientierungen j und $(j + k)$. Gleichzeitig ist hier nicht als Synonym zu simultan zu verstehen, sondern bezieht sich lediglich auf dieselbe Teleskoporientierung. Diese gleichzeitige Erfassung der beiden Marken in zwei Teleskoporientierungen ist die geometrische Minimalkonfiguration, die der Beobachtungsplan erfüllen muss. Weitere gemeinsame Erfassungen sind aus geometrischen Gründen somit nicht notwendig. Ist die Minimalkonfiguration erfüllt, können diese Marken demnach unabhängig voneinander in unterschiedlichen Teleskoporientierungen beobachtet werden. Ist eine Konfiguration mit mehr als zwei Marken vorgesehen, so genügt es, eine topologische Verknüpfung zwischen diesen herzustellen, die sich aus paarweisen Minimalkonfigurationen ableitet. Das gleichzeitige Erfassen aller Marken in mindestens zwei Teleskoporientierungen stellt somit einen möglichen Sonderfall dar, ist aber nicht zwingend. Dies bedeutet, dass eine bestehende Konfiguration jederzeit durch zusätzliche Marken erweitert werden kann.

Alle Marken, für die eine topologische Verknüpfung im Datensatz vorliegt, realisieren ein Teleskopkoordinatensystem. Für diese Realisierung lassen sich die beiden Rotationsdefekte durch geeignete Bedingungsgleichungen beheben. Ändert sich die Konfiguration der Marken vollständig, entspricht dies einer weiteren Realisierung eines zusätzlichen Teleskopkoordinatensystems. Diese unterschiedlichen Realisierungen besitzen jedoch einen identischen Ursprung, den Referenzpunkt, und weisen eine identische Orientierung bzgl. des Primärwinkels auf. Letzteres ergibt sich unmittelbar durch die Eliminierung des Winkel κ_0 aus Gl. 4.16, welche den Rotationsdefekt um die z -Achse aufhebt. Die Orientierungen der Sekundärwinkel zwischen diesen Realisierungen sind hingegen nicht identisch, sodass mit jedem realisierten Teleskopkoordinatensystem ein weiterer Rotationsdefekt hinzukommt. Dieser ist durch eine zusätzliche Bedingungsgleichung pro Teleskopkoordinatensystem durch Gl. 4.30 zu berücksichtigen (Lösler u. a. 2018c).

Da die Teleskope während eines regulären SLR/LLR- bzw. VLBI-Experimentes die Erdrotation ausgleichen bzw. dem Satelliten auf seiner Umlaufbahn folgen, lässt sich mit einem polaren Messinstrument nur eine Marke pro Teleskopstellung erfassen. Da die Minimalkonfiguration bereits durch wenige Messungen zu realisieren ist, bieten sich hierfür Zeitfenster vor bzw. nach dem Experiment an. SLR/LLR ist weiterhin ein wetterabhängiges Messverfahren (Sośnica 2014; Seitz u. a. 2017). Beobachtungen bei Bewölkung bzw. Regen sind nicht möglich, sodass potenzielle Zeitfenster für lokale Messungen i. A. unproblematisch sind.

Eine Alternative zu polaren Messsystemen bieten GNSS-Antennen, die am drehbaren Teil des Teleskops angebracht werden. Gegenwärtige Systeme erlauben eine Registrierungsrate von bis zu 50 Hz. In Abhängigkeit der gewählten Positionen für die angebrachten GNSS-Antennen können durch diese Registrierungsrate zusätzliche Positionsunsicherheiten von etwa $5 \mu\text{m m}^{-1}$ auftreten, die unkritisch sind. Die resultierenden Trajektorien der GNSS-Antennen liegen somit praktisch synchron und ohne personellen Aufwand vor. Durch die Anbringung der GNSS-Antennen

am Teleskop kommt es jedoch konfigurationsbedingt zu Abschattungen, die u. U. genauigkeitslimitierend wirken und bei der Analyse zu berücksichtigen sind. Referenzpunktbestimmungen mit GNSS-Antennen wurden u. a. von Kallio und Poutanen (2011, 2012) und Ning u. a. (2015) erfolgreich durchgeführt.

Der Einsatz photogrammetrischer Messsysteme zur Referenzpunktbestimmung scheint eine vielversprechende Alternative zur terrestrischen Vermessung zu bieten (Harvey 1991). Durch die simultane Aufnahme mehrerer Marken liegen die erfassten Trajektorien ebenfalls synchron vor. Messunsicherheiten von $\ll 1$ mm für die diskret signalisierten Punkte sind in Abhängigkeit der eingesetzten Messmittel und der Aufnahmekonfiguration erzielbar, sodass dieses Messsystem ein großes Potenzial für die Referenzpunktbestimmung aufweist. Erste Untersuchungen von Lösler und Eschelbach (2020a) am Satellite Observing System Wettzell mit dem AICON DPA Photogrammetriesystem bestätigen dies, siehe Abbildung 4.6.

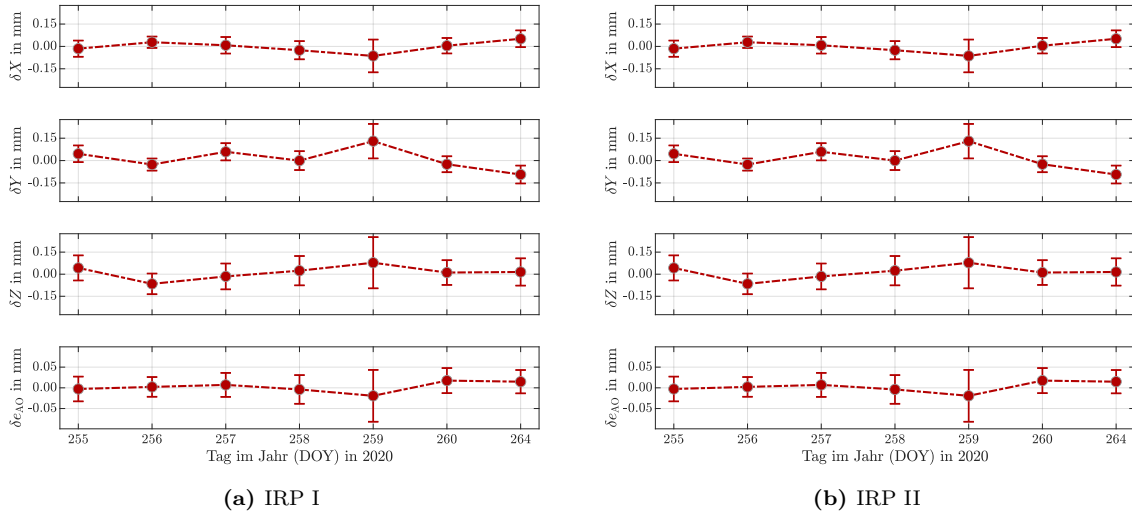


Abbildung 4.6: Gegenüberstellung der Variationen der IRP I und IRP II Ergebnisse einer Mehrfachmessung für den ILRS-Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ und den Abstand e_{AO} zwischen beiden Teleskopachsen. Die Konfidenzbereiche (1σ) sind im Maßstab 3 : 1 dargestellt. Die sieben Messkampagnen wurden am Satellite Observing System Wettzell im September 2020 mit dem AICON DPA Photogrammetriesystem durchgeführt.

Abbildung 4.6 zeigt die Ergebnisse einer mehrtägigen Messkampagne. Die Ergebnisse, die sich mit dem IRP I Lösungsverfahren für den ILRS-Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ bzw. den Abstand e_{AO} zwischen beiden Teleskopachsen ergeben, sind in Abbildung 4.6a dargestellt. In Abbildung 4.6b finden sich die korrespondierenden Ergebnisse bei Verwendung des IRP II Lösungsverfahrens. Die Koordinatenkomponenten des Referenzpunktes variieren in einem Bereich von ca. $\pm 100 \mu\text{m}$. Die Variation des Achsenoffsets beträgt lediglich $\pm 25 \mu\text{m}$. Die Differenzen zwischen den Ergebnissen des IRP I und des IRP II Verfahrens liegen bei $\ll 50 \mu\text{m}$ bzw. $\ll 10 \mu\text{m}$ für $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ bzw. e_{AO} . Diese vernachlässigbaren Differenzen resultieren aus der unterschiedlichen Berücksichtigung der Teleskopwinkel ω , κ bei der Parameterschätzung mittels IRP I bzw. IRP II Verfahren. Beide Lösungsverfahren liefern somit gleichwertige Ergebnisse und sind gleichermaßen zur Referenzpunktbestimmung geeignet.

4.2 Konfigurationsabhängiges Bias

Das funktionale Modell der IRP-Methode ist aufgrund der parametrisierten Rotationen nichtlinear. Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.3 sind die Schätzwerte verzerrt, wenn ein lineares Ersatzproblem anstelle des originären nichtlinearen Problems gelöst wird. Die Größe des Bias ist abhängig vom Grad der Nichtlinearität des funktionalen Modells und wird durch das stochastische Modell gesteuert, wie Beispiel 2.1.1 anschaulich zeigt.

Aufgrund der Gl. 2.6, 2.9 lässt sich diese Eigenschaft generell auf alle nichtlinearen Modelle übertragen. Wie stark jedoch die Modellparameter verzerrt werden, ist problemspezifisch zu ermitteln. Im Kontext der Referenzpunktbestimmung liegt der Fokus auf dem geometrischen Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$, der einen Endpunkt des Local-Ties beschreibt, und dem Abstand e_{AO} zwischen der primären und sekundären Achse. Da das in Abschnitt 4.1.2 hergeleitete Transformationsmodell den größten Anwendungsbereich aufweist, wird nachfolgend ausschließlich der IRP-Ansatz mit explizit formuliertem funktionalem Modell hier untersucht.

Abbondanza und Sarti (2012) untersuchen den Einfluss der Netzkonfiguration und des Beobachtungsverfahrens auf den geschätzten Referenzpunkt durch Netzsimulationen für ein Radioteleskop auf Sardinien (Italien). Die Autoren zeigen, dass die untersuchten Netzkonfigurationen und Beobachtungsverfahren praktisch keine Auswirkungen auf den geschätzten Referenzpunkt haben. Santamaría-Gómez u. a. (2012) evaluieren die Anzahl der notwendigen Beobachtungen sowie den Vorteil zusätzlicher Instrumente durch Simulation für das Radioteleskop in Yebes (Spanien). Die Autoren empfehlen den Einsatz von mindestens zwei Instrumenten (bzw. zwei Instrumentenstandpunkten), da sich hierdurch die Standardabweichung des Referenzpunktes im Vergleich zur Lösung mit nur einem Messinstrument (bzw. einem Instrumentenstandpunkt) um 57 % verbessert. Kallio und Poutanen (2010) leiten aus Simulationen u. a. die optimale Position für die anzubringenden Marken am Radioteleskop in Metsähovi (Finnland) ab. Untersucht wurden Positionen am Subreflektor, an den Rändern bzw. der Rückseite des Hauptreflektors und in der Nähe der Sekundärachse. Die geringsten Standardabweichungen für den Referenzpunkt ergaben sich hierbei für Positionen in der Nähe der Sekundärachse. Die größten Standardabweichungen ergeben sich, wenn sich die Marken am Subreflektor befinden. Lösler u. a. (2013b) führen hochredundante Messungen mit zwei Präzisionstachymetern zur Referenzpunktbestimmung an einem der VGOS-spezifizierten Radioteleskope des Geodätischen Observatoriums Wettzell durch. Jede Marke wurde simultan von beiden Instrumenten erfasst. Durch gezieltes Weglassen von Beobachtungen lassen sich drei potenzielle Aufnahmeverfahren aus diesem Datensatz ableiten:

- Verwendung aller simultan durchgeführten Messungen beider Instrumente,
- räumlicher Vorwärtsschnitt durch Weglassen der Distanzmessungen beider Instrumente,
- getrennte Auswertung der Messungen von jeweils nur einem Instrument.

Für jede Konfiguration wurde der Referenzpunkt bestimmt. Die maximalen Differenzen der geschätzten Referenzpunktkoordinaten betrugen in der Lage 0,1 mm und in der Höhe 0,2 mm. Die maximale Differenz des geschätzten Achsenoffset ergab 0,2 mm. Alle Differenzen liegen deutlich unterhalb der spezifizierten Messunsicherheit der eingesetzten Tachymeter.

Im Gegensatz zu Abbondanza und Sarti (2012) führen Lösler u. a. (2013b) diese hohe Übereinstimmung ausschließlich auf die gewählte Netzkonfiguration zurück, bei der die Standpunkte gleichverteilt um das Teleskop herum angeordnet sind. Ein redundantes Aufnahmeverfahren besitzt in der Datenanalyse gegenüber einem nicht-redundanten Verfahren Vorteile, z. B. im Hinblick auf die Zuverlässigkeit oder beim Aufdecken von Fehlmessungen. Zur Bestimmung des Referenzpunktes sind jedoch alle untersuchten Verfahren geeignet, sofern eine Netzkonfiguration mit gleichverteilten Standpunkten um das Teleskop herum gewählt wird (Lossin 2013; Lösler u. a. 2013a).

Lossin (2013) zeigt, dass Messungen von nur einem Standpunkt ungeeignet sind, da der abgeleitete Referenzpunkt hierbei nicht von den erhobenen Punkten umschlossen wird, sondern eine Extrapolation stattfindet. Empfohlen werden mindestens drei Standpunkte, die gleichverteilt um das Teleskop herum angeordnet sind (Lossin 2013). Das Hinzunehmen von weiteren Standpunkten verringert die Standardabweichung der geschätzten Parameter zwar nur unwesentlich, erhöht jedoch die Zuverlässigkeit der Ausgleichungsergebnisse.

Die Auswirkung einer möglichen Verzerrung in der Schätzung wurde für die Referenzpunktbestimmung bisher nicht analysiert und wird im Folgenden untersucht. In Anlehnung an die Untersuchungen von Lossin (2013) werden vier Standpunkte gleichverteilt um das Teleskop herum gewählt, die gleichzeitig das geodätische Datum definieren. Jeder Standpunkt deckt hierbei 90° des Primärwinkels ab, sodass mit Messungen von allen vier Standpunkten der volle Arbeitsbereich von 360° abgedeckt wird. Der Abstand zwischen den Standpunkten und dem Teleskop beträgt in dieser Abschätzung 25 m. Dies entspricht einer üblichen Messentfernung für freistehende Radioteleskope. Da Radioteleskope hohe bauliche Anlagen sind, befinden sich alle vier Standpunkte 15 m unterhalb des angenommenen Referenzpunktes.

Tabelle 4.1: Parameter zur Definition der Teleskopgeometrie zur Abschätzung der Verzerrung der Schätzwerte aufgrund der Nichtlinearität im funktionalen Modell.

X_{IRP}	Y_{IRP}	Z_{IRP}	e_{AO}	α	β	γ
0 m	0 m	0 m	10 cm	0,005°	0,007°	-0,003°

Mittels Gl. 4.16 und der in Tabelle 4.1 gegebenen Modellparameter werden die vier in Tabelle 4.2 gegebenen Positionen $\mathbf{p}_i$ vom Teleskopkoordinatensystem ins übergeordnete Referenzkoordinatensystem transformiert. Entsprechend der Empfehlung von Kallio und Poutanen (2010) befinden sich die Marken in der Nähe der Sekundärachse. In Anlehnung an die verwendeten Konfigurationen in (Johnston und Dawson 2004; Lösler u. a. 2018c) befinden sich die vier Marken alle auf einer Tele-

4. Geometrischer Referenzpunkt geodätischer Raumverfahren

Tabelle 4.2: Positionen $\mathbf{p}_i$ der Marken im Teleskopsystem zur Abschätzung der Verzerrung der Schätzwerte aufgrund der Nichtlinearität im funktionalen Modell.

p_i	x	y	z
1	1,5 m	3,5 m	2,0 m
2	1,5 m	3,5 m	-2,0 m
3	1,5 m	-3,5 m	2,0 m
4	1,5 m	-3,5 m	-2,0 m

skopseite, sodass diese gleichzeitig von einem Standpunkt aus sichtbar sind. Mit einer Schrittweite von 30° ergeben sich für den Primärwinkel zwölf Positionen in einem Bereich von 15° bis 345° . Für den Sekundärwinkel werden jeweils vier Positionen zwischen 0° und 90° gewählt. Insgesamt ergeben sich hierdurch 192 Positionen $\mathbf{P}_{i,j}$ im übergeordneten Referenzkoordinatensystem. Die gewählte Netz- und Beobachtungskonfiguration ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Diese setzt aufgrund der äquidistant gewählten Winkelinkremente ein gezieltes Rotieren um die beiden Teleskopachsen voraus, sodass bei einer praktischen Umsetzung mit polaren Messsystemen lediglich ein Messinstrument erforderlich wäre.

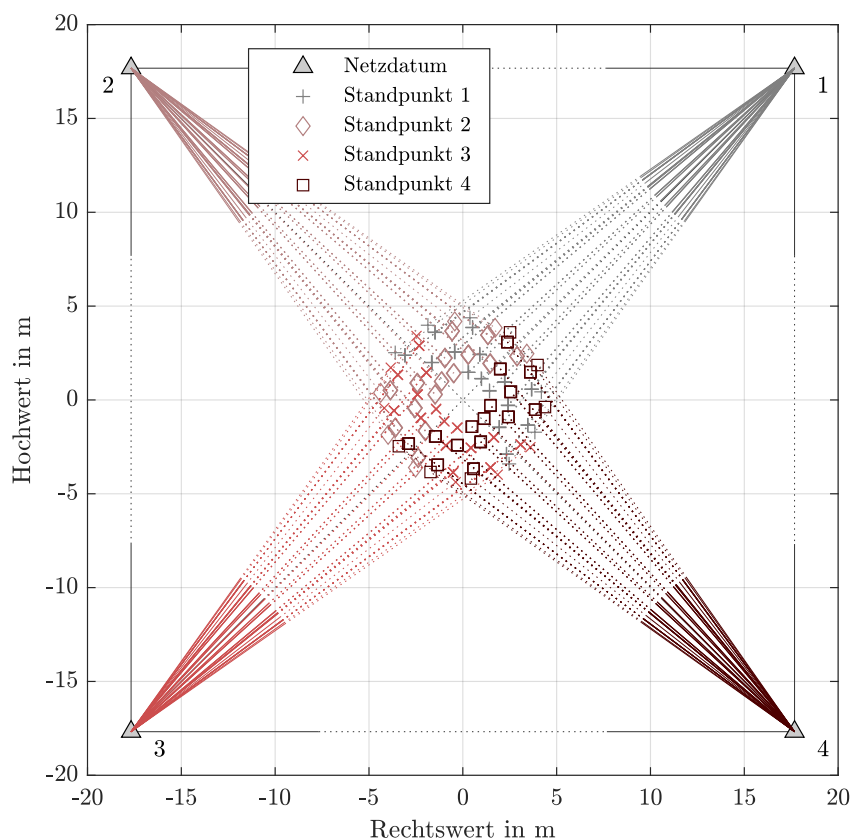


Abbildung 4.7: Lagedarstellung der Netzkonfiguration für das Simulationsnetz, welches aus vier Standpunkten und 192 beobachteten Positionen am Teleskop besteht. Sichtbarkeiten sind durch Strichpunktlinien in standpunktspezifischen Farben symbolisiert.

Die a-priori Dispersionsmatrix der Punkte $\mathbf{P}_{i,j}$ wird, um zunächst unabhängig von einem spezifischen Aufnahmeverfahren zu sein, durch eine Taylor-Karman-Strukturmatrix modelliert. Die Taylor-Karman-Strukturmatrix ist insbesondere in der Optimierung von geodätischen Netzen eine häufig eingesetzte Matrix, die im sogenannten Design 2. Ordnung eine idealisierte Dispersionsmatrix im Sinne eines stochastischen Prozesses beschreibt (Schmitt 1985; Eschelbach u. a. 2019). Die Konfidenzbereiche der Punkte weisen hierbei homogene und isotrope Strukturen auf und lassen sich im zweidimensionalen Fall durch gleich große Kreise bzw. im räumlichen Fall durch gleich große Kugeln darstellen. Für $\sigma_0^2 = 1$ entspricht die Taylor-Karman-Strukturmatrix $\mathbf{K}$ einer Korrelationsmatrix.

Die Submatrix zwischen dem i -ten und j -ten Punkt lautet (Grafarend und Schaffrin 1979)

$$\sigma_0^2 \mathbf{K}_{i,j} = \sigma_0^2 \left(\phi_t(s_{i,j}) \mathbf{I} + \frac{\phi_t(s_{i,j}) - \phi_l(s_{i,j})}{s_{i,j}^2} \mathbf{D}_{i,j} \right), \quad (4.32)$$

wobei $s_{i,j} = \sqrt{\Delta x_{i,j}^2 + \Delta y_{i,j}^2 + \Delta z_{i,j}^2}$ der Abstand zwischen den beiden Netzknoten ist und $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix beschreibt. Die Matrix $\mathbf{D}$ resultiert aus den Koordinatendifferenzen zwischen dem i -ten und j -ten Punkt, und lautet

$$\mathbf{D}_{i,j} = \begin{pmatrix} \Delta x^2 & \Delta x \Delta y & \Delta x \Delta z \\ \Delta y \Delta x & \Delta y^2 & \Delta y \Delta z \\ \Delta z \Delta x & \Delta z \Delta y & \Delta z^2 \end{pmatrix}_{i,j}.$$

Die Längs- und Querkorrelationsfunktionen ϕ_l und ϕ_t ergeben sich mithilfe der modifizierten Bessel-Funktionen zweiter Art zu (Grafarend und Schaffrin 1979)

$$\phi_l(s) = \frac{4d_c^2}{s^2} - 2K_0\left(\frac{s}{d_c}\right) - \frac{4d_c}{s}K_1\left(\frac{s}{d_c}\right), \quad (4.33a)$$

$$\phi_t(s) = \frac{2s}{d_c}K_1\left(\frac{s}{d_c}\right) - \phi_l(s), \quad (4.33b)$$

wobei K_0 und K_1 Funktionen der modifizierten Bessel-Funktionen 0. und 1. Ordnung beschreiben und d_c die charakteristische Distanz darstellt.

Abbildung 4.8 zeigt den Korrelationskoeffizient ρ in Abhängigkeit des Verhältnisses zwischen dem Punktabstand s und der charakteristischen Distanz d_c . Die charakteristische Distanz d_c steuert hierbei die Größe der Korrelation ρ zwischen den Punkten. Dicht benachbarte Punkte weisen eine höhere stochastische Abhängigkeit auf als Punkte, die weit voneinander entfernt liegen. Zur geeigneten Wahl von d_c gibt es verschiedene Ansätze, siehe hierzu (Schmitt 1980; Wimmer 1981). Yazji (1998) empfiehlt die Verwendung von

$$d_c = \sqrt{2} \min(s_{i,j}) \quad (4.34)$$

für $s_{i,j} > 0$, die nachfolgend übernommen wird.

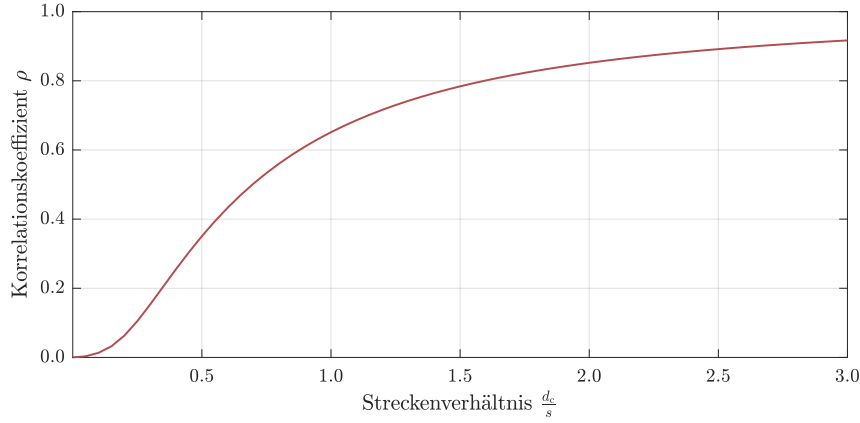


Abbildung 4.8: Korrelationskoeffizient ρ in Abhängigkeit des Verhältnisses zwischen dem Punktabstand s und der charakteristischen Distanz d_c . Hohe Korrelationen ρ ergeben sich für dicht benachbarte Punkte. Je weiter die Punkte von einander entfernt liegen, desto geringer werden die stochastischen Abhängigkeiten.

Die so gebildete Taylor-Karman-Strukturmatrix ist unabhängig vom gewählten Datum des Netzes. Mit der von Baarda (1981) hergeleiteten S-Transformation lässt sich $\mathbf{K}$ jedoch in jedes beliebige Datum überführen, ohne dass Kenntnisse bzgl. des Ausgangsdatums von $\mathbf{K}$ notwendig sind (Teunissen 1985b; Illner 1985). Mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{S}_d = \mathbf{I} - \mathbf{G} \left(\mathbf{G}^T \mathbf{E}_d \mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{E}_d \quad (4.35)$$

ergibt sich

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{S}_d \mathbf{K} \mathbf{S}_d^T \quad (4.36)$$

im gewünschten Datum d . Dabei ergeben sich die Elemente in $\mathbf{G}$ aus der differentiellen Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ nach Gl. 4.28, und $\mathbf{E}_d$ ist eine diagonale Selektionsmatrix, die für alle Punkte, die das Netzdatum d realisieren, eine Eins auf der Hauptdiagonale besitzt und ansonsten mit Nullwerten gefüllt ist.

In Abbildung 4.9 ist für zehn äquidistant gewählte σ_0 , die in einem Bereich von 0,1 mm bis 10 mm liegen, die mittels Gl. 3.40a geschätzte Parameterverzerrung für die Referenzpunktposition $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ und den Abstand e_{AO} zwischen den Teleskopachsen dargestellt. Das Parameterbias ist in Abhängigkeit von σ_0 für fünf unterschiedliche Beobachtungskonfigurationen geplottet, die aus der Verwendung unterschiedlicher Standpunkte resultieren. Erwartungsgemäß steigt die Parameterverzerrung mit zunehmenden Werten für σ_0 an. Die Größe der Parameterverzerrung ist weiterhin von der Anzahl der Beobachtungen und der Aufnahmekonfiguration abhängig. Das Bias verringert sich, wenn sich die Anzahl der Beobachtungen durch das Hinzunehmen von zusätzlichen Standpunkten erhöht. Die gewählte Netzkonfiguration beeinflusst maßgeblich die auftretende Parameterverzerrung. Während die Konfiguration mit den beiden benachbarten Standpunkten 1 und 2 in der Y -Komponente noch eine deutliche Verzerrung aufweist, ist diese Verzerrung für die Konfiguration mit den Standpunkten 1 und 3 nicht sichtbar. Wie Abbildung 4.7 zeigt, liegen sich die Standpunkte 1 und 3 direkt gegenüber, sodass sich für die Lage eine punktsymmetrische Beobachtungskonfiguration ergibt. Das Bias eliminiert sich hierdurch für

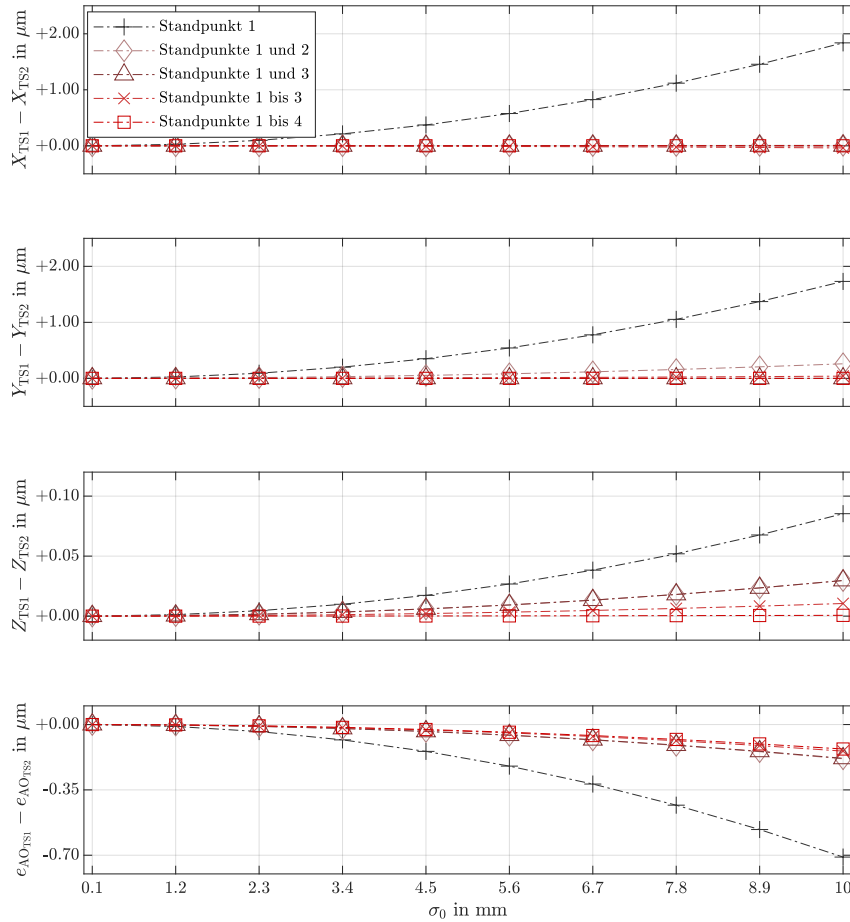


Abbildung 4.9: Parameterverzerrung bei Verwendung der Taylorreihe mit Gliedern 1. Ordnung. Die Verzerrungen sind für den Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ und den Abstand e_{AO} zwischen beiden Teleskopachsen in Abhängigkeit von fünf verschiedenen Beobachtungskonfigurationen und zehn unterschiedlich gewählten σ_0 dargestellt. Dunkelgraue Pluszeichen symbolisieren die Ergebnisse bei Verwendung des Standpunktes 1. Hellrote Diamanten symbolisieren die Ergebnisse bei Verwendung der beiden Standpunkte 1 und 2. Hellrote Dreiecke symbolisieren die Ergebnisse bei Verwendung der beiden Standpunkte 1 und 3. Rote Kreuze symbolisieren die Ergebnisse bei Verwendung der Standpunkte 1 bis 3. Rote Vierecke symbolisieren die Ergebnisse bei Verwendung von allen Standpunkten.

die horizontalen Koordinatenkomponenten des Referenzpunktes. Bedingt durch die gewählte Beobachtungskonfiguration in diesem Beispiel ergibt sich für die Höhe erst bei Verwendung von allen vier Standpunkten eine punktsymmetrische Konfiguration. Folglich tritt erst in dieser Konfiguration keine Verzerrung mehr in der vertikalen Koordinatenkomponente auf.

Auffällig ist, dass die Verzerrung in den horizontalen Koordinatenkomponenten deutlich größer ist als in der vertikalen Komponente. Dies ist ebenfalls auf die Beobachtungskonfiguration zurückzuführen. Unabhängig von der Anzahl der Standpunkte befinden sich stets Beobachtungen oberhalb und unterhalb der Z -Komponente des Referenzpunktes, sodass in keiner Konfiguration eine Extrapolation der vertikalen Koordinatenkomponente stattfindet. Wie aus Abbildung 4.7 ersichtlich, trifft dies für die horizontalen Koordinatenkomponenten des Referenzpunktes nur auf bestimmte Konfigurationen zu.

Während die X -Komponente des Referenzpunktes bereits bei der Verwendung

der Standpunkte 1 und 2 kaum noch verzerrt wird, ist in der Y -Komponente noch ein geringer Anstieg zu erkennen. Dieser Anstieg resultiert aus dem modellierten Abstand e_{AO} zwischen den Teleskopachsen, siehe Tabelle 4.1. Der Achsenoffset e_{AO} ist nach Gl. 4.10 in Y -Richtung definiert. Die Größe der Verzerrung von e_{AO} ist ebenfalls abhängig von der Anzahl der berücksichtigten Beobachtungen und dem gewählten σ_0 . Bei e_{AO} handelt es sich jedoch um den Abstand zwischen der Primär- und Sekundärachse innerhalb der Teleskopstruktur. Aus diesem Grund wird das Bias für e_{AO} erwartungsgemäß nicht durch punktsymmetrische Beobachtungskonfigurationen eliminiert.

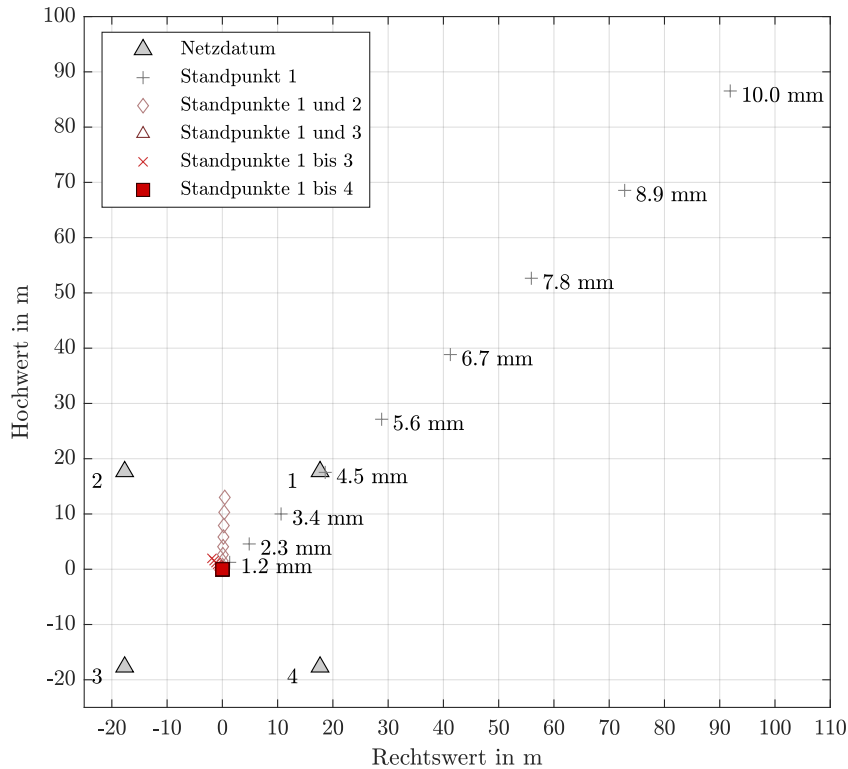


Abbildung 4.10: Parameterbias für die horizontalen Koordinatenkomponenten des Referenzpunktes bei Verwendung der Taylorreihe mit Gliedern 1. Ordnung. Die Verzerrungen für den Referenzpunkt sind im Maßstab 50 Mio : 1 in Abhängigkeit von fünf verschiedenen Beobachtungskonfigurationen und zehn unterschiedlich gewählten σ_0 dargestellt. Dunkelgraue Pluszeichen symbolisieren die Ergebnisse bei Verwendung des Standpunktes 1. Hellrote Diamanten symbolisieren die Ergebnisse bei Verwendung der beiden Standpunkte 1 und 2. Hellrote Dreiecke symbolisieren die Ergebnisse bei Verwendung der beiden Standpunkte 1 und 3. Rote Kreuze symbolisieren die Ergebnisse bei Verwendung der Standpunkte 1 bis 3. Rote Vierecke symbolisieren die Ergebnisse bei Verwendung von allen Standpunkten. Für die Netzkonfiguration mit einem Standpunkt ist das jeweilige σ_0 angegeben.

Abbildung 4.10 zeigt die Parameterverzerrung für die Referenzpunktkoordinaten in der Lage in Abhängigkeit von σ_0 und den fünf Beobachtungskonfigurationen bei Verwendung der Taylorreihe mit Gliedern 1. Ordnung. In dieser Darstellung wird der Mehrwert einer Beobachtungskonfiguration mit mehreren Standpunkten deutlich. Werden die Beobachtungen aller vier Standpunkte verwendet, wird die Verzerrung aufgrund der Punktsymmetrie praktisch aufgehoben. Bei der Verwendung der Standpunkte 1 bis 3 weist das maximale Bias für $\sigma_0 = 10\text{ mm}$ die gleiche Größenordnung auf wie bei Verwendung eines Standpunktes und $\sigma_0 = 1,2\text{ mm}$. Insgesamt ist das Bias in diesem Beispiel sehr klein und überschreitet für keine

Konfiguration 2 μm . Diese Analyse zeigt jedoch sehr anschaulich, dass durch geeignete Netzkonfigurationen ein Bias der Schätzwerte reduziert werden kann, und bestätigt die Empfehlungen von Lossin (2013) für diese Anwendung.

Durch die S-Transformation nach Gl. 4.36 weist $\mathbf{K}_d$ nur noch eine genäherte homogene und isotrope Struktur auf. Bedingt durch die symmetrische Netzkonfiguration sind die resultierenden Konfidenzellipsoide der einzelnen Positionen $\mathbf{P}_{i,j}$ dennoch nahezu kugelförmig. In Abhängigkeit der Netzkonfiguration, des gewählten Datums und des gewählten Aufnahmeverfahrens wird bei einer praktischen Messung die Struktur der Dispersionsmatrix von dieser idealisierten Form abweichen, wodurch sich andere Parameterverzerrungen ergeben. Polare Messsysteme werden gegenwärtig am häufigsten zur Referenzpunktbestimmung eingesetzt (Dawson u. a. 2006; Leinen u. a. 2007; Lösler 2009b; Lösler u. a. 2018c). In Anlehnung an die Optimierung des Netzdesigns 2. Ordnung, bei der für eine bestehende Netzkonfiguration und eine vorgegebene Dispersion für die Modellparameter das stochastische Modell der Beobachtungen optimiert wird (Schmitt 1985), soll nachfolgend das Bias für variierende Strecken- und Winkelmessunsicherheiten abgeschätzt werden. Die Netzkonfiguration und der Beobachtungsplan werden aus Abbildung 4.7 übernommen. Jede Position $\mathbf{P}_{i,j}$ wird nur einmalig registriert. Die Standpunkte sind untereinander durch gegenseitige Messungen miteinander verknüpft und definieren wiederum das geodätische Datum des übergeordneten terrestrischen Koordinatensystems. Da sich der Abgriff einer horizontalen Richtung nicht wesentlich vom Abgriff eines Zenitwinkels unterscheidet, werden für diese jeweils identische Messunsicherheiten $\sigma_{\text{Hz},V} = \sigma_{\text{Hz}} = \sigma_V$ unterstellt. Die gewählten Messunsicherheiten für die polaren Beobachtungen orientieren sich an gegenwärtig verfügbaren Messinstrumenten, die in der Ingenieurgeodäsie und insbesondere im Kontext der Referenzpunktbestimmung empfohlen und eingesetzt werden (Nothnagel 2005; Möser u. a. 2012, S. 239).

