# GEIST UND GESTALT

BIOGRAPHISCHE BEITRÄGE ZUR GESCHICHTE
DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
VORNEHMLICH IM ZWEITEN JAHRHUNDERT
IHRES BESTEHENS

ZWEITER BAND

## NATURWISSENSCHAFTEN

C. H. BECK'SCHE VERLAGSBUCHHANDLUNG
MÜNCHEN 1959

# MATHEMATIK

*Von Georg Faber*

*Vorbemerkung: Ein Mathematikfremder, ein ἀγεωμέτρητος, der diesen Bericht zu lesen unternimmt, wird schon von sich aus überschlagen, was ihm nicht gemäß ist.*

## 1

Unter den fünf Männern, die im Jahre 1758 den Verein gründeten, der sich im folgenden Jahre zur Akademie entwickelte, war neben den Bergräten Linprun und Lori, die sich in der Landvermessung betätigten, also in angewandter Mathematik, ein sonst nicht bekannter Mathematikprofessor: Stigler, Lehrer am Kadettenhaus. In ihrem Gründungsjahr 1759 zählte die Akademie neben sechzehn Ehrenmitgliedern rund sechzig Mitglieder; davon wurden sieben als Mathematiker bezeichnet: in München außer Stigler ein Straßenbaukommissar und ein Benediktiner, ferner zwei Pollinger Chorherren und ein Regensburger katholischer Prediger, endlich Johann Heinrich Lambert* (geb. 26. 8. 1728 zu Mühlhausen im Elsaß, damals zur Schweizer Eidgenossenschaft gehörig, gest. 25. 9. 1777 in Berlin, 1759 in Augsburg wohnhaft).

In vielen Teilgebieten der Mathematik wirkte dieser vielseitige und geistreiche Gelehrte als Vorläufer, z. B. als Vorläufer Lobatscheffskys durch seine weitgeführten Überlegungen, ob man Euklids Parallelenaxiom durch ein anderes ihm widersprechendes Axiom ersetzen könne. Das Euklidische Parallelenaxiom ist (anders formuliert als bei Euklid) folgendes:

In einer Ebene, die durch eine Gerade $g$ und einen außerhalb ihr gelegenen Punkt $P$ bestimmt ist, gibt es durch $P$ nicht mehr als eine $g$ nicht schneidende Gerade. Daß es eine solche Gerade gibt, konnte Euklid beweisen unter der stillschweigenden Voraussetzung, daß die Gerade keine endliche Länge besitzt. Das erwähnte dem Euklidischen widersprechende Axiom verlangt, daß es unendlich viele solche Geraden gibt.

In seiner „freien Perspektive" war Lambert ein Vorläufer des großen Geometers Monge, des Begründers der Darstellenden Geometrie, man möchte ihn fast sogar einen Vorahner der Photogrammetrie nennen, da er die Frage behandelte, ob und wie man Grund- und Aufriß aus einer perspektivischen Darstellung gewinnen könne.

Mit Logikkalkül und Begriffsschrift, die im 19. und 20. Jahrhundert ausgebildet wurden, hat Lamberts Algebra der Logik den Grundgedanken gemein. Lamberts Verfahren der Bahnbestimmung von Kometen wurde später von WILHELM OLBERS (1758–1840; Akademiemitglied 1808) vereinfacht. Seine „Kosmologischen Briefe" hatten Berührungspunkte mit Kants ein paar Jahre vorher gedruckter „Allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels". Daraus entstand ein mehrere Jahre andauernder, sich auch auf erkenntnistheoretische Fragen erstreckender Briefwechsel zwischen Kant und Lambert.

Mehr als nur ein Vorläufer, nämlich ein Begründer war Lambert für die Lehre von den Kartenprojektionen. Nur nebenbei seien seine Arbeiten über Photometrie und Pyrometrie erwähnt, über die Gewalt des Schießpulvers und über die Wirkungen einer Feuerspritze, über die beste Gestaltung eines Dachs, und wie man den Stoffabfall vermindern kann durch geschicktes Zuschneiden von Hemden.

Obwohl Lambert mit lebhafter Anteilnahme die Gründung der Münchner Akademie unterstützt hatte, mochte er doch nicht auf die Dauer in München wohnen, wo, wie er sagte, die Leute erst an protestantische Gelehrte gewöhnt werden mußten. Nach ausgedehnten Reisen wurde er 1764 in Berlin seßhaft und gelangte dort als gut dotiertes Mitglied der Preußischen Akademie und als Oberbaurat zu hohem Ansehen.

Lambert war in Licht und Schatten das rechte Bild eines Gelehrten des 18. Jahrhunderts, der über Gott und die Welt und alles mögliche schreibt, der aber nicht von einem Katheder aus doziert. Unter den rund 2500 Mitgliedern, welche die Akademie in den zweihundert Jahren ihres Bestehens hatte (unter ihnen etwa 5% als Mathematiker im Mitgliederverzeichnis bezeichnete), findet sich kein zweiter seinesgleichen.

Ungefähr 200 Ehrenmitglieder wurden alle in den ersten hundert Jahren des Bestehens der Akademie ernannt, bis auf ein paar später gewählte Mitglieder des königlichen Hauses. Die Ehrenmitglieder waren neben wenigen Angehörigen regierender Häuser in der überragenden Mehrzahl Adelige, dazu kamen einige Vertreter des zweiten Standes (der Geistlichkeit) und eine verschwindende Zahl von Bürgerlichen.

In der Zeit der Aufklärung entstand neben der anerkannten Elite des Adels eine neue Elite der Künstler und Gelehrten. Dadurch daß hohe Adelige in die gelehrten Gesellschaften aufgenommen wurden, und daß Gelehrte (und Künstler) den persönlichen (selten den erblichen) Adel erhielten, wurde lange Zeit die Fiktion aufrechterhalten, als gebe es nur die eine Elite des Adels.

Napoleon hatte die Mathematiker Carnot, Lagrange, Monge zu Grafen ernannt, den Mathematiker Laplace zum Marquis, nachdem schon Ludwig XV. den Zoologen Buffon in den Grafenstand erhoben hatte. Unter den elf Akademiepräsidenten des ersten Jahrhunderts der Akademie waren ein Freiherr, sieben Grafen und drei in den Adelsstand erhobene Bürgerliche: Friedrich Heinrich Jacobi, der Jugendfreund Goethes, der Philosoph Schelling und der Philologe Thiersch. In den vierundsiebzig Jahren von 1859 bis 1932 hatte die Akademie zehn Präsidenten, keiner davon gehörte dem Geburtsadel an. Acht waren frühere Bürgerliche, die geadelt wurden (in Bayern geschah dies durch Verleihung des Verdienstordens der Bayerischen Krone), zwei blieben bürgerlich, die Philologen Otto Crusius und Eduard Schwartz. Seit 1932 wurden nur bürgerliche Präsidenten gewählt. So schwand allmählich die genannte Fiktion dahin, der sogenannte Adel des Geistes trennte sich vom Adel der Geburt. Für die gesellschaftliche Gleichberechtigung der neuen Elite war nicht mehr (wie zur Zeit Goethes und Schillers) die Nobilitierung nötig. 1882 hieß es im „Kladderadatsch“, der satirischen Wochenschrift: „Dem preußischen Adel wurde der Physiker Helmholtz verliehen.“ Unter den einundzwanzig Mathematikern des 19. Jahrhunderts, von denen der vorliegende Bericht handelt, haben drei (Seidel, Dyck, Lindemann) den Verdienstorden der Bayerischen Krone erhalten.

## 2

Im Jahre 1808 hat die mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse der Akademie die Rekordzahl von mehr als einhundertfünfzig Mitgliedern gewählt, darunter berühmte Mathematiker: Gauß, Carnot, Lagrange, Laplace, Monge. Aber diese hatten mit der Akademie nicht mehr zu tun, als daß ihre Namen das Mitgliederverzeichnis zierten; das nämliche gilt für fast alle Mitglieder außerhalb Bayerns.

Der vorliegende Bericht beschränkt sich auf die in Bayern tätig gewesenen Akademiemitglieder, sie bilden das Kernstück der Akademie, und seit 1939 sind auch die nicht in München wohnenden bayerischen Mitglieder stimmberechtigt bei den Wahlen.

Nach dem Weggang Lamberts (1760) bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts hat es unter den Akademiemitgliedern keinen in Bayern lebenden reinen Mathematiker gegeben, der in dem vorliegenden Bericht zu erwähnen wäre. Damit hängt zusammen, daß bedeutende Mathematiker (z. B. Jacobi, 1804 bis

1851) in der Liste der korrespondierenden Mitglieder der Akademie fehlen. In den Jahren zwischen 1850 und 1959 wurden dreißig in Bayern wirkende Mathematiker (die Astronomen, Geodäten und theoretischen Physiker, über die an anderer Stelle berichtet wird, nicht mitgerechnet) in die Akademie gewählt. Es waren durchweg entweder Universitätsprofessoren (in München, Würzburg, Erlangen) oder Professoren der Technischen Hochschule München. Von den dreißig Akademikern leben noch neun; ihrer mag in der anno 2059 fällig werdenden Festschrift gedacht werden. Die Namen der schon verstorbenen einundzwanzig sind in der Reihenfolge ihrer Aufnahme in die Akademie, deren Jahreszahl jeweils in Klammern beigesetzt ist, die folgenden:

Ludwig Seidel* (1851) geb. 24. 10. 1821 Zweibrücken, gest. 1. 8. 1896 München;

Karl v. Staudt* (1863) geb. 24. 1. 1798 Rothenburg, gest. 2. 6. 1867 Erlangen;

Otto Hesse* (1869) geb. 22. 4. 1811 Königsberg, gest. 4. 8. 1874 München;

Gustav Bauer (1871) geb. 18. 11. 1820 Augsburg, gest. 13. 4. 1906 München;

Friedrich Prym (1872) geb. 28. 9. 1841 Düren, gest. 15. 12. 1915 Bonn auf einer Reise;

Felix Klein* (1879) geb. 25. 4. 1849 Düsseldorf, gest. 22. 6. 1925 Göttingen;

Alexander Brill (1882) geb. 20. 9. 1842 Darmstadt, gest. 18. 6. 1935 Tübingen;

Jakob Lüroth (1884) geb. 18. 2. 1844 Mannheim, gest. 14. 9. 1910 München auf einer Reise;

Paul Gordan (1886) geb. 27. 4. 1837 Breslau, gest. 21. 12. 1912 Erlangen;

Aurel Voss* (1886) geb. 7. 12. 1845 Altona, gest. 19. 4. 1931 München;

Max Noether* (1887) geb. 24. 9. 1844 Mannheim, gest. 13. 12. 1921 Erlangen;

Walther Dyck* (1890) geb. 6. 12. 1856 München, gest. 5. 11. 1934 München-Solln;

Ferdinand Lindemann* (1894) geb. 12. 4. 1852 Hannover, gest. 6. 3. 1939 München;

Alfred Pringsheim* (1894) geb. 2. 9. 1850 Ohlau (Schlesien), gest. 25. 6. 1941 Zürich;

Sebastian Finsterwalder* (1899) geb. 4. 10. 1862 Rosenheim, gest. 4. 12. 1951 München;

Ludwig Burmester (1905) geb. 5. 5. 1840 Othmarschen (Holstein), gest. 20. 4. 1927 München;

Heinrich Burkhardt (1909) geb. 10. 10. 1861 Schweinfurt, gest. 2. 11. 1914 München;

HEINRICH LIEBMANN (1917) geb. 22. 10. 1874 Straßburg, gest. 12. 6. 1939 München-Solln;
CONSTANTIN CARATHÉODORY* (1925) geb. 13. 9. 1873 Berlin, gest. 2. 2. 1950 München;
RICHARD BALDUS (1935) geb. 11. 5. 1885 Saloniki, gest. 28. 1. 1945 München;
GEORG ROST (1940) geb. 26. 2. 1870 Würzburg, gest. 3. 9. 1958 Würzburg.

Man kann die einundzwanzig Mathematiker, von denen sechzehn in München tätig waren, auf drei Altersstufen verteilen:

Vor 1822 sind vier geboren, dreizehn im Zeitraum $1850 \pm 13$ und von vieren (Liebmann, Carathéodory, Baldus, Rost) fiel die Schaffenszeit hauptsächlich ins zwanzigste Jahrhundert. Wenn neben den vier soeben genannten Namen der von Fritz Hartogs fehlt, so erklärt sich das daraus, daß die Beschlüsse von Körperschaften mit nicht sachverständiger Mehrheit gefaßt zu werden pflegen.

Um im folgenden die Stellung zu umreißen, welche die genannten einundzwanzig Akademiker in ihrer Wissenschaft eingenommen haben, ist nötig, daß zuerst versucht wird, in groben Zügen ein Bild von Aufgaben zu entwerfen, die sich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts der mathematischen Forschung sozusagen von selber stellten. Dann soll im Hinblick auf dieses Bild einiges über die wissenschaftlichen Leistungen der erwähnten Akademiker gesagt werden; jeder von ihnen hat solche Leistungen aufzuweisen. Dieser Überblick kann, trotz seiner Beschränkung auf das kleine Land Bayern und trotz vieler Lücken, in einiger Hinsicht als pars pro toto und als typisch für die damalige Lage der mathematischen Wissenschaft gelten. Er gibt zugleich Gelegenheit, einiger auswärtiger (korrespondierender) Mitglieder zu gedenken.

## 3

Einer der wichtigsten mathematischen Fortschritte in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts war die Begründung des Rechnens mit irrationalen Zahlen. Eine Strecke werde als Längeneinheit gewählt, beispielsweise 1 cm. Die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks seien beide $= 1$, d. h. 1 cm lang. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatz hat dann das Quadrat über der Hypotenuse den Flächeninhalt 2 (2 qcm). Wenn $x$ die Maßzahl der Hypotenuse ist, muß also $x^2 = 2$ sein. Schon im Altertum wurde auf zwei verschiedene Weisen sehr schön bewiesen, daß es keine rationale, d. h. keine ganze Zahl und keine gebrochene Zahl $p/q$ ($p$, $q$ ganze Zahlen) gibt, deren

Quadrat 2 wäre. (Die gebrochenen Zahlen kann man auch durch endliche oder periodische unendliche Dezimalbrüche darstellen; z. B. $^{17}/_{40} = 0{,}425$, $19/44 = 0{,}43181818\ldots$)

Nun ist zweierlei möglich: 1. Man verzichtet darauf, daß die Hypotenuse eines gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecks mit Katheten $= 1$ eine Maßzahl der Länge besitzt. Das taten Euklid und alle Mathematiker des Altertums. Oder 2. Man erschafft neue Zahlen neben den ganzen und gebrochenen, etwa indem man sagt: auch jeder nicht periodische unendliche Dezimalbruch ist eine Zahl, eine „irrationale Zahl". So verfährt man heutzutage. Unsere Hypotenuse erhält dann die irrationale Maßzahl $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$

Die Gesamtheit der positiven und negativen rationalen und irrationalen Zahlen mit Einschluß der Null nennt man reelle Zahlen. Für alle reellen Zahlen gelten die Rechenregeln

$$(1)\qquad \begin{array}{lll} a+b=b+a & a+(b+c)=(a+b)+c & ab=ba \\ a(bc)=(ab)\,c & a(b+c)=ab+ac. & \end{array}$$

Nach diesen Regeln hat man jahrhundertelang gerechnet, ohne daß es einem Menschen eingefallen wäre, das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren für das durch die irrationalen Zahlen erweiterte Zahlgebiet zu definieren und das Fortbestehen der Gesetze (1) zu beweisen.

