

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIII. Jahrgang 1903.

München.

Verlag der K. Akademie.

1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Nachtrag zu dem Aufsatz über Mittelwertssätze für bestimmte Integrale.

Von **Hermann Brunn.**

(Eingelaufen 7. März.)

1. Der Satz des ersten Kapitels meiner vorigen Arbeit¹⁾ ist, wie ich von Herrn Hurwitz erfahre, nicht neu, sondern bereits von F. Franklin aufgestellt worden²⁾ als Verallgemeinerung eines Tschebyschewschen Satzes,³⁾ der sich nur durch das Beschränktbleiben der Integralgrenzen auf die Werte 0 und 1 von ihm unterscheidet.

2. Der kurze Franklinsche Beweis durch Ausführung des Doppelintegrals in der leicht zu erhärtenden Ungleichung

$$I) \quad \int_a^b \int_a^b [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] dx dy \geq 0$$

(> für isotone, < für anisotone Funktionen $f(x), g(x)$; $b > a$) scheint auf den ersten Blick meinen umständlicheren völlig in den Schatten zu stellen. Er trägt indessen doch mehr den Charakter eines zufällig glückenden, sehr eleganten Kunstgriffes, versagt bei den Sätzen des dritten Kapitels meiner Arbeit und beweist bei genauerem Zusehen weniger als der meinige.

¹⁾ Neue Mittelwertssätze für bestimmte Integrale s. diese Sitz-Berichte, Bd. XXXII, 1902, pag. 91 ff., fernerhin zitiert mit N. M.

²⁾ Americ. Journ. of Math. Vol. VII, pag. 377.

³⁾ Hermite, Cours lithographié.

3. Zur Bündigkeit des Franklinschen Beweises ist das Erfülltsein einer der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad & \operatorname{sgn} [f(x) - f(y)] = \operatorname{sgn} [g(x) - g(y)] \\ & \operatorname{sgn} [f(x) - f(y)] = -\operatorname{sgn} [g(x) - g(y)] \end{aligned}$$

erforderlich für das ganze zweidimensionale Wertgebiet

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq b,$$

zur Bündigkeit des meinigen hingegen nur das Bestehen einer der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{III)} \quad & \operatorname{sgn} [f(x) - f_m] = \operatorname{sgn} [g(x) - g(x_m)] \\ & \operatorname{sgn} [f(x) - f_m] = -\operatorname{sgn} [g(x) - g(x_m)] \end{aligned}$$

für die einfache Wertmannigfaltigkeit

$$a \leq x \leq b.$$

In diese Form lassen sich die in meinem Aufsatz bei III) angegebenen und die für das Zustandekommen von V) dort erforderlichen Bedingungen, und zwar gleich für all die verschiedenen Verlaufsmöglichkeiten bei $f(x)$ und $g(x)$, zusammenfassen.

Dabei bedeutet f_m den Mittelwert der $f(x)$

$$\text{IV)} \quad f_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

x_m den (später jeden) Wert, welcher $f(x_m) = f_m$ macht oder wenigstens eine der beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} \text{V)} \quad & f(x_m - \varepsilon) \geq f_m \geq f(x_m + \delta) \\ & f(x_m - \varepsilon) \leq f_m \leq f(x_m + \delta) \end{aligned}$$

erfüllt für beliebige positive ε und δ , welche $x_m - \varepsilon$ und $x_m + \delta$ innerhalb des Integrationsintervalls belassen.

Mit andern Worten:

4. Die durchgehende Monotonie der Funktionen ist eine hinreichende, aber, worauf ich im vorigen Aufsatz noch nicht hingewiesen habe, durchaus nicht notwendige Bedingung für die Giltigkeit des Satzes

$$\text{VI) } \int_a^b f(x) g(x) dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx.$$

Es kommt vielmehr, geometrisch gesprochen, allein auf das Verhalten der Kurven F und G :