Durch Vorgabe von je 15 Messunsicherheiten für die Strecken- und Winkelbeobachtungen ergeben sich insgesamt 225 Kombinationen. Für jede Kombination wird mit den Werkzeugen der Netzplanung (Jäger u. a. 2005, S. 284ff; Niemeier 2008, S. 340f) die a-priori Dispersionsmatrix der Positionen $\mathbf{P}_{i,j}$ abgeschätzt. Um zu prüfen, ob eine Optimierung der Winkel- oder der Streckenmessung im Hinblick auf eine Reduktion des Bias zu empfehlen ist, wird ein exponentieller Anstieg der Messunsicherheiten gewählt, wobei die Messunsicherheiten der Streckenbeobachtungen einen Bereich von 0,1 mm bis 2,0 mm abdecken, und die Messunsicherheiten der Winkelmessungen im Intervall von 0,05 mgon bis 1,0 mgon liegen, siehe Abbildung 4.11.

Die geschätzte Parameterverzerrung für die Referenzpunktposition $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ und den Abstand zwischen der Primär- und Sekundärachse e_{AO} sind in Abbildung 4.12 in Abhängigkeit von σ_S und $\sigma_{\text{Hz},V}$ exemplarisch für die Aufnahmekonfiguration von Standpunkt 3 dargestellt. Die Parameterverzerrungen ergeben sich aus Gl. 3.40a und sind als Differenz zwischen der TS1- und TS2-Lösung dargestellt. Mit größer werdenden Unsicherheiten für die polaren Messelemente steigen die Parameterverzerrungen erwartungsgemäß an, bleiben aber stets $<1 \mu\text{m}$ und sind für die meisten Anwendungen vernachlässigbar. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Messunsicherheit

der Winkelmessung gegenüber der Streckenmessung einen dominanteren Anteil an der Parameterverzerrung aufweist. Für $\sigma_{H_z,V} < 0,3$ mgon ergeben sich unabhängig von σ_S praktisch keine Verzerrungen. Bei Verwendung von polaren Messsystemen ist folglich eine Verringerung der Messunsicherheit für die Winkelmessung empfehlenswert, da diese die Verzerrung der Parameter im linearisierten Modell dominiert.

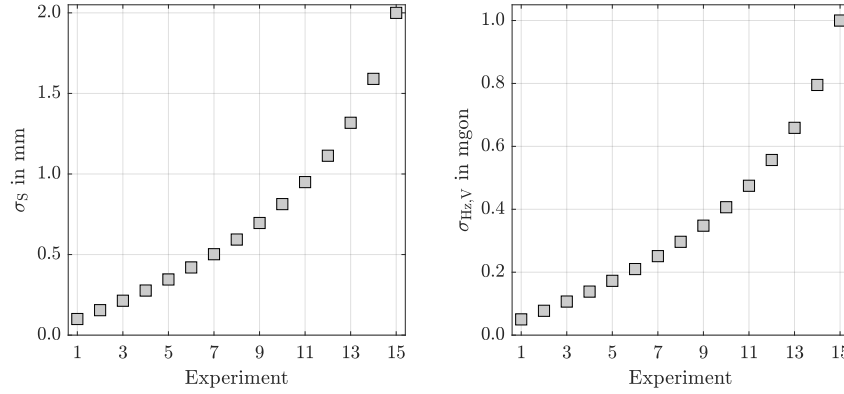


Abbildung 4.11: Angenommene a-priori Messunsicherheiten für Streckenbeobachtungen σ_S und Winkelbeobachtungen $\sigma_{H_z,V}$ zur Bestimmung der Dispersionsmatrizen der Markenpositionen $P_{i,j}$ am Teleskop. Die Messunsicherheiten steigen exponentiell, um den möglichen Mehrwert von Präzisionsmessungen zu untersuchen.

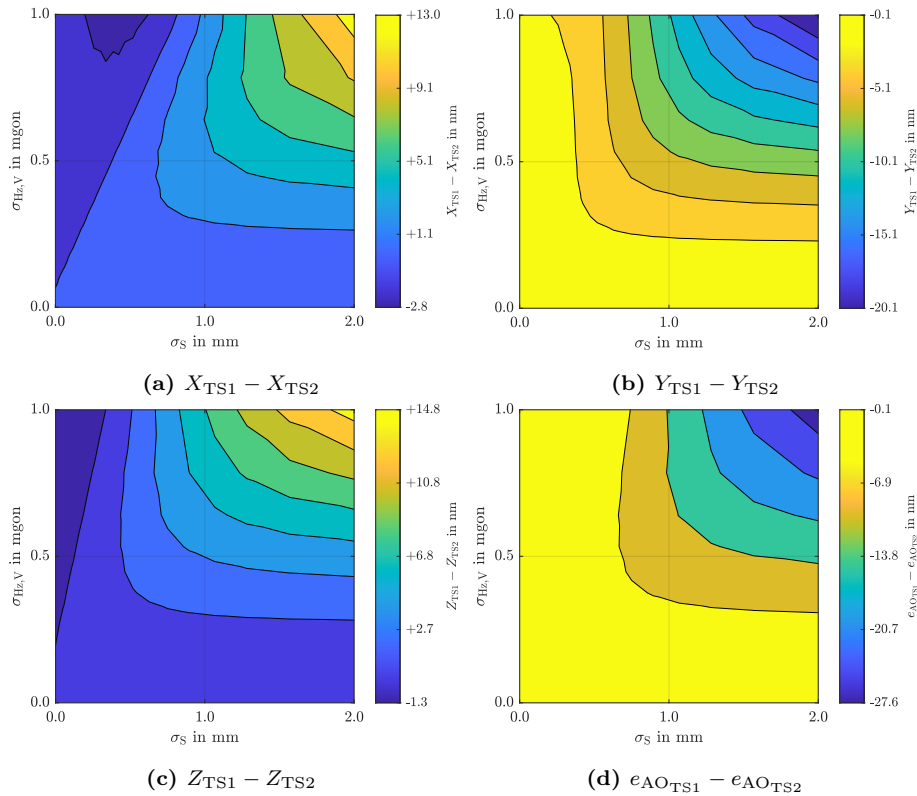


Abbildung 4.12: Geschätzte Parameterverzerrung für die Koordinatenkomponenten des Referenzpunktes sowie für den Abstand zwischen Primär- und Sekundärachse in Abhängigkeit von σ_S und $\sigma_{H_z,V}$. Die dargestellten Parameterverzerrungen ergeben sich aus der Differenz zwischen der TS1- und TS2-Lösung, d. h., (a) $X_{TS1} - X_{TS2}$, (b) $Y_{TS1} - Y_{TS2}$, (c) $Z_{TS1} - Z_{TS2}$ und (d) $e_{AO_{TS1}} - e_{AO_{TS2}}$, wobei Messungen zum Teleskop ausschließlich vom Standpunkt 3 in dieser Darstellung berücksichtigt wurden.

Durch die Hinzunahme weiterer Standpunkte reduziert sich die Parameterverzerrung. Werden alle vier Standpunkte miteinbezogen, hebt sich die Parameterverzerrung aufgrund der symmetrischen Messkonfiguration für die Lagekomponente des Referenzpunktes fast vollständig auf, wie Abbildung 4.13 zeigt. Dies entspricht auch den Ergebnissen in den Abbildung 4.9, 4.10 und unterstreicht den Mehrwert einer symmetrischen Standpunktanordnung um das Teleskop herum. Kleinere Differenzen verbleiben, da die angenommene Teleskopgeometrie aufgrund der gewählten Parameter kein exakt rotationssymmetrisches Objekt darstellt, siehe Tabelle 4.1. Während für die horizontalen Komponenten des Referenzpunktes durch eine symmetrische Messanordnung die Parameterverzerrung (nahezu) vollständig eliminiert wird, lässt sich dies auf die vertikale Koordinatenkomponente nicht übertragen.

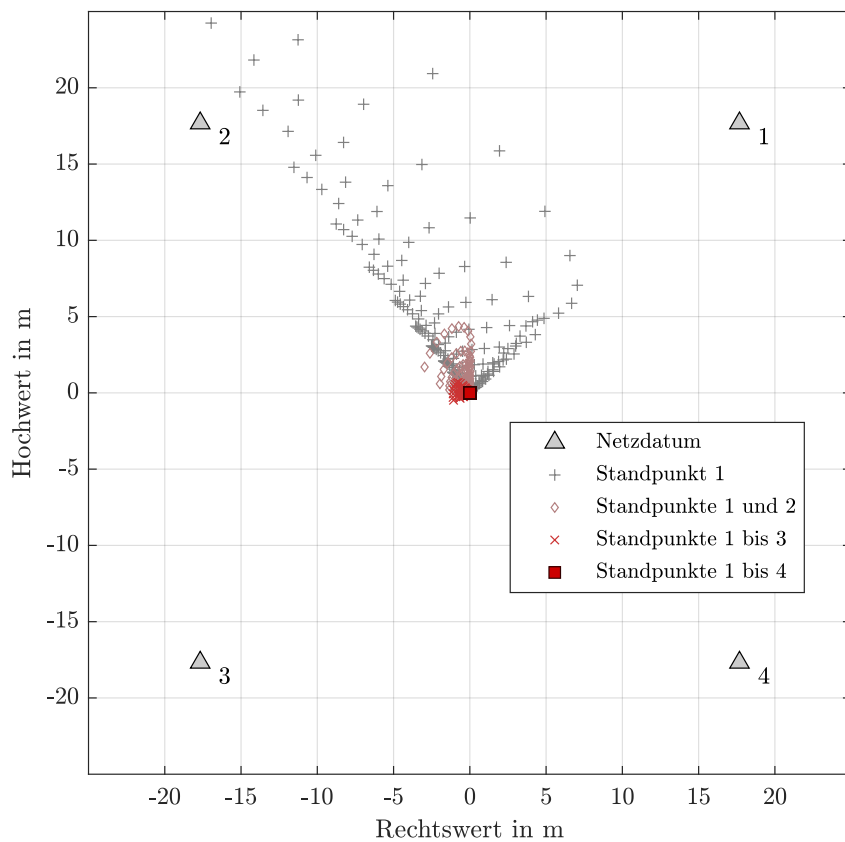


Abbildung 4.13: Geschätzte Parameterverzerrungen für die horizontalen Koordinatenkomponenten des Referenzpunktes für Messkonfigurationen von unterschiedlichen Standpunkten. In jeder Beobachtungskonfiguration wurde der Bias in Abhängigkeit von σ_S und $\sigma_{H_z,V}$ geschätzt, sodass sich pro Beobachtungskonfiguration 225 Einzelauswertungen ergeben. Die Parameterverzerrung ist im Maßstab 2,5 Mrd : 1 dargestellt.

Wie Abbildung 4.14 anschaulich zeigt, wird hier durch die Aufnahmekonfiguration praktisch keine nennenswerte Verbesserung erzielt. Durch die Verwendung von polaren Beobachtungen in der Netzsimulation sind die resultierenden Konfidenzellipsoide der Positionen $\mathbf{P}_{i,j}$ unterschiedlich orientiert und abhängig von den Messunsicherheiten für Strecken- und Winkelbeobachtungen. Während die Konfidenzellipsoide bei Verwendung der Taylor-Karman-Strukturmatrix annähernd kugelförmig sind, ergeben sich hier Konfidenzellipsoide mit unterschiedlichen Halbachsen und Orientierungen.

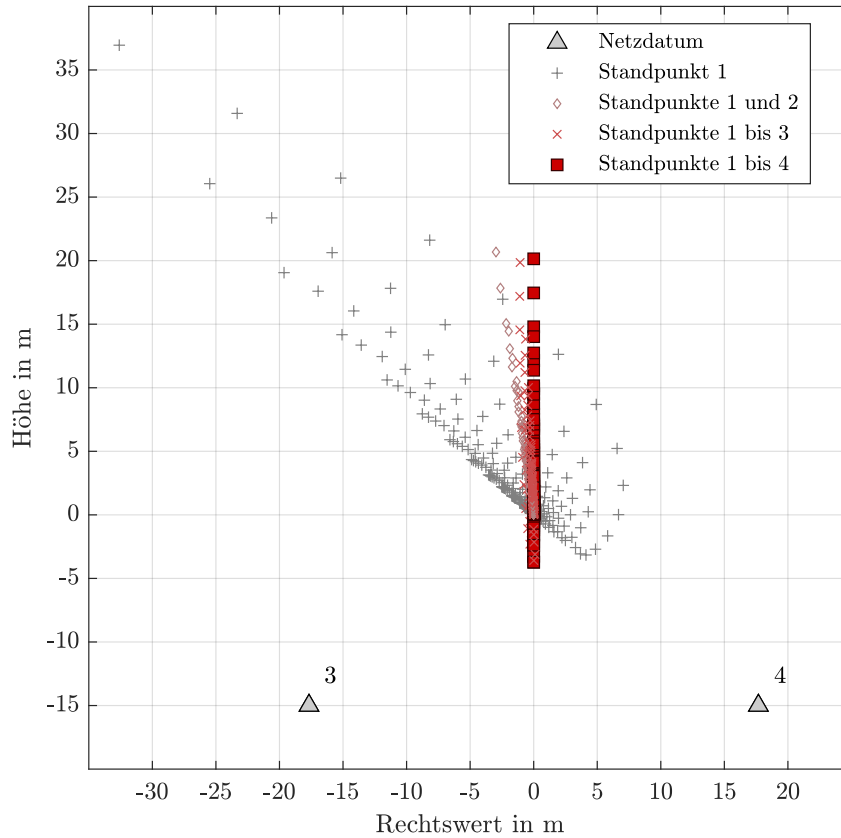


Abbildung 4.14: Geschätzte Parameterverzerrung für die vertikale Koordinatenkomponente des Referenzpunktes in Abhängigkeit von σ_S und $\sigma_{Hz,V}$ sowie der Anzahl der verwendeten Standpunkte. Die Parameterverzerrung ist im Maßstab 2,5 Mrd : 1 dargestellt.

Abbildung 4.15 zeigt für Messungen von einem Standpunkt schematisch die Visuren zu einer Marke, die sich für zwei unterschiedliche Teleskoporientierungen ergeben. Die resultierenden Konfidenzbereiche sind in Form von Ellipsen dargestellt und etwa gleich groß. Die Orientierungen dieser Ellipsen unterscheiden sich aufgrund der unterschiedlichen Zenitwinkel. Während in der dargestellten Konfiguration die Unsicherheit der vertikalen Komponente bei flacher Visur maßgeblich aus der kleinen Halbachse der Konfidenzellipse resultiert, nimmt der Einfluss der großen Halbachse mit steiler werdenden Visuren zu. Positionen, die sich oberhalb des Referenzpunktes befinden, weisen in diesem Beispiel eine größere Unsicherheit in der vertikalen Komponente auf, sodass sich trotz symmetrischer Punktverteilung eine einseitige Verzerrung für die vertikale Komponente des Referenzpunktes ergibt.

Die Abschätzung der Parameterverzerrung erfordert zwingend ein repräsentatives stochastisches Modell. Durch geeignete Messanordnungen lässt sich das Bias auf die geschätzten Parameter reduzieren oder u. U. sogar eliminieren. Bei identischen Beobachtungen, aber unterschiedlich strukturierten Dispersionsmatrizen ergeben sich unterschiedliche Verzerrungen. Eine repräsentative Abschätzung muss daher stets problembezogen erfolgen. Im Kontext der Netzoptimierung kann die Abschätzung der Parameterverzerrung verwendet werden, um optimierte Messanordnungen und erforderliche Messgenauigkeiten zu evaluieren. Im Rahmen der Referenzpunktbestimmung führt eine möglichst symmetrische Aufnahmekonfiguration in Kombination mit

einer Dispersionsmatrix, die möglichst homogene und isotrope Strukturen aufweist, zu weitgehend unverzerrten Ergebnissen.

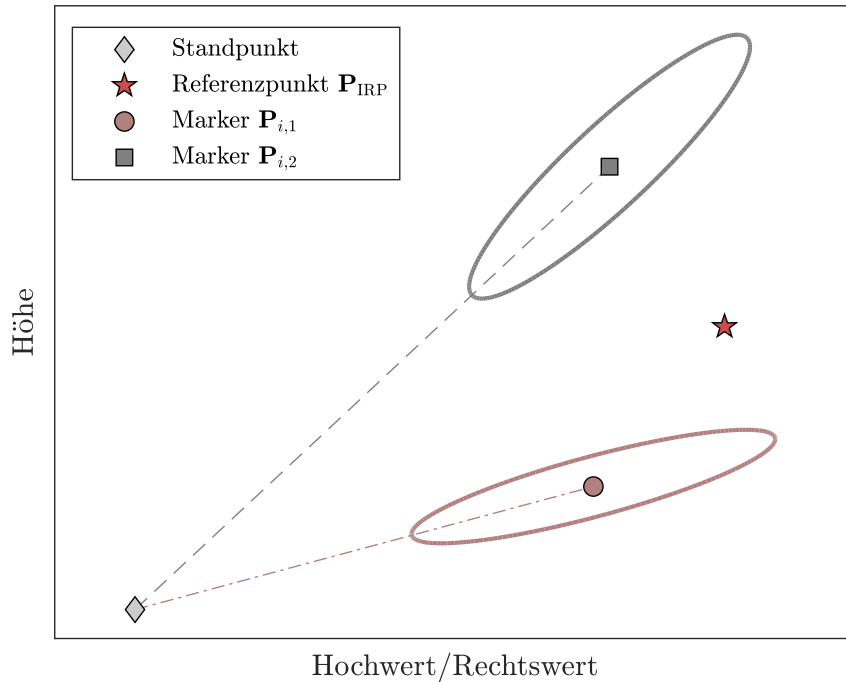


Abbildung 4.15: Schematische Darstellung der von einem Standpunkt aus durchführbaren Visuren zu einer Marke $\mathbf{p}_i$, die sich für die $j = 1, 2$ Teleskoporientierungen ergeben, mit zugehörigen Konfidenzbereichen. Die konfigurationsbedingten Konfidenzbereiche, die sich für jeweils identische σ_S und $\sigma_{Hz,V}$ ergeben, sind für beide Positionen $\mathbf{P}_{i,1}$, $\mathbf{P}_{i,2}$ durch Ellipsen dargestellt.

4.3 Zusammenfassung

Der geometrische Referenzpunkt eines SLR/LLR- bzw. VLBI-Teleskops ist i. A. ein unzugänglicher Punkt, der sich nicht materialisieren lässt. Eine direkte Bestimmung mit bspw. taktilen Messverfahren ist daher nicht möglich. Zur indirekten Bestimmung gibt es eine Reihe von unterschiedlichen methodischen Herangehensweisen. Geometrische Modelle wie das Kugel- oder Torusmodell reduzieren die Aufgabe auf eine einfache Parametrierung, besitzen aber einen limitierten Anwendungsbereich. Aus dem Ansatz über ausgleichende Kreise ergeben sich zwei Verfahren: zum einen das Modell mit Primärachsenkreisen und zum anderen das Modell mit Primär- und Sekundärachsenkreisen.

Neben der Anwendung von geometrischen Primitiven lässt sich das Achssystem des Teleskops mathematisch beschreiben und durch einen Transformationsansatz mit einem übergeordneten terrestrischen Koordinatensystem verknüpfen. Dieses IRP-Modell bestimmt den Referenzpunkt unter Berücksichtigung von teleskopspezifischen Parametern wie z. B. des Achsenoffsets. Aufgrund der zu parametrierenden Drehungen in diesem Modellansatz gibt es verschiedene Darstellungsmöglichkeiten. Gebräuchlich ist der Einsatz von Eulerwinkeln, die eine Drehung um eine Koordinatenachse beschreiben, sowie die Darstellung mittels Eulerachse und -winkel. Auf

die geschätzten Parameter hat die Wahl bzgl. der Rotationsparametrierung keinen Einfluss.

Das Bestimmen des Referenzpunktes und möglicher Zusatzparameter kann sowohl in einem implizit als auch in einem explizit formulierten funktionalen Modell erfolgen. Während das implizite IRP I Verfahren eine synchrone Erfassung der Markenpositionen und der zugehörigen Teleskopwinkel voraussetzt, benötigt das explizite IRP II Verfahren ausschließlich die Trajektorien der angebrachten Marken. Im Gegensatz zum IRP I Verfahren weist der IRP II Ansatz jedoch zwei Rotationsdefekte auf, der durch zusätzliche Bedingungsgleichungen sachgerecht zu beheben sind. In Abschnitt 4.1.2 wurden mögliche Bedingungen und deren Konsequenzen diskutiert, wobei ausschließlich geometrisch interpretierbare Bedingungen betrachtet wurden. Sowohl die Position des Referenzpunktes als auch der Offset zwischen der Primär- und Sekundärachse gehören zu den eindeutig schätzbaren Größen und sind von der Wahl der verwendeten Bedingungsgleichungen unabhängig. Beide Verfahren erlauben eine in-situ Referenzpunktbestimmung, sodass die Teleskopausfallzeiten aufgrund von lokalen Vermessungsarbeiten reduziert werden. Anhand von Realdaten konnte demonstriert werden, dass beide Lösungsverfahren praktisch gleichwertige Ergebnisse liefern und gleichermaßen zur Referenzpunktbestimmung geeignet sind.

Tabelle 4.3 fasst wesentliche Eigenschaften der vorgestellten Methoden hinsichtlich der berücksichtigten Modellparameter und bezüglich Einschränkungen in der messtechnischen Realisierung zusammen. Während die Kugel und der Torus vor allem Einschränkungen bei der Parametrierung des Teleskops aufweisen, beziehen sich die Einschränkungen der übrigen Verfahren auf die praktische Umsetzung. Das Kugel- bzw. Torusmodell sollte daher nur Anwendung finden, wenn das Vorhandensein eines möglichen Achsenoffsets ausgeschlossen werden kann bzw. beide Teleskopachsen senkrecht aufeinander stehen. Sowohl der Torus als auch das P-Kreismodell weisen messtechnische Restriktionen auf, da diese nur Marken an definierten Stellen zulassen. Das PS-Kreismodell besitzt eine identische geometrische Beschreibung wie das IRP-Transformationsmodell, setzt jedoch ein gezieltes Rotieren des Teleskops um jeweils nur eine Achse voraus und erfüllt daher die Anforderung an eine in-situ Referenzpunktbestimmung nicht. Da das IRP-Transformationsmodell unabhängig von einer Geometrie definiert ist, entstehen keine Restriktionen bzgl. der Positionswahl der Marken und der Rotation des Teleskops.

Sowohl die in Abschnitt 4.1.1 vorgestellten geometrischen Modelle als auch die in Abschnitt 4.1.2 hergeleitete IRP-Transformationsmethode besitzen nichtlineare funktionale Zusammenhänge, sodass die Schätzwerte aufgrund von Gl. 2.4 nicht erwartungstreu sind, wenn ein lineares Ersatzproblem anstelle des originären nicht-linearen Problems gelöst wird. Die mögliche Verzerrung der Parameter wurde in Abschnitt 4.2 für die explizite Darstellung des IRP-Transformationsmodells analysiert. Neben unterschiedlichen stochastischen Modellen wurde hierbei der Einfluss der Aufnahmekonfiguration auf die Parameterverzerrung untersucht. Hierbei zeigt sich zum einen, dass eine Steigerung der Messgenauigkeit erwartungsgemäß zu kleineren Verzerrungen führt, zum anderen lässt sich die Verzerrung aber auch durch eine geeig-

nete Aufnahmekonfiguration minimieren, u. U. sogar eliminieren. Die Verzerrungen sind insgesamt sehr gering und überschreiten in keiner der untersuchten Konfigurationen $2\text{ }\mu\text{m}$. Im Vergleich zur angenommenen Messunsicherheit der Eingangsdaten kann dies praktisch als vernachlässigbar angesehen werden.

Tabelle 4.3: Vergleich der einzelnen Methoden zur Referenzpunktbestimmung hinsichtlich der Berücksichtigung von konstruktionsbedingten Abweichungen des Teleskops im funktionalen Modell und bezüglich Einschränkungen bei der messtechnischen Umsetzung. Während ein Pluszeichen (+) symbolisiert, dass das Vergleichskriterium durch die Methode erfüllt wird, zeigt ein Minuszeichen (-), dass die Methode das Kriterium nicht erfüllt.

	Kugel	Torus	P-Kreis	PS-Kreis	IRP I	IRP II
	Parametrierte Teleskopparameter					
Achsenoffset	-	+	⁹ +	+	+	+
Nichtorthogonalität	+	-	⁹ +	+	+	+
Neigung der Primärachse	+	+	¹⁰ +	+	+	+
	Messtechnische Restriktionen					
Beliebige Markenposition	+	-	-	+	+	⁹ +
Beliebige Teleskopdrehung	+	+	+	-	+	+
Keine Synchronisation	+	+	+	+	-	¹¹ +

⁹Erfordert mindestens zwei Marken.

¹⁰Bei strenger Lösung und sachgerechter Parametrierung, z. B. mittels Gl. 4.1, 4.6 und 4.7.

¹¹Topologische Beziehung zwischen Marken muss erfasst werden.

5. Ring-Fokus-Paraboloid

Die Position des geometrischen Referenzpunktes definiert den invarianten Bezugspunkt (IRP), auf den sich alle Beobachtungen eines Raumverfahrens beziehen. Der IRP ermöglicht die Kombination von unterschiedlichen Raumverfahren miteinander, z. B. zur Bildung eines globalen geodätischen Referenzrahmens. Die Zuverlässigkeit der aus verschiedenen Raumverfahren abgeleiteten globalen Produkte hängt jedoch nicht nur von der Genauigkeit des IRP ab, sondern maßgeblich von den Messergebnissen, die die einzelnen Techniken erzielen. Das ambitionierte Ziel, welches das Global Geodetic Observing System anstrebt, ist eine Positionsgenauigkeit von 1 mm sowie eine zeitliche Stabilität von $0,1 \text{ mm a}^{-1}$ im globalen geodätischen Referenzrahmen. Neben einer technischen Weiterentwicklung, wie sie u. a. durch die Umsetzung der Agenda VLBI2010 erfolgt, müssen hierfür insbesondere systematische Messabweichungen in den geodätischen Raumverfahren identifiziert und messtechnisch quantifiziert werden. Zur Korrektur der Daten sind weiterhin geeignete Modelle zu entwickeln, sodass sich die Beobachtungen der Raumverfahren auf den IRP beziehen.

Die Empfangseigenschaften von VLBI-Radioteleskopen werden maßgeblich durch die Reflektionseigenschaft und die räumliche und zeitliche Stabilität des Haupt- und ggf. Subreflektors bestimmt. Neben äußeren Einflüssen wie Temperatur, Wind, Sonneneinstrahlung oder Schneelasten können Verformungen auch durch das Eigengewicht des Haupt- und Subreflektors verursacht werden. Insbesondere bei Drehung des Teleskops verschiebt sich der Schwerpunkt des Hauptreflektors und kann eine lastfallabhängige Deformation verursachen (Carter u. a. 1980; Sovers u. a. 1998). Clark und Thomsen (1988) untersuchen das durch Lastfalländerungen hervorgerufene Deformationsverhalten am Radioteleskop in Fairbanks (Alaska) und leiten für dieses Azimut-Elevation-Teleskop ein Modell zur Beschreibung der Signalwegänderungen ΔL her. Die Autoren identifizieren drei Haupteinflüsse, $\Delta F(\omega)$, $\Delta V(\omega)$ und $\Delta R(\omega)$, welche in Abhängigkeit des Sekundärwinkels ω

- die Änderung der Brennweite des Hauptreflektors,
- die Variation des Hauptreflektors zur Sekundärachse und somit zum IRP sowie
- die Verschiebung des Empfängers bzw. Subreflektors

beschreiben. Durch das Einführen zugehöriger linearer Gewichtskoeffizienten α_F , α_V und α_R lassen sich die Signalwegänderungen durch eine gewichtete Summenbildung

$$\Delta L(\omega) = \alpha_F \Delta F(\omega) + \alpha_V \Delta V(\omega) + \alpha_R \Delta R(\omega) \quad (5.1)$$

ausdrücken. Hierbei ist für Radioteleskope, deren Systembrennpunkt $\mathbf{F}_0$ mit dem Brennpunkt des Hauptreflektors $\mathbf{F}_1$ zusammenfällt (Primär-Fokus-Design), $\lambda = 1$ und für Radioteleskope, die das reflektierte Signal des Hauptreflektors über einen Subreflektor zum Systembrennpunkt $\mathbf{F}_0$ leiten (Sekundär-Fokus-Design), $\lambda = 2$ (Clark und Thomsen 1988; Abbondanza und Sarti 2010). Während ΔF , ΔV und ΔR die geometrischen Verformungen in Gl. 5.1 repräsentieren, resultieren die Gewichtskoeffizienten α_F , α_V und α_R aus der teleskopspezifischen Illumination der Apertur. Clark und Thomsen (1988) zeigen, dass diese Gewichtskoeffizienten linear abhängig voneinander sind, d. h.,

$$\alpha_F = \lambda(1 - \alpha_R), \quad (5.2a)$$

$$\alpha_V = -1 - \lambda\alpha_R. \quad (5.2b)$$

Hierbei ergibt sich

$$\alpha_R = \int_{\Gamma} \mathbf{I}_n(\mathbf{P}) \mathbf{h}(\mathbf{P}) d\Gamma \quad (5.2c)$$

aus der Integration der einzelnen Signalwege über die gesamte Reflektionsfläche Γ . Die Funktion $\mathbf{h}$ beschreibt die Änderung des Signalweges infolge einer Verschiebung des Empfängers bzw. Subreflektors, und $\mathbf{I}_n$ ist die teleskopspezifische normierte Illuminationsfunktion (Clark und Thomsen 1988; Abbondanza und Sarti 2010; Artz u. a. 2014).

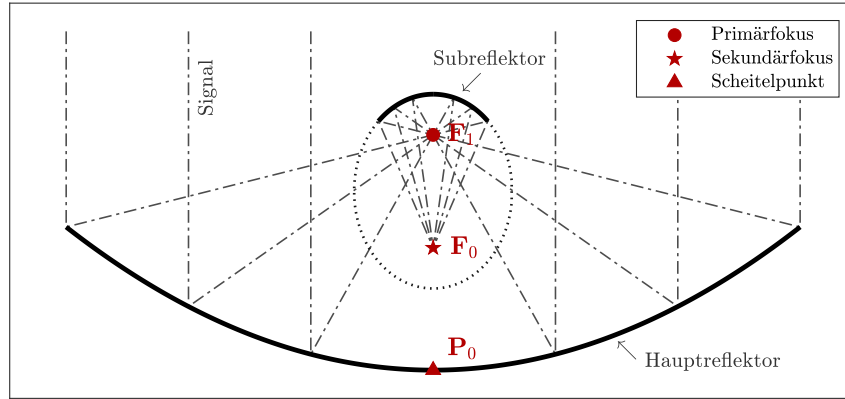


Abbildung 5.1: Schnitt durch ein Sekundär-Fokus-Paraboloid mit Signalverläufen. Der Subreflektor befindet sich hinter dem Brennpunkt des Hauptreflektors (gregorianische Konfiguration) und ist durch eine Ellipse parametrisiert, welche durch eine gepunktete schwarze Linie dargestellt ist. Die Brennpunkte dieser Ellipse korrespondieren jeweils mit dem Brennpunkt des Hauptreflektors $\mathbf{F}_1$ (roter Kreis) und dem Systembrennpunkt $\mathbf{F}_0$ (roter Stern). Physische Elemente des Haupt- und Subreflektors sind als durchgezogene schwarze Linien angedeutet.

Abbildung 5.1 zeigt schematisch die gregorianische Konfiguration eines Sekundär-Fokus-Radioteleskops mit Signalverläufen. Der Hauptreflektor dieses konventionellen Sekundär-Fokus-Radioteleskops wird üblicherweise als gewöhnliches Rotationsparaboloid entworfen. Das eintreffende Signal wird zunächst vom Rotationsparaboloid in Richtung des Brennpunktes des Hauptreflektors (Primärfokus) $\mathbf{F}_1$ reflektiert.

Vom Subreflektor wird dieses Signal anschließend zum Systembrennpunkt (Sekundärfokus) F_0 reflektiert. In der dargestellten gregorianischen Konfiguration befindet sich der Subreflektor hinter dem Brennpunkt des Hauptreflektors und lässt sich geometrisch durch ein Rotationsellipsoid parametrieren. Befindet sich der Subreflektor hingegen vor dem Brennpunkt des Hauptreflektors, so handelt es sich um ein Sekundär-Fokus-Radioteleskop nach dem cassegrainischen Prinzip. In diesem Fall entspricht der Subreflektor einem zweischaligen Rotationshyperboloid (Milligan 2005, S. 409). Abbildung 5.2 zeigt schematisch die cassegrainische Konfiguration eines Sekundär-Fokus-Radioteleskops.

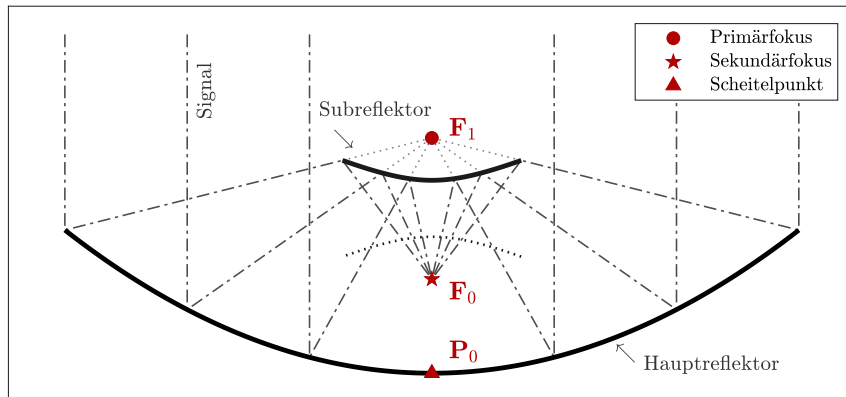


Abbildung 5.2: Schnitt durch ein Sekundär-Fokus-Paraboloid mit Signalverläufen. Der Subreflektor befindet sich vor dem Brennpunkt des Hauptreflektors (cassegrainische Konfiguration) und ist durch eine Hyperbel parametrieren, welche durch eine schwarze Linie dargestellt ist. Die Brennpunkte dieser Hyperbel korrespondieren jeweils mit dem Brennpunkt des Hauptreflektors F_1 (roter Kreis) und dem Systembrennpunkt F_0 (roter Stern). Physische Elemente des Haupt- und Subreflektors sind als durchgezogene schwarze Linien angedeutet.

Verändert sich die geometrische Form der Empfangsgeometrie des Radioteleskops, so variiert die Signallaufänge, wie Abbildung 1.5 schematisch zeigt. Während die Abbildungen 5.1, 5.2 jeweils den Schnitt eines undeformierten Radioteleskops zeigen, sind in Abbildung 5.3 die drei geometrischen Deformationsanteile dargestellt, die in eine Signalwegänderung ΔL münden (Clark und Thomsen 1988). Bleiben diese Signalwegänderungen unberücksichtigt, so verfälschen diese die VLBI-Messergebnisse systematisch und führen zu einem Fehler in den abgeleiteten globalen Stationskoordinaten, insbesondere in der vertikalen Koordinatenkomponente. Untersuchungen von Sarti u. a. (2010) zeigen, dass hierdurch der aus VLBI geschätzte Netzmaßstab im ITRF systematisch verfälscht wird. Bei der Bestimmung des ITRF2020 sollen daher erstmals lastfallabhängige Deformationen von Radioteleskopen korrigiert werden (Altamimi u. a. 2018).

Der überwiegende Teil konventioneller Radioteleskope wurde mit einem gewöhnlichen rotationssymmetrischen Paraboloid als Hauptreflektor entworfen, siehe die Abbildungen 5.1, 5.2. Bedingt durch Konstruktionselemente in der Nähe des Systembrennpunktes, wie bspw. den Subreflektor, wird jedoch ein Teil des Hauptreflektors verschattet. Je kompakter hierbei der Hauptreflektor ist, desto größer ist der prozentuale Flächenanteil mit geringerer Intensität (Cutler 1947). Für kompakte VGOS-spezifizierte Radioteleskope, wie sie im Zuge der Umsetzung der Agenda VLBI2010

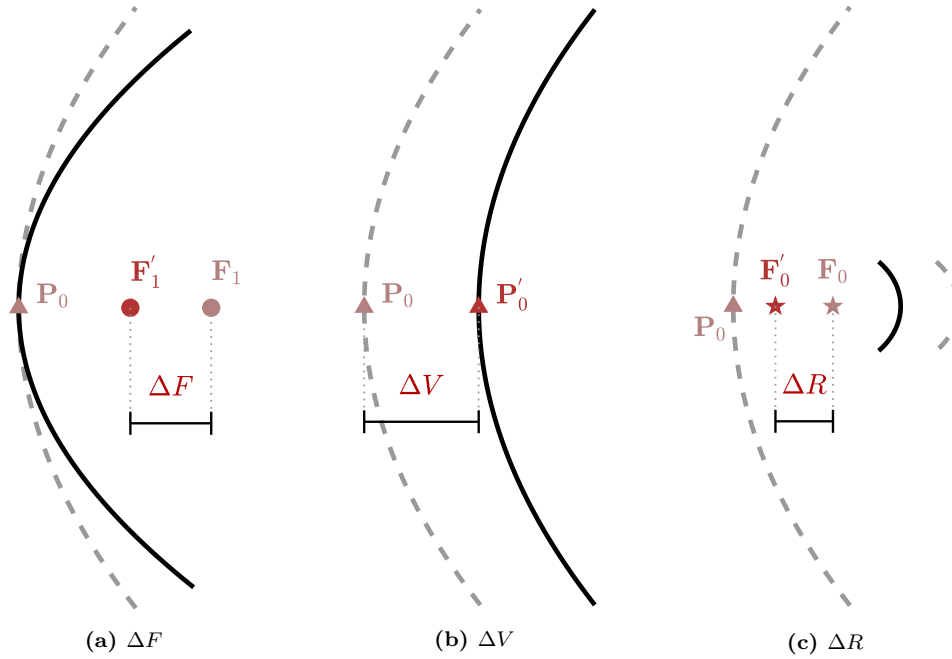


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung der drei geometrischen Deformationsanteile $\Delta F(\omega)$, $\Delta V(\omega)$ und $\Delta R(\omega)$ zur Modellierung der Signalwegänderung $\Delta L(\omega)$ in Abhängigkeit des Sekundärwinkels ω nach Clark und Thomsen (1988). Dargestellt ist die Änderung der Brennweite des Hauptreflektors ΔF (a), die Variation des Hauptreflektors ΔV zur Sekundärachse (b), die einer Verschiebung des Scheitelpunktes P_0 entspricht, und die Verschiebung des Subreflektors ΔR (c). Während graue und hellrote Elemente die unverformte Ausgangssituation symbolisieren, sind die jeweils deformierten Elemente in Schwarz bzw. Dunkelrot dargestellt.

vorgesehen sind, wird daher häufig ein verbessertes Reflektordesign verwendet. Dieses verbesserte Design wird als Ring-Fokus-Paraboloid bezeichnet (Neidhardt u. a. 2011; Haas 2013; Gómez-González u. a. 2014). Im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Paraboloid lässt sich ein Ring-Fokus-Paraboloid nicht durch eine Fläche 2. Ordnung beschreiben.