Carl Weierstrass (1815–1897; Akademiemitglied 1863) war der erste, der in seinen Vorlesungen dieses merkwürdige und etwas beschämende Versäumnis nachholte. Einer seiner Schüler hat sein Verfahren 1872 veröffentlicht. Im gleichen Jahr begründeten auch (Quadruplizität der Fälle) Cantor, Dedekind und Méray unabhängig voneinander und von Weierstraß die Arithmetik der reellen Zahlen.

## 4

Außer den vier Operationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens gibt es im Bereiche der reellen Zahlen eine fünfte: das Bilden von Grenzwerten.

Erstes Beispiel: Man kann, wenn $n$ die Zahlen 3, 6, 12, 24, 48, ... durchläuft, die Flächenmaßzahlen $f_n$ der dem Kreise vom Halbmesser 1 einbeschriebenen regelmäßigen $n$-ecke berechnen. Es gibt dann eine von Lambert als irrational nachgewiesene Zahl, die man mit $\pi$ bezeichnet ($\pi = 3{,}14159265\ldots$) derart, daß die (positive) Differenz $\pi - f_n$, wenn $n$

über alle Grenzen wächst, beliebig klein wird. Man nennt die Zahl $\pi$ den Grenzwert der Zahlen $f_n$. Die Zahl $\pi$ ist die Maßzahl der Kreisfläche, so daß also ein Quadrat von der Seitenlänge $\sqrt{\pi}$ flächengleich mit dem Kreise vom Halbmesser 1 ist. Kann man dieses Quadrat, d. h. kann man die Strecke $\sqrt{\pi}$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, kann man die Strecke $\pi$, den halben Kreisumfang, mittels Zirkel und Lineal konstruieren, wenn der Kreisradius als Einheitsstrecke gegeben ist? Das ist das Problem der Quadratur des Zirkels. Dieses vielgenannte geometrische Problem wurde wie andere geometrische Probleme der Lösung erst dadurch zugänglich gemacht, daß es „arithmetisiert" wurde:

Wenn die Strecke von der Länge $x$ bei gegebener Einheitsstrecke mittels Zirkel und Lineal konstruierbar sein soll, dann ist notwendig (aber keineswegs hinreichend), daß $x$ einer „algebraischen Gleichung"

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots A_nx^n = 0 \tag{2}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \dots A_n$ genügt.

Die Arithmetisierung der Mathematik ist kennzeichnend für die zweite Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts. Die Begriffe Kurve, Kurventangente, Fläche, Tangentialebene und Krümmung der Fläche können durch bloße Raumanschauung nicht einwandfrei gefaßt werden. Begonnen hat die Arithmetisierung schon viel früher, nämlich 1637 mit der Géométrie des Descartes. Diese bedeutet den gewaltigsten Fortschritt der Geometrie über das aus dem Altertum Überlieferte. Die Gerade wird zu einem beiderseits ins Unendliche sich erstreckenden Maßstab, von dem der Anfangs- oder Nullpunkt und die Einheitsstrecke willkürlich festgelegt werden; jedem Punkte der Geraden entspricht eindeutig umkehrbar eine reelle Zahl, ein dem Euklid fernliegender, aber heute ein auch dem Nichtmathematiker geläufiger Gedanke. Jeder Punkt der Ebene wird zu einem Zahlenpaar $xy$ und umgekehrt. Die Kartesischen Koordinaten $x, y$ eines Punktes sind die mit Vorzeichen versehenen Entfernungen des Punktes von zwei Geraden, den Achsen, die Descartes als aufeinander senkrecht stehend annahm.

Selbstverständlich bleibt die Raumanschauung ein Göttergeschenk für den Mathematiker, aber als Beweisersatz ist sie verpönt.

Zweites Beispiel für einen Grenzwert:

Durchläuft $n$ die Zahlen 1, 2, 3, ..., so nähern sich die Zahlen

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\text{also } e_1 = 2,\ e_2 = 2{,}25 \quad e_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3, \dots\right)$$

einem Grenzwert, den man mit $e$ bezeichnet:

(3) $$e = 2{,}7182818\ldots, \qquad {}^{10}\log e = 0{,}4342\ 9448\ldots$$

Drittes Beispiel für einen Grenzwert:

(4) $$(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + x^3(1-x) + x^4(1-x) + \ldots$$

($x$ sei eine Zahl zwischen Null und 1, diese Grenzen eingeschlossen). (4) ist eine unendliche Reihe; durch sie wird folgende Aufgabe gestellt: Es soll die Summe $s_n(x)$ der ersten $n$ Reihenglieder

(5) $$s_n(x) = (1-x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$$

gebildet und untersucht werden, ob sie für unbegrenzt wachsendes $n$ einen Grenzwert hat, d. h. ob eine von $n$ unabhängige (aber von $x$ abhängige) Zahl $s(x)$ vorhanden ist der Art, daß $s(x)$ sich für genügend großes $n$ von $s_n(x)$ beliebig wenig unterscheidet. Man nennt dann die Reihe (4) konvergent und $s(x)$ ihren Grenzwert oder ihre Summe.

Aus (4) folgt sofort

(6) $$s(1) = 0 \qquad (= s_n(1) \text{ für jedes } n).$$

Ist jedoch $x < 1$, aber $\geqq 0$, dann folgt aus (5)

(7) $$s_n(x) = (1-x)\frac{1-x^n}{1-x} = 1 - x^n.$$

Da $x^n$ für unbegrenzt wachsendes $n$ beliebig klein ausfällt, hat $s_n(x)$ für die genannten $x$-Werte ($< 1$, aber $\geqq 0$) den Grenzwert 1.

Die von $x$ abhängige Zahl $s(x)$ oder, wie man zu sagen pflegt, die Funktion $s(x)$ ändert sich also an der Stelle $x = 1$ sprungweise, sie wird für $x = 1$ auf einmal $= 0$, während sie für alle kleineren $x$-Werte $= 1$ ist. Sie ist an der Stelle $x = 1$ unstetig oder diskontinuierlich, während die einzelnen Reihenglieder $x^\nu(1-x)$ stetige Funktionen von $x$ sind ($\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

Der Grenzwertbegriff und das Rechnen mit Grenzwerten sind grundlegend für die Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen und damit auch für die Differential- und Integralrechnung. Einwandfreie Beweise in der Theorie der reellen Funktionen sind erst im 19. Jahrhundert erbracht worden, wie überhaupt die Forderung unbedingter Strenge in der Mathematik und die mit der Arithmetisierung zusammenhängende Erfüllung dieser Forderung Ruhmestitel für die Forschung dieses Jahrhunderts sind. Vorher hatte man häufig die geometrische Anschauung benutzt, als wäre sie ein Beweismittel.

Ein Beispiel (statt unzähliger) für einen Satz, der der Anschauung selbstverständlich erscheint und trotzdem eines arithmetischen Beweises bedarf:

Wenn eine stetige Funktion $f(x)$ an verschiedenen Stellen $x = a$ und $x = b$ Werte $f(a)$, $f(b)$ verschiedenen Vorzeichens annimmt, dann gibt es (mindestens) eine Stelle $x = c$ zwischen $a$ und $b$, an der $f(x)$ den Wert Null annimmt.

Der Mathematiker, dem in erster Linie die Wendung zur unbedingten Strenge zu danken ist, war Louis Augustin Cauchy (1789–1857), den zum Mitglied zu wählen die Münchener Akademie versäumt hat. Von den Späteren hat vor allem Weierstraß seinen Namen neben den Cauchys gesetzt.

## 5

Nach der Einführung der irrationalen Zahlen hat sich eine nochmalige Erweiterung des Zahlengebietes als notwendig erwiesen:

Es gibt keine reelle Zahl $x$, die der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ genügen würde. Man erschafft eine neue Zahl $\sqrt{-1}$, wofür man $i$ schreibt: $i^2 = -1$. Zugleich erschafft man mittels der reellen Zahlen $a, b\,(b \neq 0)$ die imaginären Zahlen $a + bi$. Die Gesamtheit der reellen und imaginären Zahlen nennt man komplexe Zahlen. In dem so erweiterten Zahlenbereich bleiben die Rechenregeln (1) gültig, und es gilt in ihm der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra (hier etwas anders formuliert als üblich):

Die ganze rationale Funktion $n$ter Ordnung ($n$ ganze Zahl $\geqq 1$)

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n \tag{8}$$

($a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ Konstante, d. h. von der Veränderlichen $x$ unabhängige Zahlen, $a_n \neq 0$)
kann in ein Produkt

$$g(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) \ldots (x - b_n) a_n \tag{9}$$

umgeformt werden, und zwar auf eine einzige Weise abgesehen von der Vertauschbarkeit der Faktoren. Die Zahlen $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ heißen die Nullstellen der Funktion $g(x)$.

Der Quotient zweier ganzer rationaler Funktionen $g(x)$ ist eine (gebrochene) rationale Funktion. $y$ heißt eine algebraische Funktion von $x$ (und zugleich $x$ eine algebraische Funktion von $y$), wenn zwischen $x$ und $y$ eine Gleichung besteht, welche durch Nullsetzen einer ganzen rationalen Funktion $G(xy)$ von $x$ und $y$ erhalten wird:

$$G(xy) = 0. \tag{10}$$

$G(xy)$ ist eine Summe von Produkten der Form

(11) $$C_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} \quad (C_{\mu\nu} \text{ Konstante, } \mu, \nu \text{ ganze Zahlen } \geqq 0).$$

Die höchste vorkommende Summe $\mu + \nu$ heißt der Grad $n$ ($\geqq 1$) von $G(xy)$. Es wird im folgenden angenommen, daß $G(xy)$ nicht das Produkt ganzer Funktionen niedrigeren Grades ist. Die rationalen Funktionen $y = R(x)$ sind ein einfacher Sonderfall der algebraischen. Wenn man sich zunächst auf reelle Zahlen beschränkt und die Veränderlichen $xy$ als Kartesische Koordinaten deutet, dann stellt die Gleichung ersten Grades

(12) $$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0, \text{ d. h. } A \text{ und } B \text{ nicht gleichzeitig} = 0)$$

eine gerade Linie dar. Die Gleichung $n$-ten Grades (10) stellt eine algebraische Kurve $n$-ter Ordnung dar.

Die Kurven zweiter Ordnung

(13) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

sind die Ellipse (im Grenzfall der Kreis), die Parabel und die Hyperbel. Das lernt man heutzutage schon auf dem Gymnasium.

Wenn man in dem Ausdruck (8) für $g(x)$ die Veränderliche $x$ durch $x_1/x_2$ ersetzt und alles mit $x_2^n$ multipliziert, erhält man die „homogene binäre Form $n$-ten Grades“:

(14) $$g(x_1x_2) = a_0x_2^n + a_1x_1x_2^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1}x_2 + a_nx_1^n.$$

Sie stellt $= 0$ gesetzt wie $g(x) = 0$ ebenfalls $n$ nicht notwendig reelle und nicht notwendig verschiedene Punkte der $x$-Achse dar, die jetzt durch die Verhältnisse $x_1 : x_2$ ihrer homogenen Koordinaten bestimmt werden: $x_1/x_2 = b_1, b_2, \ldots, b_n$, nur daß jetzt auch $a_n = 0$ und der „unendlich ferne Punkt“ $x_2 = 0$ zugelassen wird.

An Stelle der homogenen Koordinaten $x_1, x_2$, auf deren Verhältnis $x_1 : x_2$ es nur ankommt, kann man neue homogene Koordinaten $y_1, y_2$ einführen:

(15) $$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \qquad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$$

und dabei der Einfachheit halber

(16) $$\begin{vmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

voraussetzen. Setzt man $y_1/y_2 = X$ und kehrt man auch auf der $x$-Achse zu der nicht homogenen Koordinate $x = x_1/x_2$ zurück, so erhält man an Stelle von (15) die eine Transformationsgleichung

(17) $$x = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

6

Führt man in $g(x_1x_2)$ (14) vermöge (15) die neuen Veränderlichen $y_1y_2$ ein, so erhält man eine Form

(18) $$h(y_1y_2) = c_0y_2^n + c_1y_1y_2^{n-1} + \ldots + c_{n-1}y_1^{n-1}y_2 + c_ny_1^n,$$

deren Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sich aus $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ leicht berechnen lassen. Beispielsweise geht die Form zweiten Grades

(19) $$g(x_1x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

über in

(20) $$h(y_1y_2) = c_{11}y_1^2 + 2c_{12}y_1y_2 + c_{22}y_2^2$$

mit

(21) $$\begin{gathered} c_{11} = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\gamma + a_{22}\gamma^2,\ c_{22} = a_{11}\beta^2 + 2a_{12}\beta\delta + a_{22}\delta^2, \\ c_{12} = a_{11}\alpha\beta + a_{12}(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_{22}\gamma\delta. \end{gathered}$$

Es ist

(22) $$c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

wovon man sich durch Einsetzen der Ausdrücke (21) in die linke Seite von (22) leicht überzeugen kann; die Substitutionskoeffizienten, für die $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ gilt, fallen heraus.

Solche Ausdrücke wie (22), deren Wert sich bei irgendeiner linearen Koordinatentransformation (15) nicht ändert, heißen Invarianten.

$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ besagt, daß die beiden Nullstellen von (19) zusammenfallen und damit auch die von (20).

Die binäre Form vierten Grades

(23) $$g_4(x_1x_2) = a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4$$

hat die zwei Invarianten

(24) $$g_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$$

und

(25) $$g_3 = a_0a_2a_4 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3.$$

*Homogene Koordinaten in der Geometrie der Ebene:*

In der Gleichung $G(xy) = 0$ (10) der algebraischen Kurve $n$-ter Ordnung ($xy$ Kartesische Koordinaten) setzt man $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$ und multipliziert mit $x_3^n$. Die entstehende Gleichung $G(x_1x_2x_3) = 0$ wird homogen vom Grade $n$, ihre linke Seite besteht aus einer Summe von Gliedern $c_{\mu\nu}x_1^\mu x_2^\nu x_3^\varrho$ $(\mu + \nu + \varrho = n)$.

So erhält z. B. die allgemeine Geradengleichung (12) die Form

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0. \tag{26}$$

Hier darf im Gegensatz zu (12) $A = B = 0$ sein, falls $C \neq 0$ ist. Die Gleichung (26) stellt dann die „unendlich ferne Gerade“ $x_3 = 0$ dar; vgl. Nr. 11.

Koordinatentransformationen:

$$\begin{gathered} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_2, \quad x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3, \\ x_3 = \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3. \end{gathered} \tag{27}$$

Die Substitutionsdeterminante möge $= 1$ angenommen werden:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}) \\ + \alpha_{12}(\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33}) \\ + \alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}) \end{array} = 1. \tag{28}$$

Die homogenen Koordinaten, auf deren Verhältnis $x_1 : x_2 : x_3$ es nur ankommt, sind für Fragen, bei denen es auf Maßzahlen ankommt (wie z. B. beim Pythagoräischen Lehrsatz) nicht geeignet, dagegen für Untersuchungen der projektiven Geometrie sehr nützlich. Wenn dem Punkte $x_1x_2x_3$ einer Ebene $E_1$, die auf eine Ebene $E_2$ aus einem Punkte außerhalb beider Ebenen projiziert wird, in $E_2$ der Punkt $y_1y_2y_3$ vermöge (27) entspricht, dann ist das Bild der unendlich fernen Geraden $x_3 = 0$ von $E_1$ die beliebige Gerade $\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3 = 0$ von $E_2$

Der Begriff der Invariante überträgt sich wörtlich vom Eindimensionalen aufs Zweidimensionale. Zum Beispiel gehört zur linken Seite der Kegelschnittgleichung

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2\,a_{12}x_1x_2 + 2\,a_{13}x_1x_3 + 2\,a_{23}x_2x_3 = 0 \tag{29}$$

die Invariante

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{12}a_{22}a_{23} \\ a_{13}a_{23}a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + a_{12}(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) \\ \qquad + a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \end{array} \tag{30}$$

Ist sie Null, so bedeutet das, daß der Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt.