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = g(x)$$

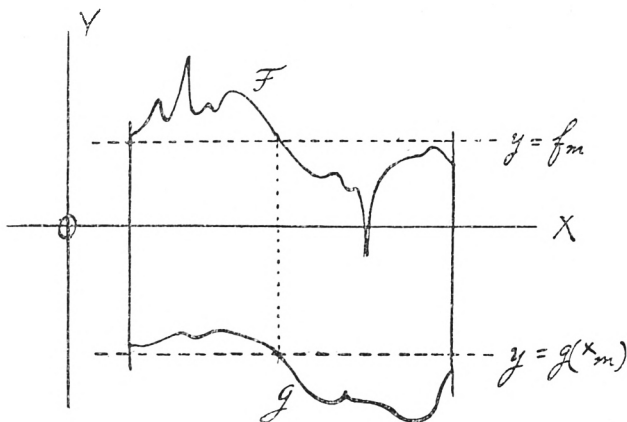
gegenüber den zwei Geraden

$$y = f_m \quad \text{und} \quad y = g(x_m)$$

an.

5. Wenn G die Gerade $y = g(x_m)$ nur an der (später werden wir sagen: an den) Stelle(n) überschreitet oder überspringt, wo F die Gerade $y = f_m$ überschreitet oder überspringt, so ist die Geltung des Satzes schon gewährleistet. Also beispielsweise dürften die Kurven folgende Gestaltung haben:

Fig. 1.



6. Auch Franklin bemerkt, dass Tschebyschews Satz einen etwas weitem Anwendungsbereich habe, als die monotonen Funktionen, insofern es nur auf die Erfüllung der Ungleichung I) ankommt. Aber seine Verallgemeinerung hat mit der soeben angedeuteten nichts zu tun, welche vielmehr eine Verallgemeinerung sowohl des enger als des weiter gefassten Tschebyschew-Franklinschen Satzes mit sich bringt.

7. Um dies völlig klar zu stellen, müssen wir genauer darlegen, welcherlei Beschränkung die Franklinsche Bedingung den Gestalten von F und G auferlegt. Die Kurven brauchen nicht monoton zu sein, können auf- und absteigen und ein und dieselbe X -Parallele an mehr als einer Stelle überschreiten. Aber:

Wenn von der Kurve F beliebige Punkte $a_1, a_2, a_3 \dots$ auf der einen, beliebige andere $b_1, b_2, b_3 \dots$ auf der andern Seite einer X -Parallelen P liegen, so existiert auch immer (mindestens) eine X -Parallele P' , welche die entsprechenden G -Punkte $a'_1, a'_2, a'_3 \dots$ auf der einen, $b'_1, b'_2, b'_3 \dots$ auf der andern Seite¹⁾ liegen hat.

Beweis:

8. Wenn auf P ein F -Punkt p liegt, so ist die gewünschte Gerade P' die durch den entsprechenden G -Punkt p' gehende X -Parallele.

Bezeichnet man die Ordinaten von Punkten einen Augenblick durch den Punktbuchstaben selbst, so gilt nach Franklins Voraussetzung:

VII) $\text{sgn}(a_i - p)(a'_i - p') = \text{sgn}(b_k - p)(b'_k - p')$, ev. ambig;
da aber nach einer unserer Vorannahmen

VIII) $\text{sgn}(a_i - p) = -\text{sgn}(b_k - p)$,

so muss auch

IX) $\text{sgn}(a'_i - p') = -\text{sgn}(b'_k - p')$, ev. ambig

sein, d. h. a'_i und b'_k liegen zu verschiedenen Seiten von P' .¹⁾

Ganz ähnlich schliesst man aus VII) und

X) $\text{sgn}(a_i - p) = \text{sgn}(a_k - p)$, dass

XI) $\text{sgn}(a'_i - p') = \text{sgn}(a'_k - p')$, ev. ambig

ist, dass also a'_i und a'_k auf der nämlichen Seite von P' liegen¹⁾ etc.

P' trennt also, wie verlangt, die beiden Punktgruppen $a'_1, a'_2, a'_3 \dots$ und $b'_1, b'_2, b'_3 \dots$.¹⁾

¹⁾ Wobei die Lage auf P' selbst noch für zulässig gilt.

9. Wenn auf P kein F -Punkt liegt, was bei den für die Kurve F zulässigen Unstetigkeiten möglich ist, so müssen zwei X -Parallele Q und R existieren, welche P , aber keinen F -Punkt zwischen sich einschliessen, und welche die der Geraden P beiderseits zunächst liegenden F -Punkte enthalten, oder wenigstens je einen Grenzpunkt, dem sich die Kurve F annähert.