Während die geometrische Variation ΔF aus der Verformung des Hauptreflektors indirekt zu bestimmen ist, lassen sich ΔV und ΔR direkt messtechnisch erfassen (Artz u. a. 2014; Bergstrand u. a. 2018) oder können aus der Verformung des Hauptreflektors indirekt abgeleitet werden (Lösler u. a. 2019c; Nothnagel u. a. 2019). Zur Bestimmung von ΔF ist die Geometrie des Hauptreflektors aus geeigneten Messungen abzuleiten und die Brennweite F als Formparameter zu bestimmen. Es handelt sich um eine klassische Aufgabe des Reverse Engineering, die in Abhängigkeit der Genauigkeitsanforderungen gegenwärtig mit Holographie (Tuccari u. a. 2001; Hunter u. a. 2011), Methoden der Nahbereichsphotogrammetrie (Findlay 1964; Subrahmanyan 2005; Süß u. a. 2012) oder polaren Messsystemen, wie Laserscannern (Sarti u. a. 2009b; Wrona u. a. 2014; Bergstrand u. a. 2018), Totalstationen (Nothnagel u. a. 2010), Lasertrackern (Baars 2007, p. 167f) oder Laserradar (Usoff u. a. 2014), messtechnisch realisiert wird.

Da ΔF keine direkt bestimmbare Messgröße darstellt und indirekt aus einer Analyse der geometrischen Form zu rekonstruieren ist, fokussieren die nachfolgenden Darstellungen auf die mathematische Beschreibung des Hauptreflektors. In

Abschnitt 5.1 wird zunächst das mathematische Modell eines allgemeinen elliptischen Paraboloids als Fläche 2. Ordnung beschrieben. Anschließend wird in Abschnitt 5.2 das mathematische Modell eines allgemeinen Ring-Fokus-Paraboloid hergeleitet. Wie sich zeigt, kann das gewöhnliche Paraboloid als Spezialfall aufgefasst werden und lässt sich direkt aus dem Modell des Ring-Fokus-Paraboloids ableiten. Das hergeleitete Modell ist somit sowohl für konventionelle Radioteleskope, deren Hauptreflektoren ein gewöhnliches Paraboloid beschreiben, als auch für VGOS-spezifizierte Radioteleskope, die ein Ring-Fokus-Paraboloid als Hauptreflektorgeometrie verwenden, universell anwendbar. Abschnitt 5.3 widmet sich der Funktion $\mathbf{h}$, die die geometrische Änderung des Signalweges infolge einer Verschiebung des Empfängers bzw. Subreflektors ΔR beschreibt und zur Lösung des Integrals in Gl. 5.2c bereitzustellen ist. Die Darstellung beschränkt sich hierbei auf Sekundär-Fokus-Radioteleskope. Für Primär-Fokus-Radioteleskope sei auf die Arbeiten von Clark und Thomsen (1988) und Sarti u. a. (2009a) verwiesen.

Im Folgenden werden Punkte im Objektkoordinatensystem der kanonischen Form mit Kleinbuchstaben symbolisiert, z. B. $\mathbf{p}^T = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, und Punkte, die sich auf das übergeordnete terrestrische Koordinatensystem beziehen, mit Großbuchstaben, z. B. $\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}$.

5.1 Elliptisches Paraboloid

Ein gewöhnliches rotationssymmetrisches Paraboloid in kanonischer Form entsteht, wenn ein Parabelast in der xz -Ebene um die z -Achse des Koordinatensystems rotiert wird. Die z -Achse des Koordinatensystems entspricht der Hauptachse des rotationssymmetrischen Paraboloids, dessen Scheitelpunkt $\mathbf{P}_0$ im Koordinatenursprung liegt. Das funktionale Modell des rotationssymmetrischen Paraboloids in kanonischer Form lautet

$$a_1^2 (x_i^2 + y_i^2) = z_i, \quad (5.3)$$

wobei a_1 der einzige datumsinvariante Formparameter ist, der die Öffnung des Paraboloids beschreibt. Das Paraboloid ist in dieser Darstellung stets nach oben geöffnet, da $z_i \geq 0$. Der Vektor $\mathbf{p}_i^T = \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i \end{pmatrix}$ beschreibt einen beliebigen Punkt auf der Mantelfläche des Paraboloids. Da das rotationssymmetrische Paraboloid für viele konventionelle Radioteleskope der Geometrie des geplanten Hauptreflektors entspricht, wird Gl. 5.3 häufig zur geometrischen Beschreibung in der Formanalyse verwendet (Clark und Thomsen 1988; Sarti u. a. 2009b; Holst u. a. 2012; Wrona u. a. 2014; Bergstrand u. a. 2018).

Gl. 5.3 ist ein Spezialfall des allgemeinen elliptischen Paraboloids. Dieses ergibt sich durch die Hinzunahme eines weiteren Formparameters a_2 , sodass die Koordinatenkomponenten x_i und y_i unterschiedlich skaliert werden, d. h.,

$$a_1^2 x_i^2 + a_2^2 y_i^2 = z_i. \quad (5.4)$$

Die datumsinvarianten Modellparameter $\mathbf{x}_{\text{SF}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}^T$ beschreiben hierbei zwei senkrecht aufeinanderstehende Parabeläste. Verschneidet man das elliptische Paraboloid mit einer vertikalen Ebene, die durch den Koordinatenursprung geht und die z -Achse enthält, werden die Parabelparameter aller resultierenden Parabeln im Intervall $[a_1, a_2]$ liegen. Die Parameter a_1, a_2 können daher als Extremstellen interpretiert werden. Anstelle von a_1, a_2 werden häufig die korrespondierenden Brennweiten

$$F(a) = \frac{1}{4a^2} \quad (5.5)$$

verwendet, da diese geometrisch anschaulicher und besser zu interpretieren sind.

Zur Beschreibung des Paraboloids in einer beliebigen Raumlage und -orientierung ist eine Transformation

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{R}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_0) \quad (5.6)$$

notwendig, siehe auch Gl. 4.3. Hierbei beschreibt die orthogonale Matrix $\mathbf{R}$ die Rotationssequenz zur Definition der Orientierung und der Vektor $\mathbf{P}_0^T = \begin{pmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \end{pmatrix}$ die verschobene Position des Scheitelpunktes im übergeordneten Koordinatensystem. Die Position $\mathbf{p}_i$ des Oberflächenpunktes der kanonischen Form wird somit aus einer Verschiebung und einer Drehung der korrespondierenden Position $\mathbf{P}_i^T = \begin{pmatrix} X_i & Y_i & Z_i \end{pmatrix}$ im übergeordneten Koordinatensystem gewonnen. Die Rotationssequenz $\mathbf{R}$ lässt sich auf verschiedene Arten parametrieren. In der Darstellung mit Eulerwinkeln, siehe die Gl. 4.4, lautet eine der zwölf möglichen Sequenzen

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\epsilon_x) \mathbf{R}_y(\epsilon_y) \mathbf{R}_z(\epsilon_z) \quad (5.7)$$

wobei $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ die jeweiligen Drehwinkel bezeichnen. Während für Gl. 5.4 alle sechs Transformationsparameter $\mathbf{x}_{\text{ISO}}^T = \begin{pmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 & \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_z \end{pmatrix}$ zu bestimmen sind, entfällt die Parametrierung der Rotation um die z -Achse in Gl. 5.7 bei Verwendung von Gl. 5.3 aufgrund der Rotationssymmetrie, d. h., $\epsilon_z = 0$.

Das elliptische Paraboloid nach Gl. 5.4 zählt zu den Flächen 2. Ordnung (Quadrik), die sich allgemein durch die quadratische Gleichung

$$\mathbf{P}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i^T \mathbf{q} + q_0 = 0 \quad (5.8)$$

darstellen lassen (Nitschke 2018, S. 129ff). Hierbei enthält die symmetrische Matrix $\mathbf{Q}$ die quadratischen Anteile, d. h.,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & \frac{q_4}{\sqrt{2}} & \frac{q_5}{\sqrt{2}} \\ \frac{q_4}{\sqrt{2}} & q_2 & \frac{q_6}{\sqrt{2}} \\ \frac{q_5}{\sqrt{2}} & \frac{q_6}{\sqrt{2}} & q_3 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

und der Vektor $\mathbf{q}$ die Koeffizienten

$$\mathbf{q}^T = \begin{pmatrix} q_7 & q_8 & q_9 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Insgesamt besitzt die Quadrik zehn Parameter, die sowohl die räumliche Position und Orientierung als auch die datumsinvarianten Formparameter der Geometrie implizit

beschreiben. Von diesen zehn Parametern sind jedoch nur neun unabhängig, sodass eine zusätzliche Parameterrestriktion zu berücksichtigen ist. Faugeras (1989, S. 101) empfiehlt die Normierung

$$\text{tr}(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) = 1. \quad (5.11)$$

Die resultierenden Parameter der Quadrik sind hierdurch invariant bzgl. Drehungen und Verschiebungen und somit unabhängig vom gewählten übergeordneten Koordinatensystem (Drixler 1993, S. 29).

Mittels Hauptachsentransformation lassen sich die datumsabhängigen Transformationsparameter der Gl. 5.6 bestimmen (Drixler 1993, S. 31ff; Kutterer und Schön 1999; Lehmann 2019). Ausführliche Beschreibungen zur Hauptachsentransformation finden sich in Büchern zur linearen Algebra (Burg u. a. 2012, S. 328ff), sodass auf eine Wiedergabe hier verzichtet wird. Im Ergebnis der Hauptachsentransformation liegt die Quadrik in der 1. bzw. 2. Normalform vor (Drixler 1993, S. 33; Kutterer und Schön 1999). Sind alle Eigenwerte λ_i der Zerlegung

$$\mathbf{R}^T \mathbf{Q} \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

von $\mathbf{Q}$ ungleich null, ergibt sich mit $d_q = q_0 - \frac{1}{4} \mathbf{q}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{q}$ die 1. Normalform

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{p}_i + d_q = 0. \quad (5.13)$$

Beim Paraboloid ist ein Eigenwert in $\mathbf{\Lambda}$ null. Durch entsprechende Sortierung sei o. B. d. A. der Eigenwert $\lambda_3 = 0$, sodass aus der Hauptachsentransformation die 2. Normalform

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{p}_i + m_q z_i = 0 \quad (5.14)$$

resultiert, wobei $m_q = \mathbf{q}^T \mathbf{r}_3$ und $\mathbf{r}_3$ den zu λ_3 gehörenden Eigenvektor symbolisiert (Kutterer und Schön 1999). Der Vektor $\mathbf{r}_3$ beschreibt hierbei die Hauptachse des Paraboloids und korrespondiert in der kanonischen Form mit der z -Achse des Koordinatensystems. Aus Gl. 5.14 können die korrespondierenden formbeschreibenden Parameter der Gl. 5.4 direkt abgelesen werden, d. h., $a_j^2 = \frac{\lambda_j}{m_q}$ für $j = 1, 2$.

Während die Quadrik neun unabhängige Parameter besitzt, werden zur expliziten Beschreibung des elliptischen Paraboloids nur acht Modellparameter benötigt. Gl. 5.8 ist demnach gegenüber Gl. 5.4 überparametriert. Bis auf wenige Ausnahmen, z. B. Punkt, Kugel, Gerade oder Ebene, kann der gewünschte Formtyp für Gl. 5.8 nicht explizit vorgegeben werden, sondern ergibt sich erst nach der Hauptachsentransformation (Burg u. a. 2012, S. 339). In Abhängigkeit der Punktverteilung und der Messunsicherheiten kann es daher zu Fehlklassifikationen kommen (Drixler 1993, S. 61; Lösler und Nitschke 2010; Lösler 2020a).

Neben der Bestimmung von Näherungswerten ist die Anwendung von Gl. 5.8 insbesondere dann empfehlenswert, wenn keine Vorinformationen bzgl. des konkreten Formtyps vorliegen (Drixler 1993, S. 28). So nutzen Dutescu u. a. (1999) das

Modell der Quadrik, um u. a. den Formtyp und die formbeschreibenden Parameter für das Radioteleskop in Weilheim (Deutschland) zu bestimmen, für welches aus den Konstruktionsplänen die Sollgeometrie nicht rekonstruiert werden konnte. Für die meisten VLBI-Radioteleskope existieren jedoch detaillierte Konstruktionspläne, sodass der Formtyp i. A. als bekannt vorausgesetzt werden darf und sich eine explizite Parametrierung nach Gl. 5.3 bzw. Gl. 5.4 empfiehlt. Fehlklassifikationen werden dadurch ausgeschlossen.

5.2 Elliptisches Ring-Fokus-Paraboloid

Ein Ring-Fokus-Paraboloid lässt sich nicht durch eine Fläche 2. Ordnung beschreiben. Es entsteht jedoch aus der Kombination zweier Flächen 2. Ordnung, einem Paraboloid und einem Zylinder. Die Hauptachse des Paraboloids wird hierbei durch den integrierten Zylinder ersetzt, der das Paraboloid im Scheitelpunkt $\mathbf{P}_0$ auseinanderzieht. Konstruktionselemente wie bspw. der Subreflektor, die sich innerhalb dieses Zylinders befinden, verschatten somit die Paraboloidoberfläche nicht. Abbildung 5.4 zeigt einen Schnitt durch ein rotationssymmetrisches Ring-Fokus-Paraboloid mit Sekundärfokus nach dem gregorianischen Prinzip, d. h., der Subreflektor befindet sich hinter dem Primärfokus. Im Gegensatz zum rotationssymmetrischen Paraboloid, welches einen einzelnen Brennpunkt $\mathbf{F}_1$ besitzt – siehe Abbildung 5.1 –, entsteht durch den integrierten Zylinder ein Kreis, auf dem alle Brennpunkte des Hauptreflektors liegen. Die Geometrie des Subreflektors lässt sich durch einen elliptischen Torus beschreiben, der das vom Hauptreflektor reflektierte Signal wiederum im Systembrennpunkt $\mathbf{F}_0$ bündelt.

Punkte, die sich auf der Oberfläche des Paraboloids befinden, erfüllen die kanonische Bedingungsgleichung (Lösler u. a. 2017, 2018a)

$$a_1^2 (x_i - r_i n_{x,i})^2 + a_2^2 (y_i - r_i n_{y,i})^2 = z_i, \quad (5.15)$$

in der nach Gl. 5.4 die Parameter a_1, a_2 die beiden formbeschreibenden Modellparameter des elliptischen Paraboloids sind. Der Abstand von der Hauptachse des Ring-Fokus-Paraboloids zur Mantelfläche des Zylinders ist r_i . Der Vektor $\mathbf{n}_i^T = (n_{x,i} \ n_{y,i} \ 0)$ ist ein auf der Hauptachse senkrecht stehender Normaleneinheitsvektor, der den Oberflächenpunkt $\mathbf{p}_i^T = (x_i \ y_i \ z_i)$ um r_i in Richtung der Hauptachse verschiebt. Hieraus resultieren Positionen $(x_i - r_i n_{x,i} \ y_i - r_i n_{y,i} \ z_i)^T$, die wiederum Gl. 5.4 erfüllen. Die Vektorkomponenten von $\mathbf{n}_i$ lauten (Lösler u. a. 2018b; Lösler 2020a)

$$n_{x,i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, \quad (5.16a)$$

$$n_{y,i} = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \quad (5.16b)$$

und stellen keine zusätzlichen Modellparameter dar.

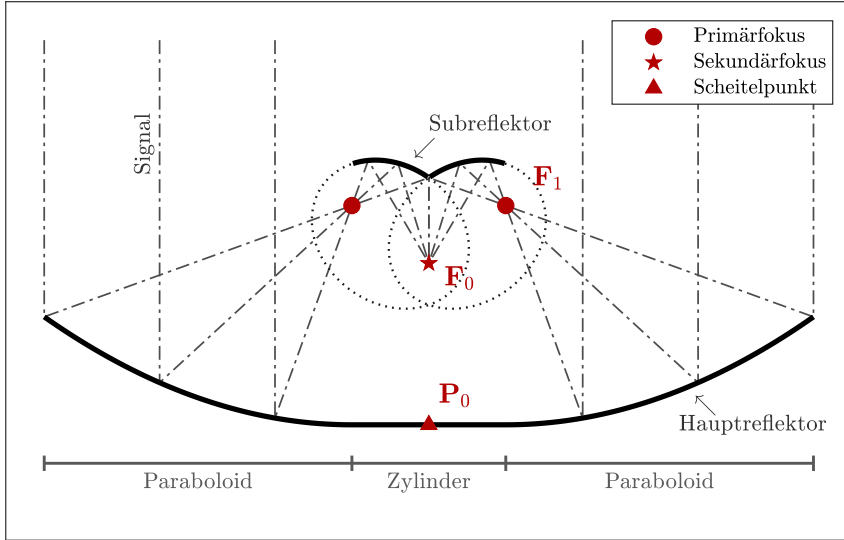


Abbildung 5.4: Schnitt durch ein Ring-Fokus-Paraboloid mit Sekundärfokus und Signalverläufen. Im Gegensatz zum rotationssymmetrischen Paraboloid, welches einen eindeutigen Primärfokus $\mathbf{F}_1$ besitzt, weist das rotationssymmetrische Ring-Fokus-Paraboloid unendlich viele Brennpunkte auf, die auf einem Kreis liegen. Im dargestellten Schnitt sind diese durch zwei rote Punkte symbolisiert. Der Subreflektor befindet sich hinter dem Brennpunkt des Hauptreflektors (gregorianische Konfiguration) und ist durch zwei Ellipsen parametrisiert, welche durch eine gepunktete schwarze Linie dargestellt sind, siehe auch Abbildung 5.6. Die Brennpunkte der Ellipsen korrespondieren zum einen mit den auf einem Kreis angeordneten Brennpunkten des Hauptreflektors und zum anderen mit dem eindeutigen Systembrennpunkt $\mathbf{F}_0$ (roter Stern). Physische Elemente des Haupt- und Subreflektors sind als durchgezogene schwarze Linien angedeutet.

Für $a_1 = a_2$ geht das integrierte elliptische Paraboloid wiederum in ein rotations-symmetrisches über, siehe die Gl. 5.3, 5.4. Der integrierte Zylinder in Gl. 5.15 ist für konstante r_i , mit $r_i > 0$, ein Kreiszylinder. Zur Berücksichtigung eines Zylinders mit elliptischer Grundfläche ist

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 m_{x,i}^2 + b_2^2 m_{y,i}^2}} \quad (5.17)$$

zu wählen, wobei b_1, b_2 die inverse große bzw. kleine Ellipsenhalfachse darstellt und

$$m_{x,i} = n_{x,i} \cos \phi + n_{y,i} \sin \phi, \quad (5.18a)$$

$$m_{y,i} = n_{y,i} \cos \phi - n_{x,i} \sin \phi. \quad (5.18b)$$

Die Orientierung der großen Halbachse des elliptischen Zylinders gegenüber der großen Halbachse des Paraboloids beschreibt hierbei der Winkel ϕ (Lösler u. a. 2018a, 2019c). Aufgrund der Integration eines elliptischen Zylinders in ein elliptisches Paraboloid beschreibt Gl. 5.15 den Allgemeinfall eines doppelelliptischen Ring-Fokus-Paraboloids, wobei alle Parabeläste radial zum Ursprung verlaufen und hierdurch einen gemeinsamen Scheitelpunkt $\mathbf{P}_0$ besitzen.

Die fünf datumsinvarianten Formparameter lauten $\mathbf{x}_{\text{SF}}^T = (a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2 \ \phi)$. Lösler u. a. (2017) zeigen, dass diese Anzahl durch geeignete Restriktionen verringert werden kann. Für die Darstellung eines rotationssymmetrischen Ring-Fokus-Paraboloids, welches i. A. der vorgesehenen Hauptreflektorgeometrie entspricht, sind

$a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ und $\phi = 0$ zu setzen. Für $r_i = 0$ verschwindet der integrierte Zylinder vollständig, sodass sich in Abhängigkeit von a_1 und a_2 unmittelbar Gl. 5.3 bzw. 5.4 ergibt. Gl. 5.15 ist demnach durch die Wahl geeigneter Parameterrestriktionen sowohl für konventionelle Radioteleskope, deren Hauptreflektor durch ein gewöhnliches rotationssymmetrisches Paraboloid beschreibbar ist, als auch für viele VGOS-spezifizierte Radioteleskope, die das verbesserte Ring-Fokus-Paraboloid verwenden, universell anwendbar. Mit Gl. 5.6 lässt sich die kanonische Darstellung in Gl. 5.15 unter Berücksichtigung von $\mathbf{x}_{\text{ISO}}^T = \begin{pmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 & \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_z \end{pmatrix}$ in ein beliebiges Datum überführen. Für das rotationssymmetrische Ring-Fokus-Paraboloid ist in Gl. 5.7 wiederum $\epsilon_z = 0$ zu setzen.

Die Schätzung der Modellparameter eines Ring-Fokus-Paraboloids erfolgt in einem impliziten funktionalen Modell $\mathbf{f}$, welches durch die Gl. 5.6, 5.15 gegeben ist. Der vollständige Vektor der Modellparameter $\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{SF}}^T & \mathbf{x}_{\text{ISO}}^T \end{bmatrix}$ lässt sich hierbei in die fünf datumsinvarianten Formparameter des Paraboloids und des Zylinders,

$$\mathbf{x}_{\text{SF}}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & \phi \end{pmatrix}, \quad (5.19a)$$

und die sechs datumsabhängigen Transformationsparameter,

$$\mathbf{x}_{\text{ISO}}^T = \begin{pmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 & \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_z \end{pmatrix}, \quad (5.19b)$$

zur Beschreibung der räumlichen Lage und Orientierung unterteilen.

Liegen beobachtete Punkte $\mathbf{P}_i$ auf der Oberfläche des Paraboloids vor, so erfolgt die Parameterbestimmung entsprechend den Ausführungen in Kapitel 3 gemäß Gl. 3.1. Liegen keine Vorinformationen bzgl. der Dispersion von $\mathbf{x}$ vor, so ist zur Spezifizierung des stochastischen Modells ausschließlich $\mathbf{W}_e$ a-priori vorzugeben. Da die Oberflächenpunkte $\mathbf{P}_i$ häufig keine direkten Beobachtungen darstellen, sondern entsprechend dem gewählten Aufnahmeverfahren bspw. aus redundanten polaren Beobachtungen bei Verwendung z. B. eines Lasertrackers resultieren oder aus photogrammetrisch erhobenen Bildkoordinaten abgeleitet werden (Baars 2007, S. 167ff), ist zur Bestimmung der Koordinaten i. A. eine Vorauswertung, d. h. eine Netzausgleichung bzw. Bündelblockausgleichung, notwendig. Für eine sachgerechte Analyse ist die hieraus resultierende Dispersionsmatrix der ausgeglichenen Oberflächenpunkte zur Bildung des stochastischen Modells bei der Parameterbestimmung des Ring-Fokus-Paraboloids heranzuziehen.

Gegenüber der geplanten geometrischen Form des Hauptreflektors stellt Gl. 5.15 eine Überparametrierung dar. Lösler u. a. (2018b) zeigen jedoch, dass hierdurch auftretende systematische Formabweichungen u. U. geometrisch interpretierbar werden. Abbildung 5.5 zeigt die resultierenden Formabweichungen ∇ für das nordöstliche Onsala Twin Teleskop (ONSA13NE), die sich aus Messungen zur Justierung der einzelnen Paneele des Hauptreflektors 2016 ergeben. Die Schätzung eines rotationssymmetrischen Ring-Fokus-Paraboloids weist geringe systematische Abweichungen in den Residuen auf, welche annähernd symmetrisch zu den Koordinatenachsen verlaufen, siehe Abbildung 5.5a. Wird die Annahme der Rotationssymmetrie, d. h.

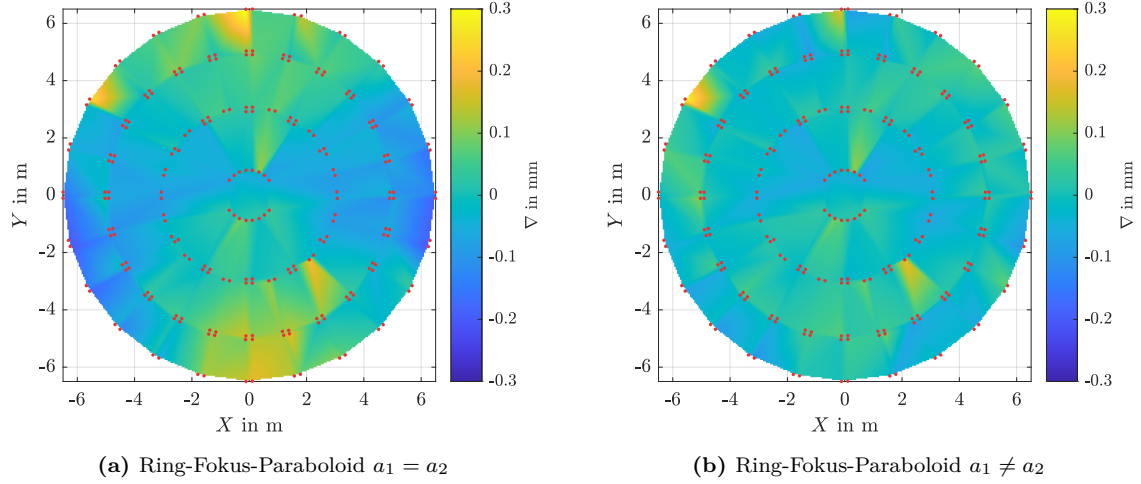


Abbildung 5.5: Gegenüberstellung der Formabweichungen ∇ eines rotationssymmetrischen Ring-Fokus-Paraboloids (a) mit $a_1 = a_2$ und eines elliptischen Ring-Fokus-Paraboloids (b) mit $a_1 \neq a_2$ für das nordöstliche Onsala Twin Teleskop (ONSA13NE). Rote Punkte symbolisieren die Positionen der 224 photogrammetrischen Marken, die 2016 vom Hersteller zur Justierung und Kontrolle der einzelnen Paneele des Hauptreflektors angebracht wurden. Die Formabweichungen sind farblich kodiert und liegen in einem Bereich von $\pm 300 \mu\text{m}$.

$a_1 = a_2$, zugunsten eines elliptischen Ring-Fokus-Paraboloid mit $a_1 \neq a_2$ verworfen, so reduzieren sich diese Formabweichungen deutlich. Systematische Abweichungen sind nicht mehr erkennbar, wie Abbildung 5.5b zeigt.

5.3 Modellierung der Variation der Strahllänge

Zur Bestimmung der Gewichtskoeffizienten in Gl. 5.2 ist neben der Illuminationsfunktion $\mathbf{I}$ die Funktion $\mathbf{h}$ bereitzustellen, die die Strahllängenänderung infolge einer Verschiebung des Empfängers bzw. des Subreflektors ΔR beschreibt. Die teleskopspezifische Illuminationsfunktion gewichtet hierbei das eintreffende Signal radialsymmetrisch in Abhängigkeit vom Abstand zur Reflektorhauptachse bzw. vom Einfallswinkel des Signals im Empfänger. Mögliche Funktionen $\mathbf{I}$ werden u. a. in (Baars 2007, S. 57ff; Abbondanza und Sarti 2010; Artz u. a. 2014) diskutiert. Da die Illuminationsfunktion teleskopspezifisch ist, wird sie nachfolgend als bekannt vorausgesetzt und ausschließlich der geometrische Anteil $\mathbf{h}$ betrachtet.

In den Abbildungen 5.1, 5.4 sind Sekundär-Fokus-Radioteleskope nach dem gregorianischen Prinzip dargestellt, d. h., der Subreflektor befindet sich hinter dem Brennpunkt des Hauptreflektors. Entspricht der Hauptreflektor einem rotationssymmetrischen Paraboloid, lässt sich der Subreflektor durch ein Rotationsellipsoid beschreiben. In kanonischer Form lautet die Gleichung für das Rotationsellipsoid (Nitschke 2018, S. 131)

$$\frac{x_i^2 + y_i^2}{A_1^2} + \frac{z_i^2}{A_2^2} = 1. \quad (5.20)$$

Hierbei bezeichnen A_1, A_2 , mit $A_1 < A_2$, die beiden Halbachsen des Rotationsellipsoids. Im dargestellten Schnitt in Abbildung 5.1 ergibt sich somit eine stehende

achsparellele Ellipse mit den korrespondierenden Halbachsen A_1, A_2 . Das Rotationsellipsoid besitzt genau zwei Brennpunkte. Der erste Brennpunkt entspricht dem Brennpunkt des Hauptreflektors $\mathbf{F}_1$ und der zweite korrespondiert mit dem Systembrennpunkt $\mathbf{F}_0$.

Ist der Hauptreflektor hingegen ein rotationssymmetrisches Ring-Fokus-Paraboloid, so existiert kein einzelner punktförmiger Primärfokus, sondern es ergeben sich unendlich viele Brennpunkte. Diese befinden sich auf dem Mantel des Zylinders und bilden demnach einen (Brenn-)Kreis mit dem Zylinderradius r . Da das Rotationsellipsoid nach Gl. 5.20 lediglich zwei Brennpunkte besitzt, ist es für die Kombination mit einem Ring-Fokus-Paraboloid ungeeignet. Um das Signal vom Brennkreis zum eindeutigen Systembrennpunkt $\mathbf{F}_0$ umzulenken, ist ein rotationssymmetrischer elliptischer Torus notwendig. Die implizite Form dieses Torus in kanonischer Form ist gegeben durch (Lösler u. a. 2019c)

$$\frac{\zeta_1^2}{A_1^2} + \frac{\zeta_2^2}{A_2^2} = 1 \quad (5.21)$$

mit

$$\zeta_1 = z_i \sin \theta + \left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - R \right) \cos \theta, \quad (5.22a)$$

$$\zeta_2 = z_i \cos \theta - \left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - R \right) \sin \theta. \quad (5.22b)$$

Der Abstand zwischen dem Mittelpunkt der elliptischen Röhre und dem Mittelpunkt des Torus ist R . Weiterhin sind A_1, A_2 die kleine und große Halbachse der elliptischen Röhre, und θ ist der Torsionswinkel dieser Röhre. Im dargestellten Schnitt in Abbildung 5.6 ergeben sich somit zwei zueinander geneigte Ellipsen mit den Halbachsen A_1, A_2 . Beide Ellipsen besitzen als gemeinsamen Brennpunkt den Systembrennpunkt $\mathbf{F}_0$, wenn die Bedingung

$$\sqrt{A_2^2 - A_1^2} \sin \theta = R \quad (5.23)$$

erfüllt ist, siehe Abbildung 5.6. Der jeweils zweite Brennpunkt $\mathbf{F}_1$ der Ellipsen fällt mit einem Brennpunkt des Ring-Fokus-Paraboloids zusammen und liegt auf dem Zylindermantel, siehe auch Abbildung 5.4. Für $\theta = 0$ wird $R = 0$, sodass Gl. 5.21 in Gl. 5.20 übergeht und ein Rotationsellipsoid beschreibt. Da jeder Punkt, dessen aufsummierte Abstände zu den Brennpunkten der Ellipse identisch mit der doppelten Länge der großen Halbachse A_2 sind, einen Punkt auf der Ellipse darstellt (Lösler und Nitschke 2010; Lösler 2020a), d. h.,

$$\|\mathbf{F}_0 \mathbf{P}_i\|_2 + \|\mathbf{F}_1 \mathbf{P}_i\|_2 = 2A_2, \quad (5.24)$$

besitzen alle reflektierten Signale identische Lauflängen.

Der Subreflektor von Radioteleskopen, die nach dem cassegrainischen Prinzip arbeiten, befindet sich vor dem Brennpunkt des Hauptreflektors, siehe Abbildung 5.2.

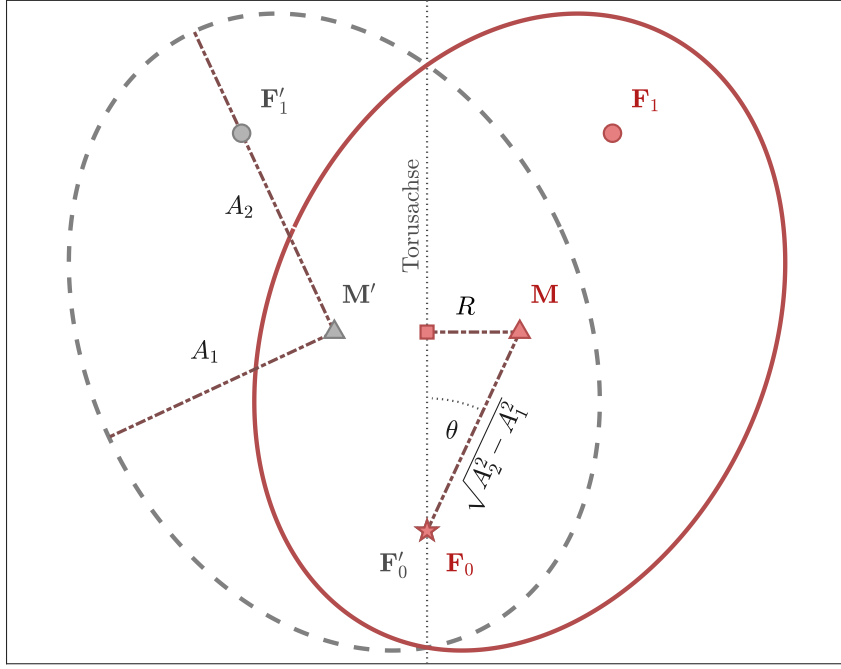


Abbildung 5.6: Schematische Darstellung der Geometrie des Subreflektors als Schnitt durch einen rotationssymmetrischen elliptischen Torus. Die beiden resultierenden Ellipsen sind rot bzw. grau dargestellt. Aus der Rotation der roten Ellipse um die Hauptachse des Torus resultiert die graue Ellipse. Der Ellipsenmittelpunkt $\mathbf{M}$ ist als rotes Dreieck, der Primärfokus $\mathbf{F}_1$ als roter Kreis und der Sekundärfokus $\mathbf{F}_0$ als roter Stern dargestellt. Dieselben Größen sind nach der Rotation um die Torusachse in Grau dargestellt und mit einem Hochstrich versehen. Ein rotes Quadrat symbolisiert den Mittelpunkt des Torus. Der Drehwinkel der Ellipse ist θ . Die beiden Halbachsen der Ellipse A_1 , A_2 , die lineare Exzentrizität $\sqrt{A_2^2 - A_1^2}$ und der Abstand zwischen der Torusachse und dem Ellipsenmittelpunkt R sind als Strichpunktlinie dargestellt. Der Abstand R erfüllt in dieser Darstellung die Bedingung in Gl. 5.23, sodass sich $\mathbf{F}'_0 = \mathbf{F}_0$ ergibt.

Entspricht der Hauptreflektor einem rotationssymmetrischen Paraboloid, beschreibt die geometrische Form des Subreflektors ein zweischaliges Rotationshyperboloid. Bezeichnen A_1 , A_2 , mit $A_1 < A_2$, wiederum die beiden Halbachsen, ergibt sich das zweischalige Rotationshyperboloid in kanonischer Form zu (Nitschke 2018, S. 131)

$$-\frac{x_i^2 + y_i^2}{A_1^2} + \frac{z_i^2}{A_2^2} = 1. \quad (5.25)$$

Analog zum Rotationsellipsoid nach Gl. 5.20 besitzt das Rotationshyperboloid in Gl. 5.25 genau zwei Brennpunkte. Der erste Brennpunkt ist identisch mit dem Brennpunkt $\mathbf{F}_1$ des Hauptreflektors, und der zweite entspricht dem Systembrennpunkt $\mathbf{F}_0$. Aufgrund der Rotationssymmetrie entsteht im dargestellten Schnitt eine stehende achsparallele Hyperbel.

Entspricht der Hauptreflektor einem rotationssymmetrischen Ring-Fokus-Paraboloid, so ist die Ellipsengleichung in Gl. 5.21 durch die Gleichung einer Hyperbel (Nitschke 2018, S. 120),

$$-\frac{\zeta_1^2}{A_1^2} + \frac{\zeta_2^2}{A_2^2} = 1, \quad (5.26)$$

zu ersetzen. Mit den Gl. 5.22 ergeben sich wiederum die Substituierten ζ_1 , ζ_2 . Anstelle der beiden in Abbildung 5.4 dargestellten Ellipsen ergeben sich in einer Schnittdarstellung zwei zueinander geneigte Hyperbeln, die unter der Bedingung nach Gl. 5.23

den Systembrennpunkt $\mathbf{F}_0$ wiederum als gemeinsamen Brennpunkt besitzen. Der jeweils zweite Brennpunkt $\mathbf{F}_1$ ist identisch mit einem Brennpunkt des Hauptreflektors. Für $\theta = 0$ wird $R = 0$, und Gl. 5.26 geht in Gl. 5.25 über und beschreibt ein Rotationshyperboloid.

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Subreflektors kann die Bestimmung der Strahllängenänderung h aufgrund einer Variation ΔR durch eine zweidimensionale Darstellung vereinfacht werden. Cha (1987) approximiert für Radioteleskope, die nach dem cassegrainischen Prinzip konfiguriert sind, die resultierende Längenänderung des Strahls durch ein gleichschenkliges Dreieck. Diese Herleitung lässt sich direkt auf Radioteleskope mit gregorianischer Konfiguration übertragen, sodass diese ebenfalls für die meisten VGOS-spezifizierten Radioteleskope anwendbar ist (Lösler u. a. 2019c).

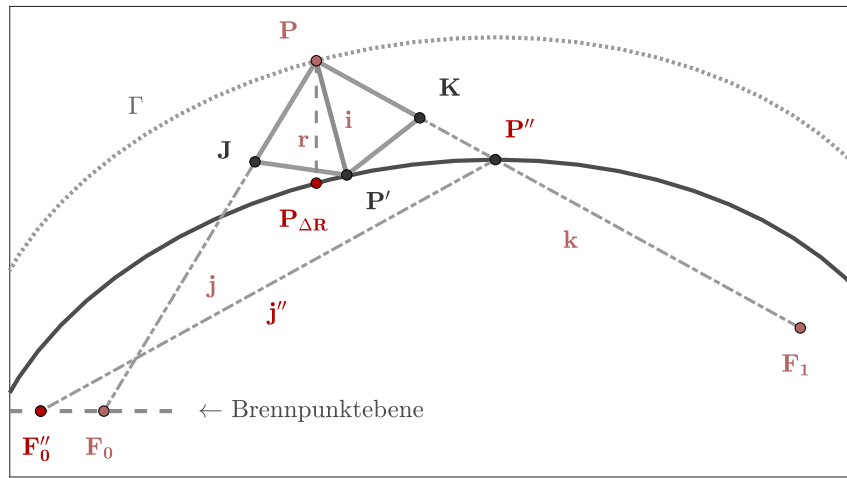


Abbildung 5.7: Schematische Darstellung des Signalweges der rechten Hälfte des Subreflektors Γ eines Ring-Fokus-Paraboloids. Der dunkelgrau gepunktete Ellipsenbogen des Subreflektors mit den beiden Brennpunkten $\mathbf{F}_0$ und $\mathbf{F}_1$ wird aufgrund der Gravitation verschoben und mündet in den Ellipsenbogen, der durch eine schwarze durchgezogene Linie symbolisiert ist. Der Reflektionspunkt $\mathbf{P}$ wird um ΔR in Richtung $\mathbf{r}^T = (0 \ -1)$ verschoben und mündet in $\mathbf{P}_{\Delta R}$. Der Punkt $\mathbf{P}'$ repräsentiert die projizierte Position von $\mathbf{P}_{\Delta R}$ auf den Gradientenvektor $\mathbf{i}$ von Γ im Reflektionspunkt $\mathbf{P}$. Die Punkte $\mathbf{K}$ und $\mathbf{J}$ sind Projektionen von $\mathbf{P}'$ auf den Vektor des einfallenden Strahls $\mathbf{k}$ bzw. des ausgehenden Strahls $\mathbf{j}$. Die Vektoren $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ und $\mathbf{r}$ sind Einheitsvektoren.