Eng mit dem Begriff der Invariante hängt der Begriff der Gruppe zusammen. Die Gesamtheit der Substitutionen (15) bildet eine Gruppe, d. h.: Zwei dieser Substitutionen nacheinander ausgeführt sind einer dritten äquivalent, zu jeder Substitution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ gibt es die inverse $(\delta, -\beta, -\gamma, \alpha)$, beide nacheinander ausgeführt ergeben die Einheitssubstitution ($\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$). Auch die Substitutionen (17) und (27) bilden Gruppen.

Weitere Beispiele für Gruppen:

1. Sämtliche Drehungen eines starren Körpers um einen festen Punkt $P$. Eine Untergruppe bilden z. B. die Drehungen, die einen Würfel mit dem Mittelpunkt $P$ in sich überführen.

2. Hat man zwei (nicht notwendig verschiedene) Anordnungen $A_1$ und $A_2$ von $n$ verschiedenen Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$, so bildet der Übergang von $A_1$ zu $A_2$ eine Operation aus einer Gruppe, die aus $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ Operationen besteht. Diejenigen Operationen, die einen Ausdruck $f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ungeändert lassen, bilden eine Untergruppe. Es sei etwa $n = 4$, $f(b_1 b_2 b_3 b_4) = b_1 b_2 + b_3 b_4$. Der Leser finde die acht Operationen, $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$ der Untergruppe, die $b_1 b_2 + b_3 b_4$ ungeändert lassen.

Lösung:

$S_1$ läßt alle $b_\nu$ an ihren Plätzen, $S_2$ vertauscht $b_1$ mit $b_2$, $S_3$ vertauscht $b_3$ mit $b_4$, $S_4$ nimmt die beiden Vertauschungen gleichzeitig vor, $S_5$ vertauscht $b_1$ mit $b_3$ und $b_2$ mit $b_4$, $S_6$ vertauscht $b_1$ mit $b_4$ und $b_2$ mit $b_3$, entsteht also dadurch, daß man die Operationen $S_5$ und $S_4$ nacheinander ausführt, was man so ausdrückt: $S_6 = S_4 S_5$. In gleichem Sinne ist $S_7 = S_2 S_5$ und $S_8 = S_3 S_5$.

## 7

Nachdem die Einführung komplexer Zahlen sich bei der Auflösung algebraischer Gleichungen $g(x) = 0$ bewährt hatte, vgl. (8) und (9), wurden im 18. Jahrhundert der Logarithmus und die trigonometrischen Funktionen sowie die zugehörigen Umkehrfunktionen für komplexe Werte der Veränderlichen untersucht. Eine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen aber gibt es erst seit Cauchy. Der Vollendung zugeführt wurde dieses Lehrgebäude durch Carl Weierstraß und Bernhard Riemann (1826 bis 1866; Akademiemitglied 1859). Von beiden wurde es schließlich auf sehr verschiedene Weisen durch eine Theorie der algebraischen Funktionen und der Integrale

$$\int R(xy)\,dx \tag{31}$$

(gewöhnlich als Abelsche Integrale bezeichnet) gekrönt; $R(xy)$ bedeutet eine rationale Funktion; zwischen $x$ und $y$ besteht eine algebraische Gleichung $G(xy) = 0$, so daß also $y$ eine algebraische Funktion von $x$ ist.

Durch diese Untersuchungen wurden Probleme fortgeführt und zu einem gewissen Abschluß gebracht, deren Ursprünge bis zur Entdeckung der Differential- und Integralrechnung zurückreichen.

Im Komplexen ist das geometrische Substrat (der geometrische Träger) der Gleichung $G(xy) = 0$ nicht mehr eine eindimensionale Kurve, sondern eine zweidimensionale „Riemannsche Fläche". Jedem Punkte dieser Fläche ist ein der Gleichung $G(xy) = 0$ genügendes komplexes Wertepaar $xy$ zugeordnet. Die Veränderliche $x$ ist nicht mehr eindimensional ($x$-Achse), sondern durchläuft alle Punkte der komplexen $x = \xi + i\eta$-Ebene ($\xi$ und $\eta$ sind reelle Kartesische Koordinaten). In jedem Punkte $x = \xi + i\eta$ dieser $\xi\eta$-Ebene gibt es, wenn $G(xy)$ vom Grad $m$ in $y$ ist, $m$ Werte $y$, die nur für Ausnahmewerte $x$ (worunter sich die $x$-Werte der Verzweigungspunkte befinden) nicht alle voneinander verschieden sind. Man erhält so, wie hier nicht näher ausgeführt werden kann, eine Riemannsche Fläche, bestehend aus $m$ ebenen Blättern, die in Verzweigungspunkten zusammenhängen und durch Übergangslinien verbunden sind. Diese Riemannsche Fläche kann dann noch mannigfach umgeformt werden. Wichtig ist nur, daß jedem Punkt der Fläche eindeutig umkehrbar ein komplexes der Gleichung $G(xy) = 0$ genügendes Wertepaar $xy$ entspricht.

Sehr einfach werden die Integrale (31), wenn $G(xy)$ vom zweiten Grad ist. Einfachstes, aber typisches Beispiel:

$$y^2 = 1 - x^2 \tag{32}$$

(im Reellen Kreisgleichung in Kartesischen Koordinaten).

Setzt man

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{also} \quad t = \frac{x}{1+y}, \tag{33}$$

so wird jedem der Gleichung $x^2 + y^2 = 1 = 0$ genügenden komplexen Wertepaar $xy$ eindeutig ein Punkt $t$ der komplexen $t = \sigma + i\tau$-Ebene zugeordnet. Diese Ebene kann als Riemannsche Fläche der algebraischen Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$ angesehen werden. Das Integral (31) geht durch die Substitution (33) in ein Integral $\int r(t)\,dt$ über, wo $r(t)$ eine rationale Funktion ist. Ein solches Integral führt auf rationale Funktionen von $t$ und Logarithmen solcher Funktionen.

## 8

Viel schwieriger wird alles, wenn die Gleichung $G(xy) = 0$ die immer noch recht einfache Form hat

$$y^2 - g_4(x) = 0, \tag{34}$$

wo $g_4(x)$ eine ganze rationale Funktion dritten oder vierten Grades mit lauter getrennten Nullstellen ist:

$$(35)\quad g_4(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \quad (a_1 \neq 0, \text{ falls } a_0 = 0 \text{ ist}).$$

Die Integrale (31) nennt man im Falle der Gleichung (34) elliptische Integrale. Über sie sind schon im 18. Jahrhundert und dann mit besonderem Erfolg durch Abel und durch Jacobi in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wichtige Sätze gefunden worden. Aber die Vollendung der Theorie gelang erst Weierstraß, bei dem die Beschränkung auf das Reelle völlig gefallen war.

Das sogenannte elliptische Integral erster Gattung

$$(36)\qquad \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{g_4(x)}}$$

hat merkwürdige Eigenschaften: Sind $x_0, y_0 = \sqrt{g_4(x_0)}$ und $x_1, y_1 = \sqrt{g_4(x_1)}$ seine untere und obere Grenze, so hängt sein stets endlich bleibender Wert noch vom Integrationsweg ab. Ist $u$ ein zu einem bestimmten Integrationsweg gehöriger Integralwert, so sind sämtliche Integralwerte, die sich bei festgehaltenen Grenzen durch beliebige Änderungen des Weges ergeben, in dem Ausdruck

$$(37)\qquad u + \mu\omega_1 + \nu\omega_2$$

enthalten ($\mu, \nu$ beliebige ganze Zahlen $\gtreqless 0$; $\omega_1, \omega_2$ von den Grenzen des Integrals unabhängige Konstante; Quotient $\omega_2/\omega_1$ imaginär). Macht man die obere Grenze des Integrals veränderlich (sie heiße jetzt $xy$), so werden $x$ und $y$ eindeutige, doppeltperiodische Funktionen von $u$ mit den Perioden $\omega_1$ und $\omega_2$ (sogenannte elliptische Funktionen):

$$(38)\qquad x = \varphi(u), \quad y = \varphi'(u), \quad \varphi(u + \mu\omega_1 + \nu\omega_2) = \varphi(u).$$

Jedem Wertepaar $xy$, das der algebraischen Gleichung (34) genügt, entspricht vermöge (38) in der komplexen $u$-Ebene ein Punkt des Parallelogramms mit den vier Ecken $o$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$. (Von diesen vier Eckpunkten ist nur der erste der Parallelogrammfläche zuzurechnen, von den sonstigen Seitenpunkten nur die der Seiten $o\omega_1$ und $o\omega_2$. Dieses Parallelogramm kann als Riemannsche Fläche der Funktion $y = \sqrt{g_4(x)}$ angesehen werden und in eine Ringfläche umgeformt werden. Zuerst werden zwei gegenüberliegende Seiten zur Deckung gebracht, wodurch ein offener Zylinder entsteht, den man durch Aneinanderfügung der Ränder zu einer Ringfläche umformen kann.

Macht man in $g_4(x)$ die Substitution

$$(17) \qquad x = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

so geht $g_4(x)$ über in

$$(39) \qquad \frac{1}{(\gamma X + \delta)^4}\,(c_0 X^4 + 4\,c_1 X^3 + 6\,c_2 X^2 + 4\,c_3 X + c_4) = \frac{h_4(X)}{(\gamma X + \delta)^4}.$$

Das Integral erster Gattung (36) aber geht über in das Integral

$$(40) \qquad \int \frac{dX}{\sqrt{h_4(X)}}.$$

Daraus folgt: Die Perioden $\omega_1$, $\omega_2$ sind Invarianten der Form vierten Grades $a_0 x_1^4 + 4\,a_1 x_1^3 x_2 + 6\,a_2 x_1^2 x_2^2 + 4\,a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$. Wie die beiden rationalen Invarianten $g_2$ (24) und $g_3$ (25) dieser Form sich als Funktionen von $\omega_1$ und $\omega_2$ darstellen lassen, hat Weierstraß gezeigt. Hier öffnet sich der Zugang zu einem Arbeitsgebiet (elliptische Modulfunktionen), das auch für die allgemeine Funktionentheorie fruchtbar wurde.

(Zum Vergleich: Hat man es statt mit der Gleichung $y^2 = g_4(x)$ (34) mit der einfacheren $y^2 = 1 - x^2$ (32) zu tun, so kann man statt des Integrals (36) das einfachere

$$(41) \qquad u = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

einführen; auch dieses Integral hängt vom Wege ab. Durch dessen Änderung im Komplexen kann es die unendlich vielen Werte

$$(42) \qquad u + 2\,\mu\pi \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

annehmen. $x$ und $y$ werden eindeutig periodische Funktionen von $u$:

$$(43) \qquad x = \sin u, \quad y = \cos u.$$

In der komplexen $u$-Ebene entspricht jedem Punkte des Parallelstreifens

$$(44) \qquad 0 \leqq \text{Realteil von } u < 2\pi$$

umkehrbar eindeutig ein Wertepaar $x, y = \sqrt{1 - x^2}$.)

## 9

Wie die Lehre von den elliptischen Integralen und den elliptischen Funktionen vorbildlich und wegweisend wurde für die Riemannsche und für die Weierstraßsche Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, kann hier nicht auseinandergesetzt werden. Diese Theorie, die in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts viele ausgezeichnete Mathematiker vorzugsweise beschäftigte, kam inzwischen in den Hintergrund. Das lag an ihrer Schwierigkeit, an den von Generation zu Generation sich ändernden wissenschaftlichen Bestrebungen, aber auch daran, daß Riemann früh starb, und daß Weierstraß noch zurückhaltender als Riemann war, seine Forschungsergebnisse durch den Druck zu veröffentlichen.

Alfred Clebsch (geb. 19. 1. 1833 Königsberg, gest. 7. 11. 1872 Göttingen, 1858 Professor in Karlsruhe, 1863 in Gießen, 1868 in Göttingen, 1869 korrespondierendes Mitglied der Bayerischen Akademie), ein Mathematiker von hoher Begabung und ein glänzender Lehrer, war kein unmittelbarer Schüler Riemanns, bemühte sich aber erfolgreich, in dessen Gedankenkreis einzudringen, und schrieb darüber zusammen mit seinem Schüler Gordan ein Buch (Theorie der Abelschen Funktionen). Die Verfasser verzichteten, ohne die Weierstraßsche Strenge anzustreben, auf den Begriff der Riemannschen Fläche, der mehr ist als ein bloßes Hilfsmittel der Theorie. Träger für die Wertepaare $xy$, die der Gleichung $G(xy) = 0$ genügen, auch der imaginären, war für sie die Kurve mit der homogen geschriebenen Gleichung $G(x_1 x_2 x_3) = 0$.

Clebschs namhafteste Schüler, nämlich Klein, Lindemann, Gordan, Noether, Brill, Lüroth, wurden sämtlich bayerische Professoren und Mitglieder der Münchener Akademie. Hesse war in Königsberg Lehrer Clebschs gewesen und hat dessen algebraische Denkweise beeinflußt. Dyck und später auch Burkhardt waren Schüler Kleins, Finsterwalder war Schüler Brills, Baldus Schüler Gordans und Noethers. Das sind zusammen elf von den (S. 4f.) genannten einundzwanzig Mathematikern. Ehe im folgenden von ihrem Wirken berichtet wird, soll einiges über diejenigen in Bayern tätig gewesenen Mathematiker gesagt werden, die vor ihnen in die Akademie gewählt wurden.

Die reine Mathematik als Wissenschaft, nicht als Lehrfach, fand in München erst spät eine Stätte, dann aber gleich zu Anfang durch einen Mathematiker von Rang: Ludwig Seidel* (s. S. 4). Er wollte, wie so mancher Mathematiker, zuerst Astronom werden und hat schon als junger Student und Schüler Johann F. Enckes (1791–1865; Akademiemitglied 1854) an der Berliner Universität Mondephemeriden berechnet. Dort hörte er auch Mathematik, besonders bei Gustav Dirichlet (1805–1859; Akademiemitglied 1872). In Königsberg setzte er seine Studien fort bei drei berühmten Professoren, dem Mathematiker Jacobi, dem theoretischen Physiker Franz Neumann (1798–1895; Akademiemitglied 1872) und dem Astronomen Friedrich Wilh. Bessel (1784–1846; Akademiemitglied 1842). Bessel empfahl Seidel als „den allerfleißigsten und allerkenntnisreichsten jungen

Mann, den ich je gesehen habe" an Karl Steinheil* (1801–1870), der an der Universität München und in der Akademie (seit 1827) die angewandte Mathematik vertrat. Steinheil ist nicht nur bekannt durch die von ihm gegründete, heute noch bestehende optische Anstalt, sondern auch als einer der ersten Erfinder auf dem damals neuen Gebiete der elektrischen Telegraphie (vgl. den Artikel „Physik"). Es gelang Steinheil im Jahre 1851 nach einem vorhergegangenen vergeblichen Versuch, die Aufnahme Seidels in die Akademie durchzusetzen; ao. Universitätsprofessor wurde Seidel 1847, o. 1855. Schon 1848 hatte er einen Irrtum Cauchys aufgeklärt und sich dadurch einen Platz in der Geschichte der Mathematik gesichert. Cauchy hatte gemeint beweisen zu können, daß eine konvergente unendliche Reihe, deren Glieder stetige Funktionen sind, eine stetige Funktion darstelle (s. das Gegenbeispiel in Nr. 4 S. 8). Seidel zeigte, welche Zusatzvoraussetzung für das Bestehen des Cauchyschen Satzes hinreichend ist. (Später stellte sich heraus, daß der Cambridger Mathematiker und theoretische Physiker Stokes (1819–1903; Akademiemitglied 1888) ein paar Monate vor Seidel das nämliche Ergebnis gefunden hatte, das vorher auch Weierstraß, ohne daß er etwas darüber veröffentlicht hätte, bekannt war, wahrscheinlich auch Cauchy).