10. Auf jeden Fall lassen sich denselben zwei X -Parallele Q' und R' mittels G zuordnen. Die Zuordnung ist klar, sobald Q und R nur je einen einzigen Punkt von F enthalten; enthalten sie mehr, so wählt man von den durch die entsprechenden G -Punkte gezogenen Q' und R' die „innersten“, ev. die Grenzgeraden, welchen diese Q' und R' nach innen zu sich nähern. Im Falle aber eine der Geraden, etwa Q , nur einen Grenzpunkt enthält, lässt sich auf F — das sich dem Q möglicherweise nicht monoton annähert — eine ins Unendliche laufende Reihe von Punkten $l_1, l_2, l_3 \dots$ angeben, deren Ordinaten monoton sich der Ordinate von Q annähern, und denen auf G Punkte $l'_1, l'_2, l'_3 \dots$ mit ebenfalls monoton sich ändernden Ordinaten entsprechen. Bei einem zwischen endlichen Grenzen vorausgesetzten Verlauf der eindeutig auf einander bezogenen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ müssen die Ordinaten l' sich ebenfalls einem bestimmten Grenzwert, die Punkte l' also sich einer bestimmten X -Parallele Q' annähern.

Ebenso würde man, wenn R eine Grenzgerade wäre, zwei zu den l und l' analoge Punktreihen $m_1, m_2, m_3 \dots$ und $m'_1, m'_2, m'_3 \dots$ finden, durch deren zweite ein R' bestimmt wird.

11. Zunächst sei gezeigt, dass zwischen Q' und R' kein G -Punkt n' liegen kann. Liegen auf Q' und R' G -Punkte, so würde n' einen F -Punkt n zwischen Q und R , oder auf Q oder R fordern, was auf Widersprüche gegen Annahmen bei 9. oder 10. führt. Sind Q' und R' als Grenzlinien bestimmt, so schliesst man:

12. Da n' sowohl von Q' als R' eine endliche Entfernung haben würde, so müsste es sicher zwischen den durch l'_λ und m'_μ gezogenen X -Parallelen liegen für jedes λ , bzw. μ , das grösser als eine hinlänglich gross gewählte Zahl λ_0 , bzw. μ_0 ,

ist. Dann müsste aber auch n zwischen den entsprechenden Parallelen durch l_i und m_{μ} oder auf denselben liegen. Hieraus folgt, dass n nicht ausserhalb des Streifens $Q R$ liegen kann, sondern nur innerhalb desselben oder auf einem Rande, was aber beides gegen zu Grunde gelegte Annahmen verstösst; ein n' kann somit zwischen Q' und R' nicht existieren.

13. Wenn Q' einen G -Punkt enthält, R' keinen, so ergibt sich durch die nämlichen Schlüsse, dass ein F -Punkt zwischen Q und R oder auf R selbst liegen müsste, was wieder gegen die Vorannahmen verstösst.

Es kann also in keinem Falle ein G -Punkt zwischen Q' und R' liegen.

14. Mit genau den nämlichen Beweismaterialien, was auszuführen wohl mehr ermüdend als nötig sein dürfte, zeigt man nun weiter, dass F -Punkten zu verschiedenen oder zu gleichen Seiten des Bandes $Q R$ stets G -Punkte zu verschiedenen, bzw. gleichen Seiten des Bandes $Q' R'$ entsprechen.

15. Ordnet man nun der Geraden P , die innerhalb des Bandes $Q R$ liegt, irgend eine in das Band $Q' R'$ hineinfallende X -Parallele P' willkürlich zu, so ist auch klar, dass F -Punkten zu verschiedenen oder gleichen Seiten von P immer Q -Punkte zu verschiedenen resp. gleichen Seiten von P' entsprechen.

Es ist also, auch wenn P die Kurve F nicht schneidet, die Auffindung einer unsern Wünschen entsprechenden Geraden P' gelungen. Bemerkt sei noch, dass Q mit R , Q' mit R' zusammenfallen kann und zwar eins unabhängig vom andern.

16. Somit ist durch die Franklinsche Bedingung für jede zu X parallele Transversale von F diejenige Eigenschaft nachgewiesen, welche mein Beweis — wie man sich bei genauer Nachkontrolle überzeugen mag — nur von einer einzigen Geraden P ($y = f_m$) fordert.