Abbildung 5.7 zeigt einen Ausschnitt der rechten Hälfte des Subreflektors eines Ring-Fokus-Paraboloids. Der Ellipsenbogen Γ , der die Brennpunkte $\mathbf{F}_0$ und $\mathbf{F}_1$ besitzt, ist dunkelgrau gepunktet dargestellt. Der einfallende Strahl verläuft durch den Brennpunkt $\mathbf{F}_1$ in Richtung $\mathbf{k}$ und berührt den Ellipsenbogen im Punkt $\mathbf{P}$. In $\mathbf{P}$ wird dieser Strahl in Richtung $\mathbf{j}$ zum zweiten Brennpunkt $\mathbf{F}_0$ reflektiert. Verschiebt sich der Subreflektor um ΔR in Richtung $\mathbf{r}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$, so ergibt sich $\mathbf{P}_{\Delta R}$ auf dem verschobenen Ellipsenbogen, der durch eine schwarze durchgezogene Linie abgebildet ist. Da die Verschiebung des Subreflektors ΔR im Verhältnis zur Dimension des Subreflektors sehr klein ist, d. h. $\Delta R \ll \sqrt{A_2^2 - A_1^2}$, kann die Signalwegänderung durch

$$h(\mathbf{P}) = \|\mathbf{PK}\|_2 + \|\mathbf{PJ}\|_2 = 2\Delta R (\mathbf{r}^T \mathbf{i}) (\mathbf{i}^T \mathbf{k}). \quad (5.27)$$

approximiert werden (Cha 1987). Hierbei sind die beiden Punkte $\mathbf{K}$ und $\mathbf{J}$ die Projektionen von $\mathbf{P}'$ auf den Vektor des einfallenden Strahls $\mathbf{k}$ bzw. des ausgehenden

Strahls $\mathbf{j}$, und $\mathbf{P}'$ stellt die projizierte Position von $\mathbf{P}_{\Delta R}$ auf dem Gradientenvektor $\mathbf{i}$ von Γ im Reflektionspunkt $\mathbf{P}$ dar.

Artz u. a. (2014) schlagen eine weitere Möglichkeit zur Approximation der Weglängenänderung vor, indem sie die in Gl. 5.24 gegebene geometrische Definition der Ellipse auf die um ΔR verschobene Ellipse anwenden. Die resultierende Weglängenänderung

$$\mathbf{h}'(\mathbf{P}) = \|\mathbf{F}_0''\mathbf{P}''\|_2 + \|\mathbf{F}_1\mathbf{P}''\|_2 - 2A_2 \quad (5.28)$$

ergibt sich hierbei aus dem Abstand des tatsächlichen Reflektionspunktes $\mathbf{P}''$ zu den beiden Brennpunkten $\mathbf{F}_0''$ bzw. $\mathbf{F}_1$. Durch die Verschiebung ΔR endet, wie in Abbildung 5.7 dargestellt, der in $\mathbf{P}''$ reflektierte Strahl nicht in $\mathbf{F}_0$, sodass der Schnittpunkt $\mathbf{F}_0''$ mit der Ebene gewählt wird, in der der Systembrennpunkt liegt (Artz u. a. 2014).

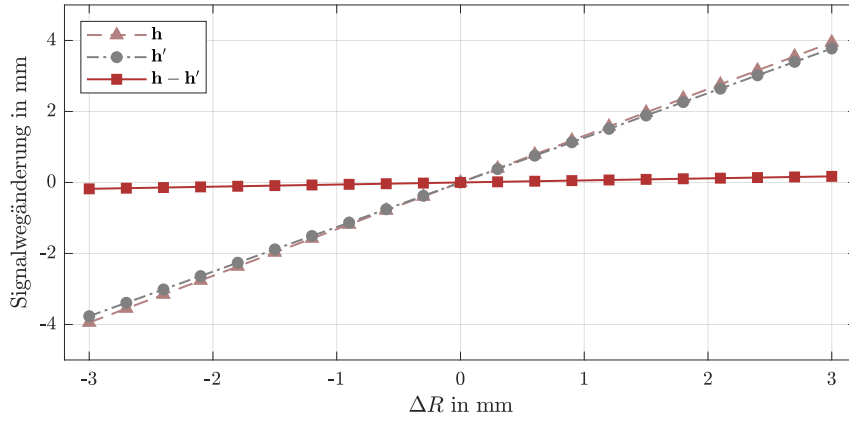


Abbildung 5.8: Vergleich der resultierenden Strahllängenänderungen in Abhängigkeit von ΔR . Während die Längenänderungen nach Gl. 5.27 durch hellrote Dreiecke dargestellt sind, symbolisieren graue Kreise die resultierenden Änderungen nach Gl. 5.28. Die Differenz $\mathbf{h}(\mathbf{P}) - \mathbf{h}'(\mathbf{P})$ zwischen beiden Verläufen ist rot dargestellt. Der Einfallswinkel im Empfänger beträgt 20° .

Unter Berücksichtigung der geometrischen Parameter des Subreflektors des nord-östlichen Onsala Twin Teleskops (ONSA13NE) sind in Abbildung 5.8 für verschiedene ΔR die aus Gl. 5.27 und Gl. 5.28 resultierenden Signalwegänderungen gegenübergestellt. Der verwendete Einfallswinkel

$$\cos \gamma = \mathbf{r}^T \mathbf{j}'' \quad (5.29)$$

beträgt 20° . Die Verläufe der resultierenden Strahllängenänderungen sind praktisch identisch. Die maximale Abweichung $|\mathbf{h}(\mathbf{P}) - \mathbf{h}'(\mathbf{P})|$ ist $< 0,2$ mm und ergibt sich für $\Delta R = -3$ mm. Die von Lösler u. a. (2019c) aus photogrammetrischen Daten abgeleitete Variation für dieses Radioteleskop beträgt lediglich $\Delta R = 0,6$ mm und ist somit fünfmal kleiner als im Maximum in Abbildung 5.8 angenommen. Für $\Delta R = 0,6$ mm ergibt sich eine Differenz von $\ll 50$ μm .

Abbildung 5.9 stellt die Differenz $\mathbf{h}(\mathbf{P}) - \mathbf{h}'(\mathbf{P})$ in Abhängigkeit des Einfallswinkels γ für drei verschiedene ΔR dar. Die größten Differenzen sind für 65° zu erkennen. Dies entspricht dem maximal möglichen Einfallswinkel für ONSA13NE

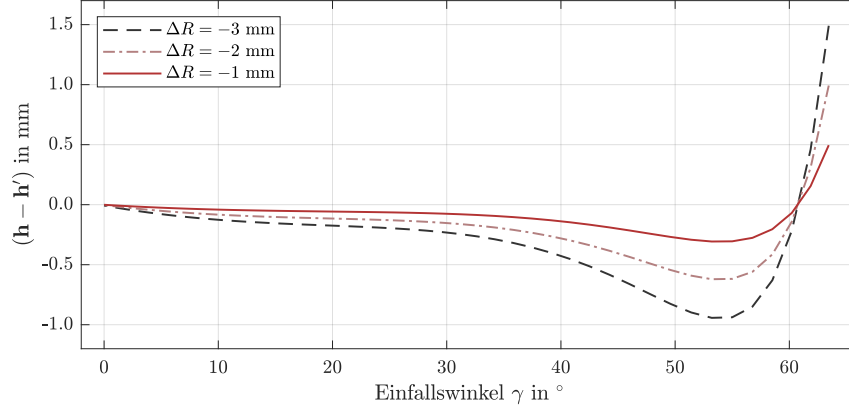


Abbildung 5.9: Differenz $h(\mathbf{P}) - h'(\mathbf{P})$ in Abhängigkeit des Einfallswinkels γ für drei verschiedene ΔR , d. h. $\Delta R = -3$ mm (schwarz gestrichelte Linie), $\Delta R = -2$ mm (hellrote Strichpunktlinie) und $\Delta R = -1$ mm (dunkelrote durchgezogene Linie).

(persönliche Mitteilung, Jonas Flygare, 2018), der sich für Strahlen ergibt, die direkt am Zylinderrand auf das Ring-Fokus-Paraboloid treffen, siehe Abbildung 5.4. Für $\gamma < 60^\circ$ und $\Delta R = -1$ mm sind die (absoluten) Differenzen jedoch stets $\ll 0,5$ mm. Die Differenzen im Randbereich resultieren aus den unterschiedlichen Modellierungen der Strahllängenänderungen. In Gl. 5.27 wird diese Längenänderung durch ein Hilfsdreieck approximiert, wobei weiterhin unterstellt wird, dass der reflektierte Strahl im Systembrennpunkt $\mathbf{F}_0$ endet. Wie Abbildung 5.7 zeigt, ist dies geometrisch nur für $\gamma = 0^\circ$ möglich, wenn $\Delta R \neq 0$. Durch die Verwendung der Ellipsengleichung beschreibt Gl. 5.28 den geometrischen Verlauf des Strahls im Subreflektor. Die Bedingung, dass der reflektierte Strahl im Systembrennpunkt endet, wird hierbei jedoch verworfen.

Zur Bildung des Integrals in Gl. 5.2c werden die aus h resultierenden Funktionswerte mit der teleskopspezifischen (normierten) Illuminationsfunktion I_n gewichtet. Die Illuminationsfunktion für ONSA13NE ist eine Gauß-Funktion, die mit ansteigendem Winkel γ das Signal heruntergewichtet. In Abbildung 5.10 ist der Verlauf der normierten Illuminationsfunktion in Abhängigkeit vom Einfallswinkel γ für ONSA13NE dargestellt. Da die gewichtete Strahllänge für $\gamma > 50^\circ$ praktisch vernachlässigt werden kann, sind die in Abbildung 5.9 dargestellten Differenzen für $\gamma > 50^\circ$ unkritisch. Zur Modellierung der Längenänderung des Strahls sind Gl. 5.27 und Gl. 5.28 gleichermaßen geeignet.

Für Radioteleskope, die nach dem cassegrainischen Prinzip konstruiert sind, kann zur Beschreibung der Strahllängenänderung Gl. 5.27 direkt übernommen werden (Cha 1987; Abbondanza und Sarti 2010). In Analogie zu Gl. 5.28 kann alternativ zur Beschreibung der Strahllängenänderung auf die Definition einer Hyperbel zurückgegriffen werden (Nitschke 2018, S. 120),

$$||\mathbf{F}_0\mathbf{P}_i||_2 - ||\mathbf{F}_1\mathbf{P}_i||_2 = 2A_2. \quad (5.30)$$

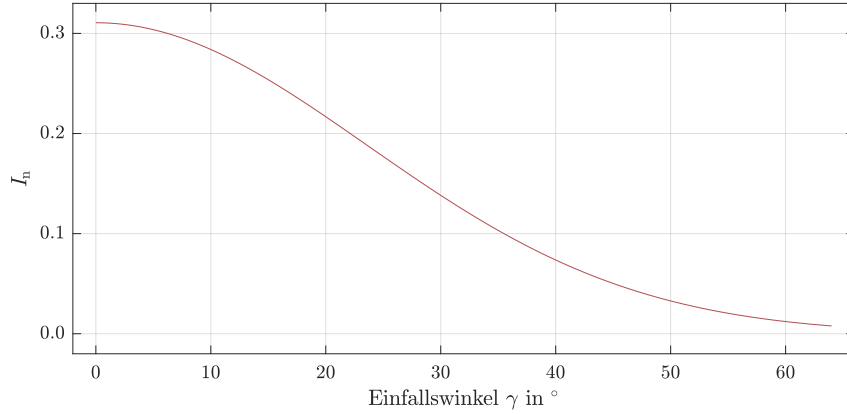


Abbildung 5.10: Normierte Illuminationsfunktion I_n für ONSA13NE in Abhängigkeit vom Einfallswinkel γ .

5.4 Verzerrung der Schätzwerte eines Ring-Fokus-Paraboloids

Um den Einfluss der Nichtlinearität auf die geschätzten Formparameter eines rotationssymmetrischen Ring-Fokus-Paraboloids abzuschätzen, werden die Modellparameter aus einer 100 Punkte umfassenden synthetischen Stichprobe abgeleitet. Die Punkte sind auf fünf konzentrischen Kreisen zu je 20 Punkten angeordnet. Sowohl der Abstand zwischen den Kreispunkten eines Kreises als auch der Abstand zwischen den Kreisen ist jeweils äquidistant. Abbildung 5.11 zeigt die gewählte Punktkonfiguration, welche häufig auch zur Justierung der einzelnen Paneele, aus denen sich der Hauptreflektor zusammensetzt, verwendet wird. In Anlehnung an bereits bestehende VGOS-spezifizierte Radioteleskope (Haas 2013; López-Fernández u. a. 2014; Schüler u. a. 2015) wird eine Brennweite von $F = 3,7$ m und ein Zylinderradius von $r = 0,74$ m gewählt.

Zur Bildung der a-priori Dispersionsmatrix wird aufgrund der unterschiedlichen Erfassungsmethoden (Baars 2007, S. 152ff) auf die in Gl. 4.32 eingeführte Taylor-Karman-Strukturmatrix $\mathbf{K}$ zurückgegriffen. Die charakteristische Distanz zur Bildung von $\mathbf{K}$ ergibt sich mittels Gl. 4.34 zu $d_c \approx 33$ cm. Diese Matrix wird mit elf verschiedenen Varianzfaktoren σ_0^2 skaliert und als stochastisches Modell bei der Parameterschätzung berücksichtigt. Diese Untersuchung entspricht somit einem Vergleich zwischen Instrumenten, die ein vergleichbares Messprinzip aufweisen, aber durch unterschiedliche Genauigkeitsklassen gekennzeichnet sind, wie bspw. eine Totalstation und ein Lasertracker. Ein rotationssymmetrisches Ring-Fokus-Paraboloid besitzt nur zwei datumsinvariante Parameter, die Brennweite F und den Zylinderradius r , sodass nachfolgend nur die Ergebnisse dieser beiden Formparameter betrachtet werden.

In Abbildung 5.12 sind die Schätzwerte für die beiden Formparameter $\hat{F}$ bzw. $\hat{r}$ sowie die resultierenden Parameterunsicherheiten in Abhängigkeit des Varianzfaktors σ_0^2 für die Taylorreihe mit Gliedern 1. Ordnung, die Taylorreihe mit Gliedern 2. Ordnung sowie für die Unscented Transformation und die Monte-Carlo-Methode

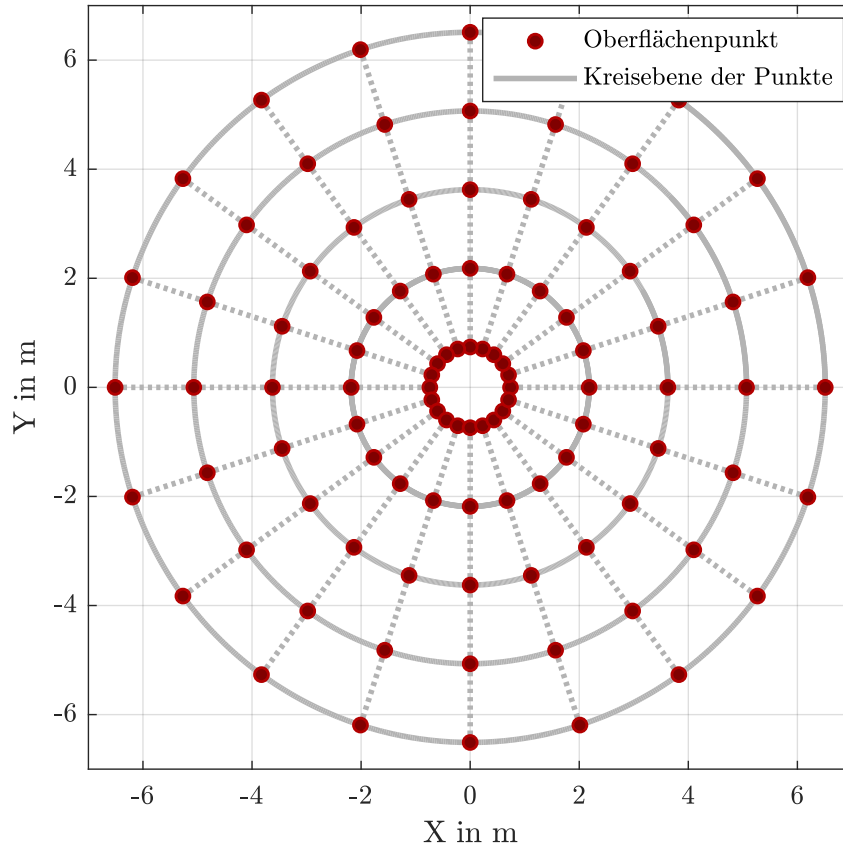


Abbildung 5.11: Verteilung der synthetisch erzeugten Stichprobe, bestehend aus fünf konzentrischen Kreisen mit jeweils 20 Punkten. Der integrierte Zylinder weist einen Radius von $r = 0,74$ m auf, und die Brennweite des Paraboloids beträgt $F = 3,7$ m. Der Durchmesser des Ring-Fokus-Paraboloids beträgt etwa 13 m und entspricht somit der Größenordnung eines VGOS-spezifizierten Radioteleskops.

dargestellt. Die MCM wurde mit einem Stichprobenumfang von $m_{\text{MCM}} = 5 \cdot 10^5$ durchgeführt. Da die MCM-Lösung asymptotisch gegen den wahren Wert strebt, kann diese als Referenzlösung zur Bewertung der anderen Verfahren verwendet werden.

Erwartungsgemäß steigen die Unsicherheiten der geschätzten Formparameter mit zunehmenden σ_0 an, wie an den dargestellten Konfidenzintervallen zu erkennen ist. Die Differenzen zwischen der geschätzten Unsicherheit der Monte-Carlo-Methode und den anderen Verfahren liegt auch für $\sigma_0 = 1$ cm bei maximal 1 %, sodass die Verzerrung der geschätzten Dispersion hier praktisch vernachlässigt werden kann. Dem stehen die Verzerrungen der beiden Formparameter aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs in Gl. 5.15 gegenüber. Die TS1-Resultate sind unabhängig vom gewählten σ_0 . Im Gegensatz dazu führt die TS2-Lösung, welche zusätzlich den quadratischen Term in der Taylorreihenentwicklung berücksichtigt, in Abhängigkeit von σ_0 zu einem kleiner werdenden Wert für die Brennweite F bzw. zu einem größer werdenden Wert für den geschätzten Zylinderradius r , siehe Abbildung 5.12. Die Differenz zwischen der TS1- und der TS2-Lösung beträgt bei $\sigma_0 = 1$ cm etwa $\hat{F}_{\text{TS1}} - \hat{F}_{\text{TS2}} = 0,7$ mm bzw. $\hat{r}_{\text{TS1}} - \hat{r}_{\text{TS2}} = -0,5$ mm.

Tabelle 5.1 stellt die Differenzen zwischen der MCM und den Ergebnissen der TS1, der TS2 sowie der UT gegenüber. Differenzen zwischen den Ergebnissen der UT und der TS2 sind im dargestellten Stellenbereich nicht vorhanden. Die Abweichun-

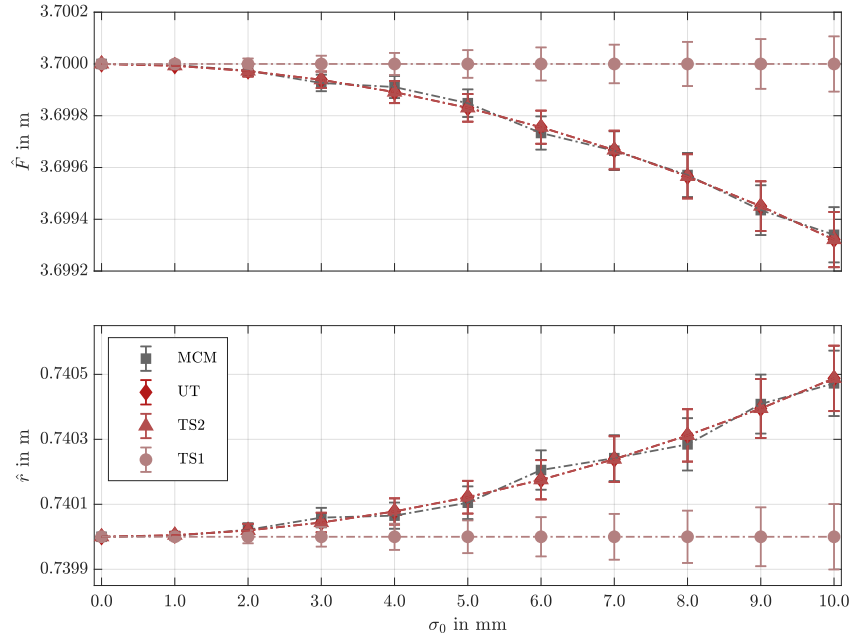


Abbildung 5.12: Resultierende Brennweiten $\hat{F}$ (oben) und Zylinderradien $\hat{r}$ (unten) des Ring-Fokus-Paraboloids für unterschiedlich gewählte Varianzfaktoren σ_0^2 . Die Lösungen der MCM, UT, TS2 und TS1 sind durch graue Quadrate, dunkelrote Rauten, rote Dreiecke bzw. hellrote Kreise symbolisiert. Die dargestellten Konfidenzintervalle (1σ) sind im Maßstab 250 : 1 geplottet, um Überlagerungen zu vermeiden.

gen zwischen der MCM und der UT bzw. der TS2 sind $\ll 50 \mu\text{m}$ und variieren im Vorzeichen. Diese Differenzen sind hier im Wesentlichen auf die generierten Pseudozufallszahlen zurückzuführen, die einem numerisch exakt reproduzierbaren Ergebnis entgegenstehen, siehe Abschnitt 2.4. Weiterhin beschreibt die TS2 ein quadratisches Ersatzproblem, welches Terme höherer Ordnung vernachlässigt. Aufgrund der geringen Differenzen zwischen der MCM und der TS2 erscheint das Berücksichtigen von Termen höherer Ordnung jedoch unnötig und motiviert den Abbruch nach dem quadratischen Glied.

Die Größe, mit der sich die Verzerrung in den Schätzwerten zeigt, wird bei gegebenem funktionalem Modell durch das stochastische Modell gesteuert. Präzisere Messungen sind daher grundsätzlich zu bevorzugen, um die Verzerrung der Schätzwerte zu reduzieren.

Im Folgenden soll untersucht werden, ob eine Erhöhung der Anzahl der Beobachtungen die Verzerrung der Schätzwerte teilweise oder gar vollständig kompensieren kann. Heinz u. a. (2019) evaluieren Messungen von terrestrischen Laserscannern auf ebene Zielzeichen mit unterschiedlichen Abtastraten am Objekt und variierenden Messunsicherheiten. Sowohl die Erhöhung der Diskretisierung am Objekt als auch die Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses führt zu einer Steigerung des Messaufwandes – insbesondere der Messzeit. Heinz u. a. (2019) zeigen exemplarisch, dass die Dispersion der geschätzten Modellparameter durch eine Erhöhung der Abtastrate schneller reduziert wird als durch eine Verbesserung des Signal-Rausch-Verhaltens bei gleicher Messzeit. Anstelle die Messunsicherheiten der Einzelmessung zu reduzieren und somit das Signal-Rausch-Verhältnis zu verbessern, wird eine Erhöhung der Dis-

Tabelle 5.1: Resultierende Differenzen (Bias) zwischen der MCM und den Lösungen der TS1, der TS2 sowie der UT für die beiden Formparameter eines Ring-Fokus-Paraboloids, die Brennweite $\hat{F}$ (links) und den Zylinderradius $\hat{r}$ (rechts), in Abhängigkeit des Varianzfaktors σ_0^2 . Alle Werte sind in mm angegeben.

σ_0	Brennweite $\hat{F}$			Radius $\hat{r}$		
	TS1	TS2	UT	TS1	TS2	UT
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,03	0,00	0,00	-0,02	0,00	0,00
3	0,07	0,01	0,01	-0,06	-0,02	-0,02
4	0,09	-0,02	-0,02	-0,07	0,01	0,01
5	0,15	-0,02	-0,02	-0,10	0,02	0,02
6	0,27	0,02	0,02	-0,21	-0,03	-0,03
7	0,34	0,00	0,00	-0,24	0,00	0,00
8	0,43	-0,01	-0,01	-0,28	0,03	0,03
9	0,56	0,02	0,02	-0,41	-0,01	-0,01
10	0,66	-0,02	-0,02	-0,47	0,02	0,02

kreisierung empfohlen. Wie stark die Modellparameter aufgrund des ungünstigeren Signal-Rausch-Verhältnisses verzerrt werden, untersuchen die Autoren nicht.

Um im Kontext der Schätzung eines rotationssymmetrischen Ring-Fokus-Paraboloids zu untersuchen, ob eine Erhöhung der Diskretisierung die Verzerrung der Schätzwerte reduziert oder möglicherweise eliminiert, wird die Anzahl der in Abbildung 5.11 dargestellten konzentrischen Kreise variiert. Beginnend bei vier Kreisen wird die Anzahl kontinuierlich erhöht, bis 75 Kreise erreicht sind. Die Anzahl der Punkte pro Kreis beträgt wiederum 20, sodass zur Parameterschätzung zwischen 80 und 1 500 Punkte zur Verfügung stehen. In diesem Zusammenhang soll weiterhin untersucht werden, wie stark sich eine mögliche Vereinfachung bei der Formulierung des stochastischen Modells auf die Schätzwerte auswirkt.

In dieser Simulation wird das stochastische Modell der Punkte mittels Gl. 4.32 durch eine Taylor-Karman-Strukturmatrix $\mathbf{K}$ als zutreffend angenommen. Durch das Hinzufügen weiterer Oberflächenpunkte verringert sich der radiale Punktabstand und somit die charakteristische Distanz d_c nach Gl. 4.34. Wie Abbildung 4.8 zeigt, definiert die charakteristische Distanz die abstandsabhängige Korrelation zwischen den Koordinatenkomponenten und somit die resultierende Dispersionsmatrix. Eine Erhöhung der Punktzahl würde aufgrund der unterschiedlichen charakteristischen Distanzen zusätzlich eine strukturelle Änderung in der resultierenden Dispersion hervorrufen. Mögliche Änderungen in den geschätzten Formparametern könnten somit nicht zweifelsfrei der erhöhten Punktzahl zugeordnet werden. Aus diesem Grund, und um Vergleichbarkeit zu den bereits in Abbildung 5.12 bzw. Tabelle 5.1 dargestellten Resultaten herzustellen, wird die charakteristische Distanz zur Bildung von $\mathbf{K}$ einheitlich mit $d_c \approx 33$ cm gewählt. Dies entspricht der charakteristischen Distanz für fünf konzentrische Kreise, siehe Abbildung 5.11.

Eine übliche Vereinfachung im stochastischen Modell besteht darin, die stochastischen Abhängigkeiten zwischen den Beobachtungen zu vernachlässigen und lediglich die Hauptdiagonalelemente der ursprünglich vollbesetzten Dispersionsmatrix zu berücksichtigen (Jäger u. a. 2005, S. 211f). Die Hauptdiagonale der Taylor-Karman-Strukturmatrix ist eine Einheitsmatrix $\mathbf{I}$. Das als zutreffend angenommene stochastische Modell ergibt sich zu $\sigma_0 \mathbf{K}$. Das durch Vernachlässigung der stochastischen Abhängigkeiten entstehende vereinfachte stochastische Modell lautet $\sigma_0 \mathbf{I}$. In beiden Fällen wird mit $\sigma_0 = 5 \text{ mm}$ ein identischer Varianzfaktor gewählt. Aufgrund der hohen Übereinstimmung zwischen der Monte-Carlo-Methode, der Unscented Transformation und der Taylorreihe mit Gliedern 2. Ordnung für $\sigma_0 \leq 1 \text{ cm}$, siehe Abbildung 5.12, werden im Folgenden ausschließlich die TS1- bzw. TS2-Ergebnisse betrachtet.

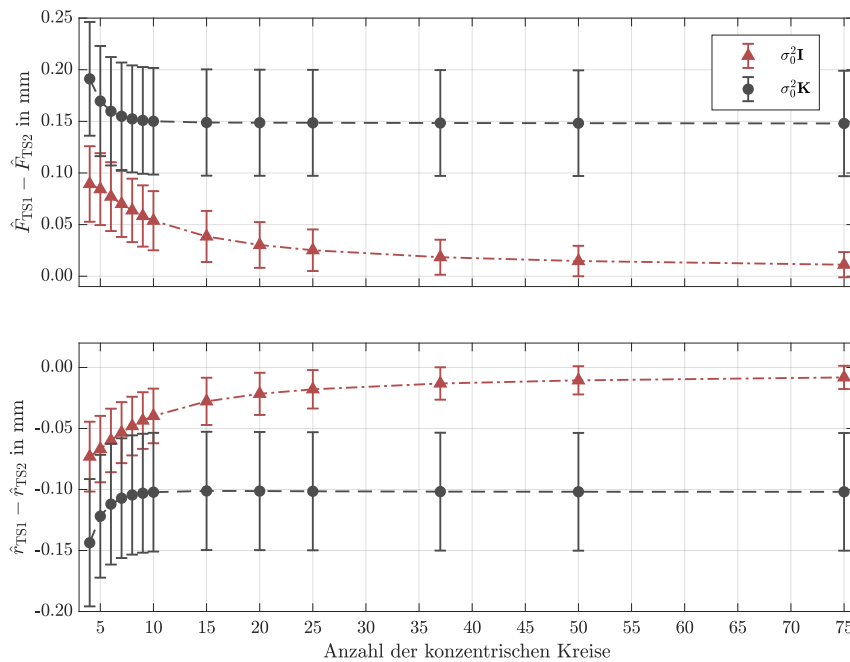


Abbildung 5.13: Differenz zwischen den TS1- und TS2-Ergebnissen für die Modellparameter $\hat{F}$ (oben) und $\hat{r}$ (unten) in Abhängigkeit der Anzahl der konzentrischen Kreise. Da jeder Kreis aus 20 äquidistanten Punkten besteht, ergeben sich Konfigurationen zwischen 80 und 1500 Punkten. Grau dargestellt sind die Ergebnisse, die sich unter Verwendung der Einheitsmatrix als stochastisches Modell ergeben. Für das stochastische Modell mittels Taylor-Karman-Strukturmatrix ergeben sich die rot dargestellten Resultate. Die Konfidenzintervalle (1σ) ergeben sich aus der Taylorreihe mit Gliedern 2. Ordnung. Diese sind im Maßstab 250 : 1 geplottet, um Überlagerungen zu vermeiden.

Abbildung 5.13 zeigt die ermittelten Differenzen zwischen der TS1- und TS2-Lösung für die Brennweite F und den Zylinderradius r . Die dargestellten Konfidenzintervalle entstammen der TS2-Lösung. Der Unterschied zur TS1-Lösung kann hier wiederum vernachlässigt werden, siehe auch Abbildung 5.12. Erwartungsgemäß reduzieren sich die geschätzten Unsicherheiten der beiden Modellparameter mit steigender Punktzahl. Deutlich zu erkennen ist jedoch, dass diese Reduzierung sehr stark vom stochastischen Modell abhängt. Während sich für das vereinfachte stochastische Modell mit Einheitsmatrix die Parameterunsicherheiten um mehr als 60 % verringern, ist die Verringerung um $<10\%$ bei Verwendung der Taylor-Karman-Strukturmatrix praktisch vernachlässigbar. Zu beachten ist, dass diese große Differenz nicht aus der

Anwendung der Taylorreihe mit Gliedern 2. Ordnung resultiert, sondern ausschließlich auf die Struktur der Dispersionsmatrix im stochastischen Modell zurückzuführen ist. Die Verwendung einer skalierten Einheitsmatrix ist in der Praxis gebräuchlich, stellt aber i. A. eine sehr starke Vereinfachung der tatsächlichen Dispersion der Beobachtungen dar. Insbesondere das Vernachlässigen von algebraischen Korrelationen, die bei der Umformung von Elementarbeobachtungen in abgeleitete Beobachtungen entstehen, z. B. der nichtlinearen Umformung von Strecke und Richtung in kartesische Koordinaten, führt zu einer Verfälschung der abgeschätzten Parameterunsicherheiten und hieraus abgeleiteten Qualitätsmerkmalen (Zhao u. a. 2019). Jäger u. a. (2005, S. 214) sprechen in diesem Zusammenhang auch von einer „scheinbaren Genauigkeit“ der geschätzten Parameter.

Die Verzerrung der Modellparameter ist sowohl abhängig von der Anzahl als auch von der Dispersion der Punkte. Die in Abbildung 5.13 dargestellten Differenzen weisen unabhängig von der Wahl des stochastischen Modells sehr ähnliche Verläufe auf. Das Hinzunehmen von weiteren Beobachtungen reduziert gerade am Anfang das Bias der Modellparameter deutlich. Mit zunehmender Anzahl an beobachteten Punkten weisen die Kurven jedoch einen asymptotischen Verlauf auf, sodass eine weitere Erhöhung unökonomisch wird. So bleiben die Ergebnisse, die mittels Taylor-Karman-Strukturmatrix erzielt werden, ab zehn konzentrischen Kreisen praktisch unverändert bei etwa 0,15 mm für die Brennweite bzw. etwa $-0,1$ mm für den Zylinderradius. Um das Bias zu reduzieren, ist eine Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses gegenüber der Erhöhung der Diskretisierung daher vorzuziehen. Ähnliche Ergebnisse konnten Lösler u. a. (2020) auch für die Schätzung einer Regressionsebene erzielen.

Werden die fünf konzentrischen Kreise mit jeweils 20 Punkten durch eine zweite unabhängige Messung mit $\sigma_0 = 5$ mm erneut aufgenommen, so reduziert sich das Bias für die Brennweite und den Zylinderradius auf $\hat{F}_{TS1} - \hat{F}_{TS2} = 0,09$ mm bzw. $\hat{r}_{TS1} - \hat{r}_{TS2} = -0,06$ mm. Wie Tabelle 5.1 zeigt, sind diese Ergebnisse vergleichbar mit den Resultaten für $\sigma_0 = 4$ mm. Dies lässt sich auch aus der Varianz des Mittelwertes

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{m}$$

näherungsweise ablesen, da $4 \text{ mm} \approx \sqrt{\frac{(5 \text{ mm})^2}{2}}$. Dass eine Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses im Hinblick auf eine geringe Verzerrung der Schätzwerte zu favorisieren ist, wird hierdurch noch einmal unterstrichen. Die unabhängige Doppelmessung führt zu einer Registrierung von lediglich 200 Punktbeobachtungen. Diese reduziert die Parameterverzerrung jedoch stärker als bei Verwendung von bspw. 1 500 Punkten, wie Abbildung 5.13 zeigt. Die Doppelmessung ist somit ökonomischer. Dass die ausschließliche Erhöhung der Diskretisierung das Bias nicht maßgeblich reduziert, lässt sich mit Abbildung 2.4 unmittelbar nachvollziehen. Die hier grau dargestellten Einzelrealisierungen der durchgeführten Monte-Carlo-Methode formen den Kreisbogen. Die resultierende Schätzung der kartesischen Koordinatenkomponenten muss daher, unabhängig von der Anzahl der Beobachtungen, stets innerhalb des Kreises liegen. Die Bogenlänge dieses Kreises resultiert ausschließlich aus der Unsicherheit

der Winkelmessung und nicht aus dem Umfang der Stichprobe. Je höher folglich die Genauigkeit der Winkelmessung ist, desto geringer ist das Bias der Schätzung.

Neben der zu optimistischen Schätzung der Parameterdispersion führen die Vernachlässigungen im stochastischen Modell hier zu einer deutlichen Unterschätzung des Parameterbias. Die Hauptdiagonalen der Dispersionsmatrizen sind in beiden stochastischen Modellen identisch, sodass die in Abbildung 5.13 dargestellten Differenzen ausschließlich aus den Korrelationen zwischen den Punkten resultieren. Diese Korrelationen werden, wie Abbildung 4.8 zeigt, durch die charakteristische Distanz d_c bei der Taylor-Karman-Strukturmatrix gesteuert. Durch das Erhöhen der konzentrischen Kreise reduziert sich der Abstand zwischen den Punkten. Bei 50 Kreisen beträgt die minimale Distanz $\min(s) \approx 10$ cm, sodass sich mit $d_c \approx 33$ cm sehr hohe stochastische Abhängigkeiten zwischen benachbarten Punkten ergeben. Diese treten bei Verwendung einer skalierten Einheitsmatrix strukturbedingt nicht auf. Insbesondere bei hohen Messraten können stochastisch unabhängige Messwerte nicht erwartet werden (Kermarrec und Lösler 2021). Lösler u. a. (2016b) leiten bspw. für eine tachymetrische 48 h Messreihe (zeitabhängige) Korrelation von $\rho > 0,5$ für die polaren Messelemente ab. Koch (2010) ermittelt aus Wiederholungsmessungen mit einem terrestrischen Laserscanner (räumliche) Korrelation von $\rho > 0,9$ zwischen den resultierenden Koordinaten. Betrachtet man die Taylor-Karman-Strukturmatrix als zutreffendes stochastisches Modell und die Verwendung der Einheitsmatrix als korrespondierende Approximation, so zeigt Abbildung 5.13 deutlich, dass eine Datenanalyse mit einem unzureichend formulierten stochastischen Modell zu Fehlinterpretationen führen kann.