In Zusammenarbeit mit Steinheil gab sich Seidel andauernden und mühsamen Untersuchungen über die Helligkeit von Planeten (Venus, Mars, Jupiter, Saturn) und von 208 Fixsternen hin; von Gauß erhielt er dafür einen anerkennenden Brief, aber er verdarb sich die Augen und war gegen Ende seines Lebens fast blind.

Seidels Berechnungen des Durchgangs von Lichtstrahlen durch Linsen (im Hinblick auf Steinheils Instrumentenbau) sind vergleichbar mit den Rechnungen, durch die später der Jenaer Universitätsprofessor der Mathematik Ernst Abbe (1840–1905; Akademiemitglied 1889) dem Mikroskopbauer Karl Zeiss neue Wege wies und dadurch eine der größten deutschen Industrien ermöglichte.

Sowohl bei seinen astronomischen wie bei seinen optischen Arbeiten war Seidel auf Gleichungen mit 70 und mehr Unbekannten gestoßen. Er erfand ein Näherungsverfahren (mit Konvergenzbeweis), nach welchem man mit dem unvermeidlichen Aufwand von Zeit und Mühe die Gleichungen lösen konnte. Auch heutzutage benutzt man Seidels Verfahren; das Ausrechnen aber überläßt man einer Elektronenrechenmaschine.

1865 wurde eine zweite Professur für Mathematik an der Universität München errichtet; auf sie wurde Gustav Bauer (s. S. 4) berufen, der in Berlin (gleichzeitig mit Seidel) und in Paris studiert und eine reiche mathematische Bildung erworben hatte. In den Sitzungsberichten der Akademie, deren Mitglied er 1871 wurde, veröffentlichte er zahlreiche Arbeiten über

Kugelfunktionen, Kettenbrüche, Algebra und Geometrie. 1952 stützte Oskar Perron (geb. 1886; Akademiemitglied 1924) den Beweis für einen der merkwürdigen von dem Inder Ramanujan behaupteten Sätze auf einen Kettenbruchsatz Bauers. Nicht jedem Mathematiker ist ein solches Nachwirken fast ein halbes Jahrhundert nach seinem Tode beschieden.

Bauer war ein sehr beliebter Lehrer; seine Vorlesungen über Algebra wurden vom Mathematischen Verein München herausgegeben, wobei freilich (in der ersten Auflage) nicht voll beachtet wurde, daß man an Gedrucktes höhere kritische Anforderungen stellt als an bloß Gesprochenes.

Bei Seidel und Bauer hat Max Planck (1858–1947; Akademiemitglied 1911) Mathematik gehört; ihre Vorlesungen waren mitbestimmend für seine Berufswahl.

## 10

Noch bevor Seidel Akademiemitglied und Professor geworden war, hatte der Erlanger Universitätsprofessor Karl v. Staudt* (s. S. 4) durch seine „Geometrie der Lage" (Erlangen 1848) eine der größten Leistungen in der jahrtausendealten Geschichte der Geometrie vollbracht. v. Staudt wurde im Jahre 1863 in die Akademie gewählt. Vorher war er, nachdem er in Göttingen bei Gauß studiert hatte, Gymnasiallehrer in Würzburg (1822–1827) und sodann Professor am Polytechnikum in Nürnberg gewesen. An die Universität Erlangen wurde er 1835 berufen. Als Würzburger Gymnasiallehrer hatte er sich an der Universität habilitieren wollen; diese aber hat sein Gesuch abgelehnt und hätte sich so um den Ruhm gebracht, den größten in Bayern geborenen Geometer zu ihren Dozenten zählen zu dürfen, hätte ihn nicht das Ministerium aus eigener Machtvollkommenheit zum Privatdozenten ernannt. Die Universität Würzburg hat auch andere Habilitationsbewerber abgewiesen, die nachher Akademiemitglieder wurden.

In v. Staudts Geometrie der Lage ist von Streckenlängen und Winkelmaßen nicht die Rede. Beispiel eines Satzes der Geometrie der Lage:

Liegen von den neun Punkten, in denen drei Gerade von drei anderen geschnitten werden, sechs auf einem Kegelschnitt, so liegen die drei anderen auf einer Geraden. Es gelang v. Staudt, in die Geometrie der Lage Zahlen einzuführen (Koordinaten, deren Definition nicht auf Längenmessung beruht), so daß für die Geometrie der Ebene, auf die sich dieser Bericht beschränkt, schließlich herauskommt, was man auch ganz an den Anfang stellen könnte: Ein Punkt ist gleichbedeutend mit einem Tripel $x_1\, x_2\, x_3$ zunächst reell zu denkender Zahlen, die nicht alle zugleich Null sind. Ist $\lambda \neq 0$, so ist $\lambda x_1\, \lambda x_2\, \lambda x_3$ der nämliche Punkt wie $x_1\, x_2\, x_3$.

Die Punkte, die einer Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{45}$$

genügen, bilden eine Gerade ($u_1$, $u_2$, $u_3$ beliebige reelle Zahlen, nur nicht alle gleich Null; es kommt nur auf die Verhältnisse dieser Zahlen an). Zwei Punkte bestimmen immer eine Gerade, zwei Gerade schneiden einander immer in einem Punkt. Die Geometrie der Lage kann auch als projektive Geometrie bezeichnet werden; vgl. Nr. 6 S. 12. Später gelang es v. Staudt, auch imaginäre Punkte und Gerade in die Geometrie der Lage einzuführen. Die Geometrie der Lage erscheint zuerst als rein abstraktes, keiner praktischen Anwendung fähiges Gedankengebäude. Und doch hat Karl Culmann (geb. 10. 7. 1821 Bergzabern, gest. 9. 12. 1881 Zürich) seine graphische Statik, eine der genialsten Erfindungen der Technischen Mechanik, auf der Geometrie der Lage aufgebaut. Und kein Geringerer als Maxwell (1831–1879), das größte Genie angewandter Mathematik im 19. Jahrhundert, hat sich mit den lagegeometrischen Beziehungen der graphischen Statik beschäftigt.

Als großer Geometer ist v. Staudt den Fachgelehrten allgemein bekannt; aber viele mögen ihn für einen einseitigen Geometer halten und nicht wissen, daß er verborgene zahlentheoretische Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen entdeckt hat.

Noch weniger dürfte bekannt sein, daß Gauß in den Göttinger Gelehrten Anzeigen vom 5. 6. 1820 Herrn v. Staudt als Berechner zitiert, „Herrn v. Staudt, welcher sich gegenwärtig bei uns mit ausgezeichnetem Eifer und Erfolg dem Studium der mathematischen und astronomischen Wissenschaften widmet". Und am 3. 9. 1820 schrieb Gauß an Johann E. Bode (Akademiemitglied 1808): „Die beiliegende Ephemeride der Pallas ist diesmal von Herrn v. Staudt berechnet, einem jungen Mann von ausgezeichneten Talenten".

## 11

Der (nicht unmittelbare) Nachfolger v. Staudts auf dem Erlanger Lehrstuhl wurde 1872 Felix Klein* (s. S. 4). Er ist die glänzendste Erscheinung unter den deutschen Mathematikern seiner Zeit, dank seiner raschen Auffassungskraft und der vollendeten Beherrschung, mit der er die verschiedensten Gebiete der Mathematik untereinander zu verbinden verstand. Wenn ein Vortrag von sonst keinem Zuhörer verstanden wurde, vielleicht nicht einmal vom Vortragenden selbst, dann entwirrte Klein nachher die am Boden schleifenden Zügel des Vortrags und setzte auseinander, was der

Vortragende eigentlich hätte sagen sollen. Durch Kleins „Erlanger Programm“ (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, 1872) ist diese fränkische Universitätsstadt in die Geschichte der Mathematik eingegangen. Nach Kleins Worten handelt es sich um folgendes: „Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden ... Man entwickele die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie.“

Beispiel (von Klein herrührend, aber hier unter Beschränkung auf die Geometrie der Ebene anders als von Klein dargestellt). Der willkürliche Faktor der drei homogenen Koordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ eines Punktes der Ebene (vgl. die drei letzten Zeilen von S. 19) wird so festgelegt, daß

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{46}$$

wird. Dann sind nur noch zwei verschiedene Zahlentripel einem Punkte äquivalent; ist $x_1\, x_2\, x_3$ das eine, so ist $-x_1\; -x_2\; -x_3$ das andere. Von der Gruppe der Transformationen (27) wird nur die Untergruppe $G$ beibehalten, bei der $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ invariant in $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ übergeht. Die Transformationen dieser Untergruppe $G$ lassen sich leicht hinschreiben; die neun Konstanten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ der allgemeinen Transformation (27) werden Funktionen dreier unabhängiger Zahlen, der sogenannten Eulerschen Winkel. Sind $x_1\, x_2\, x_3$ und $x_1'\, x_2'\, x_3'$ zwei beliebige Punkte $P$, $P'$, so bleibt auch der Ausdruck $x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'$, dessen Wert, wie man leicht sieht, zwischen $-1$ und $+1$ liegt, bei den Transformationen der Gruppe $G$ invariant:

$$x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' \equiv y_1 y_1' + y_2 y_2' + y_3 y_3'. \tag{47}$$

$P''$ sei ein Punkt der Stecke $PP'$ (genauer gesagt: ein Punkt einer der beiden Strecken, in welche die Gerade $PP'$ durch die Punkte $P$, $P'$ zerfällt). Dann kann man durch eine Transformation der Gruppe $G$ erreichen, daß die drei Punkte $P$, $P'$, $P''$ folgende Koordinaten haben:

$$\begin{aligned} &P\colon\; y_1 = 0,\quad y_2 = 0,\quad y_3 = 1; \quad P'\colon y_1' = 0,\quad y_2' = \sin\vartheta',\quad y_3' = \cos\vartheta'; \\ &P''\colon\; y_1'' = 0,\quad y_2'' = \sin\vartheta'',\quad y_3'' = \cos\vartheta'' \qquad (0 < \vartheta'' < \vartheta' < \pi). \end{aligned} \tag{48}$$

Man definiert: Die Entfernung $PP'$ zweier Punkte $P$, $P'$ ist $a\varkappa$, wenn

$$\cos\varkappa = x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' \tag{49}$$

ist ($a$ ist eine beliebige positive Konstante, $0 < \varkappa < \pi$). Diese Definition ist dann und nur dann sinnvoll, wenn sich aus ihr zwischen den drei Entfernungen $PP'$, $PP''$, $P''P'$ die Gleichung ergibt: $PP' = PP'' + P''P'$. Das ist aber der Fall; denn nach (47) ist

$$(50) \qquad x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' = y_1y_1' + y_2y_2' + y_3y_3' = \cos\vartheta',$$

also $PP' = a\vartheta'$, ebenso $PP'' = a\vartheta''$. Die Entfernung $P''P' = a\varkappa$ ist definiert durch die Gleichung (51)

$$\cos\varkappa = y_1y_1' + y_2y_2'' + y_3y_3'' = \sin\vartheta' \sin\vartheta'' + \cos\vartheta' \cos\vartheta'' = \cos(\vartheta' - \vartheta''),$$

somit Entfernung $P'P'' = a\vartheta' - a\vartheta'' = PP' - PP''$.

Die Länge jeder Geraden ist endlich

$$= a\pi \; (x_1' = -x_1, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = -x_3, \quad \cos\varkappa = -1, \quad \varkappa = \pi).$$

Wie die Koordinaten eines Punktes durch die Forderung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ normalisiert wurden, kann man die Gleichung $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ einer Geraden durch Division mit $\pm\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ in doppelter Weise auf eine Normalform

$$(52) \qquad U_1x_1 + U_2x_2 + U_3x_3 = 0 \quad \text{oder} \quad -U_1x_1 - U_2x_2 - U_3x_3 = 0$$

mit $U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 1$ bringen. Hat man eine zweite Geradengleichung in der Normalform:

$$(53) \qquad \begin{aligned} &U_1'x_1 + U_2'x_2 + U_3'x_3 = 0, \text{ so ist} \\ &U_1U_1' + U_2U_2' + U_3U_3' = \cos\varphi \end{aligned}$$

invariant gegenüber den Transformationen der Untergruppe $G$. $\varphi$ ist einer der beiden Winkel, den die beiden Geraden miteinander bilden ($0 < \varphi < \pi$); der andere $\pi - \varphi$ ergibt sich, wenn man $U_\nu$ durch $-U_\nu$ ersetzt ($\nu = 1, 2, 3$).

Man nennt die hier in die Geometrie der Lage eingeführte, durch die Untergruppe $G$ gekennzeichnete Maßgeometrie, in der zwei Gerade sich stets in einem Punkte schneiden, Riemannsche Geometrie, weil Riemann zuerst auf ihre Möglichkeit aufmerksam gemacht hat.

Die gewöhnliche Euklidische Geometrie erhält man, wenn man die Gruppe der Koordinatentransformationsgleichungen (27) der Geometrie der Lage auf eine andere Untergruppe $G'$ beschränkt. Man schließt eine Gerade als uneigentliche oder als unendlich ferne aus, etwa die Gerade $x_3 = 0$, beschränkt die dritte der Gleichungen (27) auf $y_3 = x_3$, setzt

$$x_1/x_3 = x, \quad x_2/x_3 = y, \quad y_1/y_3 = X, \quad y_2/y_3 = Y.$$

Die zwei ersten der Gleichungen (27) gehen dann in die folgenden über:

$$x = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}, \quad y = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}. \tag{54}$$

Setzt man noch $a_{11} = a_{22} = \cos a$, $-a_{12} = a_{21} = \sin a$, so hat man in (54) mit den drei willkürlichen Konstanten $a$, $a_{13}$, $a_{23}$ eine Transformation der Gruppe $G'$ der Euklidischen Geometrie.

Sind $x\,y$ und $x'\,y'$ die Koordinaten (es sind jetzt kartesische Koordinaten) zweier Punkte $P$ und $P'$, so bleibt $(x-x')^2 + (y-y')^2$ invariant bei den Transfromationen der Gruppe $G'$; durch $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ wird die Entfernung $PP'$ der Punkte $P$, $P'$ definiert. Auf Grund dieser Definition kann man leicht beweisen: Wenn $P''$ mit der Koordinaten $x''$, $y''$ ein Punkt der Strecke $PP'$ ist, dann besteht zwischen den drei Entfernungen $PP'$, $PP''$, $P''P'$ die Gleichung: $PP' = PP'' + P''P'$. Man kann nämlich durch eine passend gewählte Transformation der Gruppe $G'$ den drei Punkten folgende Koordinaten geben:

$$P\colon\ x = y = 0;\quad P'\colon\ x' > 0,\ y = 0;\quad P''\colon\ x''\ (> 0 \text{ aber } < x'),\ y'' = 0.$$

Dann ist Entfernung $PP' = x'$, $PP'' = x''$, $P''P' = x' - x''$, also $PP' = PP'' + P''P'$.