17. Es genügt zur Geltung des Satzes

$$\text{XII) } \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x) g(x) dx > \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \quad 1)$$

1) N. M. XVII).

vollkommen, dass sämtlichen $f(x) > f_m$ lauter Werte $g(x) \geq \gamma$ (oder lauter Werte $g(x) \leq \gamma$), sämtlichen Werten $f(x) < f_m$ lauter Werte $g(x) \leq \gamma$ (bezw. lauter Werte $g(x) \geq \gamma$) entsprechen.¹⁾

18. γ ist geometrisch gedeutet die Ordinate von P' , p ist jetzt zu definieren durch

$$\text{XIII) } p = (b - a) (f(a) - f_m) (g(a) - \gamma)$$

oder, falls $f(a) - f_m$ oder $g(a) - \gamma$ zufällig Null sein sollten, durch

$$\text{XIV) } p = (b - a) (f(x) - f_m) (g(x) - \gamma),$$

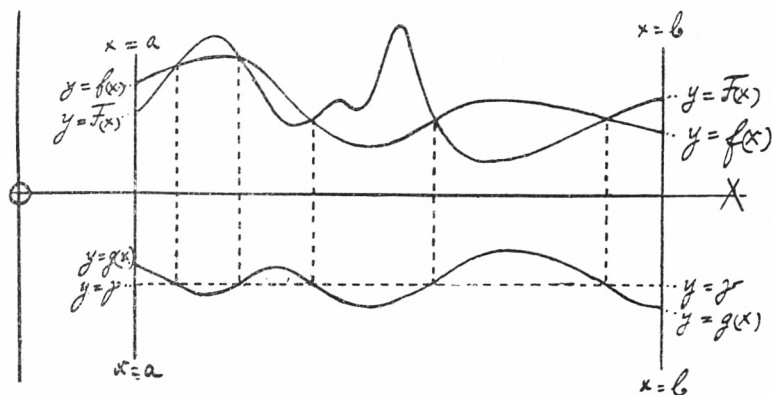
wo x ein beliebiger Wert im Intervall sein darf.

19. Ähnlich lassen sich die Bedingungen für die Geltung des Hauptsatzes im 3. Kapitel meiner Arbeit:

$$\text{XV) } \operatorname{sgn} p \int_a^b F(x) g(x) dx > \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x) g(x) dx \quad ^2)$$

in folgender Weise erweitern:

Fig. 2.



¹⁾ $f(x)$ und $g(x)$ sollen nicht völlig konstant, genauer: es soll nicht im ganzen Intervall

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^x c \cdot dx, \quad \int_a^x g(x) dx = \int_a^x c' \cdot dx \quad \text{sein.}$$

²⁾ N. M. XL).

Wenn $F(x)$, $f(x)$, $g(x)$ eindeutige, endliche Funktionen sind, wenn ferner $\int_a^b F(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ ist und schliesslich für alle Werte x , wo die Kurve $y = F(x)$ die Seite der Kurve $y = f(x)$ wechselt, und nur für diese Werte x auch die Kurve $y = g(x)$ die Seite einer bestimmten Geraden $y = \gamma$ wechselt, so gilt der Satz (Beispiel siehe in Fig. 2).¹⁾

Unter p ist zu verstehen:

$$\text{XVI) } p = (b - a) (F(x) - f(x)) (g(x) - \gamma),$$

wo für x irgend ein Wert, der keinen der Faktoren zu Null macht, etwa auch eine der Grenzen a und b eingesetzt werden darf.

20. Obwohl die Beweise nicht auf den Fall zugespitzt sind, dass $y = f(x)$ und $y = f_m$, $y = F(x)$ und $y = f(x)$ unendlich viele gegenseitige Schnitte oder Ueberschreitungen aufweisen, so dürften sich die Sätze doch auch für diese Annahme aufrecht erhalten lassen, worauf wir nicht näher eingehen.

¹⁾ Die ambigen Fälle, wo $y = g(x)$ die Gerade nur erreicht und an ihr eine Strecke entlang läuft, sind in dem für die Geltung des Satzes günstigen Sinne auszulegen. — $F(x)$ und $f(x)$ sollen nicht völlig identisch, genauer: es soll nicht im ganzen Intervall $\int_a^x F(x) dx = \int_a^x f(x) dx$ sein.