5.5 Zusammenfassung

Das GGOS strebt eine Positionsgenauigkeit von 1 mm sowie eine zeitliche Stabilität von $0,1 \text{ mm a}^{-1}$ im globalen geodätischen Referenzrahmen an. Um dieses Ziel zu erreichen, sind systematisch wirkende Messabweichungen in den geodätischen Raumverfahren zu identifizieren und messtechnisch zu quantifizieren. VLBI-Radioteleskope sind große bauliche Anlagen, deren Messergebnisse u. a. durch Temperaturveränderungen (Haas u. a. 1999), Sonneneinstrahlung (Lösler u. a. 2010) oder Windlasten (Clark und Thomsen 1988) beeinflusst werden. Neben diesen äußeren Einflüssen führen Strukturverformungen, die durch das Eigengewicht des Hauptreflektors hervorgerufen werden, zu systematischen Messabweichungen. Diese Verformung variiert in Abhängigkeit des Sekundärwinkels ω und ist somit lastfallabhängig (Sarti u. a. 2009b). Clark und Thomsen (1988) identifizieren die drei in Abbildung 5.3 dargestellten Haupteinflüsse $\Delta F(\omega)$, $\Delta V(\omega)$ und $\Delta R(\omega)$, die die Änderung der Brennweite des Hauptreflektors, die Variation des Hauptreflektors zur Sekundärachse und die Verschiebung des Empfängers bzw. Subreflektors beschreiben. Die Kombination dieser drei geometrisch beschreibbaren Deformationen erfolgt durch eine gewichtete Summenbildung, wobei die zugehörigen linearen Gewichtskoeffizienten α_F , α_V und

α_R aus der teleskopspezifischen Illumination und der Änderung der Strahllänge infolge einer Verschiebung des Empfängers bzw. Subreflektors resultieren. Während ΔF aus der geometrischen Veränderung des Hauptreflektors indirekt abzuleiten ist, lassen sich die Variationen von ΔV und ΔR durch direktes Messen bestimmen oder indirekt aus ΔF ableiten (Lösler u. a. 2019c; Nothnagel u. a. 2019).

Das geometrische Modell des Hauptreflektors eines konventionellen VLBI-Radioteleskops ist in den meisten Fällen ein gewöhnliches rotationssymmetrisches Paraboloid. In Abschnitt 5.1 wird das mathematische Modell des allgemeinen elliptischen Paraboloids als Fläche 2. Ordnung eingeführt, welches das rotationssymmetrische Paraboloid als vereinfachten Spezialfall inkludiert. Die vorgesehene Geometrie des Hauptreflektors vieler VGOS-spezifizierter Radioteleskope entspricht hingegen einem Ring-Fokus-Paraboloid. Da diese Geometrie nicht zu den Flächen 2. Ordnung zählt, wird in Abschnitt 5.2 ein implizites mathematisches Modell hergeleitet, welches ein allgemeines doppelelliptisches Ring-Fokus-Paraboloid beschreibt. Das rotationssymmetrische Ring-Fokus-Paraboloid ist wiederum ein Spezialfall, der durch entsprechende Vereinfachungen im Modell entsteht. Aber nicht nur das rotationssymmetrische Ring-Fokus-Paraboloid, sondern auch das elliptische und rotationssymmetrische Paraboloid resultiert aus Vereinfachungen in der Modellannahme. Das durch Gl. 5.15 beschriebene Modell des allgemeinen doppelelliptischen Ring-Fokus-Paraboloids ist somit sowohl zur Formanalyse des Hauptreflektors vieler konventioneller als auch für die meisten VGOS-spezifizierten Radioteleskope geeignet. Gegenüber der geplanten geometrischen Form des Hauptreflektors stellt Gl. 5.15 eine Überparametrierung dar. Abbildung 5.5 zeigt jedoch anschaulich, dass diese Modellbildung u. U. eine geometrische Interpretation von auftretenden systematischen Formabweichungen ermöglicht (Lösler u. a. 2018b).

Zur Bestimmung der Gewichtskoeffizienten α_F , α_V und α_R ist neben der Illuminationsfunktion die Funktion $\mathbf{h}$ erforderlich, die die Strahllängenänderung infolge einer Verschiebung des Empfängers bzw. des Subreflektors ΔR beschreibt. In Abschnitt 5.3 werden für Sekundär-Fokus-Radioteleskope mathematische Beschreibungen für verschiedene Subreflektorgeometrien aufgeführt. Cha (1987) leitet eine Approximation zur Beschreibung der Strahllängenänderung für Primär-Fokus-Radioteleskope her, welche auf Sekundär-Fokus-Radioteleskope übertragen wird. Eine von Artz u. a. (2014) angegebene alternative Darstellung, die zur Beschreibung der Strahllängenänderung die geometrischen Eigenschaften des Subreflektors ausnutzt, wird angegeben. Beide Ansätze werden auf den Subreflektor eines Ring-Fokus-Paraboloids übertragen. Ein Vergleich zwischen beiden Funktionsverläufen ist in Abbildung 5.8 dargestellt und weist eine hohe Übereinstimmung auf. Für Radioteleskops mit Ring-Fokus-Paraboloid sind zur Parametrierung der Signalwegänderung infolge einer Verschiebung ΔR beide Ansätze geeignet.

Abschnitt 5.4 widmet sich der möglichen Verzerrung der Schätzwerte aufgrund der Nichtlinearität von Gl. 5.15. Es zeigt sich, dass das Bias der Dispersion der geschätzten Parameter vernachlässigt werden kann. Für die geschätzten Modellparameter ist in Abhängigkeit von σ_0 im stochastischen Modell ein deutlicher Anstieg der Verzerrung

zwischen der linearisierten und der nichtlinearen Lösung vorhanden. Wie Abbildung 5.12 zeigt, beträgt für $\sigma_0 = 5$ mm die Parameterverzerrung für die Brennweite bereits 0,15 mm. Berücksichtigt man, dass für VGOS-spezifizierte Radioteleskope Signalwegvariationen von $<0,3$ mm angestrebt werden (Petrachenko u. a. 2009), so ist eine Verzerrung allein in der Bestimmung von ΔF von 0,15 mm durchaus kritisch zu bewerten. Wie Abbildung 5.13 weiterhin zeigt, kann diese Parameterverzerrung nur bis zu einem gewissen Grad durch eine Erhöhung der Beobachtungsanzahl reduziert werden. Präzisere Messungen führen hingegen automatisch zu einer Reduktion der Verzerrung. Für $\sigma_0 = 3$ mm halbiert sich das Bias bereits für eine Konfiguration mit 100 Punkten, siehe Tabelle 5.1.

Eine belastbare Abschätzung erfordert, dass das stochastische Modell zutreffend formuliert ist. Starke Vereinfachungen, die bspw. durch das Vernachlässigen von stochastischen Abhängigkeiten zwischen den Beobachtungen entstehen, sind zu vermeiden. Werden lediglich die Hauptdiagonalelemente der vollbesetzten Dispersionsmatrix im stochastischen Modell berücksichtigt, so werden Dispersion und Bias in der durchgeführten Analyse zu optimistisch geschätzt. Für bspw. 1 000 Punkte und $\sigma_0 = 5$ mm ergibt sich für die Brennweite $\hat{\sigma}_F = 4$ mm, wenn stochastische Abhängigkeiten vernachlässigt werden. Werden die stochastischen Abhängigkeiten hingegen berücksichtigt, so ergibt sich $\hat{\sigma}_F = 12,8$ mm. Bei der Schätzung der Parameterverzerrung ist das durch die Vernachlässigung im stochastischen Modell entstehende Missverhältnis noch größer. Werden hier die stochastischen Abhängigkeiten berücksichtigt, so ergibt sich ein 10-fach größeres Bias als bei entsprechender Vernachlässigung der Korrelationen.

6. Fazit und Ausblick

Das Global Geodetic Observing System strebt eine Positionsgenauigkeit von 1 mm sowie eine zeitliche Stabilität von $0,1 \text{ mm a}^{-1}$ im globalen geodätischen Referenzrahmen an. Um dieses ambitionierte Ziel zu erreichen, müssen Abweichungen, die die globalen Produkte systematisch verfälschen, identifiziert und quantifiziert werden, sodass geeignete Beobachtungsstrategien und Korrekturmodelle entwickelt werden können. Systematische Abweichungen können hierbei sowohl im Messprozess, d. h. in der Datenerhebung, als auch im Analyseprozess, d. h. bei der Schätzung der Parameter, entstehen. Diese beiden Prozesse lassen sich sowohl im lokalen als auch im globalen Kontext analysieren.

Aufgrund der geringen physischen Verknüpfung zwischen den vier geodätischen Raumverfahren GNSS, DORIS, SLR/LLR und VLBI ist eine Kombination dieser Raumverfahren zur Bestimmung eines globalen geodätischen Bezugsrahmens nur durch zusätzliche geometrische Informationen sinnvoll möglich (Seitz u. a. 2012). Local-Ties stellen die notwendigen dreidimensionalen Informationen zwischen den invarianten Referenzpunkten der vier Raumverfahren bereit. Sie sind nach Schuh u. a. (2017) die Schlüsselkomponente bei der Inter-Technik-Kombination, da sie die verschiedenen Raumverfahren an Co-Location-Stationen zu einem gemeinsamen integrierten Erdsystemsensors verknüpfen. Da Local-Ties zeitvariant sein können, regt das GGOS eine möglichst regelmäßige Überprüfung an. Diese sollte idealerweise automatisiert erfolgen, um den angestrebten $24\text{h}/7\text{d}$ -Betrieb der Raumverfahren nicht zu behindern (Rothacher u. a. 2009). Sowohl inaktuelle als auch fehlerbehaftete Local-Ties verfälschen die globalen Produkte systematisch. Local-Ties stellen somit eine kritische Komponente im Kombinationsprozess dar, da sich Abweichungen in den lokal bestimmten Vektoren in den globalen Resultaten fortpflanzen.

Die Bestimmung der Referenzpunkte, zwischen denen der Local-Tie definiert ist, erfolgt durch präzise terrestrische Vermessung an Stationen, die mindestens zwei verschiedene Raumverfahren betreiben. Der IRP einer IDS- bzw. GNSS-Antenne lässt sich durch das Messen von neuralgischen Referenzpositionen an der Antenne meist ohne Schwierigkeiten bestimmen (Poyard 2017). Die Bestimmung des geometrischen Referenzpunktes von SLR/LLR- und VLBI-Teleskopen ist hingegen herausfordernd, da dieser i. A. unzugänglich und nicht materialisierbar ist. Die Bestimmung erfordert daher ein indirektes Verfahren.

Systematische Abweichungen können bei der Datenerhebung der Raumverfahren

entstehen. So hängen die Empfangseigenschaften eines VLBI-Radioteleskops von den geometrischen Eigenschaften sowie der räumlichen und zeitlichen Stabilität des Haupt- und ggf. Subreflektors ab. Clark und Thomsen (1988) identifizieren drei wesentliche Einflüsse, die zu Signalwegänderungen führen und unberücksichtigt zu einer systematischen Abweichung, insbesondere in der vertikalen Komponente der Stationskoordinate, führen und hierdurch u. U. den Netzmaßstab im TRF verfälschen (Sarti u. a. 2010). Hierzu zählen die Variation des Scheitelpunktes, die Verschiebung des Empfängers bzw. Subreflektors sowie die Änderung der Brennweite des Hauptreflektors, jeweils in Abhängigkeit des Sekundärwinkels. Während die Brennweitenänderung indirekt aus einer Formanalyse zu bestimmen ist, lassen sich die Variationen des Scheitelpunktes sowie die Verschiebungen des Empfängers bzw. Subreflektors direkt messtechnisch erfassen oder aus der Brennweitenänderung ableiten. Für konventionelle Radioteleskope sind in der Literatur Brennweitenänderungen von z. T. mehreren Zentimetern dokumentiert (Sarti u. a. 2009a; Holst u. a. 2012; Bergstrand u. a. 2018). Weiterhin zeigen die bisherigen Untersuchungen, dass jedes Radioteleskop ein spezifisches Deformationsverhalten aufweist. Eine Übertragung von Korrekturfunktionen auf andere Radioteleskope ist daher nicht möglich, sodass für jedes Radioteleskop oder zumindest für jeden Typ das spezifische Deformationsverhalten zu ermitteln ist (Gipson 2019).

Für VGOS-spezifizierte Radioteleskope existieren bisher nur sehr wenige Untersuchungen. Durch die sehr kompakte Bauweise dieser Teleskope sind deutlich geringere Variationen zu erwarten. Mess- und Analysestrategien, die für konventionelle Radioteleskope geeignet erscheinen, können aufgrund der gesteigerten Genauigkeitsanforderungen und des geänderten Reflektordesigns nicht direkt übertragen werden. Lösler u. a. (2019c) analysieren am Onsala Space Observatory erstmals das lastfallabhängige Deformationsverhalten eines VGOS-spezifizierten Radioteleskops und leiten Brennweitenänderungen von ca. 2 mm aus photogrammetrischen Messungen ab. Im Vergleich zu Studien konventioneller Radioteleskope ist diese Variation etwa 10-fach geringer und somit deutlich schwieriger messtechnisch nachzuweisen.

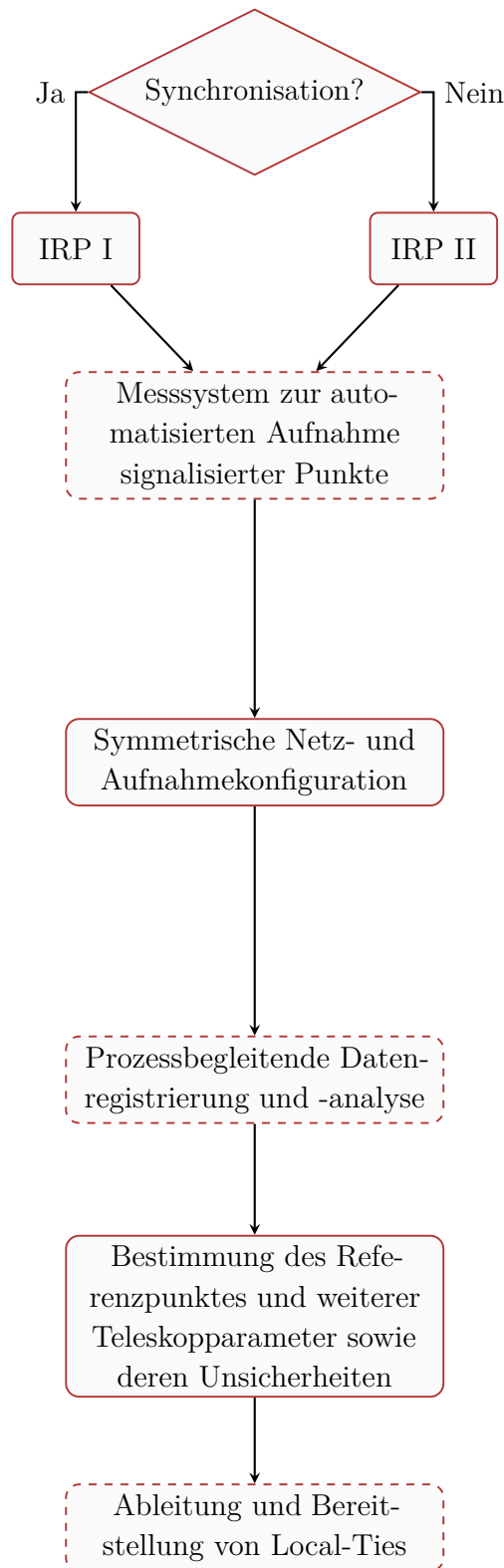
Neben systematischen Abweichungen, die durch den Messprozess verursacht werden, können zusätzliche Abweichungen aus dem Analyseprozess resultieren. Praktisch alle Problemstellungen in der Geodäsie und Messtechnik weisen einen nichtlinearen funktionalen Zusammenhang auf. Erfolgt das Ableiten der statistischen Eigenschaften durch Linearisierung, so gelten diese Eigenschaften nur für das lineare Ersatzproblem (Neitzel 2004a, S. 20). Bezogen auf das originäre nichtlineare Problem sind diese Schätzwerte jedoch verzerrt und somit nicht erwartungstreu. Die Verzerrung der Schätzwerte wird durch die Nichtlinearität im funktionalen Modell hervorgerufen. Die Größe, mit der sich die Verzerrung in den Schätzwerten zeigt, wird jedoch durch das stochastische Modell gesteuert (Lehmann und Lösler 2018; Lösler u. a. 2020). Ob die auftretenden Verzerrungen vernachlässigt werden können, ist daher zwingend kontextabhängig zu eruieren.

In dieser Arbeit wurde ein mathematisches Modell entwickelt, das eine Bestimmung des geometrischen Referenzpunktes von SLR/LLR- und VLBI-Teleskopen

ermöglicht. Die bisher häufig eingesetzten geometrischen Modelle setzen u. a. eine bestimmte geometrische Teleskopkonfiguration voraus oder benötigen ein spezielles Messkonzept. Sie besitzen daher nur einen begrenzten Anwendungs- und Gültigkeitsbereich. Bei der Modellentwicklung konnten diese Restriktionen aufgelöst werden. Das hergeleitete Transformationsmodell besitzt keine Einschränkungen bzgl. der Teleskopgeometrie. Neben dem geometrischen Referenzpunkt werden teleskopspezifische Zusatzparameter, wie bspw. der Abstand zwischen der Primär- und Sekundärachse, direkt mitbestimmt. Weiterhin ist kein gezieltes Verfahren des Teleskops nötig, sodass eine prozessbegleitende Referenzpunktbestimmung möglich wird, wie es das GGOS anregt. Für das hergeleitete Transformationsmodell wurden die beiden Lösungsstrategien IRP I und IRP II herausgearbeitet. Während IRP I eine zusätzliche Synchronisation zwischen dem terrestrischen Instrument und dem Teleskop erfordert, entfällt diese Synchronisation für IRP II. Der auftretende Defekt der Normalgleichung der IRP II Lösungsstrategie lässt sich durch eine angepasste Messkonfiguration und durch geeignete Datumsbedingungen sachgerecht beheben. Lösler u. a. (2018c) zeigen, dass beide Strategien gleichwertige Resultate für den Referenzpunkt und den Abstand zwischen der Primär- und Sekundärachse liefern und somit für eine in-situ Referenzpunktbestimmung gleichermaßen geeignet sind.

Local-Ties bilden eine Schlüsselrolle beim Ableiten eines globalen geodätischen Bezugsrahmens. Das hergeleitete Modell zur Bestimmung von Referenzpunkten an SLR/LLR- und VLBI-Teleskopen ist daher eine wesentliche Weiterentwicklung, um die Zuverlässigkeit und die Aktualität von Local-Ties zu steigern. Abbildung 6.1 stellt die wesentlichen Schritte zur Bestimmung des Referenzpunktes und zusätzlicher Teleskopparameter in einem Flussdiagramm mit kurzen Zusammenfassungen dar.

Die geometrische Form des Hauptreflektors eines VGOS-spezifizierten Radioteleskops entspricht in den meisten Fällen keinem gewöhnlichen rotationssymmetrischen Paraboloid, sodass bisherige Analysestrategien nicht direkt auf die neue Generation von Radioteleskopen übertragen werden können. Um die Verschattungen des Hauptreflektors durch Konstruktionselemente zu reduzieren, nutzen viele VGOS-Radioteleskope ein verbessertes Reflektordesign, welches als Ring-Fokus-Paraboloid bezeichnet wird (Cutler 1947). Ein implizites mathematisches Modell, welches ein doppel elliptisches Ring-Fokus-Paraboloid parametrisiert, wurde in dieser Arbeit hergeleitet. Dieses Modell inkludiert sowohl das rotationssymmetrische Ring-Fokus-Paraboloid als auch das elliptische und rotationssymmetrische Paraboloid. Durch eine geeignete Beschränkung der formbeschreibenden Modellparameter kann dieses Modell universell sowohl auf eine Vielzahl konventioneller VLBI-Radioteleskope als auch für die meisten VGOS-spezifizierten Radioteleskope zur Formanalyse des Hauptreflektors eingesetzt werden. Da die geplante Form des Hauptreflektors i. A. rotationssymmetrisch ist, beschreibt das mathematische Modell eine komplexere geometrische Form. Lösler u. a. (2018b) analysieren auftretende systematische Oberflächenabweichungen und zeigen, dass mit diesem Modell diese Systematiken in den Residuen z. T. geometrisch interpretierbar werden.



Das funktionale Modell zur Bestimmung des Referenzpunktes und zusätzlicher Teleskopparameter ist durch Gl. 4.16 gegeben. Das implizite IRP I Modell erfordert eine Synchronisation zwischen dem terrestrischen Messsystem und dem Teleskop bei der Datenerhebung, da neben den beobachteten Markenpositionen $\mathbf{P}_{i,j}$ die zugehörigen Teleskopwinkel κ_j und ω_j Beobachtungen darstellen. Ist keine Synchronisation zwischen beiden Instrumenten möglich, empfiehlt sich die Anwendung des expliziten IRP II Modells.

Zur Erfassung signalisierter Punkte ist prinzipiell jedes Messverfahren geeignet, das direkt oder indirekt kartesische Koordinaten für die gemessenen Positionen liefert. Hierzu zählen neben GNSS insbesondere polare und photogrammetrische Messsysteme. Das GGOS regt eine kontinuierliche und weitgehend automatisierte Bestimmung der geometrischen Referenzpunkte an. Hierfür muss das eingesetzte Messsystem über eine programmierbare Schnittstelle verfügen (Lösler u. a. 2013a, 2018c).

Die Realisierung des Teleskopkoordinatensystems erfolgt durch Marken. Durch Simulationen identifizieren Kallio und Poutanen (2010) die optimale Markenpositionen in der Nähe der Sekundärachse.

Zur Erfassung der Marken am Teleskop, bspw. mit einem polaren Messinstrument, empfiehlt Lossin (2013) die Verwendung von mindestens drei symmetrisch um das Teleskop angeordneten Standpunkten. Wie Abbildung 4.7 zeigt, wird hierdurch der Referenzpunkt von den beobachteten Punkten umschlossen, sodass keine Extrapolationseffekte auftreten.

Die Verwendung symmetrischer Konfigurationen bietet weiterhin den Vorteil, dass sich hierdurch die mittels Gl. 3.40 bzw. Gl. 3.52 geschätzten Parameterverzerrungen (nahezu) vollständig eliminieren lassen.

Die Erfassung der Marken am Teleskop und weiterer Größen wie bspw. meteorologischer Parameter erfolgt prozessbegleitend für unterschiedliche Teleskoporientierungen. Zur Überführung einzelner Standpunkte in ein einheitliches Datum sowie zum Ableiten der kartesischen Koordinaten der registrierten Markenpositionen und deren Dispersion sind Voranalysen notwendig, wie bspw. eine Netz- oder Bündelblockausgleichung (Lösler u. a. 2016b).

Basierend auf Gl. 4.16 erfolgt die Bestimmung des geometrischen Referenzpunktes und weiterer Teleskopparameter sowie deren Dispersion im impliziten IRP I bzw. im expliziten IRP II Lösungsansatz mittels Gl. 3.7.

Auf eine Bestimmung der Verzerrung der Schätzwerte nach Gl. 3.40 bzw. Gl. 3.52 kann aufgrund der geringen Messunsicherheiten i. A. verzichtet werden, insbesondere wenn eine symmetrische Aufnahmeconfiguration verwendet wird.

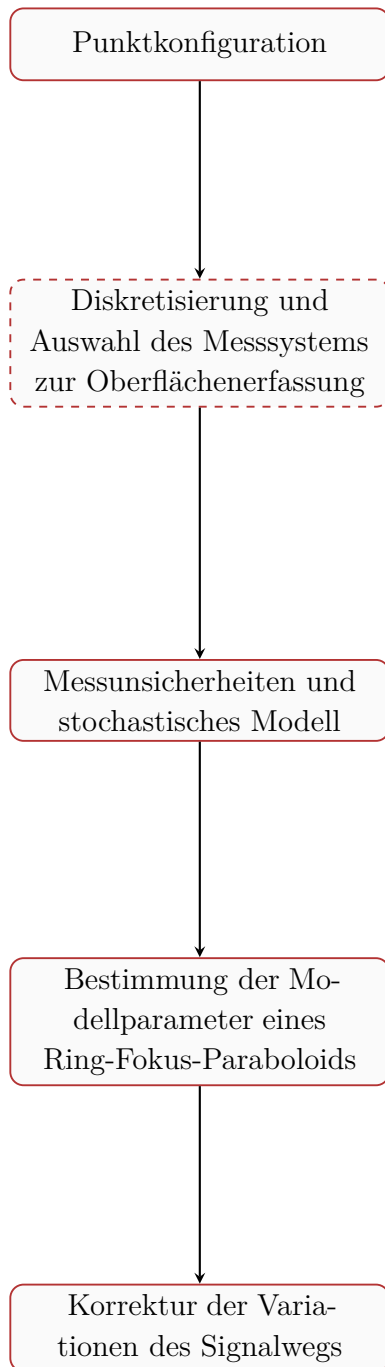
Zur Verknüpfung verschiedener Raumverfahren bei der Ableitung eines TRF sind die geometrischen Verbindungsvektoren (Local-Ties) und deren Dispersionsmatrizen im SINEX-Format bereitzustellen. Der Local-Tie kann bereitgestellt werden, wenn der geometrische Referenzpunkt eines weiteren Raumverfahrens vorliegt.

Abbildung 6.1: Ablaufdiagramm mit Zusammenfassungen zur Bestimmung des geometrischen Referenzpunktes und zusätzlicher Teleskopparameter unter Verwendung des entwickelten Transformationsmodells nach Gl. 4.16 sowie der vorgeschlagenen Lösungsstrategien IRP I bzw. IRP II. Ablaufpunkte mit gestrichelter Umrandung sind für die praktische Umsetzung notwendig, aber nicht Teil dieser Arbeit.

Zur Modellierung der Signalwegvariationen nach Clark und Thomsen (1988) sind neben den drei geometrischen Veränderungen auch die Variationen der Strahllänge infolge einer Verschiebung des Empfängers bzw. Subreflektors zu modellieren. Mit diesen Strahllängenvariationen und unter Berücksichtigung der teleskopspezifischen Illumination lassen sich die linearen Gewichtskoeffizienten ableiten, die zur Gewichtung der geometrischen Deformationen heranzuziehen sind. Hierfür ist eine Beschreibung der geometrischen Form des Subreflektors notwendig. In dieser Arbeit wurden für Sekundär-Fokus-Radioteleskope, die ein Ring-Fokus-Paraboloid verwenden, Gleichungen zur Beschreibung der räumlichen Reflektorgeometrie des Subreflektors angegeben. Analog zum entwickelten Modell zur Beschreibung der Hauptreflektorgeometrie zeigt sich, dass diese Gleichungen durch entsprechende Vereinfachungen auch zur geometrischen Beschreibung des Subreflektors der meisten konventionellen Radioteleskope geeignet sind. Diese geometrischen Beschreibungen bilden somit eine universelle Grundlage zur Modellierung und Analyse der auftretenden Strahllängenvariationen infolge einer Subreflektorverschiebung. Zur Approximation der Signallängenänderung konnten weiterhin zwei Ansätze, die für konventionelle Radioteleskope entwickelt wurden (Cha 1987; Artz u. a. 2014), direkt adaptiert werden. Lösler u. a. (2019c) zeigen, dass beide Ansätze für VGOS-spezifizierte Radioteleskope mit Ring-Fokus-Paraboloid geeignet sind und gleichwertige Ergebnisse liefern.

Die Berücksichtigung von Signalwegänderungen bei der Bestimmung eines globalen geodätischen Bezugsrahmens ist erstmals für den ITRF2020 vorgesehen (Altamimi u. a. 2018). Die in dieser Arbeit hergeleiteten Modelle sind essenziell, um das Deformationsverhalten von Radioteleskopen zukünftig zu evaluieren. Abbildung 6.2 stellt die wesentlichen Schritte zur Bestimmung der Modellparameter eines Ring-Fokus-Paraboloids und zur Ableitung eines Modells zur Kompensation der resultierenden Signalwegvariation in einem Flussdiagramm mit kurzen Zusammenfassungen dar. Dieses Schema gilt sinngemäß auch für Untersuchungen an konventionellen Radioteleskopen.

Sowohl die Bestimmung des Referenzpunktes als auch die Beschreibung der geometrischen Form des Hauptreflektors erfolgt in einem nichtlinearen Modell. Liegen mehr Beobachtungen als unbekannte Modellparameter vor, erfolgt die Schätzung der Parameter in der Geodäsie häufig iterativ im Gauß-Helmert-Modell oder Gauß-Markov-Modell bzw. durch eine bedingte Ausgleichung. In der numerischen Optimierung zählt die Sequentielle Quadratische Programmierung nach Geiger und Kanzow (2002, S. 234) „zu den wichtigsten Verfahren zum Lösen von allgemeinen nichtlinearen Optimierungsaufgaben“. Unter Verwendung der Lagrange-Funktion zur Berücksichtigung von Nebenbedingungen bestimmt die SQP die unbekannten Parameter mittels Newtonverfahren, wodurch das Bereitstellen der Hessematrix notwendig wird. In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die in der Geodäsie gebräuchlichen Verfahren quadratische Programme sind und als Spezialfälle der SQP aufgefasst werden können, die auf das explizite Aufstellen der Hessematrix verzichten.



Zur eindeutigen Bestimmung der Modellparameter eines doppelelliptischen Ring-Fokus-Paraboloids sind lediglich elf Punktbeobachtungen notwendig. Um eine repräsentative Beschreibung der Geometrie durch neuralgische Punkte sicherzustellen und um die Zuverlässigkeit der Schätzung zu erhöhen, ist eine größere Punktzahl empfehlenswert. Hierfür eignet sich eine symmetrische Punktkonfiguration, die sich an den Strukturelementen des Hauptreflektors orientiert, siehe Abbildung 5.11.

Die Punktzahl hängt von der Zielsetzung ab. Sind lediglich einzelne Formparameter wie bspw. die Brennweite F zu ermitteln, kann eine deutlich geringere Punktzahl gewählt werden, als sie zur Prüfung der Formschlüssigkeit notwendig wäre. Zur Erfassung von signalisierten neuralgischen Punkten bieten sich photogrammetrische Messsysteme an (Lösler u. a. 2019a). Für Untersuchungen bezüglich lokaler Oberflächenabweichungen, z. B. aufgrund fehlausgerichteter Paneele, sind Mehrpunktverfahren wie z. B. Laserradar vorzuziehen (Usoff u. a. 2014).

Das funktionale Modell zur Beschreibung eines Ring-Fokus-Paraboloids ist nichtlinear, siehe Gl. 5.15. Erfolgt das Ableiten der statistischen Eigenschaften durch Linearisierung, so können diese aufgrund von Gl. 2.4 nicht auf das originäre nichtlineare Problem übertragen werden. Die Größe der Verzerrung der Schätzwerte hängt hierbei vom stochastischen Modell ab. Präzisere Messungen führen stets zu einer geringeren Verzerrung und sind daher zu empfehlen, siehe Abbildung 5.12. Insbesondere wird ein ungünstiges Signal-Rausch-Verhältnis nicht durch eine Erhöhung der Punktzahl kompensiert. Wie Abbildung 5.13 zeigt, rufen starke Vereinfachungen im stochastischen Modell, z. B. das Vernachlässigen von algebraischen Korrelationen, zusätzliche Verzerrungen hervor und können u. U. zu unplausiblen Ergebnissen und Fehlinterpretationen führen.

Unter Verwendung von Gl. 5.15 werden die Modellparameter des Ring-Fokus-Paraboloids mittels Gl. 3.7 bestimmt. Die Größe der Verzerrung der Schätzwerte lässt sich mittels Gl. 3.52 abschätzen. Insbesondere bei der Verwendung von Messsystemen, die ein ungünstiges Signal-Rausch-Verhältnis besitzen, ist die Berücksichtigung der Verzerrung der Schätzwerte empfehlenswert.

Clark und Thomsen (1988) kombinieren die Änderung der Brennweite des Hauptreflektors, die Variation des Hauptreflektors zur Sekundärachse und die Verschiebung des Empfängers bzw. Subreflektors und leiten mit Gl. 5.1 ein Modell zur Beschreibung der Signalwegvariation her. Liegen Messungen für verschiedene Teleskoporientierungen vor, lässt sich das lastfallabhängige Verformungsverhalten des Hauptreflektors analysieren und korrigieren (Sarti u. a. 2010; Lösler u. a. 2019c).

Abbildung 6.2: Ablaufdiagramm mit Zusammenfassungen zur Bestimmung der Modellparameter eines Ring-Fokus-Paraboloids mit dem hergeleiteten Oberflächenmodell nach Gl. 5.15, welche u. a. den geometrischen Anteil der resultierenden Signalwegvariationen parametrieren. Ablaufpunkte mit gestrichelter Umrandung sind für die praktische Umsetzung notwendig, aber nicht Teil dieser Arbeit.

Unabhängig vom gewählten Optimierungsverfahren und insbesondere auch bei Existenz eines direkten Lösungsverfahrens können keine unverzerrten Schätzwerte erwartet werden, wenn das zugrunde liegende funktionale Modell nichtlinear ist, jedoch die statistischen Eigenschaften aus dessen linearisiertem Modell abgeleitet werden. Box (1971) schätzt für explizit formulierte funktionale Modelle das Bias der Schätzwerte durch eine Taylorreihe mit Gliedern 2. Ordnung ab. Eine Übertragung auf den allgemeinen Fall mit implizit formuliertem funktionalen Modell ist Bestandteil dieser Arbeit. Hierdurch wurde es möglich, die vom Autor entwickelten geometrischen Modelle hinsichtlich einer möglichen Verzerrung zu untersuchen. Diese Verzerrung ist mit einer systematischen Abweichung im Analyseprozess gleichzusetzen. Die Untersuchungen in dieser Arbeit zeigen, dass die Größe des Bias von der Konfiguration und dem stochastischen Modell abhängig ist. Insbesondere in der Formanalyse erreicht die Parameterverzerrung Größenordnungen, die unberücksichtigt als kritisch zu bewerten sind.

Diese Arbeit widmete sich ausschließlich der Erstellung von geeigneten Modellen, um das ambitionierte Ziel von 1 mm Positionsgenauigkeit im globalen geodätischen Bezugsrahmen realisierbar zu machen. Bewusst ausgeblendet wurden Messverfahren und Instrumente, die für eine konkrete messtechnische Umsetzung geeignet sind. Nachfolgende Arbeiten können hier anknüpfen, insbesondere da jede Empfehlung für ein spezielles Messkonzept eine detaillierte Analyse der zu erwartenden Messunsicherheiten zwingend nach sich ziehen muss und im Kontext der jeweiligen Genauigkeitsanforderungen zu bewerten ist.

Die Abschätzung der möglichen Verzerrung der Schätzwerte darf als weiteres statistisches Analysewerkzeug aufgefasst werden. Es bietet die Möglichkeit, systematische Abweichungen in den Schätzwerten, die aus der Verwendung eines u. U. zu stark vereinfachten Ersatzproblems anstelle des ursprünglichen nichtlinearen Problems resultieren, abzuschätzen und bei Bedarf zu minimieren. Wie mit dieser Arbeit gezeigt wurde, ist dieses Werkzeug dabei nicht auf die Analyse von Realdaten beschränkt, sondern eignet sich insbesondere auch zum Validieren von Messkonzepten und Auswertestrategien bereits während der Planungsphase.

A. Anhang

A.1 Varianz einer nichtlinearen Funktion

Die Taylorreihe einer skalaren nichtlinearen differenzierbaren Funktion $f(l)$ sei gegeben durch (Teunissen 2003, S. 142; Caspary und Wichmann 2007, S. 18)

$$f(l) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)} \tilde{e}^k = f + f' \tilde{e} + \frac{1}{2} f'' \tilde{e}^2 + \frac{1}{6} f''' \tilde{e}^3 + \mathcal{O}, \quad (\text{A.1})$$

wobei $f^{(k)}$ die k -te Ableitung der Funktion f an der Stelle $\tilde{l}$ darstellt, und $f^{(0)} := f$ zu setzen ist. Die wahre Abweichung der Realisierung l gegenüber dem wahren Wert $\tilde{l}$ beschreibt $\tilde{e} = l - \tilde{l}$, und $\mathcal{O}$ symbolisiert Terme höherer Ordnung. Durch Anwendung des Verschiebungssatzes (Krystek 2012, S. 167),

$$\begin{aligned} \text{Var} \{f(l)\} &= \text{E} \left\{ (f(l) - \text{E} \{f(l)\})^2 \right\} \\ &= \text{E} \{f(l)^2\} - 2 \text{E} \{f(l)\} \text{E} \{f(l)\} + (\text{E} \{f(l)\})^2 \\ &= \text{E} \{f(l)^2\} - (\text{E} \{f(l)\})^2, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ergibt sich das zweite zentrale Moment, die Varianz der Funktion f .

Die Quadrierung der Funktion f liefert unter Berücksichtigung ihrer Taylorreihe

$$\begin{aligned} f(l)^2 &= f^2 + f'^2 \tilde{e}^2 + \frac{1}{4} f''^2 \tilde{e}^4 + \frac{1}{36} f'''^2 \tilde{e}^6 \\ &\quad + 2ff' \tilde{e} + ff'' \tilde{e}^2 + \frac{1}{3} ff''' \tilde{e}^3 \\ &\quad + f'f'' \tilde{e}^3 + \frac{1}{3} f'f''' \tilde{e}^4 \\ &\quad + \frac{1}{6} f''f''' \tilde{e}^5 + \mathcal{O}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Durch Einsetzen der jeweiligen Erwartungswerte in f ergibt sich der Minuend in Gl. A.2, d. h.,

$$\begin{aligned} \text{E} \{f(l)^2\} &= f^2 + f'^2 \text{E} \{\tilde{e}^2\} + \frac{1}{4} f''^2 \text{E} \{\tilde{e}^4\} + \frac{1}{36} f'''^2 \text{E} \{\tilde{e}^6\} \\ &\quad + 2ff' \text{E} \{\tilde{e}\} + ff'' \text{E} \{\tilde{e}^2\} + \frac{1}{3} ff''' \text{E} \{\tilde{e}^3\} \\ &\quad + f'f'' \text{E} \{\tilde{e}^3\} + \frac{1}{3} f'f''' \text{E} \{\tilde{e}^4\} \\ &\quad + \frac{1}{6} f''f''' \text{E} \{\tilde{e}^5\} + \mathcal{O}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ausgehend von $\tilde{e} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e)$ lassen sich alle zentralen Momente in Abhängigkeit von σ_e darstellen. Tabelle A.1 fasst die zentralen Momente bis zur $(k = 6)$ -ten Ordnung zusammen. Aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung sind die zentralen Momente mit ungerader Ordnungszahl k stets null. Werden die zentralen Momente der Normalverteilung in Gl. A.4 berücksichtigt, so ergibt sich

$$\mathbb{E} \{f(l)^2\} = f^2 + f'^2 \sigma_e^2 + \frac{3}{4} f''^2 \sigma_e^4 + f f'' \sigma_e^2 + f' f''' \sigma_e^4 + \mathcal{O}. \quad (\text{A.5})$$

Tabelle A.1: Zentrale Momente der Normalverteilung $\mathbb{E} \{\tilde{e}^k\}$ in Abhängigkeit der Ordnungszahl k , siehe auch (Wolf 1968, S. 490f).