Als dritte mögliche Geometrie neben der Riemannschen und der Euklidischen kann durch eine Untergruppe $G''$ der Gruppe linearer Transformationen (27) die Lobatscheffskysche Geometrie charakterisiert werden, in der es in einer Ebene zu einer Geraden $g$ durch einen außerhalb $g$ gelegenen Punkt unendlich viele $g$ nicht schneidende Gerade gibt. Man wird jetzt nicht nur die Punkte der Geraden $x_3 = 0$ als uneigentliche ausschließen, sondern alle Punkte $x_1\,x_2\,x_3$, für die $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \geqq 0$ ausfällt.

Indem man wieder über den willkürlichen Faktor $\lambda$ verfügt, wird in der Lobatscheffskyschen Ebene jeder Punkt eindeutig durch ein Zahlentripel $x_1\,x_2\,x_3$ bestimmt, für das $x_3 > 0$ ist, und außerdem die Gleichung

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \text{besteht.} \tag{55}$$

Es gibt eine Untergruppe $G''$ der Gruppe linearer Substitutionen (27), bei der $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ invariant in $-y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ übergeht. Die Koeffizienten dieser Untergruppe können sofort hingeschrieben werden. Sind $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ die Koordinaten zweier Punkte $P$, $P'$, so wird auch

$$-x_1x_1' - x_2x_2' + x_3x_3' \equiv -y_1y_1' - y_2y_2' + y_3y_3'. \tag{56}$$

Der Zahlenwert dieser Invariante ist stets $> 1$; setzt man ihn $= \cos i\vartheta$ ($i = \sqrt{-1}$), so ist $a\,\vartheta$ die Entfernung $PP$ der beiden Punkte $P$ *und* $P'$; vgl. S. 21 f.

12

Im Jahre 1875 nahm Klein einen Ruf an die Technische Hochschule München an. Hier führte er eine Neuerung ein, die sich sehr bewährte und allmählich von allen deutschen Technischen Hochschulen übernommen wurde: Er vereinigte die Vielfalt der den Studenten zugemuteten mathematischen Vorlesungen (Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, Synthetische Geometrie, Algebraische Analysis) zu einer durch mehrere Semester fortgeführten Vorlesung über Höhere Mathematik.

Klein war kaum dreißig Jahre alt, als er Bayern verließ; zur vollen, sich weit über Deutschland hinaus erstreckenden Wirkung gelangte er erst durch seine Tätigkeit in Göttingen. Aber seine Anfänge in Erlangen und München waren schon so hervorragend, daß ihm in dem vorliegenden Bericht ein besonderer Platz zukommt.

Auf seine zahlreiche Abhandlungen (sie wurden zu Kleins Lebzeiten in drei Bänden herausgegeben) kann hier ebensowenig eingegangen werden wie auf seine Lehrbücher und seine Göttinger Vorlesungen, die gedruckt und autographiert veröffentlicht wurden. Nur sein für seine Arbeitsweise bezeichnendes Buch über das Ikosaeder und die allgemeine Gleichung fünften Grades werde besonders erwähnt. Was hat das Ikosaeder (der bekannte von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzte Körper) mit der Gleichung fünften Grades zu tun? Es gibt (wenn man das Belassen in der alten Lage mit zu den Drehungen rechnet) eine Gruppe von sechzig Drehungen $D_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, 60)$, die das Ikosaeder in sich überführen. Andererseits gibt es (wenn man das Belassen jeder der fünf Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_5$ an ihrer Stelle mit zu den Vertauschungen rechnet) sechzig eine Gruppe bildende Vertauschungen $S_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, 60)$ der fünf Nullstellen $b_1, b_2, \ldots, b_5$ einer ganzen rationalen Funktion $g_5(x)$, welche den Wert des Ausdrucks

$$(57)\quad \begin{aligned} &(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)(b_1 - b_4)(b_1 - b_5)(b_2 - b_3)(b_2 - b_4)(b_2 - b_5) \cdot \\ &\qquad \cdot (b_3 - b_4)(b_3 - b_5)(b_4 - b_5) \end{aligned}$$

ungeändert lassen. Man kann die Numerierung der $D_\nu$ und $S_\nu$ so vornehmen, daß die Vertauschungen $S_\mu$ und $S_\nu$ $(\mu, \nu, = 1, 2 \ldots, 60)$ nacheinander ausgeführt stets die Vertauschung $S_k$ ergeben, wenn die Drehungen $D_\mu$ und $D_\nu$ nacheinander ausgeführt der einen Drehung $D_k$ äquivalent sind. Diese Gleichartigkeit der beiden Gruppen führte Klein zu einem Verfahren der Auflösung der Gleichung fünften Grades $g_5(x) = 0$.

In der Lehre von den algebraischen Funktionen fand Klein den Weg aus den engeren Betrachtungen der Schule Clebschs zu den genialeren Riemanns.

Er verwandte große Mühe auf den Versuch, folgenden Satz zu beweisen, den er das Grenzkreistheorem nannte und den er als Krönung der Theorie der algebraischen Funktionen ansah: Wenn die Gleichung $G(xy) = 0$ (10) weder durch rationale Funktionen $x = r_1(t)$, $y = r_2(t)$ (32) befriedigt werden kann noch durch doppeltperiodische Funktionen $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ (38), dann kann die zur Gleichung $G(xy) = 0$ gehörige Riemannsche Fläche durch eindeutige Funktionen $x(w)$, $y(w)$ auf ein Kreisbogenpolygon der $w$-Ebene abgebildet werden. Es gibt eine Gruppe linearer Substitutionen

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}, \tag{58}$$

bei denen die Funktionen $x(w)$, $y(w)$ invariant bleiben.

Es gelang Klein trotz größter Kraftanstrengung nicht, seinen Grenzkreissatz zu beweisen. Nachdem Henri Poincaré (1854–1912; Akademiemitglied 1908) ihn bewiesen hatte, zog sich Klein auf eine umfassende Lehrtätigkeit und ein weitverzweigtes organisatorisches Wirken zurück; siehe darüber insbesondere Seite 41. Wie jeder Gelehrte, aber wohl mehr als andere Gelehrte muß der Mathematiker König und Kärrner zugleich sein. Er muß nicht nur mit Vorstellungskraft Zusammenhänge erschauen, er muß sie auch in oft mühsamer Kleinarbeit beweisen; und es kann ihm widerfahren, daß trotz langem schwerem Bemühen der Beweis nicht glückt. Klein war viel mehr König als Kärrner; er konnte sich rühmen, nie einen Konvergenzbeweis geführt zu haben. Aber das war doch wohl un défaut de ses vertus.

Gewiß hatte er recht, wenn er fand, die Bewunderung für Riemanns geniale Intuition werde durch Beweislücken, die später ausgefüllt wurden, keineswegs beeinträchtigt. Aber auch das Beweisen (nicht zuletzt das Konvergenzbeweisen) erfordert nicht nur Logik, sondern auch Phantasie, Gedankenreichtum und Erfinderkraft. Es war schließlich Geschmacksache, wenn Klein Beweise, z. B. bei Euklid, langweilig fand. Zu seinen damit zusammenhängenden Bestrebungen, den Schulunterricht zu reformieren, drängten sich ihm Helfer zu, deren Reformeifer größer war als ihr Sachverständnis.

Bei den meisten großen Mathematikern, bei Archimedes und Newton, den Bernoullis und Euler, bei Laplace, Gauß, Cauchy, Riemann, Poincaré und manchen anderen waren reine und angewandte Mathematik eng vereint. Ja, man kann sagen, daß die Unterscheidung der Mathematik in reine und angewandte erst im 19. Jahrhundert geschah, eine notwendige Unterscheidung, die aber nicht zu verhindern braucht, daß ein Mathematiker, der die endlich erreichte vollkommene Strenge in Analysis und Geometrie zu schätzen weiß, einen offenen Sinn für die Anwendung behält. Aus der Verbundenheit mit den Anwendungen empfingen die Mathematiker immer neue Kräfte, wie Antäus aus dem mütterlichen Erdboden. Diese Verbundenheit schwächte sich im Hochschulunterricht des 19. Jahrhunderts ab, was sich dann auch auf den Unterricht an Gymnasien ungünstig auswirkte. Klein versuchte mit klarer Erkenntnis, aber mit zweifelhaftem Erfolg dem Übel zu begegnen durch Lehraufträge für angewandte Mathematik an den Universitäten und durch eine besondere Lehramtsprüfung für angewandte Mathematik neben der für reine Mathematik ohne Verpflichtung der Anwärter, beide Prüfungen abzulegen.

Die bayerische Prüfungsordnung, die seit Seidels und Bauers Zeiten (mit vielen inzwischen eingeführten Abänderungen) besteht, ist besser als die norddeutsche; sie verlangt von jedem Anwärter reine und angewandte Mathematik und Physik. Die für ganz Bayern einheitliche Prüfung gab Gelegenheit zu Zusammenkünften der Würzburger und Erlanger Akademiemitglieder mit Münchenern. Auch mit erfahrenen und einsichtsvollen Schulmännern trafen die bayerischen Hochschullehrer zusammen, um durch Abänderung der Prüfungsordnung ein freieres, nicht gar zu sehr auf das Examen gerichtetes Studium zu ermöglichen und so Begabungen der angewandten Mathematik zuzuführen.

## 13

Vorgänger Kleins an der Technischen Hochschule war Otto Hesse* (s. S. 4) gewesen. Er hatte in seiner Vaterstadt Königsberg unter Bessel, Neumann und Friedrich Richelot (1808–1875; Akademiemitglied 1854), dem Nachfolger Jacobis, studiert, war dann als Königsberger Dozent der Lehrer Clebschs gewesen. Von 1857 bis 1869 war Hesse Professor an der Universität Heidelberg. In München waren Hesse bis zu seinem Tode nur noch vier Jahre gegönnt; in die Akademie wurde er 1869 gewählt. Sein Arbeitsgebiet, mit dem das der Clebschschen Schule weithin übereinstimmte, war die Lehre von den algebraischen Kurven und Flächen im allgemeinen und die Untersuchung besonderer Kurven und Flächen. Mit unübertrefflicher Geschicklichkeit verstand Hesse die Analysis auf geometrische Probleme anzuwenden. Sein Lehrbuch der analytischen Geometrie war weit verbreitet. Die Normalform der Geradengleichung in Kartesischen Koordinaten, die aus der allgemeinen Form $Ax + By + C = 0$

durch Division mit $\sqrt{A^2+B^2}$ entsteht, heißt heute noch die Hessesche Normalform. Setzt man in ihre linke Seite die Koordinaten $xy$ eines beliebigen Punktes ein, so erhält man die Entfernung des Punktes von der Geraden.

Ist

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0 \tag{59}$$

in homogenen Koordinaten die Gleichung einer algebraischen Kurve $C$, so nennt man

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \tag{60}$$

(die an $f$ angehängten Nummern 1, 2, 3 bedeuten Differentiationen nach $x_1$, $x_2$, $x_3$)

die zu $C$ gehörige Hessesche Determinante $H(f)$. Sie ist eine Invariante, d. h.: Geht (59) infolge der Substitution (27) über in $F(y_1 y_2 y_3)$, und bedeutet beispielsweise $F_{11}$ den zweiten Differentialquotienten von $F(y_1 y_2 y_3)$ nach $y_1$, so ist

$$H(F) \equiv H(f). \tag{61}$$

Die Wendepunkte der Kurve (59) sind ihre Schnittpunkte mit der zugehörigen Hesseschen Kurve $H(f) = 0$.

Nach dem Tode Hesses gab die Münchener Akademie seine Gesammelten Werke heraus.

14

Als Klein in München die Nachfolge Hesses antrat, wurde in Erlangen Paul Gordan (s. S. 4) sein Nachfolger. Er hat den Satz bewiesen, daß zu einer homogenen Form $g(x_1 x_2)$ beliebigen Grades $n$ eine endliche Anzahl Invarianten gehören, die ganze rationale Funktionen der Koeffizienten von $g(x_1 x_2)$ sind und durch die sich alle übrigen Invarianten, die rationale Funktionen dieser Koeffizienten sind, rational ausdrücken lassen. Wenige Jahre, nachdem Gordan durch den Beweis dieses Satzes von der Endlichkeit der Invariantenzahl der Form $g(x_1 x_2)$ berühmt geworden war, bewies David Hilbert (1862–1943; Akademiemitglied 1903) den nämlichen Satz viel einfacher und viel allgemeiner, nämlich für Formen $G(x_1 x_2 \ldots x_n)$ beliebig vieler homogener Veränderlicher.

Vielleicht hat man zu Gordans Zeiten die Invariantentheorie etwas überschätzt; jedenfalls war es eine Übertreibung, wenn man gegen Ende des 19. Jahrhunderts in Vorlesungen zu hören bekam: „Mathematik ist Invariantentheorie", auch falls das Wort Invariante im weiteren Sinn des

Erlanger Programms gemeint war und nicht im engeren, sich auf die homogenen Formen beziehenden Sinn.

Als 1875 eine zweite Mathematikprofessur an der Universität Erlangen errichtet wurde, erhielt sie der Heidelberger Privatdozent MAX NOETHER* (s. S. 4). Noether ist einer der schärfsten Denker der Clebschschule. Sein Arbeitsgebiet waren die algebraischen Kurven $G(xy) = 0$ und algebraischen Flächen $G(xyz) = 0$, wobei die Kartesischen Koordinaten als komplexe Veränderliche gedacht waren, wie schon bei JULIUS PLÜCKER (1801–1868; Akademiemitglied 1859, Mathematiker und Physiker, Lehrer Kleins), Hesse und Clebsch. Die Methode war nicht funktionentheoretisch, sondern algebraisch, Hilfsmittel war außer der Elimination insbesondere die birationale Transformation. Die Kurven $G_1(xy) = 0$ und $G_2(zw) = 0$ sind birational aufeinander bezogen, wenn sowohl $z$, $w$ rationale Funktionen von $x$, $y$, wie auch $x$, $y$ rationale Funktionen von $z$, $w$ sind. Es gibt Sätze, die allgemein für jede algebraische Kurve $G(xy) = 0$ gelten, wenn man sie für eine besondere mit $G(xy) = 0$ birational zusammenhängende Kurve beweisen kann.

Noether hat in Fortführung von Anfängen Clebschs die Lehre von den Kurven auf die Flächen übertragen und besonders in Italien Nachfolger gefunden. Als Beispiel seien im folgenden von den sehr vielen Arbeiten Noethers vier genannt: a, b, c, d; die zwei zuletzt genannten stammen von ihm und Brill gemeinsam.

a) Die Berliner Akademie hatte im Jahre 1882 für den Steinerpreis die Aufgabe gestellt, sämtliche Arten von Raumkurven vierter Ordnung aufzufinden (sie werden von jeder Ebene in vier Punkten geschnitten). Der Preis wurde Noether zuerkannt. In seiner 120 Druckseiten umfassenden Preisschrift behandelte Noether die Raumkurven der ersten 17 Ordnungen und außerdem noch einige Typen von Kurven der Ordnungen 20, 22, 28, 50.

b) Die algebraische Kurve $f(xy) = 0$ geht, wenn $f(xy)$ die Form

$$f(xy) = A(xy)\, G_1(xy) + B(xy)\, G_2(xy) \tag{62}$$

hat ($A, B, G_1, G_2$ ganze rationale Funktionen), offenbar durch die Schnittpunkte der Kurven $G_1(xy) = 0$ und $G_2(xy) = 0$ hindurch.