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{E} \{\tilde{e}^k\}$	1	0	σ_e^2	0	$3\sigma_e^4$	0	$15\sigma_e^6$

Der Subtrahend in Gl. A.2 entspricht dem Quadrat des Erwartungswertes von f

$$\mathbb{E} \{f(l)\} = f + \frac{1}{2} f'' \sigma_e^2 + \mathcal{O} \quad (\text{A.6})$$

und lautet

$$(\mathbb{E} \{f(l)\})^2 = f^2 + \frac{1}{4} f''^2 \sigma_e^4 + f f'' \sigma_e^2 + \mathcal{O}. \quad (\text{A.7})$$

Die Anwendung des Verschiebungssatzes nach Gl. A.2 liefert die Varianz der Funktion f , d. h.,

$$\text{Var} \{f(l)\} = f'^2 \sigma_e^2 + \frac{1}{2} f''^2 \sigma_e^4 + \frac{5}{12} f'''^2 \sigma_e^6 + f' f''' \sigma_e^4 + \mathcal{O}. \quad (\text{A.8})$$

Mit Beschränkung auf die quadratische Approximation ergibt sich schließlich die Näherung für die gesuchte Varianz von f zu

$$\text{Var} \{f(l)\} \approx f'^2 \sigma_e^2 + \frac{1}{2} f''^2 \sigma_e^4. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Erwartungswert und Dispersion der Unscen- ted Transformation

Gemäß Gl. 2.10 ist die Taylorreihe einer nichtlinearen Funktion $\mathbf{f}$ gegeben durch

$$\mathbf{f}(\mathcal{X}_i) = \mathbf{f}(\mathcal{X}_0) + \mathbf{J} \tilde{\mathbf{e}}_i + \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{H}_j \tilde{\mathbf{e}}_i]_j + \mathcal{O}. \quad (\text{A.10})$$

Wird die Funktion $\mathbf{f}$ in Gl. 2.20a durch ihre Taylorreihe ersetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{\hat{\mathbf{u}}\} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i \mathbf{f}(\mathcal{X}_i) \\ &= \frac{1}{2(n+\kappa)} \sum_{i=1}^{2n} \left(\mathbf{f}(\mathcal{X}_0) + \mathbf{J} \tilde{\mathbf{e}}_i + \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{H}_j \tilde{\mathbf{e}}_i]_j + \mathcal{O} \right) + \frac{\kappa}{n+\kappa} \mathbf{f}(\mathcal{X}_0). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Aufgrund der symmetrischen Anordnung der Σ -Punkte $\mathcal{X}_i$ in Gl. 2.18 folgt $\tilde{\mathbf{e}}_i = -\tilde{\mathbf{e}}_{n+i}$ für $i > 0$, wodurch alle Terme mit ungeraden Potenzen in dieser Reihe entfallen (Simon 2006, S. 442f), d. h.,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{\hat{\mathbf{u}}\} &= \frac{n}{n+\kappa} \mathbf{f}(\mathcal{X}_0) + \frac{1}{2(n+\kappa)} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{H}_j \tilde{\mathbf{e}}_i]_j + \mathcal{O} \right) + \frac{\kappa}{n+\kappa} \mathbf{f}(\mathcal{X}_0) \quad (\text{A.12}) \\ &= \mathbf{f}(\mathcal{X}_0) + \frac{1}{2(n+\kappa)} \sum_{i=1}^n [\tilde{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{H}_j \tilde{\mathbf{e}}_i]_j + \frac{1}{2(n+\kappa)} \sum_{i=1}^{2n} \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Aus Gl. 2.18 folgt weiterhin $\tilde{\mathbf{e}}_i = \left(\sqrt{(n+\kappa) \Sigma_{\mathbf{e}}} \right)_i$. Eingesetzt in Gl. A.12 und unter Vernachlässigung von Termen vierter und höherer Ordnung ergibt sich der Erwartungswert der UT zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{\hat{\mathbf{u}}\} &\approx \mathbf{f}(\mathcal{X}_0) + \frac{1}{2(n+\kappa)} \sum_{i=1}^n \left[\left(\sqrt{(n+\kappa) \Sigma_{\mathbf{e}}} \right)_i^T \mathbf{H}_j \left(\sqrt{(n+\kappa) \Sigma_{\mathbf{e}}} \right)_i \right]_j \quad (\text{A.13}) \\ &= \mathbf{f}(\mathcal{X}_0) + \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{H}_j \Sigma_{\mathbf{e}})]_j. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit Gl. 2.13a zeigt, dass dies einer Approximation 2. Ordnung entspricht, welche Terme vierter und höherer Ordnung vernachlässigt (Gustafsson und Hendebay 2008; Wang und Zhao 2018).

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt A.1 ergibt sich für die Dispersion der UT durch Anwendung des Steiner'schen Verschiebungssatzes entsprechend Gl. A.2 zunächst

$$\begin{aligned} \text{Var} \{\hat{\mathbf{u}}\} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i (\mathbf{f}(\mathcal{X}_i) - \mathbb{E} \{\hat{\mathbf{u}}\}) (\mathbf{f}(\mathcal{X}_i) - \mathbb{E} \{\hat{\mathbf{u}}\})^T \quad (\text{A.14}) \\ &= \sum_{i=0}^{2n} w_i \mathbf{f}(\mathcal{X}_i) \mathbf{f}(\mathcal{X}_i)^T - \mathbb{E} \{\hat{\mathbf{u}}\} \mathbb{E} \{\hat{\mathbf{u}}\}^T \\ &= \frac{\kappa}{n+\kappa} \mathbf{f}(\mathcal{X}_0) \mathbf{f}(\mathcal{X}_0)^T + \frac{1}{2(n+\kappa)} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{f}(\mathcal{X}_i) \mathbf{f}(\mathcal{X}_i)^T - \mathbb{E} \{\hat{\mathbf{u}}\} \mathbb{E} \{\hat{\mathbf{u}}\}^T. \end{aligned}$$

Durch Substitution der Gl. A.10, A.12 in Gl. A.14 und Bildung der äußeren Produkte folgt

$$\begin{aligned} \text{Var} \{\hat{\mathbf{u}}\} &\approx \mathbf{J} \Sigma_{\mathbf{e}} \mathbf{J}^T + \frac{n+\kappa}{4} \sum_{i=1}^n [\text{tr}(\mathbf{H}_j \bar{\Sigma}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{H}_k \bar{\Sigma}_{\mathbf{e}_i})]_{j,k} \quad (\text{A.15}) \\ &\quad - \frac{1}{4} [\text{tr}(\mathbf{H}_j \Sigma_{\mathbf{e}})]_j [\text{tr}(\mathbf{H}_k \Sigma_{\mathbf{e}})]_k^T, \end{aligned}$$

wobei Terme höherer Ordnung wiederum vernachlässigt wurden und $\bar{\Sigma}_{\mathbf{e}_i} = \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i^T$.

Die modifizierte Unscented Transformation, aus der stets eine positiv semidefinite Dispersionsmatrix resultiert, führt für eine bessere Approximation der Dispersion mit Gl. 2.22 einen zusätzlichen Summanden ein (Julier 2002). Wird dieser in Gl. A.15 berücksichtigt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Var} \{\hat{\mathbf{u}}\} &\approx \mathbf{J} \Sigma_{\mathbf{e}} \mathbf{J}^T + \frac{\alpha^2 (n+\lambda)}{4} \sum_{i=1}^n [\text{tr}(\mathbf{H}_j \bar{\Sigma}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{H}_k \bar{\Sigma}_{\mathbf{e}_i})]_{j,k} \quad (\text{A.16}) \\ &\quad + \frac{\beta - \alpha^2}{4} [\text{tr}(\mathbf{H}_j \Sigma_{\mathbf{e}})]_j [\text{tr}(\mathbf{H}_k \Sigma_{\mathbf{e}})]_k^T, \end{aligned}$$

wobei $\kappa = \alpha^2 (n + \lambda) - n$ substituiert wurde (Wan und Merwe 2000). Für $n = 1$ lässt sich Gl. A.16 weiter zusammenfassen (Wang und Zhao 2018), d. h.,

$$\text{Var} \{\hat{\mathbf{u}}\} \approx \mathbf{J} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}} \mathbf{J}^T + \frac{\beta + \alpha^2 \lambda}{4} \sum_{i=1}^n [\text{tr} (\mathbf{H}_i \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}} \mathbf{H}_i \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}})]_{j,k}.$$

Wird $\lambda = 0$ und $\beta = 2$ gewählt (Gustafsson und Hendeby 2012), so lautet die Dispersion

$$\text{Var} \{\hat{\mathbf{u}}\} \approx \mathbf{J} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}} \mathbf{J}^T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\text{tr} (\mathbf{H}_i \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}} \mathbf{H}_i \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}})]_{j,k}. \quad (\text{A.17})$$

Diese stimmt mit der Dispersion bzw. der Varianz der TS2 überein, wie ein Vergleich mit den Gl. 2.7, 2.13b zeigt. Für $n > 1$ approximiert die UT hingegen nur die Lösung der TS2 (Gustafsson und Hendeby 2008, 2012).

A.3 Newtonverfahren

Das Newtonverfahren zählt zu den wichtigsten Verfahren in der numerischen Optimierung und bestimmt das Minimum einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion (Geiger und Kanzow 1999, S. 83)

$$\min \Omega (\hat{\mathbf{u}}) \quad (\text{A.18})$$

durch iteratives Lösen der (lokalen) quadratischen Approximation, siehe auch Gl. A.1,

$$\Phi_k (\hat{\mathbf{u}}) = \Omega (\mathbf{u}^k) + \nabla^T \Omega (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^k) + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^k)^T \nabla^2 \Omega (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^k). \quad (\text{A.19})$$

Hierbei sind $\nabla \Omega$ und $\nabla^2 \Omega$ der Gradient und die symmetrische Hessematrix, die die ersten bzw. zweiten partiellen Ableitungen von Ω an der aktuellen Entwicklungsstelle $\mathbf{u}^k$ enthalten. Der Vektor $\mathbf{u}^k$ repräsentiert die Lösung des k -ten Iterationsschrittes. Erfüllt der Gradient $\nabla \Phi_k$ die notwendige Bedingung

$$\nabla \Phi_k = \mathbf{0} \quad (\text{A.20})$$

und ist weiterhin die Hessematrix positiv definit (hinreichende Bedingung), so ist $\hat{\mathbf{u}}$ ein stationärer Punkt und ein lokales Minimum der quadratischen Ersatzfunktion

$$\min \Phi_k (\hat{\mathbf{u}}). \quad (\text{A.21})$$

Der Gradient der Funktion Φ_k an der Stelle $\mathbf{u}^k$ ist gegeben durch

$$\nabla \Phi_k = \nabla \Omega + \nabla^2 \Omega (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^k) \quad (\text{A.22})$$

und liefert mittels Gl. A.20 das zu lösende lineare Gleichungssystem, welches auch als Newtongleichung bezeichnet wird (Geiger und Kanzow 1999, S. 84),

$$\nabla^2 \Omega \Delta \mathbf{u} = -\nabla \Omega, \quad (\text{A.23})$$

wobei $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}$ die um den Zuschlagsvektor $\Delta \mathbf{u}$ akkumulierte Entwicklungsstelle für den $(k+1)$ -ten Iterationsschritt darstellt. Die Iteration kann abgebrochen werden, wenn die notwendige Bedingung

$$\nabla \Omega = \mathbf{0} \quad (\text{A.24})$$

für das in Gl. A.18 gesuchte Minimum erfüllt ist.

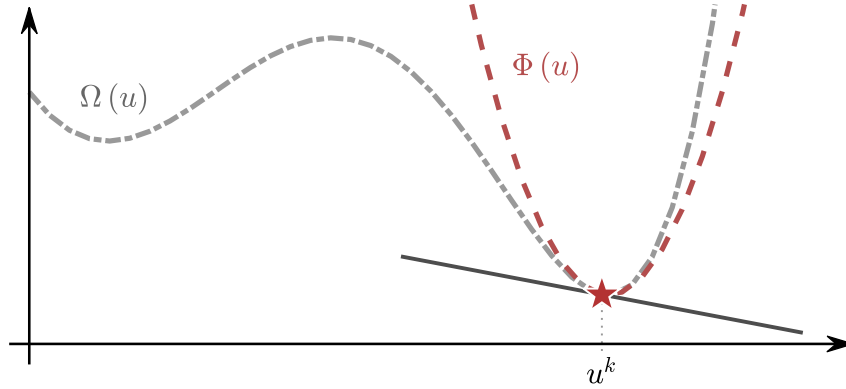


Abbildung A.1: Eindimensionale Skalarfunktion $\Omega(u)$, die als graue Strichpunktlinie visualisiert ist, und deren quadratische Approximation $\Phi(u)$, welche als gestrichelte rote Linie dargestellt ist. Für die Entwicklungsstelle u^k ist die Tangente in Ω angegeben, deren Anstieg im Minimum null ist, sodass die notwendige Optimalbedingung erfüllt wird.

Abbildung A.1 zeigt exemplarisch für die eindimensionale Skalarfunktion $\Omega(u)$ die zugehörige quadratische Approximation $\Phi(u)$ an der Entwicklungsstelle u^k . Die notwendige Bedingung in Gl. A.24 ist erfüllt, wenn der Anstieg der dargestellten Tangente null ist.

Zur Initialisierung des Newtonverfahrens sind geeignete Startwerte $\mathbf{u}^{k=0}$ vorzugeben, die bereits in der Nähe des Optimums liegen müssen. Ist diese Bedingung erfüllt, ist die Hessematrix positiv definit und die Newtongleichung konvergiert superlinear bzw. quadratisch (Geiger und Kanzow 1999, S. 84f; Nocedal und Wright 2006, S. 44f). Ist die Startlösung hingegen nicht in unmittelbarer Umgebung des Optimums, so sind geeignete Strategien zur Schrittweitensteuerung (Geiger und Kanzow 1999, S. 45ff) oder Trust-Region-Verfahren (Geiger und Kanzow 1999, S. 286ff) zu implementieren, auf modifizierte Verfahren zurückzugreifen, die eine positiv definite Hessematrix garantieren – wie bspw. der Levenberg-Marquardt-Algorithmus (Levenberg 1944; Marquardt 1963) –, oder ein Quasi-Newtonverfahren anzuwenden, welches die Approximation einer positiv definiten Hessematrix inkludiert, bspw. die nach den Mathematikern Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno benannte BFGS-Methode (Nocedal und Wright 2006, S. 135ff). Details zu den einzelnen Verfahren können der Standardliteratur zur numerischen Optimierung entnommen werden, sodass an dieser Stelle auf eine ausführliche Beschreibung verzichtet wird und vorausgesetzt sei, dass eine hinreichend genaue Startlösung $\mathbf{u}^{k=0}$ vorliegt.

A.4 Blockmatrixreduktion

Aufgrund der möglichen Größe eines zu lösenden Gleichungssystems ist eine direkte Lösung u. U. unwirtschaftlich. Insbesondere ist man häufig nur an einem kleinen Teil der geschätzten Modellparameter interessiert, während die übrigen lediglich als Hilfsgrößen fungieren. In der geodätischen Netzausgleichung wird bspw. für Richtungssatzmessungen eine Orientierungsunbekannte in die Modellgleichungen eingeführt, die die Differenz zwischen der Nullstellung des Teilkreises und der X -Achse des gewählten Datums beschreibt. Dieser Parameter ist zwar zur sachgerechten Modellierung notwendig, bleibt in der weiteren Analyse aber meist unberücksichtigt. Es kann daher zweckdienlich sein, eine explizite Bestimmung von Hilfsgrößen durch eine implizite Darstellung zu umgehen (Höpcke 1980, S. 94ff; Caspary und Wichmann 2007, S. 130ff). Untersuchungen von Stark (1984) zeigen, dass hierdurch der Rechen- und Ressourcenaufwand z. T. deutlich reduziert werden kann.

Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{m}$ mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{M}$, dem Absolutgliedvektor $\mathbf{m}$ und dem Vektor der Modellparameter $\mathbf{u}$ lässt sich in ein äquivalentes, reduziertes Gleichungssystem $\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{m}}$ umformen. Hierzu wird $\mathbf{M}$ in Blockmatrizen zerlegt, sodass quadratische Diagonalblöcke entstehen. Diese Diagonalblöcke seien weiterhin regulär, sodass ihre Inverse existiert. Die Zerlegung der Vektoren $\mathbf{m}$ und $\mathbf{u}$ erfolgt sachlogisch. Das auf vier Blöcke aufgeteilte Gleichungssystem lautet (Zurmühl und Falk 1984, S. 297ff)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Ausgehend von einem linearen Gleichungssystem, welches durch entsprechende Zeilen- und Spaltensortierung die zu eliminierenden Parameter $\mathbf{u}_2$ am Ende des Parametervektors enthält, ergibt sich die zweite Zeile in Gl. A.25 zu

$$\mathbf{M}_{22}\mathbf{u}_2 = \mathbf{m}_2 - \mathbf{M}_{21}\mathbf{u}_1 \quad (\text{A.26})$$

bzw. nach Multiplikation beider Seiten mit $\mathbf{M}_{22}^{-1}$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{m}_2 - \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21}\mathbf{u}_1. \quad (\text{A.27})$$

Durch Substitution von Gl. A.27 in die erste Zeile des ursprünglichen Gleichungssystems, siehe Gl. A.25, ergibt sich die reduzierte Gleichung zu

$$\mathbf{M}_{11}\mathbf{u}_1 + \mathbf{M}_{12}(\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{m}_2 - \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21}\mathbf{u}_1) = \mathbf{m}_1, \quad (\text{A.28})$$

welche sich durch

$$(\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21})\mathbf{u}_1 = \mathbf{m}_1 - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{m}_2 \quad (\text{A.29})$$

zusammenfassen lässt.

Durch Setzen von

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21}, \quad (\text{A.30a})$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_1 - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{m}_2, \quad (\text{A.30b})$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1, \quad (\text{A.30c})$$

ergibt sich die o. g. Kurzschreibweise des linearen Gleichungssystems

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{m}}. \quad (\text{A.31})$$

Die Parameter $\mathbf{u}_2$ treten hierbei nur noch in impliziter Form auf, können jedoch mit Gl. A.27 stets aus der reduzierten Lösung explizit bestimmt werden.

A.5 Erwartungswert und Dispersion der Parameterschätzung (Box 1971)

Gemäß Gl. 3.35 ist die notwendige Bedingung für das Minimum in Gl. 3.28 an der Stelle $\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}$ gegeben durch (Koch 2007, S. 65)

$$\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} (1 - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.32})$$

Durch Einsetzen von Gl. 3.30, 3.35 folgt weiterhin

$$\left(\mathbf{J}_{\mathbf{x}} + [\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x},i}] \right)^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \left(\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x},i} \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}]_i \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.33})$$

sowie nach weiterer Umformung und unter Berücksichtigung von Gl. 3.31

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} (\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{e}}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \left(\mathbf{J}_{\mathbf{x}} [\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_{\epsilon,i} \tilde{\mathbf{e}}]_i + [\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{J}_{\epsilon}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x},i} \mathbf{J}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{e}}]_i \right) \\ &\quad + [\mathbf{H}_{\mathbf{x},i} \mathbf{J}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{e}}]_i \mathbf{W}_{\mathbf{e}} (\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{e}}) \\ &\quad - \frac{1}{2} [\mathbf{H}_{\mathbf{x},i} \mathbf{J}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{e}}]_i \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \left(\mathbf{J}_{\mathbf{x}} [\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_{\epsilon,i} \tilde{\mathbf{e}}]_i + [\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{J}_{\epsilon}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x},i} \mathbf{J}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{e}}]_i \right). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Werden zunächst nur die linearen Anteile der Beobachtungsabweichungen $\tilde{\mathbf{e}}$ in Gl. A.34 betrachtet, d. h.,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} (\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{e}}) \\ &= \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \right)^{-1} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{e}}, \end{aligned}$$

so ergibt sich die Matrix der linearen Transformation in Gl. 3.31 zu

$$\mathbf{J}_{\epsilon} = \left(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \right)^{-1} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}}. \quad (\text{A.35})$$

Aus dem quadratischen Anteil der Beobachtungsabweichungen $\tilde{\mathbf{e}}$ in Gl. A.34

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & -\frac{1}{2} \mathbf{J}_x^T \mathbf{W}_e \left(\mathbf{J}_x \left[\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_{\epsilon,i} \tilde{\mathbf{e}} \right]_i + \left[\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{J}_\epsilon^T \mathbf{H}_{x,i} \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}} \right]_i \right) \\ & + \left[\mathbf{H}_{x,i} \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}} \right]_i \mathbf{W}_e (\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_x \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}}) \end{aligned}$$

resultiert unter Berücksichtigung von Gl. A.35

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_{\epsilon,i} \tilde{\mathbf{e}} \right]_i = & -\mathbf{J}_\epsilon \left[\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{J}_\epsilon^T \mathbf{H}_{x,i} \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}} \right]_i \\ & + 2 \left(\mathbf{J}_x^T \mathbf{W}_e \mathbf{J}_x \right)^{-1} \left[\mathbf{H}_{x,i} \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}} \right]_i \mathbf{W}_e (\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_x \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}}). \end{aligned}$$

Werden die Erwartungswerte der einzelnen Terme betrachtet, d. h.,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left[\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{H}_{\epsilon,i} \tilde{\mathbf{e}} \right]_i \right\} = & -\mathbf{J}_\epsilon \mathbb{E} \left\{ \left[\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{J}_\epsilon^T \mathbf{H}_{x,i} \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}} \right]_i \right\} \\ & + 2 \left(\mathbf{J}_x^T \mathbf{W}_e \mathbf{J}_x \right)^{-1} \mathbb{E} \left\{ \left[\mathbf{H}_{x,i} \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}} \right]_i \mathbf{W}_e (\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{J}_x \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

so ergibt sich mit den Gl. 2.12

$$\left[\text{tr} \left(\mathbf{H}_{\epsilon i} \mathbf{W}_e^{-1} \right) \right]_i = -\mathbf{J}_\epsilon \left[\text{tr} \left(\mathbf{J}_\epsilon \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{J}_\epsilon^T \mathbf{H}_{x i} \right) \right]_i \quad (\text{A.37a})$$

bzw.

$$\left[\text{tr} \left(\mathbf{H}_{\epsilon i} \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{H}_{\epsilon j} \mathbf{W}_e^{-1} \right) \right]_{i,j} = \mathbf{J}_\epsilon \left[\text{tr} \left(\mathbf{J}_\epsilon \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{J}_\epsilon^T \mathbf{H}_{x i} \mathbf{J}_\epsilon \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{J}_\epsilon^T \mathbf{H}_{x j} \right) \right]_{i,j} \mathbf{J}_\epsilon^T. \quad (\text{A.37b})$$

Hierbei wurde die Invarianz der Spur eines Matrizenproduktes zweier nicht notwendigerweise quadratischer Matrizen, einer $(o \times p)$ -Matrix $\mathbf{M}$ und einer $(p \times o)$ -Matrix $\mathbf{N}$, bezüglich eines Faktorentauschs ausgenutzt (Zurmühl und Falk 1984, S. 22), d. h.,

$$\text{tr}(\mathbf{MN}) = \text{tr}(\mathbf{NM}). \quad (\text{A.38})$$

Ein Beweis, dass der zweite Summand $\left[\mathbf{H}_{x,i} \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}} \right]_i \mathbf{W}_e (\mathbf{I} - \mathbf{J}_x \mathbf{J}_\epsilon) \tilde{\mathbf{e}}$ der rechten Seite in Gl. A.36 einen Erwartungswert von null besitzt, soll nachfolgend in Anlehnung an Box (1971) skizziert werden. Mittels des Extraktionsvektors ϵ_j , der an der j -ten Position mit einer Eins und ansonsten mit Nullen besetzt ist, lautet die j -te Zeile

$$\epsilon_j^T \left[\mathbf{H}_{x,i} \mathbf{J}_\epsilon \tilde{\mathbf{e}} \right]_i \mathbf{W}_e (\mathbf{I} - \mathbf{J}_x \mathbf{J}_\epsilon) \tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{J}_\epsilon^T \left[\mathbf{H}_{x,i} \epsilon_j \right]_i \mathbf{W}_e (\mathbf{I} - \mathbf{J}_x \mathbf{J}_\epsilon) \tilde{\mathbf{e}}.$$

Durch Anwendung von Gl. 2.12a folgt für dessen Erwartungswert

$$\mathbb{E} \left\{ \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{J}_\epsilon^T \left[\mathbf{H}_{x,i} \epsilon_j \right]_i \mathbf{W}_e (\mathbf{I} - \mathbf{J}_x \mathbf{J}_\epsilon) \tilde{\mathbf{e}} \right\} = \text{tr} \left(\mathbf{J}_\epsilon^T \left[\mathbf{H}_{x,i} \epsilon_j \right]_i \mathbf{W}_e (\mathbf{I} - \mathbf{J}_x \mathbf{J}_\epsilon) \mathbf{W}_e^{-1} \right).$$

Da nach Gl. A.38 allgemein die Spur eines Matrizenproduktes bezüglich eines Faktorentauschs invariant ist, ergibt sich für den Erwartungswert des zweiten Summanden der rechten Seite in Gl. A.36 unter Berücksichtigung von Gl. A.35

$$\text{tr} \left(\left[\mathbf{H}_{x,i} \epsilon_j \right]_i \mathbf{W}_e (\mathbf{I} - \mathbf{J}_x \mathbf{J}_\epsilon) \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{J}_\epsilon^T \right) = 0. \quad (\text{A.39})$$

Wie Gl. A.37 zeigt, ist das explizite Aufstellen der Hessematrix $\mathbf{H}_\epsilon$ zur Bestimmung des Erwartungswertes und der Dispersion in Gl. 3.34 nicht notwendig. Gemäß

Gl. 3.34 ergeben sich Erwartungswert und Dispersion von $\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}$ durch Einsetzen der Gl. A.35, A.37 und unter Berücksichtigung von $\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{J}_{\epsilon} \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{-1} \mathbf{J}_{\epsilon}^T = \left(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \right)^{-1}$ zu

$$\mathbb{E} \{ \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \} = -\frac{1}{2} \mathbf{J}_{\epsilon} [\text{tr} (\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{H}_{\mathbf{x},i})]_i, \quad (\text{A.40a})$$

$$\text{Var} \{ \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \} = \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2} \mathbf{J}_{\epsilon} [\text{tr} (\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{H}_{\mathbf{x},i} \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{H}_{\mathbf{x},j})]_{ij} \mathbf{J}_{\epsilon}^T. \quad (\text{A.40b})$$

Abkürzungs- und Akronymverzeichnis

DGFI	Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut
DORIS	Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite
DTRF	DGFI Terrestrial Reference Frame
EKF	Extended Kalman Filter
GEOSS	Global Earth Observing System of Systems
GGOS	Global Geodetic Observing System
GHM	Gauß-Helmert-Modell
GMM	Gauß-Markov-Modell
GNSS	Global Navigation Satellite System
GRASP	Geodetic Reference Antenna in Space
GUM	Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement
IAG	International Association of Geodesy
IDS	International DORIS Service
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
IGS	International GNSS Service
ILRS	International Laser Ranging Service
IRP	Invarianter Referenzpunkt
ITRF	International Terrestrial Reference Frame
ITRS	International Terrestrial Reference System
IVS	International VLBI Service for Geodesy and Astrometry
JPL	Jet Propulsion Laboratory
JTRF	JPL Terrestrial Reference Frame
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
LLR	Lunar Laser Ranging
MCM	Monte-Carlo-Methode
MUT	Modified Unscented Transformation
SINEX	Software Independent Exchange
SLR	Satellite Laser Ranging
SQP	Sequentielle Quadratische Programmierung
SSUT	Spherical Simplex Unscented Transformation
SUT	Standard Unscented Transformation
TRF	Terrestrial Reference Frame
TRS	Terrestrial Reference System

TS1	Taylorreihe mit Gliedern 1. Ordnung
TS2	Taylorreihe mit Gliedern 2. Ordnung
TS3	Taylorreihe mit Gliedern 3. Ordnung
UKF	Unscented Kalman Filter
UN	United Nations
UT	Unscented Transformation
VGOS	VLBI2010 Global Observing System
VLBI	Very Long Baseline Interferometry
VTRF	VLBI Terrestrial Reference Frame

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1:	Globale Verteilung der berücksichtigten Stationen der vier geodätischen Raumverfahren im ITRF2014.	4
Abbildung 1.2:	Schematischer Aufbau und Messprinzip eines SLR-Teleskops. . . .	7
Abbildung 1.3:	Schematische Darstellung des Messprinzips von VLBI-Radioteleskopen.	8
Abbildung 1.4:	Schematische Darstellung von Montierungsarten für Radioteleskope. Jede Montierung besteht aus einer primären und einer sekundären Achse, deren Schnittpunkt der geometrische Referenzpunkt ist. Schneiden sich beide Achsen konstruktionsbedingt nicht, so existiert ein Achsenoffset, und der geometrische Referenzpunkt resultiert aus der orthogonalen Projektion der Sekundärachse auf die Primärachse.	9
Abbildung 1.5:	Schematische Darstellung der resultierenden Signallaufzeitenänderung $\Delta\tau$ infolge von Deformationen am Reflektor eines VLBI-Radioteleskops.	12
Abbildung 2.1:	Konvolution von m_c unabhängigen gleichverteilten Zufallsgrößen $X_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$	19
Abbildung 2.2:	Bestimmung der Teilstrecke d (rot) einer Prüfstrecke aus der beobachteten Strecke s (dunkelrot) unter Berücksichtigung einer Querabweichung q (dunkelgrau).	24
Abbildung 2.3:	Numerische Konvolution von m_c unabhängigen gleichverteilten Zufallsgrößen $X_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$	26
Abbildung 2.4:	Nichtlineare Konvertierung von polaren Beobachtungen in kartesische Koordinaten, wobei die Strecke $\tilde{s}$ als fehlerfrei angenommen wurde und lediglich der Azimutwinkel ϕ eine normalverteilte Zufallsgröße darstellt.	28
Abbildung 2.5:	Unsachgemäße Anwendung der Monte-Carlo-Methode auf ein nicht-lineares Modell.	30
Abbildung 2.6:	Unmaßstäbliche Darstellung der Messkonfiguration zur Bestimmung der Teilstrecke einer Prüfstrecke unter Berücksichtigung einer möglichen Querabweichung.	35
Abbildung 3.1:	Visualisierung der geschätzten Regressionsparabel, die sich nach sieben Iterationen mittels SQP ergibt, durch eine dunkelgraue Strichpunktlinie.	45

Abbildung 3.2:	Bias des Modellparameters $\hat{a}$ der Regressionsparabel in Abhängigkeit des gewählten stochastischen Modells σ_0	60
Abbildung 3.3:	Geschätzte Varianz des Modellparameters a der Regressionsparabel in Abhängigkeit des gewählten stochastischen Modells σ_0	60
Abbildung 4.1:	Schematische Darstellung der Referenzpunktbestimmung mittels Kugeln.	65
Abbildung 4.2:	Schematische Darstellung der Referenzpunktbestimmung mittels rotationssymmetrischem Torus.	66
Abbildung 4.3:	Schematische Darstellung der Referenzpunktbestimmung mittels Primärachsenkreisen.	68
Abbildung 4.4:	Schematische Darstellung der Referenzpunktbestimmung mittels Primär- und Sekundärachsenkreisen.	71
Abbildung 4.5:	Schematische Darstellung des funktionalen Zusammenhangs zur Bestimmung des Referenzpunktes $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ unter Berücksichtigung des Achsenoffsets e_{AO} und der Nichtorthogonalität zwischen der primären und sekundären Achse γ	75
Abbildung 4.6:	Gegenüberstellung der Variationen der IRP I und IRP II Ergebnisse für den ILRS-Referenzpunkt und den Abstand zwischen beiden Teleskopachsen vom Satellite Observing System Wettzell.	85
Abbildung 4.7:	Lagedarstellung der Netzkonfiguration für das Simulationsnetz, welches aus vier Standpunkten und 192 beobachteten Positionen am Teleskop besteht.	88
Abbildung 4.8:	Korrelationskoeffizient ρ in Abhängigkeit des Verhältnisses zwischen dem Punktabstand s und der charakteristischen Distanz d_c	90
Abbildung 4.9:	Parameterverzerrung bei Verwendung der Taylorreihe mit Gliedern 1. Ordnung. Die Verzerrungen sind für den Referenzpunkt $\mathbf{P}_{\text{IRP}}$ und den Abstand e_{AO} zwischen beiden Teleskopachsen in Abhängigkeit von fünf verschiedenen Beobachtungskonfigurationen und zehn unterschiedlich gewählten σ_0 dargestellt.	91
Abbildung 4.10:	Parameterbias für die horizontalen Koordinatenkomponenten des Referenzpunktes bei Verwendung der Taylorreihe mit Gliedern 1. Ordnung. Die Verzerrungen für den Referenzpunkt sind im Maßstab 50 Mio : 1 in Abhängigkeit von fünf verschiedenen Beobachtungskonfigurationen und zehn unterschiedlich gewählten σ_0 dargestellt.	92
Abbildung 4.11:	Angenommene a-priori Messunsicherheiten für Streckenbeobachtungen σ_S und Winkelbeobachtungen $\sigma_{\text{Hz,V}}$ zur Bestimmung der Dispersionsmatrizen der Markenpositionen $\mathbf{P}_{i,j}$ am Teleskop. . . .	94
Abbildung 4.12:	Geschätzte Parameterverzerrung für Referenzpunkt und Achsenoffset in Abhängigkeit von σ_S und $\sigma_{\text{Hz,V}}$	94

Abbildung 4.13:	Geschätzte Parameterverzerrungen für die horizontalen Koordinatenkomponenten des Referenzpunktes für Messkonfigurationen von unterschiedlichen Standpunkten.	95
Abbildung 4.14:	Geschätzte Parameterverzerrung für die vertikale Koordinatenkomponente des Referenzpunktes in Abhängigkeit von σ_S und $\sigma_{Hz,V}$ sowie der Anzahl der verwendeten Standpunkte.	96
Abbildung 4.15:	Schematische Darstellung der von einem Standpunkt aus durchführbaren Visuren zu einer Marke $\mathbf{p}_i$, die sich für die $j = 1, 2$ Teleskoporientierungen ergeben, mit zugehörigen Konfidenzbereichen.	97
Abbildung 5.1:	Schnitt durch ein gregorianisches Sekundär-Fokus-Paraboloid mit Signalverläufen.	102
Abbildung 5.2:	Schnitt durch ein cassegrainisches Sekundär-Fokus-Paraboloid mit Signalverläufen.	103
Abbildung 5.3:	Schematische Darstellung drei der geometrischen Deformationsanteile $\Delta F(\omega)$, $\Delta V(\omega)$ und $\Delta R(\omega)$ zur Modellierung der Signalwegänderung $\Delta L(\omega)$ in Abhängigkeit des Sekundärwinkels ω nach Clark und Thomsen (1988).	104
Abbildung 5.4:	Schnitt durch ein gregorianisches Ring-Fokus-Paraboloid mit Sekundärfokus und Signalverläufen.	109
Abbildung 5.5:	Gegenüberstellung der Formabweichungen ∇ eines Ring-Fokus-Paraboloids für die Bedingung $a_1 = a_2$ bzw. $a_1 \neq a_2$	111
Abbildung 5.6:	Schematische Darstellung der Geometrie des Subreflektors als Schnitt durch einen rotationssymmetrischen elliptischen Torus. . .	113
Abbildung 5.7:	Schematische Darstellung des Signalweges der rechten Hälfte des Subreflektor Γ eines Ring-Fokus-Paraboloids.	114
Abbildung 5.8:	Vergleich der resultierenden Strahllängenänderungen in Abhängigkeit von ΔR	115
Abbildung 5.9:	Differenz $\mathbf{h}(\mathbf{P}) - \mathbf{h}'(\mathbf{P})$ in Abhängigkeit des Einfallswinkels γ für drei verschiedene ΔR	116
Abbildung 5.10:	Normierte Illuminationsfunktion $\mathbf{I}_n$ für ONSA13NE in Abhängigkeit vom Einfallswinkel γ	117
Abbildung 5.11:	Verteilung der synthetisch erzeugten Stichprobe, bestehend aus fünf konzentrischen Kreisen mit jeweils 20 Punkten.	118
Abbildung 5.12:	Resultierende Brennweiten $\hat{F}$ (oben) und Zylinderradien $\hat{r}$ (unten) des Ring-Fokus-Paraboloids für unterschiedlich gewählte Varianzfaktoren σ_0^2	119
Abbildung 5.13:	Differenz zwischen den TS1- und TS2-Ergebnissen für die Modellparameter $\hat{F}$ (oben) und $\hat{r}$ (unten) in Abhängigkeit der Anzahl der konzentrischen Kreise. Da jeder Kreis aus 20 äquidistanten Punkten besteht, ergeben sich Konfigurationen zwischen 80 und 1 500 Punkten.	121

Abbildung 6.1:	Ablaufdiagramm mit Zusammenfassungen zur Bestimmung des geometrischen Referenzpunktes und zusätzlicher Teleskopparameter unter Verwendung des entwickelten Transformationsmodells nach Gl. 4.16 sowie der vorgeschlagenen Lösungsstrategien IRP I bzw. IRP II.	130
Abbildung 6.2:	Ablaufdiagramm mit Zusammenfassungen zur Bestimmung der Modellparameter eines Ring-Fokus-Paraboloids mit dem hergeleiteten Oberflächenmodell nach Gl. 5.15, welche u. a. den geometrischen Anteil der resultierenden Signalwegvariationen parametrieren. . .	132
Abbildung A.1:	Eindimensionale Skalarfunktion $\Omega(u)$, die als graue Strichpunktlinie visualisiert ist, und deren quadratische Approximation $\Phi(u)$, welche als gestrichelte rote Linie dargestellt ist. Für die Entwicklungsstelle u^k ist die Tangente in Ω angegeben, deren Anstieg im Minimum null ist, sodass die notwendige Optimalbedingung erfüllt wird.	139

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1:	Gegenüberstellung der numerischen Ergebnisse einer mit $\sigma_s = 1$ cm gemessenen Teilstrecke $s = 1$ m einer Prüfstrecke und einer angenommenen Unsicherheit in der Querabweichung von $\sigma_q = 10\sigma_s$ für die Taylorreihe mit Gliedern 1. und 2. Ordnung sowie die Monte-Carlo-Methode, die Standard Unscented Transformation und die Spherical Simplex Unscented Transformation. Für die SSUT wurde ein mittleres Gewicht von $w_0 = 0,5$ gewählt.	35
Tabelle 3.1:	In (Lenzmann und Lenzmann 2004) gegebene kartesische Koordinaten zur Schätzung des Parameters einer Parabel, deren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Die Koordinatenkomponenten x_i bzw. y_i sind unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen.	42
Tabelle 3.2:	Mittels SQP geschätzte Parameter $\hat{\mathbf{u}}^k$ der unbekannten Parameter der Regressionsparabel für jeden Iterationsschritt k . In der mit einer Raute (#) gekennzeichneten letzten Tabellenzeile ist zum Vergleich die von Lenzmann und Lenzmann (2004) publizierte Lösung angegeben.	44
Tabelle 3.3:	Mittels Gauß-Helmert-Modell geschätzte Parameter $\hat{\mathbf{u}}^k$ der unbekannten Parameter der Regressionsparabel für jeden Iterationsschritt k . In der mit einer Raute (#) gekennzeichneten letzten Tabellenzeile ist zum Vergleich die von Lenzmann und Lenzmann (2004) publizierte Lösung angegeben.	49
Tabelle 4.1:	Parameter zur Definition der Teleskopgeometrie zur Abschätzung der Verzerrung der Schätzwerte aufgrund der Nichtlinearität im funktionalen Modell.	87
Tabelle 4.2:	Positionen $\mathbf{p}_i$ der Marken im Teleskopsystem zur Abschätzung der Verzerrung der Schätzwerte aufgrund der Nichtlinearität im funktionalen Modell.	88
Tabelle 4.3:	Vergleich der einzelnen Methoden zur Referenzpunktbestimmung hinsichtlich der Berücksichtigung von konstruktionsbedingten Abweichungen des Teleskops im funktionalen Modell und bezüglich Einschränkungen bei der messtechnischen Umsetzung. Während ein Pluszeichen (+) symbolisiert, dass das Vergleichskriterium durch die Methode erfüllt wird, zeigt ein Minuszeichen (-), dass die Methode das Kriterium nicht erfüllt.	99

Tabelle 5.1:	Resultierende Differenzen (Bias) zwischen der MCM und den Lösungen der TS1, der TS2 sowie der UT für die beiden Formparameter eines Ring-Fokus-Paraboloids, die Brennweite $\hat{F}$ (links) und den Zylinderradius $\hat{r}$ (rechts), in Abhängigkeit des Varianzfaktors σ_0^2 . Alle Werte sind in mm angegeben.	120
Tabelle A.1:	Zentrale Momente der Normalverteilung $E\{\tilde{e}^k\}$ in Abhängigkeit der Ordnungszahl k , siehe auch (Wolf 1968, S. 490f).	136

Literatur

- Abbondanza, C., Chin, T. M., Gross, R. S., Heflin, M. B., Parker, J. W., Soja, B. S., Dam, T. van und Wu, X. (2017). „JTRF2014, the JPL Kalman filter and smoother realization of the International Terrestrial Reference System“. In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 122(10), S. 8474–8510. DOI: 10.1002/2017jb014360.
- Abbondanza, C. und Sarti, P. (2010). „Effects of illumination functions on the computation of gravity-dependent signal path variation models in primary focus and Cassegrainian VLBI telescopes“. In: *Journal of Geodesy* 84(8), S. 515–525. DOI: 10.1007/s00190-010-0389-z.
- Abbondanza, C. und Sarti, P. (2012). „Impact of network geometry, observation schemes and telescope structure deformations on local ties: simulations applied to Sardinia Radio Telescope“. In: *Journal of Geodesy* 86(3), S. 181–192. DOI: 10.1007/s00190-011-0507-6.
- Altamimi, Z. (2005). „ITRF and Co-location Sites“. In: *Proceedings of the IERS Workshop on site co-location*. Hrsg. von B. Richter, W. R. Dick und W. Schwegmann. Bd. IERS Technical Note. 33. International Earth Rotation und Reference Systems Service. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, S. 8–15. URL: <http://www.iers.org/TN33> (besucht am 14. Dez. 2019).
- Altamimi, Z. und Collilieux, X. (2009). „IGS contribution to the ITRF“. In: *Journal of Geodesy* 83(3-4), S. 375–383. DOI: 10.1007/s00190-008-0294-x.
- Altamimi, Z., Collilieux, X. und Métivier, L. (2012). *Analysis and results of ITRF2008*. IERS Technical Note 37. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main: International Earth Rotation und Reference Systems Service (IERS). URL: <http://www.iers.org/TN37> (besucht am 14. Dez. 2019).
- Altamimi, Z., Rebischung, P., Collilieux, X., Métivier, L. und Chanard, K. (2018). *Roadmap toward ITRF2020*. Techn. Ber. Washington DC: AGU Fall Meeting 2018.
- Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L. und Collilieux, X. (2017). *Analysis and results of ITRF2014*. IERS Technical Note 38. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main: International Earth Rotation und Reference Systems Service (IERS). URL: <http://www.iers.org/TN38> (besucht am 14. Dez. 2012).
- Altamimi, Z., Collilieux, X., Legrand, J., Garayt, B. und Boucher, C. (2007). „ITRF2005: A new release of the International Terrestrial Reference Frame based on time series of station positions and Earth Orientation Parameters“. In: *Journal of Geophysical Research* 112(B09401). DOI: 10.1029/2007jb004949.
- Altamimi, Z., Collilieux, X. und Métivier, L. (2011). „ITRF2008: an improved solution of the international terrestrial reference frame“. In: *Journal of Geodesy* 85(8), S. 457–473. DOI: 10.1007/s00190-011-0444-4.
- Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L. und Collilieux, X. (2016). „ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions“. In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 121(8), S. 6109–6131. DOI: 10.1002/2016jb013098.
- Amiri-Simkooei, A. R. (2016). „Non-negative least-squares variance component estimation with application to GPS time series“. In: *Journal of Geodesy* 90(5), S. 451–466. DOI: 10.1007/s00190-016-0886-9.