Frage: Unter welchen Bedingungen läßt sich umgekehrt $f(xy)$ in der Form (62) darstellen, wenn vorausgesetzt wird, daß die algebraische Kurve $f(xy) = 0$ durch die Schnittpunkte der Kurven $G_1(xy) = 0$ und $G_2(xy) = 0$ geht? Die Antwort auf die Frage gibt das sogenannte Noethersche Fundamentaltheorem. Später hat Hilbert einen allgemeineren Satz bewiesen.

c) A. Brill und M. Noether: Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie 1873 (41 Seiten).

d) A. Brill und M. Noether: Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit 1894 (487 Seiten). Ein Werk von erstaunlichem Fleiß und bewundernswerter Kenntnis einer kaum überschaubaren Literatur. Wieviel mag davon noch jetzt in Mathematiker-Köpfen lebendig sein?

15

Als Klein 1875 den Ruf an die Technische Hochschule München annahm, erreichte er die Errichtung einer zweiten Mathematikprofessur an dieser Hochschule. Sie wurde dem Darmstädter Professor Alexander Brill (s. S. 4), der zuvor Privatdozent in Gießen gewesen war, übertragen. Brills wurde schon Seite 28 als Freundes und Mitarbeiters von Noether gedacht. Sein Arbeitsgebiet überdeckt sich weitgehend mit dem Noethers. Er nahm 1884 einen Ruf an die Universität Tübingen an, wo er bis 1918 eine weitverzweigte Lehrtätigkeit ausübte und 1935 im 93. Lebensjahr starb. Unzählige Lehrer an württembergischen höheren Schulen waren seine dankbaren Schüler.

Klein hatte 1880 den bayerischen Staatsdienst verlassen und eine Professur in Leipzig angenommen. 1886 siedelte er nach Göttingen über, wo er bis zu seinem Tode (1925) wirkte. An der Münchener Technischen Hochschule wurde 1880 Jakob Lüroth (s. S. 4) Kleins Nachfolger. Er war zuvor (1867–1868) Privatdozent in Heidelberg, dann 1868–1880 Professor in Karlsruhe gewesen. Lüroth war wie Seidel und v. Staudt einer der zahlreichen Mathematiker, die zugleich ausgebildete Astronomen waren. Er hatte schon als Gymnasiast auf Grund eigener Beobachtungen die Ephemeriden eines kleinen Planeten berechnet und veröffentlicht. Bei der Astronomie konnte er nicht bleiben, weil seine Augen geschwächt waren. Aber den Sinn für die Anwendungen der Mathematik behielt er; davon zeugt u. a. ein Buch über numerisches Rechnen, das er schrieb. Um die kritisch genaue Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen hat er sich sehr verdient gemacht durch die deutsche Bearbeitung des Dinischen Werkes Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.

Lüroth blieb an der Technischen Hochschule München nur bis 1883, dann nahm er einen Ruf an die Universität Freiburg an. Seine Vorlesungen dort betrafen die verschiedensten Gebiete der Mathematik, und das gleiche gilt von seinen wissenschaftlichen Veröffentlichungen. Im einzelnen kann darüber nicht berichtet werden. Nur beispielsweise sei der folgende von

Lüroth bewiesene Satz erwähnt: Wenn die Gleichung $G(xy) = 0$ (10) durch rationale Funktionen $x = r_1(t)$, $y = r_2(t)$ befriedigt werden kann:

$$G(r_1(t)\, r_2(t)) \equiv 0, \tag{63}$$

dann kann das so geschehen, daß auch $t$ eine rationale Funktion von $x$ und $y$ ist (vgl. das Beispiel (33) S. 14). Nachfolger Lüroths an der Technischen Hochschule wurde 1885 Aurel Voss* (s. S. 4), der vorher Professor in Darmstadt und Dresden gewesen war. 1891 bis 1903 lehrte er an der Universität Würzburg, von 1903 ab an der Universität München. Hier starb er 1931 im 86. Lebensjahr.

Auch seine wissenschaftlichen Veröffentlichungen sind so zahlreich und so vielseitig, daß im einzelnen nicht über sie berichtet werden kann. Es seien hier drei seiner Veröffentlichungen erwähnt, die allgemeinverständlich sind, und die zu lesen auch heute noch Mathematikern und Nichtmathematikern empfohlen werden kann.

a) Über das Wesen der Mathematik (erweiterte Fassung der Festrede, die Voss 1908 in der Jahresfeier der Akademie gehalten hat. Zweite Auflage Teubner, Leipzig 1903);

b) Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur (48 Seiten);

c) Über die mathematische Erkenntnis (148 Seiten).

b und c sind in dem Sammelwerk „Die Kultur der Gegenwart“ erschienen. Die drei genannten Schriften geben Zeugnis von der ungemeinen Belesenheit des Verfassers, von seinem richtigen Urteil und seiner hohen Darstellungsgabe.

Eines der bevorzugten Arbeitsgebiete von Voss war die Mechanik. In dem Mechanikbericht dieses Bandes wird Seite 119 eine Voss'sche Arbeit über die Tragweite des d'Alembertschen und anderer Prinzipe der Mechanik besprochen.

## 16

Die wissenschaftliche Mathematik hatte an der Universität Erlangen mit v. Staudt begonnen, an der Universität München mit Seidel, an der Technischen Hochschule mit Hesse; sie begann in Würzburg mit Friedrich Prym, der im Jahre 1869 an die dortige Universität berufen wurde, nachdem er vorher Professor am Züricher Polytechnikum gewesen war. Er war einer der wenigen unmittelbaren Schüler Riemanns, einer der ganz wenigen, die Riemann völlig verstanden haben. Durch seine Dissertation wurde das Verständnis Riemanns weiter ausgebreitet; sie wurde z. B. auch von Clebsch eifrig studiert. Von den funktionentheoretischen Arbeiten Pryms, die sich durch sorgfältige und zuverlässige Beweisführung auszeichnen, sei eine genannt, deren Ergebnis in Lehrbücher übergegangen ist:

Die Funktion $\Gamma(a)$, die zunächst nur für $a = 1, 2, 3., \ldots n, \ldots$ definiert ist:

$$(64)\quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 1.2, \ldots \quad \Gamma(n) = 1.2.3 \ldots (n-1),$$

wurde schon durch Euler mittels des Integrals

$$(65)\qquad \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

für alle komplexen $a = \sigma + i\tau$ erklärt, deren Realteil $\sigma > 0$ ist. Es gelang Prym, die Definition auf alle komplexen $a$ auszudehnen; an den Stellen $a = -n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ wird die Funktion $\Gamma(a)$ unendlich. Die Funktion

$$(66)\quad \Gamma(a) - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{1\cdot 2(a+2)} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3(a+3)} + \ldots + \frac{(-1)^n}{1\cdot 2 \cdots n(a+n)} + \ldots\right)$$

ist in der ganzen komplexen $a$-Ebene endlich und stetig.

Später hat Prym zusammen mit seinem Schüler Georg Rost (s. S. 5) ein umfangreiches Buch „über die Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluß an die Schöpfungen Riemanns" geschrieben und es schön ausgestattet (er war ein reicher Mann) an viele hundert Mathematiker verschenkt (1911), ohne damit das im 20. Jahrhundert rasch abnehmende Interesse einer neuen Mathematikergeneration an den schwierigen Problemen der auf einer Riemannschen Fläche definierten Funktionen wieder anfachen zu können. Rost, ein kenntnisreicher Mathematiker und klarer Dozent, hat einen großen Teil seiner wissenschaftlichen Laufbahn (Promotion 1892, Habilitation 1901 Würzburg, mit Schriften über Substitutionsgruppen und über Riemannsche $\vartheta$-Funktionen, o. Professor Würzburg 1906) als Mitarbeiter seines eigenwilligen Lehrers Prym verbracht, so daß die meisten seiner Leistungen von denen Pryms nicht zu trennen sind. An der Universität Würzburg hat er auch die Astronomie vertreten; siehe Seite 52.

Als Seidel von der Verpflichtung Vorlesungen zu halten entbunden worden war, wurde 1893 als sein Nachfolger Ferdinand Lindemann* (s. S. 4) berufen, der Professor an der Universität Freiburg, vorher an der Universität Königsberg gewesen war. Er hatte als dankbarer Schüler Clebschs dessen Vorlesungen über Geometrie mit großem Fleiß und großer Mühe herausgegeben. Es wäre gewiß auch keinem anderen geglückt, die Begeisterung, die das gesprochene Wort des Lehrers Clebsch bei seinen Zuhörern erweckte, auf die kritischeren Leser eines die Vorlesungen wiedergebenden Buches zu übertragen. Aber durch eine andere Leistung hat Lindemann erreicht, daß von den Namen aller Mathematiker, die der Bayerischen Akademie angehört haben, der seine die meiste Aussicht hat, auf Jahrhunderte hinaus berühmt zu bleiben. Lindemann hat das jahrtausendealte Problem der Quadratur des Zirkels erledigt, indem er 1882 bewies (vgl. Nr. 4 S. 7), daß $\pi$ keiner Gleichung von der Art (2) genügt, daß es also nicht möglich ist, mittels Zirkel und Lineal ein einem gegebenen Kreis flächengleiches Quadrat zu konstruieren. Der französische Mathematiker CHARLES HERMITE (1822–1901; Akademiemitglied 1878) hatte schon 1873 bewiesen, daß die Zahl $e$ (vgl. Nr. 4 S. 8) einer solchen Gleichung nicht genügt. Da der Hermitesche Beweis für $e$ Vorbild des Lindemannschen für $\pi$ war, gebührt Hermite ein Anteil am Ruhme Lindemanns.

Auch sonst hat sich Lindemann gern an besonders schwierigen Aufgaben versucht; aber er verlor beim Höhenflug seiner Gedanken manchmal den Boden unter den Füßen. In einer Vorlesung sagte er einmal: „Meine Herrn! Sie kennen die Zahl $\pi = 3{,}41\ldots$, oder heißt es $3{,}14\ldots$?“. Dabei war er reich an Kenntnissen und Ideen und ein anregender Lehrer. Von den vielen Schülern, die bei ihm promoviert haben, seien nur zwei genannt: in Königsberg Hilbert und in München Perron.

## 17

ALFRED PRINGSHEIM* (s. S. 4) hatte sich an der Münchener Universität 1877 habilitiert und war dort 1886 ao., 1901 o. Professor geworden. In die Akademie wurde er im Jahre 1904 gewählt.

Pringsheim war kein unmittelbarer Schüler von Weierstraß; aber erfüllt von hoher Bewunderung für die Schönheit des strengen Aufbaus der Weierstraßschen Lehre von den Zahlen und den Funktionen war er in Deutschland wohl der erfolgreichste Vermittler und Fortentwickler Weierstraßscher Ideen.

Die Aufgabe, welche seine Zeit dem Hochschullehrer der Mathematik als eine der wichtigsten stellte, nämlich den Sinn für absolute Strenge der Beweisführung bei den Hörern zu erwecken, hatte er klar erkannt und er verstand es, diese Hörer zugleich zu belehren und zu entzücken. Als ihm im Jahre 1904 die Ehre zufiel, die Festrede der Akdemie zu halten, sprach er ernst über das ernste Thema „Wert und angeblicher Unwert der Mathematik“ und freute sich doch sehr, als er ein paarmal seine Zuhörer zu herzhaftem Lachen brachte. Er beschäftigte sich besonders erfolgreich mit der Konvergenz und Divergenz unendlicher Prozesse, mit der Darstellung reeller Funktionen (besonders durch trigonometrische Reihen), mit der Taylorschen Reihe, mit Dirichletschen Reihen (Beispiel einer Dirichletschen Reihe:

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \qquad (s \text{ komplexe Zahl } \sigma + i\tau, \quad \sigma > 1))$$

mit dem Cauchyschen Integralsatz, mit den sogenannten ganzen transzendenten Funktionen (das sind Potenzreihen $\mathfrak{P}(z)$, die für jedes komplexe $z$ konvergieren). Seine gegen Ende seines Lebens im Druck erschienenen Vorlesungen zeigen die Klarheit seines Stils und die Sauberkeit seiner Beweisführung; daß das Vergnügen am Vortrag seiner lebenssprühenden Persönlichkeit sich nicht durch den Druck übertragen ließ, ist selbstverständlich.

Pringsheim war die Seele eines Münchener mathematischen Kränzchens, dessen Vorträge und Nachsitzungen gut besucht waren. Eines Tages verlangte ein Privatdozent der Universität mit Berufung auf die nationalsozialistische Partei (jeder kleine Parteiangestellte verkörperte die Partei), daß Pringsheim, Liebmann und Hartogs nicht mehr an dem Kränzchen teilnähmen. Bei den damaligen rechtlosen Zuständen hätten sich die drei Mathematiker Mißhandlungen ausgesetzt, wenn sie der Partei getrotzt hätten. Den übrigen Mitgliedern des Kränzchens lag es fern, das Kränzchen ohne Pringsheim, Liebmann und Hartogs fortzuführen. Es hörte auf zu bestehen.

Die mathematische Veranlagung und Geschmacksrichtung Pringsheims war von der Kleins sehr verschieden. Pringsheim besaß nicht den weiten Blick Kleins über das Gesamtgebiet der Mathematik und ihrer Anwendungen, war aber um so gründlicher im engeren Bezirk, während Kleins umfassende Schau an Einzelheiten leichter vorbeisehen konnte. Der Gegensatz der beiden Mathematiker kam zum Ausdruck in einem höflich und verbindlich geführten Streitgespräch auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Halle 1907.

Pringsheim hatte auseinandergesetzt, daß er in Anfangsvorlesungen eine genaue Erklärung des Rechnens mit irrationalen Zahlen als nötige Voraussetzung für eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung ansehe (s. Nr. 3 S. 6). Klein hatte heftig widersprochen und die These verfochten, die Berufung auf die geometrische Anschauung als Beweismittel oder als vorläufiger Beweisersatz sei das didaktisch einzig Mögliche in Anfängervorlesungen. Pringsheim antwortete mit Witz und Schlagfertigkeit; er hatte das leichtere Spiel, weil er die bessere Sache vertrat. Allmählich drang er überall mit seiner Auffassung durch; während Klein 1907 in Pringsheim nur einen vereinzelten Außenseiter gesehen hatte, stellte er 1926 fest: „Weierstraß eröffnete seinen Vorlesungszyklus jedesmal mit einer genauen Erörterung über das Wesen der Irrationalzahl, wie es seitdem bis zum Überdruß Sitte geworden ist."

18

Walther Dyck* (s. S. 4) wurde durch die Vorlesungen Brills und Kleins bewogen, Mathematik zu studieren. Er wurde in München Assistent Kleins und ging als solcher mit Klein nach Leipzig, wo er sich habilitierte. Als Brill den Ruf nach Tübingen annahm, wurde Dyck 1884 sein Nachfolger an der Technischen Hochschule München. Seine wissenschaftliche Tätigkeit begann er mit Untersuchungen über Gruppen im allgemeinen und über die Vertauschungsgruppen von *n* Buchstaben. Später schrieb er über Kurven, die durch Differentialgleichungen definiert sind, und über Analysis situs.

Gleich seinem verehrten Lehrer und Vorbild Klein hatte Dyck große Neigung und große Begabung zu organisatorischer Tätigkeit. Er stand zwölf Jahre lang an der Spitze der Münchener Technischen Hochschule und hat sich große Verdienste um deren äußeren und inneren Ausbau erworben, um umfangreiche Vergrößerungen und um die Erreichung der vollen Gleichberechtigung seiner Technischen Hochschule und damit der deutschen Technischen Hochschulen überhaupt mit den Universitäten.

Ein besonderes Anliegen Dycks war es, dem Mathematiker und Astronomen Johannes Kepler durch eine würdige Herausgabe seiner Werke ein Denkmal zu setzen. Es gelang ihm, die Akademie zur Übernahme dieser Aufgabe zu bewegen und den geeigneten Bearbeiter in Max Caspar zu finden, der schon von seinem Lehrer Brill, bei dem er 1908 promoviert hat, auf die Spur Keplers gewiesen worden war. Als Caspar 1956 starb, lagen zwölf Bände, mehr als die Hälfte des Gesamtwerks, vor; es ist zu hoffen, daß dieses unter der Leitung Franz Hammers, des bisherigen Mitarbeiters Caspars, im Laufe der nächsten Jahre zum Abschluß kommen wird.

Im Jahre 1893 veranstaltete Dyck anläßlich der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung eine Ausstellung mathematischer Instrumente und Modelle in München. Außer Modellen von auswärts wurden mehr als hundert Flächenmodelle ausgestellt, die an der Münchener Technischen Hochschule zu Zeiten Kleins und Brills angefertigt worden waren, darunter ein paar von Klein selbst, eines vom stud. math. Walther Dyck. Besonders bereichert wurde die Modellsammlung der Technischen Hochschule durch Sebastian Finsterwalder* (s. S. 4). Er hatte 1886 als Schüler Brills in Tübingen promoviert mit einer Arbeit über Brennflächen und Reflexion eines Lichtbündels an einer spiegelnden Fläche. Auch später beschäftigte er sich mit geometrischer Optik, u. a. durch Herausgabe einer hinterlassenen Abhandlung Seidels. Im Jahre 1888 habilitierte er sich an der Technischen Hochschule München; seine Habilitationsschrift enthielt eine rein geometrische Ableitung einer kurz vorher von Staude gefundenen mechanischen Konstruktion eines Ellipsoids, die der Konstruktion einer Ellipse als Ort der Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist, entspricht, aber viel verwickelter ist. Im Jahre 1891 wurde Finsterwalder 29jährig als Nachfolger von Voss o. Professor an der Technischen Hochschule. Von Anbeginn an beruhte seine wissenschaftliche Tätigkeit auf einer angeborenen Kraft räumlicher Vorstellung. Von seinen Abhandlungen möge die für seine Denk- und Arbeitsweise typische über mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation (1899) genannt werden. Diese mathematischen Untersuchungen wurden (was auch für Finsterwalders Arbeitsweise kennzeichnend ist), durch Modelle anschaulich gemacht. Überhaupt verstand es Finsterwalder in seltenem Maße, die Mathematik mit Anwendungen zu verknüpfen. Die ursprüngliche Bedeutung des Wortes Geometrie ist im Sprachgebrauch verblaßt und wurde auf das andere Fremdwort Geodäsie übertragen. Für Finsterwalder blieb die enge Verwandtschaft von Geometrie und Geodäsie lebendig. Die Photographie hatte im neunzehnten Jahrhundert wie der Astronomie auch der Geodäsie neue Möglichkeiten geschenkt; für die mathematische Begründung der Photogrammetrie, die der Herstellung von Landkarten neue Wege eröffnete, hat Finsterwalder wertvolle Forscherarbeit geleistet. Darüber, über seine Gletschervermessungen und insbesondere über seine Tätigkeit in der Bayerischen Akademiekommission für internationale Erdmessung wird in den Artikeln Geodäsie und Topologie dieses Bandes berichtet. Hier sei nur noch erwähnt, um das Ende dieses Abschnitts mit seinem Anfang zu verbinden, daß Finsterwalder eine große Anzahl Polyedermodelle, die er als entpflichteter Professor entworfen hatte, der Technischen Hochschule geschenkt hat. (Vgl. den Beitrag „Topographie" S. 62.)

Als 1912 der Professor der Darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule München Ludwig Burmester (s. S. 4) entpflichtet wurde, vertauschte Finsterwalder seinen Lehrstuhl für Höhere Mathematik mit dem für Darstellende Geometrie, der wohl seiner Wesensart noch mehr entsprach. Burmester hatte in seinem Lehrbuch der Kinematik das Wissen seiner Zeit über dieses wichtige Gebiet der angewandten Mathematik zusammengestellt und durch eigene Forschung ergänzt.

Auf die von Finsterwalder aufgegebene Professur der Höheren Mathematik wurde Heinrich Burkhardt (s. S. 4), damals Professor an der Universität Zürich, berufen. Burkhardt war Hörer sowohl von Weierstraß wie von Klein gewesen, bei Klein war er auch Assistent; 1889 hat er sich in Göttingen habilitiert. Er zeichnete sich durch eine überaus weitgespannte mathematische Bildung aus. Dies zeigte sich auch in der Reichhaltigkeit seiner Veröffentlichungen, die den verschiedensten Gebieten der Mathematik angehörten. Burkhardts vielgelesene funktionentheoretische Lehrbücher gingen davon aus (und das ist ein Verdienst, das auch seine Kritiker anerkennen), daß es nur eine Funktionentheorie gibt, nicht getrennt eine Cauchy-Riemannsche und eine Weierstraßsche.

19

Heinrich Liebmann (s. S. 5) hatte 1895 in Jena promoviert und sich 1899 in Leipzig habilitiert. Dort stand er in persönlichem und wissenschaftlichem Verkehr mit Carl Neumann (1832–1925; Akademiemitglied 1895), dem Sohne des Königsberger Professors Franz Neumann. Carl Neumann hat 1865 ein Buch über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale herausgegeben, das sich durch strengere Beweisführung und leichtere Verständlichkeit vor dem im Jahre darauf erschienenen Werke von Clebsch und Gordan auszeichnet. Neumann hat mit großem Scharfsinn ein nicht ganz sicheres funktionentheoretisches Beweisverfahren Riemanns durch ein einwandfreies ersetzt. Die gleiche Leistung hat auf andere Weise Hermann Amandus Schwarz (1843–1921; Akademiemitglied 1912) vollbracht.

Liebmann war von 1910 bis 1920 Professor an der Technischen Hochschule München, 1920 wurde er Professor in Heidelberg. Als ihm die damalige verbrecherische Gewaltregierung die Ausübung seiner Lehraufgabe unmöglich machte, kehrte er 1936 nach München zurück, wo er, ohne dort wieder Vorlesungen halten zu können, nach drei Jahren starb. Pringsheim konnte nicht einmal seinen Lebensabend in Deutschland verbringen. Er starb in Zürich. Von den wissenschaftlichen Arbeiten Liebmanns sei, wie das im Vorausgehenden auch bei anderen Mathematikern geschehen ist, als Beispiel nur eine erwähnt, die seinen Namen bekannt gemacht hat: Er hat bewiesen, daß eine konvexe geschlossene Oberfläche (z. B. die eines Ellipsoids) nicht verbogen werden kann. Auch durch ein Lehrbuch der Nichteuklidischen Geometrie hat Liebmann sich verdient gemacht.

Als Finsterwalder entpflichtet wurde, wurde 1932 der Professor der Technischen Hochschule Karlsruhe Richard Baldus (s. S. 5) sein Nachfolger auf dem Lehrstuhl für Geometrie an der Technischen Hochschule München. Zwei Jahre später übernahm er als Nachfolger Dycks dessen Lehrstuhl für Höhere Mathematik. Baldus hatte in München und Erlangen studiert, in Erlangen promoviert und sich dort habilitiert. Von seinen geometrischen Leistungen (sie beschränken sich nicht auf das Feld seiner Erlanger Lehrer) seien erwähnt ein vereinfachter Beweis für den v. Staudtschen Satz vom Vorhandensein von dreizehn verschiedenartigen Kollineationen im Raum (eine Kollineation ist eine Abbildung, bei der jedem Punkt ein Punkt, jeder Geraden eine Gerade entspricht) sowie eine Vereinfachung des Hilbertschen Axiomensystems für die Geometrie. So wie im 19. Jahrhundert durch die Einführung der irrationalen Zahlen das Ideal vollkommener Strenge der Arithmetik und Analysis erreicht wurde, ebenso wurde durch die Grundlagenforschung die Elementargeometrie zu einem völlig gesicherten Lehrgebäude, wie es gewiß Euklid vorschwebte, ohne daß es ihm gelungen wäre, es ohne Mängel aufzuführen. Den Schlußstein bildeten Hilberts Untersuchungen, zu denen andere, wie Moritz Pasch (1843–1930), gründliche Vorarbeit geleistet haben. Wie Liebmann hat auch Baldus ein Buch über Nichteuklidische Geometrie geschrieben; beide Bücher sind sehr verschieden aufgebaut und geeignet, einander zu ergänzen.

## 20

Constantin Carathéodory* (s. S. 5), der 1904 in Göttingen promoviert und sich dann dort 1905 habilitiert hatte, wurde, nachdem er Professor an den Technischen Hochschulen Breslau und Hannover gewesen war, 1913 Kleins Nachfolger in Göttingen. Es gab außer ihm, wenn man von Hilbert absieht, der schon Professor in Göttingen war, und dessen späterer ebenbürtiger Nachfolger Hermann Weyl (1885–1955; Akademiemitglied 1951) 1913 erst 27 Jahre alt war, damals in Deutschland kaum einen anderen Mathematiker, der auf Grund umfassenden Überblicks über die gesamte reine und angewandte Mathematik berufen gewesen wäre, Klein zu ersetzen. Im Jahre 1918 nahm Carathéodory einen Ruf an die Universität Berlin an. 1920 versuchte er im Auftrag der griechischen Regierung in der Stadt Smyrna, die nach dem ersten Weltkrieg Griechenland zugesprochen worden war, eine Universität zu gründen. Der Versuch wurde durch die türkische Wiedereroberung Smyrnas vereitelt. 1924 nahm Carathéodory einen Ruf an die Universität München an. Soll auch bei ihm eine Abhandlung aus der Fülle seiner Schriften als bezeichnendes Beispiel erwähnt werden, so sei es der (auf der Vervollkommnung eines Picardschen Gedankens beruhende) Beweis des höchst merkwürdigen Picard-Landauschen Satzes; dieser Satz besagt: Wenn eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{67}$$

in ihrem Konvergenzgebiet weder den Wert Null noch den Wert 1 annimmt, dann ist ihr Konvergenzradius kleiner als eine gewisse nur von $a_0$ und $a_1$ abhängige Zahl $R(a_0 a_1)$, die im Grenzfall auch unendlich werden kann.

Carathéodory schrieb mit gleicher beherrschender Leichtigkeit in deutscher, französischer, englischer und griechischer Sprache. Als Carathéodory emeritiert wurde, setzte ein Privatdozent der Technischen Hochschule, dem es gelungen war, sich mit Ach und Krach zu habilitieren, alle Hebel in Bewegung, um mit Hilfe der Nationalsozialistischen Partei Carathéodorys Nachfolger zu werden. Das konnte gerade noch verhindert werden.

Dank den Bemühungen Heinrich Tietzes (geb. 1880, Akademiemitglied 1929) gab die Bayerische Akademie die Gesammelten Mathematischen Schriften Carathéodorys in fünf Bänden heraus. Von angewandter Mathematik enthält das Werk Arbeiten aus Thermodynamik, geometrischer Optik und Mechanik. Einige Schriften sind der Geometrie gewidmet, mehr als ein Band der Funktionentheorie und mehr als ein Band der Variationsrechnung. (Um den Fernerstehenden die Wortbedeutung zu erklären: Mittels Variationsrechnung findet man z. B. die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten einer Fläche.) Jakob und Johann Bernoulli, Euler und Lagrange waren lange die großen Namen dieses Zweiges der Mathematik, bis Weierstraß in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts die Variationsrechnung durch neue Entdeckungen bereicherte.

Die Mathematik ist im 19. Jahrhundert nicht gerade in untereinander fremde Teilgebiete gefallen, aber sie hat neue Provinzen gewonnen, die eine gewisse Selbständigkeit besitzen und deren genaue Kenntnis nicht von jedem Mathematiker verlangt werden kann. Es ist daher nicht verwunderlich, wenn in einem Bericht über die Mathematik in der Bayerischen Akademie von wichtigen Sondergebieten nicht oder nur nebenbei oder nur in Beziehung auf auswärtige Mitglieder die Rede ist. Solche Sondergebiete sind die Mengenlehre, deren Begründer Georg Cantor (1845–1918) in der Mitgliederliste fehlt, während Arthur Schönflies (1853–1928), der verdiente Verkünder und Verbreiter seines Ruhms, 1918 Mitglied wurde, ferner die Galoissche Gleichungstheorie; sie wurde erst im 20. Jahrhundert durch Perron vertreten, nachdem Bauer im 19. Jahrhundert seine Hörer nur in deren Vorhof eingeführt hatte; weiter die Theorie der linearen Differentialgleichungen und endlich die Zahlentheorie. Wegweisend für die Theorie der linearen Differentialgleichungen war die hypergeometrische Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} = 0. \tag{68}$$

Sie hat die zwei voneinander unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = F(\alpha\beta\gamma x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots, \tag{69}$$

(70) $$y_2(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1 \quad \beta - \gamma + 1 \quad 2 - \gamma \quad x),$$

die zunächst im Konvergenzgebiet der rechts stehenden Reihen definiert sind; doch läßt sich die Definition auf eine über der $x$-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche ausdehnen, deren Verzweigungspunkte an den Stellen 0, 1, $\infty$ liegen. Umläuft $x$ eine dieser Stellen, so erfahren $y_1(x)$, $y_2(x)$ lineare Substitutionen

(71) $$c_{11} y_1 + c_{12} y_2, \quad c_{21} y_1 + c_{22} y_2.$$

Diese Substitutionen bilden eine Gruppe. Mit der hypergeometrischen Differentialgleichung (68) haben sich in bedeutenden Arbeiten bedeutende Mathematiker beschäftigt: Leonhard Euler (1707–1783), Gauss, Ernst Kummer (1810–1893; Akademiemitglied 1859), Jacobi, Riemann, Schwarz. Klein hat 1893/94 in Göttingen eine Vorlesung darüber gehalten, die autographiert wurde.

Die allgemeine lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung haben auf Anregung von Weierstraß insbesondere sein Schüler Lazarus Fuchs (1833–1902; Akademiemitglied 1898) und dessen Schüler in zahlreichen Abhandlungen untersucht. Von den vielen späteren Autoren seien Poincaré, Picard, Perron genannt. Riemann hat 1887 das Problem gestellt, die Differentialgleichung $n$ter Ordnung zu finden, wenn die Gruppe von Substitutionen gegeben ist, die $n$ Funktionen $y_1(x) \ldots, y_n(x)$ beim Umlauf der Veränderlichen $x$ um gegebene singuläre Stellen erfahren. Das Riemannsche Problem wurde erst 1908 von J. Plemelj gelöst. Die hier im Zusammenhang mit den linearen Differentialgleichungen genannten zwölf Mathematiker wurden alle in die Bayerische Akademie gewählt mit Ausnahme Jacobis, Picards und Leonhard Eulers. Dessen Sohn Johann Albert Euler wurde 1762 in die Akademie gewählt. Im Jahre 1900 geschah es, daß die Wahlurkunde versehentlich an einen viel weniger bedeutenden Namensvetter des Gewählten geschickt wurde, aber der Namensvetter korrigierte das Versehen und schickte die Urkunde an den berühmten Mathematiker weiter, für den sie gedacht war.