- Artz, T., Springer, A. und Nothnagel, A. (2014). „A complete VLBI delay model for deforming radio telescopes: the Effelsberg case“. In: *Journal of Geodesy* 88(12), S. 1145–1161. DOI: 10.1007/s00190-014-0749-1.
- Baarda, W. (1968). *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*. Bd. 2. Publications on Geodesy 5. Delft: Netherlands Geodetic Commission. ISBN: 978-90-6132-209-2.
- Baarda, W. (1981). *S-Transformations and Criterion Matrices*. 2. Aufl. Bd. 5. Publications on Geodesy 1. Netherlands Geodetic Commission. ISBN: 978-90-6132-218-4.
- Baars, J. W. M. (2007). *The Paraboloidal Reflector Antenna in Radio Astronomy and Communication – Theory and Practice*. Astrophysics and Space Science Library 348. New York: Springer. ISBN: 978-0-387-69733-8. DOI: 10.1007/978-0-387-69734-5.
- Bachmann, S., Thaller, D., Roggenbuck, O., Lösler, M. und Messerschmitt, L. (2016). „IVS contribution to ITRF2014“. In: *Journal of Geodesy* 90(7), S. 631–654. DOI: 10.1007/s00190-016-0899-4.
- Bähr, H.-G. (1985). „Second Order Effects in the Gauß-Helmert Model“. In: *7th International Symposium on Geodetic Computations, Krakau, Polen*.
- Bar-Sever, Y., Haines, B., Bertiger, W., Desai, S. und Wu, S. (2009). „Geodetic Reference Antenna in Space (GRASP) – A Mission to Enhance Space-based Geodesy“. In: *Proceedings of the Committee on Space Research (COSPAR) Colloquium: Scientific and Fundamental Aspects of the Galileo Program*. Padua.
- Becker, S. und Fischer, K. (2003). „Wiederholungsmessungen im lokalen Vermessungsnetz der Fundamentalstation Wettzell“. unveröffentlicht. Diplomarbeit. Fachhochschule Würzburg.
- Bergstrand, S., Collilieux, X., Dawson, J., Haas, R., Long, J., Pavlis, E. C., Saunier, J., Schmid, R. und Nothnagel, A. (2014). *Resolution on the nomenclature of space geodetic reference points and local tie measurements*. IAG/IERS-Working Group on Site Survey und Co-location. URL: https://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/WorkingGroups/SiteSurvey/Bergstrand_etal_REFAG2014_TieResolution.pdf (besucht am 14. Dez. 2019).
- Bergstrand, S., Herbertsson, M., Rieck, C., Spetz, J., Svantesson, C.-G. und Haas, R. (2018). „A gravitational telescope deformation model for geodetic VLBI“. In: *Journal of Geodesy*. DOI: 10.1007/s00190-018-1188-1.
- Blewitt, G., Altamimi, Z., Davis, J., Gross, R., Kuo, C.-Y., Lemoine, F. G., Moore, A. W., Neilan, R. E., Plag, H.-P., Rothacher, M., Shum, C. K., Sideris, M. G., Schöne, T., Tregoning, P. und Zerbini, S. (2010). „Geodetic Observations and Global Reference Frame Contributions to Understanding Sea-Level Rise and Variability“. In: *Understanding Sea-Level Rise and Variability*. Hrsg. von J. A. Church, P. L. Woodworth, T. Aarup und W. S. Wilson. Wiley-Blackwell, S. 256–284. DOI: 10.1002/9781444323276.ch9.
- Böck, R. (1961). „Allgemeinste Formulierung der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadratsummen“. In: *zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen* 86(2), S. 43–45, 98–106. ISSN: 0044-3689.
- Bopp, H. und Krauss, H. (1978). „Strenge oder herkömmliche bedingte Ausgleichung mit Unbekannten bei nichtlinearen Bedingungen?“ In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 85(1), S. 27–31. ISSN: 0002-5968.
- Box, G. E. P. und Muller, M. E. (1958). „A Note on the Generation of Random Normal Deviates“. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 29(2), S. 610–611. DOI: 10.1214/aoms/1177706645.
- Box, M. J. (1971). „Bias in Nonlinear Estimation“. In: *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)* 33(2), S. 171–201. DOI: 10.1111/j.2517-6161.1971.tb00871.x.
- Brinkmann, B. (2012). *Internationales Wörterbuch der Metrologie – Grundlegende und allgemeine Begriffe und zugeordnete Benennungen (VIM) – Deutsch-englische Fassung ISO/IEC-Leitfaden 99:2007*. 4. Aufl. Messwesen. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag. ISBN: 3410224726.
- Bronstein, I. N., Semendiyayev, K. A., Musiol, G. und Muehlig, H. (2007). *Handbook of Mathematics*. 5. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-540-72122-2.

- Bruni, S. (2016). „Combination of GNSS and SLR measurements: contribution to the realization of the terrestrial reference frame“. Dissertation. Astrophysics [astro-ph], PSL Research University; Università di Bologna. DOI: 10.6092/unibo/amsdottorato/7636.
- Burg, K., Haf, H., Wille, F. und Meister, A. (2012). *Höhere Mathematik für Ingenieure Band II*. 7. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg. ISBN: 978-3-8348-1853-9. DOI: 10.1007/978-3-8348-2267-3.
- Calkins, J. M. (2002). „Quantifying Coordinate Uncertainty Fields in Coupled Spatial Measurement systems“. Dissertation. Faculty of the Virginia Polytechnic Institute und State University.
- Carlton, M. A. und Devore, J. L. (2017). *Probability with Applications in Engineering, Science, and Technology*. 2. Aufl. Springer Texts in Statistics. Cham: Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-319-52401-6.
- Carter, W. E., Rogers, A. E. E., Counselman, C. C. und Shapiro, I. I. (1980). „Comparison of geodetic and radio interferometric measurements of the Haystack-Westford base line vector“. In: *Journal of Geophysical Research* 85(B5), S. 2685–2687. DOI: 10.1029/jb085ib05p02685.
- Caspary, W. (1983). „Zur Singularität von Varianz-Kovarianz-Matrizen“. In: *zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen* 108(6), S. 209–215. ISSN: 0044-3689.
- Caspary, W. und Wichmann, K. (2007). *Auswertung von Messdaten – Statistische Methoden für Geo- und Ingenieurwissenschaften*. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag. DOI: 10.1524/9783486844184.
- Cha, A. G. (1987). „Phase and frequency stability of Cassegrainian antennas“. In: *Radio Science* 22(1), S. 156–166. DOI: 10.1029/rs022i001p00156.
- Clark, T. A. und Thomsen, P. (1988). *Deformations in VLBI Antennas*. Techn. Ber. NASA-TM-100696. NASA Goddard Space Flight Center; Greenbelt, MD, United States: NASA.
- Combrinck, W. L. und Merry, C. L. (1997). „Very long baseline interferometry antenna axis offset and intersection determination using GPS“. In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 102(B11), S. 24741–24743. DOI: 10.1029/97jb02081.
- Cook, R. D., Holschuh, N. und Weisberg, S. (1982). „A Note on an Alternative Outlier Model“. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 44(3), S. 370–376. DOI: 10.1111/j.2517-6161.1982.tb01215.x.
- Cramér, H. (1936). „Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion“. In: *Mathematische Zeitschrift* 41(1), S. 405–414. DOI: 10.1007/bf01180430.
- Cutler, C. C. (1947). „Parabolic-Antenna Design for Microwaves“. In: *Proceedings of the IRE* 35(11), S. 1284–1294. DOI: 10.1109/jrproc.1947.233571.
- Dawson, J., Sarti, P., Johnston, G. M. und Vittuari, L. (2006). „Indirect approach to invariant point determination for SLR and VLBI systems: an assessment“. In: *Journal of Geodesy* 81(6-8), S. 433–441. DOI: 10.1007/s00190-006-0125-x.
- DIN 18709-4 (2010). *Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen in der Geodäsie – Teil 4: Ausgleichungsrechnung und Statistik*. Beuth, Berlin: Deutsches Institut für Normung.
- Drixler, E. (1993). „Analyse der Form und Lage von Objekten im Raum“. Dissertation. München: Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, 409. ISBN: 3-7696-9454-6.
- Dutescu, E., Heunecke, O. und Krack, K. (1999). „Formbestimmung bei Radioteleskopen mittels Terrestrischem Laserscanning“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 106(6), S. 239–245. ISSN: 0002-5968.
- Dykstra, R. L. (1970). „Establishing the Positive Definiteness of the Sample Covariance Matrix“. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 41(6), S. 2153–2154. DOI: 10.1214/aoms/1177696719.
- Efron, B. (1979). „Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife“. In: *The Annals of Statistics* 7(1), S. 1–26. DOI: 10.1214/aos/1176344552.
- Efron, B. und Tibshirani, R. (1994). *An Introduction to the Bootstrap*. Bd. 57. Monographs on Statistics and Applied Probability. Taylor & Francis Ltd. ISBN: 0412042312.
- Eschelbach, C. und Haas, R. (2003). „The IVS-Reference Point at Onsala – High End Solution for a Real 3D-Determination“. In: *Proceedings of the 16th European VLBI for Geodesy and Astrometry (EVGA) Working Meeting*. Hrsg. von W. Schwegmann und V. Thorandt. Leipzig, Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, S. 109–118.

- Eschelbach, C., Heckmann, B. und Lösler, M. (2015). „Hochgenaue Sollstreckenbestimmung mit einem mobilen Lasertracker an der Kalibrierbasis Neu-Isenburg“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 122(3), S. 95–101. ISSN: 0002-5968.
- Eschelbach, C., Lösler, M., Haas, R. und Fath, H. (2019). „Extension and Optimization of the Local Geodetic Network at the Onsala Space Observatory“. In: *Proceedings of the 10th IVS General Meeting 2018 – Global Geodesy and the Role of VGOS – Fundamental to Sustainable Development*. Hrsg. von K. L. Armstrong, K. D. Baver und D. Behrend. NASA/CP-2019-219039. NASA, S. 27–31.
- Faigle, U., Kern, W. und Still, G. (2002). *Algorithmic Principles of Mathematical Programming*. Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-94-015-9896-5.
- Fang, X. (2015). „Weighted total least-squares with constraints: a universal formula for geodetic symmetrical transformations“. In: *Journal of Geodesy* 89(5), S. 459–469. DOI: 10.1007/s00190-015-0790-8.
- Faugeras, O. D. (1989). „A Few Steps toward Artificial 3-D Vision“. In: *Robotics Science*. Hrsg. von M. Brady. Bd. 5. System Development Foundation Benchmark Series 3. London: MIT Press, S. 39–137. ISBN: 978-0-262-02284-2.
- Findlay, J. W. (1964). „Operating Experience at the National Radio Astronomy Observatory“. In: *Annals of the New York Academy of Sciences* 116(1), S. 25–40. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1964.tb33937.x.
- Förstner, W. und Wrobel, B. P. (2016). *Photogrammetric Computer Vision – Statistics, Geometry, Orientation and Reconstruction*. 1. Aufl. Geometry and Computing 11. Cham: Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-11550-4.
- Geiger, C. und Kanzow, C. (1999). *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-58582-1.
- Geiger, C. und Kanzow, C. (2002). *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-56004-0.
- Gipson, J. (2019). „Gravitational deformation of VLBI antennas and the impact on the TRF“. In: *Proceedings of the 24th European VLBI for Geodesy and Astrometry (EVGA) Working Meeting*. Hrsg. von R. Haas, S. García-Espada und J. A. L. Fernández. Las Palmas de Gran Canaria, Spanien: Centro Nacional de Información Geográfica (CNIG). ISBN: 978-84-416-5634-5.
- Glaser, S., König, R., Ampatzidis, D., Nilsson, T., Heinkelmann, R., Flechtner, F. und Schuh, H. (2017). „A Global Terrestrial Reference Frame from simulated VLBI and SLR data in view of GGOS“. In: *Journal of Geodesy* 91(7), S. 723–733. DOI: 10.1007/s00190-017-1021-2.
- Glaser, S., König, R., Neumayer, K. H., Nilsson, T., Heinkelmann, R., Flechtner, F. und Schuh, H. (2019). „On the impact of local ties on the datum realization of global terrestrial reference frames“. In: *Journal of Geodesy* 93(5), S. 655–667. DOI: 10.1007/s00190-018-1189-0.
- Glaser, S., Schuh, H. und König, R. (2020). „Simulation globaler terrestrischer Referenzrahmen für das Globale Geodätische Beobachtungssystem GGOS“. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 145(4), S. 254–261. DOI: 10.12902/zfv-0308-2020.
- Gómez-González, J., López-Fernández, J. A., Colomer, F. und Santos, L. R. (2014). „An Atlantic Network of Geodynamical and Space Stations – The RAEGE Project“. In: *Proceedings of the 8th IVS General Meeting 2014 – VGOS: The New VLBI Network*. Hrsg. von D. Behrend, K. D. Baver und K. L. Armstrong. Beijing, China: Science Press, S. 20–24.
- Grafarend, E. W. und Schaffrin, B. (1976). „Equivalence of Estimable Quantities and Invariants in Geodetic Networks“. In: *zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen* 101(11), S. 485–491. ISSN: 0044-3689.
- Grafarend, E. W. und Schaffrin, B. (1979). „Kriterion-Matrizen I – zweidimensionale homogene und isotrope geodätische Netze“. In: *zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen* 104(4), S. 133–148. ISSN: 0044-3689.
- Gross, R., Beutler, G. und Plag, H.-P. (2009). „Integrated scientific and societal user requirements and functional specifications for the GGOS“. In: *Global Geodetic Observing System – Meeting the requirements of a global society on a changing planet in 2020*. Hrsg. von H.-P. Plag und

- M. Pearlman. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 209–224. DOI: 10.1007/978-3-642-02687-4_7.
- Großmann, W. (1969). *Grundzüge der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendung in der Geodäsie*. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-662-01121-8.
- Gustafsson, F. und Hendeby, G. (2008). „On nonlinear transformations of stochastic variables and its application to nonlinear filtering“. In: *2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Las Vegas, USA: IEEE, S. 3617–3620. DOI: 10.1109/icassp.2008.4518435.
- Gustafsson, F. und Hendeby, G. (2012). „Some Relations Between Extended and Unscented Kalman Filters“. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 60(2), S. 545–555. DOI: 10.1109/tsp.2011.2172431.
- Haas, R. (2013). „The Onsala twin telescope project“. In: *Proceedings of the 21st European VLBI for Geodesy and Astrometry (EVGA) Working Meeting*. Hrsg. von N. Zubko und M. Poutanen. Reports of the Finnish Geodetic Institute, S. 61–66. ISBN: 978-951-711-296-3.
- Haas, R. und Bergstrand, S. (2010). „COLD MAGICS – Continuous Local Deformation Monitoring of an Arctic Geodetic Fundamental Station“. In: *Proceedings of the 6th IVS General Meeting 2010 – VLBI2010: From Vision to Reality*. Hrsg. von D. Behrend und K. D. Bayer. NASA/CP-2010-215864. NASA, S. 118–122.
- Haas, R., Nothnagel, A., Schuh, H. und Titov, O. (1999). „Explanatory supplement to the section ‘Antenna Deformation’ of the IERS Conventions (1996)“. In: *Explanatory supplement to the IERS conventions (1996)*. Hrsg. von H. Schuh. Solid Earth Tides in Space Geodetic Techniques 71. Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut (DGFI), S. 26–29.
- Hallert, B. (1964). „Einige Sätze und Verfahren der mathematischen Statistik von besonderer Bedeutung in der Vermessungstechnik“. In: *zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen* 89(5), S. 152–165. ISSN: 0044-3689.
- Harvey, B. R. (1991). „Telescope Axes Surveys“. In: *Australian Journal of Geodesy Photogrammetry and Surveying* 54, S. 1–18. ISSN: 0159-8910.
- Hase, H., Behrend, D., Ma, C., Petrachenko, B., Schuh, H. und Whitney, A. (2012). „The Emerging VGOS Network of the IVS“. In: *Proceedings of the 7th IVS General Meeting 2012 – Launching the Next-Generation IVS Network*. Hrsg. von D. Behrend und K. D. Bayer. NASA/CP-2012-217504. NASA, S. 8–12.
- Heck, B. (2003). *Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung – Klassische und moderne Methoden*. 3. Aufl. Heidelberg: Wichmann. ISBN: 978-3879073474.
- Heinz, E., Holst, C. und Kuhlmann, H. (2019). „Zum Einfluss der räumlichen Auflösung und verschiedener Qualitätsstufen auf die Modellierungsgenauigkeit einer Ebene beim terrestrischen Laserscanning“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 126(1–2), S. 3–12. ISSN: 0002-5968.
- Helmert, F. R. (1872). *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente*. Reprint 2006. VDM Verlag Dr. Müller. ISBN: 3-8364-0219-X.
- Hennes, M. (2017). „Messmittel der Large Volume Metrology (LVM)“. In: *Handbuch der Geodäsie – Ingenieurgeodäsie*. Hrsg. von W. Freeden und R. Rummel. Springer Reference Naturwissenschaften. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 347–370. DOI: 10.1007/978-3-662-47188-3_26.
- Hennes, M., Urban, S. und Wursthorn, S. (2014). „Zur Synchronisierung von Multi-Sensor-Systemen – Grundlagen und Realisierungen“. In: *Multi-Sensor-Systeme – Bewegte Zukunftsfelder*. Bd. 75. Schriftenreihe des DVW. Augsburg: Wißner-Verlag, S. 25–37. ISBN: 978-3-89639-995-3.
- Heunecke, O. (2012). „Auswertung des Ringversuchs auf der neuen Kalibrierbasis der UniBw München zur Bestimmung der Sollstrecken“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 119(11/12), S. 380–385. ISSN: 0002-5968.
- Holst, C., Zeimet, P., Nothnagel, A., Schauerte, W. und Kuhlmann, H. (2012). „Estimation of Focal Length Variations of a 100-m Radio Telescope’s Main Reflector by Laser Scanner Measurements“.

- In: *Journal of Surveying Engineering* 138(3), S. 126–135. DOI: 10.1061/(asce)su.1943-5428.0000082.
- Höpcke, W. (1980). *Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung*. Berlin, New York: Walter de Gruyter GmbH. DOI: 10.1515/9783110838206.
- Hunter, T. R., Schwab, F. R., White, S. D., Ford, J. M., Ghigo, F. D., Maddalena, R. J., Mason, B. S., Nelson, J. D., Prestage, R. M., Ray, J., Ries, P., Simon, R., Srikanth, S. und Whiteis, P. (2011). „Holographic Measurement and Improvement of the Green Bank Telescope Surface“. In: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 123(907), S. 1087–1099. DOI: 10.1086/661950.
- Illner, I. (1985). „Datumsfestlegung in freien Netzen“. Dissertation. München: Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, 309. ISBN: 3-7696-9359-0.
- Jäger, R., Müller, T., Saler, H. und Schwäble, R. (2005). *Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren – Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern*. Heidelberg: Wichmann. ISBN: 3-87907-370-8.
- JCGM100 (2008). *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement – GUM 1995 with minor corrections*. Working Group 1 of the Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM/WG 1). URL: <http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html> (besucht am 14. Dez. 2019).
- JCGM101 (2008). *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the 'Guide to the expression of uncertainty in measurement' – Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. Working Group 1 of the Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM/WG 1). URL: <http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html> (besucht am 14. Dez. 2019).
- JCGM102 (2011). *Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the 'Guide to the expression of uncertainty in measurement' – Extension to any number of output quantities*. Working Group 1 of the Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM/WG 1). URL: <http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html> (besucht am 14. Dez. 2019).
- JCGM200 (2012). *International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms (VIM)*. Working Group 2 of the Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM/WG 2). URL: <https://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html> (besucht am 14. Dez. 2019).
- Jeudy, L. M. A. (1988). „Generalized variance-covariance propagation law formulae and application to explicit least-squares adjustments“. In: *Bulletin Géodésique* 62(2), S. 113–124. DOI: 10.1007/bf02519220.
- Johannson, L. A., Stodne, F. und Wolf, S. (1996). *The Pisa Project, Variations in the height of the foundation of the 20 meter radio telescope*. Forschungsbericht 178. Göteborg: Onsala Space Observatory, Chalmers University of Technology.
- Johnston, G. und Dawson, J. (2004). *The 2002 Mount Pleasant (Hobart) radio telescope Local Tie Survey*. Techn. Ber. 21. Australian Government – Geoscience Australia. 21 S.
- Julier, S. J., Uhlmann, J. K. und Durrant-Whyte, H. F. (1995). „A new approach for filtering nonlinear systems“. In: *Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC'95*. Bd. 3. IEEE. Seattle, Washington: American Autom Control Council, S. 1628–1632. DOI: 10.1109/acc.1995.529783.
- Julier, S. J. (2002). „The scaled unscented transformation“. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No.CH37301)*. Bd. 6. IEEE, S. 4555–4559. DOI: 10.1109/acc.2002.1025369.
- Julier, S. J. (2003). „The Spherical Simplex Unscented Transformation“. In: *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Denver, USA: IEEE, S. 2430–2434. DOI: 10.1109/acc.2003.1243439.
- Julier, S. J., Uhlmann, J. und Durrant-Whyte, H. F. (2000). „A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 45(3), S. 477–482. DOI: 10.1109/9.847726.
- Julier, S. J. und Uhlmann, J. K. (1997). „A Consistent, Debiased Method for Converting Between Polar and Cartesian Coordinate Systems“. In: *The Proceedings of AeroSense: The 11th In-*

- ternational Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls. SPIE 3086. Orlando, USA, S. 110–121. DOI: 10.1117/12.277178.
- Julier, S. J. und Uhlmann, J. K. (2002). „Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations“. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No.CH37301)*. Anchorage, Alaska, USA: IEEE, S. 887–892. DOI: 10.1109/acc.2002.1023128.
- Julier, S. J. und Uhlmann, J. K. (2004). „Unscented Filtering and Nonlinear Estimation“. In: *Proceedings of the IEEE* 92(3), S. 401–422. DOI: 10.1109/jproc.2003.823141.
- Kaercher, H. J., Sust, E., Emde, P. und Kühn, J. (2010). „Path Length Errors of VLBI Antennas“. In: *Ground-based and Airborne Telescopes III*. Hrsg. von L. M. Stepp, R. Gilmozzi und H. J. Hall. Bd. 7733. SPIE, 77333S-1–77333S-11. DOI: 10.1117/12.856030.
- Kallio, U., Lösler, M., Bergstrand, S., Haas, R. und Eschelbach, C. (2016). „Automated simultaneous local ties with GNSS and robot tachymeter“. In: *Proceedings of the 9th IVS General Meeting 2016 – New Horizons with VGOS*. Hrsg. von D. Behrend, K. D. Baver und K. L. Armstrong. NASA/CP-2016-219016. NASA, S. 154–158.
- Kallio, U. und Poutanen, M. (2010). „Simulation of Local Tie Accuracy on VLBI Antennas“. In: *Proceedings of the 6th IVS General Meeting 2010 – VLBI2010: From Vision to Reality*. Hrsg. von D. Behrend und K. D. Baver. NASA/CP-2010-215864. NASA, S. 360–364.
- Kallio, U. und Poutanen, M. (2011). „Can We Really Promise a mm-Accuracy for the Local Ties on a Geo-VLBI Antenna“. In: *Geodesy for Planet Earth, Proceedings of the 2009 IAG Symposium*. Hrsg. von S. Kenyon, M. C. Pacino und U. Marti. Bd. 136. International Association of Geodesy Symposia. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 35–42. DOI: 10.1007/978-3-642-20338-1_5.
- Kallio, U. und Poutanen, M. (2012). „Local Ties at Fundamental Stations“. In: *Reference Frames for Applications in Geosciences, Proceedings of the 2010 IAG Symposium*. Hrsg. von Z. Altamimi und X. Collilieux. Bd. 138. International Association of Geodesy Symposia. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 147–152. DOI: 10.1007/978-3-642-32998-2_23.
- Kalman, R. E. (1960). „A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems“. In: *Journal of Basic Engineering* 82(1), S. 35–45. DOI: 10.1115/1.3662552.
- Kampmann, G. und Renner, B. (2004). „Vergleich verschiedener Methoden zur Bestimmung ausgleichender Ebenen und Geraden“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 111(2), S. 56–67. ISSN: 0002-5968.
- Kanzow, C. (2005). *Numerik linearer Gleichungssysteme: Direkte und iterative Verfahren*. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/b138019.
- Kargoll, B., Omidalizarandi, M., Paffenholz, J.-A., Neumann, I., Kermarrec, G. und Alkhatib, H. (2019). „Bootstrap tests for model selection in robust vibration analysis of oscillating structures“. In: *4th Joint International Symposium on Deformation Monitoring (JISDM)*. Eugenides Foundation.
- Kermarrec, G. und Lösler, M. (2021). „How to account for temporal correlations with a diagonal correlation model in a nonlinear functional model: a plane fitting with simulated and real TLS measurements“. In: *Journal of Geodesy* 95(1), 5:1–21. DOI: 10.1007/s00190-020-01456-7.
- Klügel, T., Mähler, S. und Schade, C. (2012). „Ground Survey and Local Ties at the Geodetic Observatory Wettzell“. In: *Proceedings of the 17th International Workshop on Laser Ranging – Extending the Range*. Hrsg. von U. Schreiber, M. Pearlman und G. Appleby. Bd. 48. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, S. 127–131.
- Knickmeyer, E. H. und Nitschke, M. (1994). „Rotationsparameter – Grundlagen für die Praxis“. In: *zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen* 119(9), S. 455–464. ISSN: 0044-3689.
- Koch, K.-R. (1999). *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-662-03976-2.
- Koch, K.-R. (2002). „Räumliche Helmert-Transformation variabler Koordinaten im Gauß-Helmert- und im Gauß-Markoff-Modell“. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 127(3), S. 147–152. ISSN: 1618-8950.
- Koch, K.-R. (2007). *Introduction to Bayesian Statistics*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-540-72726-2.

- Koch, K.-R. (2010). „Uncertainty of Results of Laser Scanning Data with Correlated Systematic Effects by Monte Carlo Methods“. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 135(6), S. 376–385. ISSN: 1618-8950.
- Koch, K.-R. (2017). „Monte Carlo methods“. In: *GEM - International Journal on Geomathematics* 9(1), S. 117–143. DOI: 10.1007/s13137-017-0101-z.
- Kodet, J., Schreiber, K. U., Eckl, J., Plötz, C., Mähler, S., Schüler, T., Klügel, T. und Riepl, S. (2018). „Co-location of space geodetic techniques carried out at the Geodetic Observatory Wettzell using a closure in time and a multi-technique reference target“. In: *Journal of Geodesy* 92(9), S. 1097–1112. DOI: 10.1007/s00190-017-1105-z.
- Krystek, M. (2012). *Berechnung der Messunsicherheit – Grundlagen und Anleitung für die praktische Anwendung*. Messwesen. Berlin: DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag. ISBN: 3410255559.
- Kutterer, H. und Schön, S. (1999). „Statistische Analyse quadratischer Formen - der Determinantenansatz“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 106(10), S. 322–330. ISSN: 0002-5968.
- Lanotte, R., Pirri, M. und Bianco, G. (2008). „Matera Site Survey and VLBI Invariant Point Determination“. In: *Proceedings of the 5th IVS General Meeting 2008 – Measuring the Future*. Hrsg. von A. Finkelstein und D. Behrend. St. Petersburg, Russland, S. 87–92.
- Lanza, G. und Peters, J. (2010). „Werkstückeinfluss bei der Auswertung in der Koordinatenmesstechnik“. In: *tm – Technisches Messen* 77(5), S. 325–335. DOI: 10.1524/teme.2010.0991.
- Lehmann, R. (2012). „Geodätische Fehlerrechnung mit der skalenkontaminierten Normalverteilung“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 119(5), S. 143–149. ISSN: 0002-5968.
- Lehmann, R. (2019). „Type-Constrained Total Least Squares Fitting of Curved Surfaces to 3D Point Clouds“. In: *Journal of Mathematical and Statistical Analysis* 2(1), S. 1–13. ISSN: 2642-018X.
- Lehmann, R. und Lösler, M. (2016). „Multiple Outlier Detection: Hypothesis Tests versus Model Selection by Information Criteria“. In: *Journal of Surveying Engineering* 142(4), S. 04016017. DOI: 10.1061/(asce)su.1943-5428.0000189.
- Lehmann, R. und Lösler, M. (2018). „Hypothesis Testing in Non-Linear Models Exemplified by the Planar Coordinate Transformations“. In: *Journal of Geodetic Science* 8(1), S. 98–114. DOI: 10.1515/jogs-2018-0009.
- Lehmann, R., Lösler, M. und Neitzel, F. (2020). „Mean Shift versus Variance Inflation Approach for Outlier Detection – A Comparative Study“. In: *Mathematics* 8(6), S. 991. DOI: 10.3390/math8060991.
- Lehmann, R. und Scheffler, T. (2011). „Monte Carlo-based data snooping with application to a geodetic network“. In: *Journal of Applied Geodesy* 5(3-4), S. 123–134. DOI: 10.1515/jag.2011.014.
- Leinen, S., Becker, M., Dow, J., Feltens, J. und Sauermann, K. (2007). „Geodetic Determination of Radio Telescope Antenna Reference Point and Rotation Axis Parameters“. In: *Journal of Surveying Engineering* 133(2), S. 41–51. DOI: 10.1061/(asce)0733-9453(2007)133:2(41).
- Lenzmann, L. und Lenzmann, E. (2001). „Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter“. In: *zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen* 126(3), S. 138–142. ISSN: 0044-3689.
- Lenzmann, L. und Lenzmann, E. (2004). „Strenge Auswertung des nichtlinearen Gauß-Helmert-Modells“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 111(2), S. 68–73. ISSN: 0002-5968.
- Lenzmann, L. und Lenzmann, E. (2007). „Zur Lösung des nichtlinearen Gauß-Markov-Modells“. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 132(2), S. 108–110. ISSN: 1618-8950.
- Levenberg, K. (1944). „A method for the solution of certain non-linear problems in least squares“. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 2(2), S. 164–168. DOI: 10.1090/qam/10666.
- Li, J., Zhang, J. und Guo, L. (2013). „On the monitoring model of reference point of VLBI antenna“. In: *Science China Physics, Mechanics and Astronomy* 56(10), S. 1987–1994. DOI: 10.1007/s11433-013-5171-9.
- López-Fernández, J. A., García, E., Rivera-Lavado, A., Llorente-Romano, S., Herráiz-Martínez, F. J., Paz, J. M. de, Méndez-Aller, M., Santos, L., Serna-Puente, J. M., López-Pérez, J. A. und Tercero,

- F. (2014). „A Dual-Circular Polarization Broadband Feed for Ring Focus Configuration“. In: *Proceedings of the 8th IVS General Meeting 2014 – VGOS: The New VLBI Network*. Hrsg. von D. Behrend, K. D. Baver und K. L. Armstrong. Beijing, China: Science Press, S. 68–72.
- Lösler, M. (2008). „Reference point determination with a new mathematical model at the 20 m VLBI radio telescope in Wettzell“. In: *Journal of Applied Geodesy* 2(4), S. 233–238. DOI: 10.1515/jag.2008.026.
- Lösler, M. (2009a). „Bestimmung des lokalen Verbindungsvektors zwischen IVS- und IGS-Referenzrahmen am Raumobservatorium Onsala (Schweden)“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 116(11/12) (2009), S. 382–387. ISSN: 0002-5968.
- Lösler, M. (2009b). „New Mathematical Model for Reference Point Determination of an Azimuth-Elevation Type Radio Telescope“. In: *Journal of Surveying Engineering* 135(4) (2009), S. 131–135. DOI: 10.1061/(asce)su.1943-5428.0000010.
- Lösler, M. (2011). „Robuste Schätzung der Transformationsparameter einer räumlichen Helmert-Transformation“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 118(5), S. 187–191. ISSN: 0002-5968.
- Lösler, M. (2020a). „Modellierung und Bestimmung eines elliptischen Zylinders“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 127(2) (2020), S. 87–93. ISSN: 0002-5968.
- Lösler, M. (2020b). „Zur Parameterschätzung mit unterschiedlichen Koordinatendarstellungen“. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 145(6) (2020), S. 385–392. DOI: 10.12902/zfv-0319-2020.
- Lösler, M., Arnold, M., Bähr, H., Eschelbach, C., Bahlo, T., Grewe, R., Hug, F., Jürgensen, L., Winkemann, P. und Pietralla, N. (2015). „Hochpräzise Erfassung von Strahlführungselementen des Elektronenlinearbeschleunigers S-DALINAC“. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 140(6), S. 346–356. DOI: 10.12902/zfv-0090-2015.
- Lösler, M., Bähr, H. und Ulrich, T. (2016a). „Verfahren zur Transformation von Parametern und Unsicherheiten bei nicht-linearen Zusammenhängen“. In: *Photogrammetrie – Laserscanning – Optische 3D-Messtechnik*. Hrsg. von T. Luhmann und C. Schumacher. Beiträge der 16. Oldenburger 3D-Tage 2016. Offenbach: Wichmann, 2016, S. 274–285. ISBN: 978-3-87907-604-8.
- Lösler, M. und Eschelbach, C. (2012). „Konzept zur Realisierung eines Prototypen zur sachgerechten Auswertung von polaren Beobachtungen“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 119(7), S. 249–258. ISSN: 0002-5968.
- Lösler, M. und Eschelbach, C. (2014). „Zur Bestimmung der Parameter einer räumlichen Affintransformation“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 121(7), S. 273–277. ISSN: 0002-5968.
- Lösler, M. und Eschelbach, C. (2020a). *Close Range Photogrammetry for Reference Point Determination*. Forschungsbericht. GeoMetre: Large-scale dimensional measurements for geodesy, JRP 18SIB01 – 2nd Progress Meeting, 17.-18. November 2020, 2020.
- Lösler, M. und Eschelbach, C. (2020b). „Orthogonale Regression – Realität oder Isotropie?“ In: *tm – Technisches Messen* 87(10) (2020), S. 637–646. DOI: 10.1515/teme-2020-0063.
- Lösler, M., Eschelbach, C. und Haas, R. (2017). „Unified Model for Surface Fitting of Radio Telescope Reflectors“. In: *Proceedings of the 23rd European VLBI for Geodesy and Astrometry (EVGA) Working Meeting*. Hrsg. von R. Haas und G. Elgered. Göteborg, Schweden, S. 29–34. ISBN: 978-9188041098.
- Lösler, M., Eschelbach, C. und Haas, R. (2018a). „Bestimmung von Messunsicherheiten mittels Bootstrapping in der Formanalyse“. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 143(4) (2018), S. 224–232. DOI: 10.12902/zfv-0214-2018.
- Lösler, M., Eschelbach, C. und Haas, R. (2018b). „Zur Modellierung eines Ring-Focus-Paraboloids“. In: *Photogrammetrie – Laserscanning – Optische 3D-Messtechnik*. Hrsg. von T. Luhmann und C. Schumacher. Beiträge der 17. Oldenburger 3D-Tage 2018. Offenbach: Wichmann, 2018, S. 222–234. ISBN: 978-3-87907-643-7.
- Lösler, M., Eschelbach, C., Haas, R. und Greiwe, A. (2019a). „Measuring Focal-Length Variations of VGOS-Telescopes Using Unmanned Aerial Systems“. In: *Proceedings of the 24th European VLBI for Geodesy and Astrometry (EVGA) Working Meeting*. Hrsg. von R. Haas, S. García-Espada