Zahlentheoretisch wurde im 19. Jahrhundert in zweifacher Hinsicht Bedeutendes geleistet, erstens beginnend mit Gauß und Kummer, fortgeführt durch Leopold Kronecker (1823–1891; Akademiemitglied 1862), Richard Dedekind (1831–1916) u. a. in der Theorie der ganzen algebraischen Zahlen (das sind Zahlen, die einer Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten genügen), und zweitens in der Lehre von der Häufigkeit und der Verteilung der Primzahlen (hier sind neben anderen Forschern Dirichlet und Riemann zu nennen). Schon in den Elementen des Euklid ist bewiesen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Um zu zeigen, wieviel weiter die Neuzeit gekommen ist als das klassische Altertum, werde folgender Satz mitgeteilt: Wenn $\Pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen $< n$ bedeutet, dann existiert für unendlich wachsendes $n$ der Grenzwert des Quotienten

$$(72) \qquad \Pi(n) : \frac{0{,}43429\ldots n}{{}^{10}\log n} \qquad \text{(vgl. (3) S. 8)}$$

und hat den Wert 1. Ist z. B. $n$ eine 1 mit einer Milliarde angehängter Nullen, so ist $\Pi(n)$ eine 999999991-stellige Zahl und ihre ersten Ziffern links sind 43429.

21

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung wurde im Jahre 1891 gegründet. Sie befaßte sich bald mit der Aufgabe, über neugewonnene als besonders wichtig angesehene Teilgebiete Berichte ausarbeiten zu lassen. Ein solcher Bericht war der im Jahre 1893 auf der Münchener Tagung erstattete Brill-Noethersche, von dem in Nr. 14 die Rede war. Die Vereinigung hatte schon damals mehr als 250 Mitglieder; unter ihnen befanden sich wie später wohl ausnahmslos sämtliche Hochschulprofessoren der Mathematik. Auf der Tagung des folgenden Jahres 1894 in Wien beschloß die Vereinigung auf Anregung Franz Meyers (1856–1934; Akademiemitglied 1933), ein mathematisches Lexikon herauszugeben, und wandte sich an das ein paar Monate vorher gegründete Kartell der deutschen Akademien mit der Bitte um wissenschaftliche und finanzielle Unterstützung. Glücklicherweise erkannte man rechtzeitig die Unzweckmäßigkeit einer alphabetischen Anordnung und beschloß auf Dycks Antrag eine Darstellung der mathematischen Wissensgebiete in sachlich angeordneten Artikeln.

Die „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" (diesen Namen erhielt das geplante Werk) sollte eine Gesamtdarstellung der Mathematik und ihrer Anwendungen geben und die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachweisen. War es nicht mehr möglich, die Gesamtmathematik in einem Kopfe unterzubringen, so sollte sie in gedrängter Form in fünf Bänden untergebracht werden; dem Kenner eines Teilgebietes sollten so andere Teilgebiete zugänglich gemacht werden. Von den fünf Bänden, deren jeder auf 40 Bogen geschätzt wurde, sollten drei der reinen, zwei der angewandten Mathematik gewidmet sein. Als das Werk 1934 nach vierzig Jahren fertig war oder vielmehr als es damals abgeschlossen wurde, waren aus den geplanten fünf Bänden vierundzwanzig geworden mit insgesamt 1240 Bogen. Das Werk besteht aus mehr als 200 Artikeln; mehr als 200 Mitarbeiter, darunter solche aus zehn fremden Staaten, waren an ihm beteiligt. Auch eine französische Bearbeitung war in Angriff genommen worden.

Selbstverständlich gab es unter den vielen Artikeln auch weniger gute, und selbstverständlich konnte man Fehlendes hinterher mit Bedauern vermissen und sagen, daß man lieber auf das und jenes, was aufgenommen worden war, verzichtet hätte; aber alles in allem war die Encyklopädie ein Erfolg, und es bleibt ein Ruhmesblatt der deutschen Akademien, daß auf den Titelseiten von Encyklopädiebänden steht: Herausgegeben im Auftrage der Akademien zu Göttingen, Leipzig, München und Wien.

Daß das große Werk überhaupt zustande kam, war in erster Linie das Verdienst Kleins. Niemand überblickte wie er das Gesamtgebiet der Wissenschaft; er sorgte für die Herstellung der Zusammenhänge zwischen den einzelnen Artikeln und für ihre Abstimmung aufeinander, kümmerte sich nicht nur um das große Ganze, sondern auch um tausend Einzelheiten, beriet sich mit den Mitarbeitern in zahlreichen Konferenzen und durch einen riesigen Briefwechsel.

Nächst ihm ist Dyck zu nennen, der vier Jahrzehnte bis zu seinem Tode als Vorsitzender der Akademischen Kommission tätig war. Er starb wenige Monate vor dem Erscheinen des letzten Bandes. Zu den ersten Artikeln gehören zwei schon vor 1900 erschienene Pringsheims: 1. Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse, 2. Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre. Sie waren durch die Klarheit und Sicherheit ihrer Darstellung schwer erreichbare Vorbilder für spätere Bearbeiter; auch zum buchhändlerischen Erfolg des Unternehmens mögen sie beigetragen haben. Später schrieb Pringsheim noch den Artikel über Algebraische Analysis zusammen mit Georg Faber (Mitglied der Akademie 1921). Auf den an zweiter Stelle genannten Artikel Pringsheims folgte der von Voss über Differential- und Integralrechnung. Voss schrieb außerdem (ein Zeichen seiner Vielseitigkeit) noch zwei Artikel: „Abbildung und Abwicklung zweier Flächen auf einander“ und „Die Prinzipien der rationellen Mechanik“. In seinem Schlußwort zu dem Gesamtwerk nennt Carathéodory diesen Mechanikartikel von Voss als Beispiel eines von den zuallererst erschienenen Artikeln, die trotz der inzwischen vorangeschrittenen Entwicklung merkwürdig jung geblieben sind und noch heute mit Nutzen studiert werden können. An den Voss'schen Artikel über Abbildung und Abwicklung von Flächen schlossen sich zwei (zusammen hundert Seiten umfassende) Artikel von Liebmann an. 1. Berührungstransformationen, 2. Geometrische Theorie der Differentialgleichungen. Den Artikel über Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie schrieb Heinrich Tietze zusammen mit L. Viëtoris.

Besondere Verdienste um die Encyklopädie hat sich auch Burkhardt erworben. Er war nicht nur einer der Redakteure des in fünf Bänden erschienenen Analysisteils, er hat auch entsprechend dem ungewöhnlich großen Umfang seiner mathematischen Bildung nicht weniger als fünf Artikel geschrieben, zum Teil gemeinsam mit Mitarbeitern: 1. Endliche diskrete Gruppen, 2. (zusammen mit Ludwig Maurer) Kontinuierliche Transformationsgruppen, 3. (zusammen mit Franz Meyer) Potentialtheorie, 4. Trigonometrische Interpolation, 5. Trigonometrische Reihen und Integrale. Während die vier ersten Artikel sich einer knappen Darstellung befleißigten, wuchs der fünfte durch Aufnahme von Unwichtigem auf 536 Seiten an und mußte unfertig abgebrochen werden. Für den Artikel Photogrammetrie war von vornherein Finsterwalder der gegebene Verfasser. Er hat außerdem den Artikel Aerodynamik geschrieben, 1902, noch vor den ersten Flügen der Brüder Wright. In diesem Wissensgebiet stand am Anfang der kühne Versuch; aber wieviel Geistes- und Rechenarbeit steckt in der stürmischen Entwicklung seit den Maschinen der Brüder Wright bis zu den heutigen Flugzeugen.

Die Physik hat mit drei Bänden in der mathematischen Encyklopädie ihren Platz gefunden; sie läßt sich ebensowenig wie die Geodäsie (ein Band) und die Astronomie (zwei Bände) von der Mathematik trennen. Arnold Sommerfeld* (geb. 5. 12. 1868 Königsberg, gest. 26. 4. 1951 München, Mitglied der Akademie 1908) hatte, nachdem er seine wissenschaftliche Laufbahn als Göttinger Privatdozent der Mathematik begonnen hatte, im Analysisteil der Encyklopädie als Aachener Professor der Mechanik den Artikel „Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen" geschrieben. Als Münchener Professor der Theoretischen Physik schrieb er zusammen mit Reiff im Physikteil der Encyklopädie den Artikel: Standpunkt der Fernwirkung. Die Elementargesetze. Das Hauptverdienst Sommerfelds um die Encyklopädie aber besteht darin, daß er die Redaktion des Physikteils übernahm und hervorragende Gelehrte für ausgezeichnete Artikel gewann.

Die Hälfte der Artikel des Physikteils haben Mitglieder der Münchener Akademie (darunter vier Nobelpreisträger) geschrieben, zum Teil gemeinsam mit anderen Verfassern. Es gibt einen Begriff vom Inhalt des Physikteils und von der großen Beteiligung der Münchener Akademie an ihm, wenn der vorliegende Bericht mit der Nennung dieser Artikel schließt, der Sommerfeldsche wurde schon erwähnt; die Jahre, in denen die Verfasser in die Akademie gewählt wurden, sind in Klammern gesetzt:

Jonathan Zenneck (1916): Gravitation;

Ludwig Prandtl (1942): Technische Thermodynamik;

Eduard Study (1927): Chemische Atomistik;

ARTHUR SCHÖNFLIES (1915): Kristallographie;
LUDWIG BOLTZMANN (1891): Kinetische Theorie der Materie;
HENDRIK ANTON LORENTZ (1895): 1. Maxwells elektromagnetische Theorie, 2. Elektronentheorie, 3. Theorie der magnetischen Phänomene;
PETER DEBYE (1924): Stationäre und quasistationäre Felder;
WOLFGANG PAULI (1950): Relativitätstheorie;
WILHELM WIEN (1907): 1. Elektromagnetische Lichttheorie, 2. Theorie der Strahlung;
MAX V. LAUE (1944): Wellenoptik.

Besonders erwähnt werde noch der Artikel von R. EMDEN (1916) über Thermodynamik der Himmelskörper in einem der Astronomiebände. Vergleiche den Bericht über R. Emden von Georg Joos Seite 113.

22

Die Encyklopädie war kaum vollendet, da war sie schon veraltet, wenigstens in ihrem ersten Teil: Arithmetik und Algebra. Von ihm ist eine Neuausgabe im Werk. Auch die meisten der im 19. Jahrhundert herangewachsenen Mathematiker sind antiquiert; sie verstehen die moderne Mathematik, die von begabten Jüngeren mit viel Scharfsinn und viel Terminologie aufgebaut wird, nicht mehr. Wieweit die Jüngeren einander gegenseitig verstehen, ist schwer festzustellen. Manches, was vor zwei Menschenaltern in der reinen Mathematik hoffnungsvoll zu keimen und zu blühen schien, ist heute abgestorben. Und nach zwei weiteren Menschenaltern wird sicher manches von dem, was heute modern ist, außer Mode gekommen sein.

Die Zeit seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts, über die im vorstehenden hauptsächlich berichtet wurde, war nicht nur eine Zeit großer Fortschritte auf allen Wissensgebieten, sondern auch eine Zeit, in der die Hochschullehrer als eine geistige Elite besonders geachtet waren, und die Akademiemitglieder sind ja wieder eine Auslese unter den Hochschullehrern. Seidel schrieb, als er der Münchener Philosophischen Fakultät seine Dissertation einreichte: „Man ist gewöhnt, mit der wissenschaftlichen Größe eines Mannes seine Humanität im gleichen Verhältnisse zu finden.“ Damit wird selbstverständlich nicht behauptet, daß hohe Intelligenz und großer Charakter stets gewissermaßen naturgesetzlich vereint seien. Aber eine Korrelation zwischen Intelligenz und Charakter besteht unzweifelhaft, und die Studenten sollten mit Recht in ihren Universitätslehrern nicht nur wissenschaftlich, sondern auch menschlich Vorbilder erwarten dürfen. Bei Seidel wurden sie in dieser Hinsicht nicht enttäuscht, auch nicht bei seinen Nachfolgern Lindemann und Pringsheim; man darf neben dem amtlichen Nachfolger Lindemann auch Pringsheim als Nachfolger Seidels ansehen. Dabei waren Lindemann und Pringsheim in Temperament und Lebensumständen grundverschieden. Es soll selbstverständlich nicht gesagt sein, daß die erwähnte Korrelation nicht auch bei den anderen in diesem Bericht genannten Mathematikern vorhanden war, aber der Berichterstatter, der sich an manchen Stellen mit Beispielen begnügte, tut es auch hier.

Zu den Geschichten, die in der Nazizeit heimlich von Mund zu Mund gingen, gehört die folgende: Eine wohlwollende Fee wollte einem Knaben drei glückbringende Eigenschaften in die Wiege legen: 1. hohe Intelligenz, 2. guten Charakter, 3. Mitgliedschaft bei der Partei. Aber eine mächtigere Fee verhinderte die Absicht und bestimmte, daß ein Mensch höchstens zwei dieser Eigenschaften besitzen könne. Von den zehn Münchener Mathematikprofessoren, die in der Hitlerzeit Akademiemitglieder waren (auch hier handelt es sich nur um ein Beispiel), war kein einziger Nazi und (was nicht dasselbe ist) kein einziger war Parteigenosse. Den zehn Professoren verblieb also wenigstens die Anwartschaft auf die zwei ersten Gaben der freundlichen Fee.

Daß Lambert 1759 sich als Protestant in der damals vorwiegend katholischen Akademie nicht ganz wohl fühlte, wurde schon erwähnt. Die Zeiten haben sich inzwischen geändert. Von den einundzwanzig Akademiemitgliedern, über die (außer über Lambert) hier berichtet wurde, waren nur zwei Katholiken. Man darf aus dieser statistischen Feststellung weder schließen, daß sich Mathematik mit katholischem Bekenntnis oder vielmehr mit katholischem Taufschein schlecht verträgt, noch auch, daß die bayerischen Kultusminister lieber Nichtkatholiken zu Professoren ernannten.

Hätte die gebefreudige Fee außer Intelligenz und Charakter als dritte Gabe Gesundheit oder langes Leben in die Wiege gelegt, dann hätte die Oberfee keinen Einspruch erhoben. Es darf in diesem Zusammenhang eine weitere statistische Tatsache erwähnt werden: Das durchschnittliche Lebensalter der mehrfach erwähnten einundzwanzig Mathematiker beträgt mehr als 75 Jahre, das der zugehörigen sechs Münchener Universitätsprofessoren sogar mehr als 83 Jahre.

In der Meinung vieler Laien ist der Mathematiker ein pedantischer Logiker und langweiliger Rechner, ein unpraktischer Gelehrter, wie etwa der 170 cm lange Professor der Fliegenden Blätter, der in einem kleinen, 160 cm langen, 60 cm breiten Bett krumm lag, aufsteht, Länge und Breite des Bettes mißt, die Länge der Diagonale nach dem Pythagoräischen Lehrsatz berechnet, findet, daß sie $>$ 170 cm ist, und sich dann befriedigt in die Diagonale des

Bettes legt. Diesem falschen Bild vom Mathematikertypus möge zum Schluß ein vielleicht etwas geschmeicheltes gegenübergestellt werden durch Mitteilung einer der vielen Anekdoten, die man von Hilbert erzählt, und von denen einige sogar wirkliche Vorkommnisse wiedergeben: Ein Schüler sagte dem Meister Hilbert, er schwanke, ob er Dichter oder Mathematiker werden solle. Hilbert antwortete: „Werden Sie Dichter; für einen Mathematiker haben Sie zu wenig Phantasie.“