- und J. A. L. Fernández. Las Palmas de Gran Canaria, Spanien: Centro Nacional de Información Geográfica (CNIG), 2019, S. 17–21. ISBN: 978-84-416-5634-5.
- Lösler, M., Eschelbach, C. und Riepl, S. (2018c). „A Modified Approach for Automated Reference Point Determination of SLR and VLBI Telescopes“. In: *tm – Technisches Messen* 85(10) (2018), S. 616–626. DOI: 10.1515/teme-2018-0053.
- Lösler, M., Eschelbach, C., Riepl, S. und Schüler, T. (2019b). „Zur Bestimmung des ILRS-Referenzpunktes am Satellite Observing System Wettzell“. In: *Photogrammetrie – Laserscanning – Optische 3D-Messtechnik*. Hrsg. von T. Luhmann und C. Schumacher. Beiträge der 18. Oldenburger 3D-Tage 2019. Offenbach: Wichmann, 2019, S. 162–175. ISBN: 978-3-87907-660-4. DOI: 10.5281/zenodo.3515831.
- Lösler, M., Eschelbach, C., Schenk, A. und Neidhardt, A. (2010). „Permanentüberwachung des 20 m VLBI-Radioteleskops an der Fundamentalstation in Wettzell“. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformatik und Landmanagement* 135(1), S. 40–48. ISSN: 1618-8950.
- Lösler, M., Haas, R. und Eschelbach, C. (2013a). „Automated and continual determination of radio telescope reference points with sub-mm accuracy: results from a campaign at the Onsala Space Observatory“. In: *Journal of Geodesy* 87(8) (2013), S. 791–804. DOI: 10.1007/s00190-013-0647-y.
- Lösler, M., Haas, R. und Eschelbach, C. (2016b). „Terrestrial Monitoring of a Radio Telescope Reference Point Using Comprehensive Uncertainty Budgeting“. In: *Journal of Geodesy* 90(5) (2016), S. 467–486. DOI: 10.1007/s00190-016-0887-8.
- Lösler, M., Haas, R., Eschelbach, C. und Greiwe, A. (2019c). „Gravitational Deformation of Ring-Focus Antennas for VGOS – First Investigations at the Onsala Twin Telescopes Project“. In: *Journal of Geodesy* 93(10) (2019), S. 2069–2087. DOI: 10.1007/s00190-019-01302-5.
- Lösler, M. und Hennes, M. (2008). „An innovative mathematical solution for a time-efficient IVS reference point determination“. In: *Proceedings of the joint Symposia: 13th FIG Symposium on Deformation Measurement and Analysis and 4th IAG Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering*. Portugal, Lisbon. URL: http://fig.net/resources/proceedings/2008/lisbon_2008_comm6/papers/pas07/pas07_02_losler_mc029.pdf (besucht am 14. Dez. 2019).
- Lösler, M., Lehmann, R., Neitzel, F. und Eschelbach, C. (2020). „Bias in Least-Squares Adjustment of Implicit Functional Models“. In: *Survey Review*, S. 1–12. DOI: 10.1080/00396265.2020.1715680.
- Lösler, M., Lossin, T., Neidhardt, A. und Lehmann, R. (2014). „Untersuchung zur automatisierten Bestimmung des IVS-Referenzpunktes am TWIN Radioteleskop Wettzell“. In: *Ingenieurvermessung 14: Beiträge zum 17. Internationalen Ingenieurvermessungskurs Zürich*. Hrsg. von A. Wieser. Offenbach: Wichmann, S. 335–346. ISBN: 978-3879075355.
- Lösler, M., Neidhardt, A. und Mähler, S. (2013b). „Impact of Different Observation Strategies on Reference Point Determination – Evaluations from a Campaign at the Geodetic Observatory Wettzell“. In: *Proceedings of the 21th European VLBI for Geodesy and Astrometry (EVGA) Working Meeting*. Hrsg. von N. Zubko und M. Poutanen. Bd. 2013:1. Reports of the Finnish Geodetic Institute, 2013, S. 255–260. ISBN: 978-951-711-296-3.
- Lösler, M. und Nitschke, M. (2010). „Bestimmung der Parameter einer Regressionsellipse in allgemeiner Raumlage“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 117(3), S. 113–117. ISSN: 0002-5968.
- Lossin, T. (2013). „Untersuchungen zur Automatisierung von kontinuierlichen Bestimmungen des IVS-Referenzpunktes am TWIN-Radioteleskop Wettzell“. Masterarbeit. Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden/Technische Universität München.
- Lozano, J. G. C., Carrillo, L. R. G., Dzul, A. und Lozano, R. (2008). „Spherical simplex sigma-point Kalman filters: A comparison in the inertial navigation of a terrestrial vehicle“. In: *2008 American Control Conference*. Seattle, WA, USA: IEEE, S. 3536–3541. DOI: 10.1109/acc.2008.4587041.
- Luhmann, T. (2018). *Nahbereichsphotogrammetrie – Grundlagen, Methoden, Beispiele*. 4. Aufl. Offenbach: Wichmann. 783 S. ISBN: 3879076405.

- Mähler, S., Klügel, T., Lösler, M. und Schüler, T. (2018). „Permanentes Referenzpunkt-Monitoring der TWIN Radioteleskope am Geodätischen Observatorium Wettzell“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 125(7), S. 210–219. ISSN: 0002-5968.
- Malissiovas, G., Neitzel, F. und Petrovic, S. (2016). „Götterdämmerung over total least squares“. In: *Journal of Geodetic Science* 6(1), S. 43–60. DOI: 10.1515/jogs-2016-0003.
- Mana, G. und Pennechi, F. (2007). „Uncertainty propagation in non-linear measurement equations“. In: *Metrologia* 44(3), S. 246–251. DOI: 10.1088/0026-1394/44/3/012.
- Marquardt, D. W. (1963). „An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters“. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 11(2), S. 431–441. DOI: 10.1137/0111030.
- Mathai, A. M. und Provost, S. B. (1992). *Quadratic Forms in Random Variables: Theory and Applications*. Hrsg. von D. B. Owen. Bd. 126. Statistics: A Series of Textbooks and Monographs. New York: Marcel Dekker. ISBN: 0-8247-8691-2.
- Matsumoto, M. und Nishimura, T. (1998). „Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator“. In: *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* 8(1), S. 3–30. DOI: 10.1145/272991.272995.
- Menegaz, H. M. T., Ishihara, J. Y., Borges, G. A. und Vargas, A. N. (2015). „A Systematization of the Unscented Kalman Filter Theory“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 60(10), S. 2583–2598. DOI: 10.1109/tac.2015.2404511.
- Métivier, L., Altamimi, Z. und Rouby, H. (2020). „Past and present ITRF solutions from geophysical perspectives“. In: *Advances in Space Research* 65(12), S. 2711–2722. DOI: 10.1016/j.asr.2020.03.031.
- Milligan, T. A. (2005). *Modern Antenna Design*. 2. Aufl. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 978-0-471-45776-3.
- Mittermayer, E. (1972). „Zur Ausgleichung freier Netze“. In: *zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen* 97(11), S. 481–489. ISSN: 0044-3689.
- Möser, M., Hoffmeister, H., Müller, G., Staiger, R., Schlemmer, H. und Wanning, L. (2012). *Handbuch Ingenieurgeodäsie – Grundlagen*. Hrsg. von M. Möser, H. Hoffmeister, G. Müller, R. Staiger und H. Schlemmer. 4. Aufl. Offenbach: Wichmann. ISBN: 387-9075042.
- National Research Council (2010). *Precise Geodetic Infrastructure – National Requirements for a Shared Resource*. Hrsg. von National Research Council, Division on Earth and Life Studies, Board on Earth Sciences & Resources, Committee on Seismology and Geodynamics. Washington, D. C.: National Academies Press. 156 S. DOI: 10.17226/12954.
- Neidhardt, A., Kronschnabl, G., Klügel, T., Hase, H., Pausch, K. und Göldi, W. (2011). „VLBI2010 - Current status of the TWIN radio telescope project at Wettzell, Germany“. In: *Proceedings of the 20th European VLBI for Geodesy and Astrometry (EVGA) Working Meeting*. Hrsg. von W. Alef, S. Bernhart und A. Nothnagel. Bonn, S. 67–70.
- Neitzel, F. (2004a). „Identifizierung konsistenter Datengruppen am Beispiel der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze“. Dissertation. München: Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, 565, 2004. ISBN: 3-7696-5004-2.
- Neitzel, F. (2004b). „Nullvarianz-Rechenbasis und Eigenschaften der Koordinaten bei freier Netzausgleichung“. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 129(5) (2004), S. 335–342. ISSN: 1618-8950.
- Neitzel, F. (2010). „Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2D similarity transformation“. In: *Journal of Geodesy* 84(12), S. 751–762. DOI: 10.1007/s00190-010-0408-0.
- Neumann, I. (2012). „Messunsicherheit bei elektrooptisch bestimmten Strecken“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 119(11-12), S. 369–379. ISSN: 0002-5968.
- Neuner, H., Wieser, A. und Krähenbühl, N. (2014). „Bootstrapping: Moderne Werkzeuge für die Erstellung von Konfidenzintervallen“. In: *129. DVW-Seminar: Zeitabhängige Messgrößen – Ihre Daten haben (Mehr-)Wert*. Hrsg. von H. Neuner. Bd. 74. Schriftenreihe des DVW. Augsburg: Wißner-Verlag, S. 151–170. ISBN: 978-3-89639-970-0.

- Niell, A., Whitney, A., Petrachenko, B., Schlüter, W., Vandenberg, N., Hase, H., Koyama, Y., Ma, C., Schuh, H. und Tuccari, G. (2006). „VLBI2010: Current and Future Requirements for Geodetic VLBI Systems“. In: *IVS Annual Report 2005*. Hrsg. von D. Behrend und K. D. Baver. NASA/TP-2006-214136. NASA, S. 13–40.
- Niemeier, W. (2008). *Ausgleichsrechnung – Statistische Auswertemethoden*. 2. Aufl. Berlin, New York: Walter de Gruyter GmbH. DOI: 10.1515/9783110206784.
- Niemeier, W. und Tengen, D. (2017). „Uncertainty assessment in geodetic network adjustment by combining GUM and Monte-Carlo-simulations“. In: *Journal of Applied Geodesy* 11(2), S. 67–76. DOI: 10.1515/jag-2016-0017.
- Niemeier, W. und Tengen, D. (2020). „Stochastic Properties of Confidence Ellipsoids after Least Squares Adjustment, Derived from GUM Analysis and Monte Carlo Simulations“. In: *Mathematics* 8(8), S. 1318. DOI: 10.3390/math8081318.
- Nilsson, T., Mora-Diaz, J. A., Raposo-Pulido, V., Heinkelmann, R., Karbon, M., Liu, L., Lu, C., Xu, B. S. M. und Schuh, H. (2016). „Antenna Axis Offsets and Their Impact on VLBI Derived Reference Frames“. In: *REFAG 2014*. Hrsg. von T. van Dam. Bd. 146. Proceedings of the IAG Commission 1 Symposium. Cham: Springer International Publishing, S. 53–58. DOI: 10.1007/1345_2015_126.
- Ning, T., Haas, R. und Elgered, G. (2015). „Determination of the local tie vector between the VLBI and GNSS reference points at Onsala using GPS measurements“. In: *Journal of Geodesy* 89(7), S. 711–723. DOI: 10.1007/s00190-015-0809-1.
- Nitschke, M. (2018). *Geometrie – Anwendungsbezogene Grundlagen und Beispiele für Ingenieure*. 3. Aufl. Hanser Fachbuchverlag. 180 S. ISBN: 3446451013.
- Nitschke, M. und Knickmeyer, E. H. (2000). „Rotation Parameters – a Survey of Techniques“. In: *Journal of Surveying Engineering* 126(3), S. 83–105. DOI: 10.1061/(asce)0733-9453(2000)126:3(83).
- Nocedal, J. und Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. 2. Aufl. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-0-387-40065-5.
- Nothnagel, A., Holst, C. und Haas, R. (2019). „A VLBI delay model for gravitational deformations of the Onsala 20 m radio telescope and the impact on its global coordinates“. In: *Journal of Geodesy* 93(10), S. 2019–2036. DOI: 10.1007/s00190-019-01299-x.
- Nothnagel, A. (2005). „Some Do’s and Don’t’s in Terrestrial Surveying of Site Excentricities“. In: *Proceedings of the IERS Workshop on site co-location*. Hrsg. von B. Richter, W. R. Dick und W. Schwegmann. Bd. IERS Technical Note. 33. International Earth Rotation und Reference Systems Service. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, S. 110–112.
- Nothnagel, A. (2008). „Conventions on thermal expansion modelling of radio telescopes for geodetic and astrometric VLBI“. In: *Journal of Geodesy* 83(8), S. 787–792. DOI: 10.1007/s00190-008-0284-z.
- Nothnagel, A. und Binnenbruck, B. (2000). „Determination of the 1996 Displacement of the Medicina Radio Telescope by Local Surveys“. In: *Proceedings of the 14th Working Meeting on European VLBI for Geodesy and Astrometry*. Hrsg. von P. Tomasi, F. Mantovani und M.-A. Pérez-Torrez. Consiglio Nazionale delle Ricerche, Istituto di Radioastronomia, S. 61–66.
- Nothnagel, A., Pietzner, J., Eling, C. und Hering, C. (2010). „Homologous Deformation of the Effelsberg 100-m Telescope Determined with a Total Station“. In: *Proceedings of the 6th IVS General Meeting 2010 – VLBI2010: From Vision to Reality*. Hrsg. von D. Behrend und K. D. Baver. NASA/CP-2010-215864. NASA, S. 123–127.
- Nothnagel, A., Pilhatsch, M. und Haas, R. (1995). „Investigations of Thermal Height Changes of Geodetic VLBI Radio Telescopes“. In: *Proceedings of the 10th Working Meeting on European VLBI for Geodesy and Astrometry*. Hrsg. von R. Lanotte und G. Bianco. Matera, S. 121–133.
- Nothnagel, A., Steinforth, C., Binnenbruck, B., Bockmann, L. und Grimstveit, L. (2001). „Results of the 2000 Ny-Ålesund Local Survey“. In: *Proceedings of the 15th Working Meeting on European VLBI for Geodesy and Astrometry*. Hrsg. von D. Behrend und A. Rius. Institute of Space Studies of Catalonia (IEEC), S. 168–176.

- Pany, A., Böhm, J., MacMillan, D., Schuh, H., Nilsson, T. und Wresnik, J. (2011). „Monte Carlo simulations of the impact of troposphere, clock and measurement errors on the repeatability of VLBI positions“. In: *Journal of Geodesy* 85(1), S. 39–50. DOI: 10.1007/s00190-010-0415-1.
- Pelzer, H. (1985). „Grundlagen der mathematischen Statistik und der Ausgleichsrechnung“. In: *Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II*. Hrsg. von H. Pelzer. 13. Stuttgart: Konrad Wittwer, S. 3–120. ISBN: 3-87919-140-9.
- Petit, G. und Luzum, B. (2010). *IERS Conventions (2010)*. IERS Technical Note 34. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main: International Earth Rotation und Reference Systems Service (IERS). URL: <http://www.iers.org/TN36> (besucht am 14. Dez. 2019).
- Petrachenko, B., Niell, A., Behrend, D., Corey, B., Böhm, J., Charlot, P., Collioud, A., Gipson, J., Haas, R., Hobiger, T., Koyama, Y., MacMillan, D., Malkin, Z., Nilsson, T., Pany, A., Tuccari, G., Whitney, A. und Wresnik, J. (2009). *Design aspects of the VLBI2010 system*. Techn. Ber. NASA/TM-2009-214180. Washington, DC: NASA.
- Plag, H.-P., Altamimi, Z., Bettadpur, S., Beutler, G., Beyerle, G., Cazenave, A., Crossley, D., Donnellan, A., Forsberg, R., Gross, R., Hinderer, J., Komjathy, A., Ma, C., Mannucci, A. J., Noll, C., Nothnagel, A., Pavlis, E. C., Pearlman, M., Poli, P., Schreiber, U., Senior, K., Woodworth, P. L., Zerbini, S. und Zuffada, C. (2009a). „The goals, achievements, and tools of modern geodesy“. In: *Global Geodetic Observing System – Meeting the requirements of a global society on a changing planet in 2020*. Hrsg. von H.-P. Plag und M. Pearlman. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009, S. 15–88. DOI: 10.1007/978-3-642-02687-4_2.
- Plag, H.-P., Beutler, G., Gross, R., Herring, T. A., Rizos, C., Rummel, R., Sahagian, D. und Zumberge, J. (2009b). „Introduction“. In: *Global Geodetic Observing System – Meeting the Requirements of a Global Society on a Changing Planet in 2020*. Hrsg. von H.-P. Plag und M. Pearlman. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009, S. 1–13. DOI: 10.1007/978-3-642-02687-4_1.
- Plank, L. (2013). „VLBI satellite tracking for the realization of frame ties“. Dissertation. Technischen Universität Wien, Fakultät für Mathematik und Geoinformation.
- Poyard, J.-C. (2017). *IGN best practice for surveying instrument reference points at ITRF co-location sites*. IERS Technical Note 39. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main: International Earth Rotation und Reference Systems Service (IERS). URL: <http://www.iers.org/TN39> (besucht am 14. Dez. 2019).
- Reinking, J. (2008). „Total Least Squares?“. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 133(6), S. 384–389. ISSN: 1618-8950.
- Riepl, S., Müller, H., Mähler, S., Eckl, J., Klügel, T., Schreiber, U. und Schüler, T. (2019). „Operating Two SLR Systems at the Geodetic Observatory Wettzell – From Local Survey to Space Ties“. In: *Journal of Geodesy* 8(93), S. 2379–2387. DOI: 10.1007/s00190-019-01243-z.
- Roesse-Koerner, L. R. und Schuh, W.-D. (2014). „Convex optimization under inequality constraints in rank-deficient systems“. In: *Journal of Geodesy* 88(5), S. 415–426. DOI: 10.1007/s00190-014-0692-1.
- Rothacher, M., Beutler, G., Behrend, D., Donnellan, A., Hinderer, J., Ma, C., Noll, C., Oberst, J., Pearlman, M., Plag, H.-P., Richter, B., Schöne, T., Tavernier, G. und Woodworth, P. L. (2009). „The Future Global Geodetic Observing System“. In: *Global Geodetic Observing System – Meeting the requirements of a global society on a changing planet in 2020*. Hrsg. von H.-P. Plag und M. Pearlman. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 237–272. DOI: 10.1007/978-3-642-02687-4_9.
- Rothacher, M. (2013). „Globaler Wandel, GGOS und GEOSS“. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 138(1), S. 16–20. ISSN: 1618-8950.
- Rubinstein, R. Y. und Kroese, D. P. (2017). *Simulation and the Monte Carlo Method*. 3. Aufl. Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. DOI: 10.1002/9781118631980.
- Santamaría-Gómez, A., García-Espada, S., Haas, R. und López-Ramasco, J. (2012). „Estimation of the Invariant Reference Point: First Steps at Yebes“. In: *Proceedings of the 7th IVS General*

- Meeting 2012 – Launching the Next-Generation IVS Network*. Hrsg. von D. Behrend und K. D. Baver. NASA/CP-2012-217504. NASA, S. 147–151.
- Sarti, P., Abbondanza, C., Petrov, L. und Negusini, M. (2010). „Height bias and scale effect induced by antenna gravitational deformations in geodetic VLBI data analysis“. In: *Journal of Geodesy* 85(1), S. 1–8. DOI: 10.1007/s00190-010-0410-6.
- Sarti, P., Abbondanza, C. und Vittuari, L. (2009a). „Gravity-dependent signal path variation in a large VLBI telescope modelled with a combination of surveying methods“. In: *Journal of Geodesy* 83(11) (2009), S. 1115–1126. DOI: 10.1007/s00190-009-0331-4.
- Sarti, P., Sillard, P. und Vittuari, L. (2004). „Surveying co-located space-geodetic instruments for ITRF computation“. In: *Journal of Geodesy* 78(3), S. 210–222. DOI: 10.1007/s00190-004-0387-0.
- Sarti, P., Vittuari, L. und Abbondanza, C. (2009b). „Laser Scanner and Terrestrial Surveying Applied to Gravitational Deformation Monitoring of Large VLBI Telescopes’ Primary Reflector“. In: *Journal of Surveying Engineering* 135(4) (2009), S. 136–148. DOI: 10.1061/(asce)su.1943-5428.0000008.
- Schaffrin, B. und Wieser, A. (2008). „On weighted total least-squares adjustment for linear regression“. In: *Journal of Geodesy* 82(7), S. 415–421. DOI: 10.1007/s00190-007-0190-9.
- Schek, H.-J. und Maier, P. (1976). „Nichtlineare Normalgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten und deren Kovarianzmatrix“. In: *zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen* 101(4), S. 149–159. ISSN: 0044-3689.
- Schmitt, G. (1977). „Monte-Carlo-Design geodätischer Netze“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 84(3), S. 87–94. ISSN: 0002-5968.
- Schmitt, G. (1980). „Second order design of a free distance network, considering different types of criterion matrices“. In: *Bulletin Géodésique* 54(4), S. 531–543. DOI: 10.1007/bf02530711.
- Schmitt, G. (1985). „Second Order Design“. In: *Optimization and Design of Geodetic Networks*. Hrsg. von E. W. Grafarend und F. Sansò. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 74–121. DOI: 10.1007/978-3-642-70659-2_5.
- Schuh, H. und Behrend, D. (2012). „VLBI: A fascinating technique for geodesy and astrometry“. In: *Journal of Geodynamics* 61, S. 68–80. DOI: 10.1016/j.jog.2012.07.007.
- Schuh, H., König, R., Ampatzidis, D., Glaser, S., Flechtner, F., Heinkelmann, R. und Nilsson, T. J. (2015). „GGOS-SIM: Simulation of the Reference Frame for the Global Geodetic Observing System“. In: *REFAG 2014*. Hrsg. von T. van Dam. Bd. 146. Proceedings of the IAG Commission 1 Symposium. Cham: Springer International Publishing, S. 95–100. DOI: 10.1007/1345_2015_217.
- Schuh, H., Wickert, J., Sips, M., Schöne, T., Rogaß, C., Roessner, S., König, R., Klemann, V., Heinkelmann, R., Dobsław, H. und Beyerle, G. (2017). „Zukunft der globalen Geodäsie und Fernerkundung aus Sicht des Deutschen GeoForschungsZentrum (GFZ), Potsdam“. In: *Handbuch der Geodäsie – Erdmessung und Satellitengeodäsie*. Hrsg. von R. Rummel. Springer Reference Naturwissenschaften. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 443–497. DOI: 10.1007/978-3-662-47100-5_16.
- Schüler, T., Kronschnabl, G., Plötz, C., Neidhardt, A., Bertarini, A., Bernhart, S., Porta, L., Halsig, S. und Nothnagel, A. (2015). „Initial Results Obtained with the First TWIN VLBI Radio Telescope at the Geodetic Observatory Wettzell“. In: *Sensors* 15(8), S. 18767–18800. DOI: 10.3390/s150818767.
- Schwarz, W. (2020). „Methoden zur Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM – Teil 2“. In: *avn – Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 127(5), S. 211–219. ISSN: 0002-5968.
- Schwarz, W. und Hennes, M. (2017). „Qualitätsbewertungen in der Ingenieurgeodäsie“. In: *Handbuch der Geodäsie – Ingenieurgeodäsie*. Hrsg. von W. Freeden und R. Rummel. Springer Reference Naturwissenschaften. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 371–402. DOI: 10.1007/978-3-662-46900-2_31-1.
- Seitz, M. (2009). „Kombination geodätischer Raumbeobachtungsverfahren zur Realisierung eines terrestrischen Referenzsystems“. Dissertation. München: Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, 630. ISBN: 978-3-7696-5042-6.

- Seitz, M., Angermann, D. und Bloßfeld, M. (2017). „Geometrische Referenzsysteme“. In: *Handbuch der Geodäsie – Erdmessung und Satellitengeodäsie*. Hrsg. von R. Rummel. Springer Reference Naturwissenschaften. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 325–348. DOI: 10.1007/978-3-662-47100-5_17.
- Seitz, M., Angermann, D., Bloßfeld, M., Drewes, H. und Gerstl, M. (2012). „The 2008 DGFI realization of the ITRS: DTRF2008“. In: *Journal of Geodesy* 86(12), S. 1097–1123. DOI: 10.1007/s00190-012-0567-2.
- Seitz, M., Bloßfeld, M., Angermann, D., Schmid, R., Gerstl, M. und Seitz, F. (2016). *The new DGFI-TUM realization of the ITRS: DTRF2014 (data)*. DOI: 10.1594/PANGAEA.864046.
- Shakarji, C. M. (1998). „Least-squares fitting algorithms of the NIST algorithm testing system“. In: *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology* 103(6), S. 633. DOI: 10.6028/jres.103.043.
- Shen, Y., Li, B. und Chen, Y. (2011). „An iterative solution of weighted total least-squares adjustment“. In: *Journal of Geodesy* 85(4), S. 229–238. DOI: 10.1007/s00190-010-0431-1.
- Silvey, S. D. (1975). *Statistical Inference*. Monographs on Statistics and Applied Probability 7. London: Chapman und Hall.
- Simon, D. (2006). *Optimal State Estimation – Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. DOI: 10.1002/0470045345.
- Sośnica, K. J. (2014). „Determination of Precise Satellite Orbits and Geodetic Parameters using Satellite Laser Ranging“. Dissertation. Universität Bern. DOI: 10.7892/boris.53968.
- Sovers, O. J., Fanselow, J. L. und Jacobs, C. S. (1998). „Astrometry and geodesy with radio interferometry: experiments, models, results“. In: *Reviews of Modern Physics* 70(4), S. 1393–1454. DOI: 10.1103/revmodphys.70.1393.
- Späth, H. (1996). „Orthogonal Squared Distance Fitting with Parabolas“. In: *Proceedings of the IMACS-GAMM International Symposium on Numerical Methods and Error Bounds*. Hrsg. von G. Alefeld und J. Herzberger. Bd. 89. Mathematical Research. Berlin: Akademie Verlag, S. 261–269. ISBN: 978-3-05501696-7.
- Stark, W. (1984). „Untersuchungen zur Lösung und Inversion schwach besetzter großer geodätischer Normalgleichungen“. Dissertation. München: Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, 301. ISBN: 3-7696-9351-5.
- Stein, W. E. und Kiblis, M. F. (2009). „A new method to simulate the triangular distribution“. In: *Mathematical and Computer Modelling* 49(5-6), S. 1143–1147. DOI: 10.1016/j.mcm.2008.06.013.
- Straka, O., Dunik, J., Simandl, M. und Havlik, J. (2013). „Aspects and comparison of matrix decompositions in unscented Kalman filter“. In: *American Control Conference (ACC)*. Washington, DC, USA: IEEE, S. 3075–3080. DOI: 10.1109/acc.2013.6580303.
- Subrahmanyam, R. (2005). „Photogrammetric measurement of the gravity deformation in a Cassegrain antenna“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 53(8), S. 2590–2596. DOI: 10.1109/tap.2005.851836.
- Süß, M., Koch, D. und Paluszek, H. (2012). „The Sardinia Radio Telescope (SRT) optical alignment“. In: *Ground-based and Airborne Telescopes IV*. Hrsg. von L. M. Stepp, R. Gilmozzi und H. J. Hall. Bd. 8444. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE), S. 16. DOI: 10.1117/12.926141.
- Tenne, D. und Singh, T. (2003). „The higher order unscented filter“. In: *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003*. IEEE. DOI: 10.1109/acc.2003.1243441.
- Teunissen, P. J. G. und Knickmeyer, E. H. (1988). „Nonlinearity and Least-Squares“. In: *CISM Journal ACSGC* 42(4), S. 321–330. DOI: 20.500.11937/47264.
- Teunissen, P. J. G. (1985a). „A note on the use of Gauss’ formulas in non-linear geodetic adjustment“. In: *Journal of Statistics and Decisions* (2) (1985), S. 455–466. DOI: 20.500.11937/5432.
- Teunissen, P. J. G. (1985b). „Zero Order Design: Generalized Inverses, Adjustment, the Datum Problem and S-Transformations“. In: *Optimization and Design of Geodetic Networks*. Hrsg. von E. W. Grafarend und F. Sansò. Berlin, Heidelberg: Springer, 1985, S. 11–55. DOI: 10.1007/978-3-642-70659-2_3.

- Teunissen, P. J. G. (1989). „First and second moments of non-linear least-squares estimators“. In: *Bulletin Géodésique* 63(3), S. 253–262. DOI: 10.1007/bf02520475.
- Teunissen, P. J. G. (1990). „Nonlinear inversion of geodetic and geophysical data – Diagnosing nonlinearity“. In: *Developments in Four-Dimensional Geodesy*. Hrsg. von F. K. Brunner und C. Rizos. Bd. 29. Lecture Notes in Earth Sciences book series. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 241–264. DOI: 10.1007/bfb0009892.
- Teunissen, P. J. G. (2003). *Adjustment Theory – An introduction*. Series of Mathematical Geodesy and Positioning. Delft: VSSD. ISBN: 978-90-407-1974-5.
- Thaller, D., Dach, R., Seitz, M., Beutler, G., Mareyen, M. und Richter, B. (2011). „Combination of GNSS and SLR observations using satellite co-locations“. In: *Journal of Geodesy* 85(5), S. 257–272. DOI: 10.1007/s00190-010-0433-z.
- Tong, X., Jin, Y., Zhang, S., Li, L. und Liu, S. (2015). „Bias-Corrected Weighted Total Least-Squares Adjustment of Condition Equations“. In: *Journal of Surveying Engineering* 141(2), S. 04014013. DOI: 10.1061/(asce)su.1943-5428.0000140.
- Torge, W. und Müller, J. (2012). *Geodesy*. 4. Aufl. Gruyter, Walter de GmbH. 444 S. ISBN: 978-3-11-025000-8.
- Tuccari, G., Buttaccio, S. und Nicotra, G. (2001). „Phase reference holography of the Noto 32 m VLBI antenna“. In: *Electronics Letters* 37(17), S. 1060–1062. DOI: 10.1049/el:20010727.
- United Nations (2015). *A global geodetic reference frame for sustainable development*. Report of the Economic and Social Council. URL: http://www.un.org/ga/search/view_doc.asp?symbol=A/69/L.53. (besucht am 14. Dez. 2019).
- Usoff, J. M., Clarke, M. T., Liu, C. und Silver, M. J. (2014). „Optimizing the HUSIR Antenna Surface“. In: *Lincoln Laboratory Journal* 21(1), S. 83–105. ISSN: 0896-4130.
- Wan, E. A. und Merwe, R. van der (2000). „The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation“. In: *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No.00EX373)*. IEEE, S. 153–158. DOI: 10.1109/asspcc.2000.882463.
- Wan, E. A. und Merwe, R. van der (2001). „The Unscented Kalman Filter“. In: *Kalman Filtering and Neural Networks*. Hrsg. von S. Haykin. New York: John Wiley & Sons, Inc. Kap. 7, S. 221–280. DOI: 10.1002/0471221546.ch7.
- Wang, L. und Ding, R. (2020). „A parameter determination method of unscented transformation and its approximate ability analysis in the precision estimation of nonlinear measurement adjustment“. In: *Measurement* 166, S. 108065. DOI: 10.1016/j.measurement.2020.108065.
- Wang, L. und Zhao, Y. (2017). „Unscented transformation with scaled symmetric sampling strategy for precision estimation of total least squares“. In: *Studia Geophysica et Geodaetica* 61(3), S. 385–411. DOI: 10.1007/s11200-016-1113-0.
- Wang, L. und Zhao, Y. (2018). „Scaled Unscented Transformation of Nonlinear Error Propagation: Accuracy, Sensitivity, and Applications“. In: *Journal of Surveying Engineering* 144(1), S. 1–14. DOI: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000243.
- Wang, L. und Zhao, Y. (2019). „Second-Order Approximation Function Method for Precision Estimation of Total Least Squares“. In: *Journal of Surveying Engineering* 145(1), S. 04018011. DOI: 10.1061/(asce)su.1943-5428.0000266.
- Wimmer, H. (1981). „Ein Beitrag zur Gewichtsoptimierung geodätischer Netze“. Dissertation. München: Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, 269. ISBN: 3-7696-9321-3.
- Wolf, H. (1961). „Das Fehlerfortpflanzungsgesetz mit Gliedern II. Ordnung“. In: *zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen* 86(3), S. 86–88. ISSN: 0044-3689.
- Wolf, H. (1968). *Ausgleichsrechnung nach der Methoden der kleinsten Quadrate*. Bonn: Fred. Dümmers Verlag.
- Wolf, H. (1997). *Ausgleichsrechnung I – Formeln zur praktischen Anwendung*. 3. Aufl. Bonn: Fred. Dümmers Verlag. ISBN: 3-427-78353-7.
- Wöppelmann, G. und Marcos, M. (2016). „Vertical land motion as a key to understanding sea level change and variability“. In: *Reviews of Geophysics* 54(1), S. 64–92. DOI: 10.1002/2015rg000502.

- Wresnik, J., Haas, R., Boehm, J. und Schuh, H. (2006). „Modeling thermal deformation of VLBI antennas with a new temperature model“. In: *Journal of Geodesy* 81(6-8), S. 423–431. DOI: 10.1007/s00190-006-0120-2.
- Wrona, M., Mariusz, F., Pazderski, E. und Uchański, Ł. (2014). „Investigation of VLBI telescopes geometry using laser scanning“. In: *14th International Multidisciplinary Scientific GeoConference (SGEM)*. Bd. 2. 1. International Multidisciplinary Scientific GeoConferences (SGEM), S. 667–674. DOI: 10.5593/SGEM2014/B21/S8.086.
- Wübbeler, G., Harris, P. M., Cox, M. G. und Elster, C. (2010). „A two-stage procedure for determining the number of trials in the application of a Monte Carlo method for uncertainty evaluation“. In: *Metrologia* 47(3), S. 317–324. DOI: 10.1088/0026-1394/47/3/023.
- Xu, P. (1999). „Biases and accuracy of, and an alternative to, discrete nonlinear filters“. In: *Journal of Geodesy* 73(1), S. 35–46. DOI: 10.1007/s001900050216.
- Xu, P. (2013). „The effect of incorrect weights on estimating the variance of unit weight“. In: *Studia Geophysica et Geodaetica* 57(3), S. 339–352. DOI: 10.1007/s11200-012-0665-x.
- Xu, P. und Grafarend, E. W. (1996). „Statistics and geometry of the eigenspectra of three-dimensional second-rank symmetric random tensors“. In: *Geophysical Journal International* 127(3), S. 744–756. DOI: 10.1111/j.1365-246x.1996.tb04053.x.
- Xu, P., Liu, J. und Shi, C. (2012). „Total least squares adjustment in partial errors-in-variables models: algorithm and statistical analysis“. In: *Journal of Geodesy* 86(8), S. 661–675. DOI: 10.1007/s00190-012-0552-9.
- Yazji, S. (1998). „The Effect of the Characteristic Distance of the Correlation Function on the Optimal Design of Geodetic Networks“. In: *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica* 33(2–4), S. 215–234. DOI: 10.1007/BF03325536.
- Zernecke, R. (1999). „Seasonal variations in height demonstrated at the radio telescope reference point“. In: *Proceedings of the 13th European VLBI for Geodesy and Astrometry (EVGA) Working Meeting*. Hrsg. von W. Schlüter und H. Hase, S. 15–18.
- Zhang, Z., Wang, G., Xu, D. und Song, S. (2018). „Prospective study of high geodetic resolution to future VGOS reference point determination“. In: *Geodesy and Geodynamics*. In Press, S. 1–9. DOI: 10.1016/j.geog.2018.06.006.
- Zhao, D., Cai, Z. und Zhang, C. (2008). „Application of Unscented Kalman Filter in Nonlinear Geodetic Problems“. In: *VI Hotine-Marussi Symposium on Theoretical and Computational Geodesy*. Hrsg. von P. Xu, J. Liu und A. Dermanis. Bd. 132. International Association of Geodesy Symposia. Berlin Heidelberg: Springer, S. 252–257. DOI: 10.1007/978-3-540-74584-6_41.
- Zhao, X., Kermarrec, G., Kargoll, B., Alkhatib, H. und Neumann, I. (2019). „Influence of the simplified stochastic model of TLS measurements on geometry-based deformation analysis“. In: *Journal of Applied Geodesy* 13(3), S. 199–214. DOI: 10.1515/jag-2019-0002.
- Zurmühl, R. und Falk, S. (1984). *Matrizen und ihre Anwendungen – Teil 1: Grundlagen*. 5. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. ISBN: 3-540-12848-4.

Förderung

Diese Arbeit ist Teil des internationalen Projektes GeoMetre (*Large-Scale Dimensional Measurements for Geodesy*, JRP 18SIB01) und wurde aus Mitteln des von den Teilnehmerstaaten kofinanzierten EMPIR-Programms und aus dem Forschungs- und Innovationsprogramm der Europäischen Union *Horizon 2020* finanziert.