Abhandlungen
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung
Neue Folge. Heft 19
1933

Eine Verallgemeinerung des Umkehr- und des Teilungs-Problems der Abel'schen Integrale nebst geometrischen Anwendungen

von

F. Lindemann

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei
in Nördlingen

Bezeichnet man mit $u_1(z), u_2(z) \ldots u_p(z)$ die p zu einer algebraischen Kurve vom Geschlechte p gehörigen Abelschen Integrale erster Gattung mit der oberen Grenze z, so besteht das Jacobische Umkehrproblem bekanntlich in der Aufgabe, aus den p Gleichungen

$$u_h(z_1) + u_h(z_2) + \ldots + u_h(z_p) = v_h \quad \text{für } h = 1, 2 \ldots p$$

die oberen Grenzen $z_1, z_2, \ldots z_p$ als Funktionen der gegebenen Größen $v_1 \ldots v_p$ zu berechnen. Die im folgenden durchgeführte Verallgemeinerung ersetzt die vorstehenden p Gleichungen durch die folgenden:

$$q_1 u_h(z_1) + q_2 u_h(z_2) + \ldots + q_p u_h(z_p) = v_h \quad \text{für } h = 1, 2, \ldots p,$$

wo $q_1, q_2, \ldots q_p$ ganze positive Zahlen bezeichnen. Die Lösung gelingt mit Hilfe der im § 2 eingeführten Θ-Funktionen höherer Ordnung. Sind alle Zahlen q_i einander gleich, so ergibt sich das Teilungsproblem, das von Clebsch zu den schönen geometrischen Anwendungen verwendet wurde. Aber auch, wenn alle Zahlen q_i einen gemeinsamen Teiler haben, ergibt sich eine enge Beziehung zu den Teilungsproblemen (§ 12) und eine teilweise Zurückführung der Aufgabe auf die gewöhnliche Teilung.

Den einfachsten Fall, in dem nur eine der Zahlen q_i von Eins verschieden ist (jetzt § 5), hatte ich schon während meines Aufenthaltes in München (1875—1876) erfolgreich behandelt, ohne damals die darauf bezügliche Arbeit von Roch zu kennen. Als ich dann bei meinem Aufenthalte in Paris (Winter 1876—1877) erfuhr, daß die Académie des Sciences für 1877 als Preisaufgabe „Geometrische Anwendungen der Abelschen Funktionen" gestellt habe, machte ich mich dort an die Bearbeitung des Themas, und die hier folgenden Entwicklungen sind eine wenig geänderte Wiedergabe meiner damals der Pariser Akademie eingereichten Arbeit, deren Konzept (in französischer Sprache) in meinen Händen ist. Damals hatte ich von Paris aus mein Habilitationsgesuch bei der Würzburger Fakultät eingereicht. Als ich Mitte April nach Würzburg kam, wünschte die Fakultät, ich solle sogleich im Mai meine Vorlesungen beginnen; gleichzeitig aber hatte ich noch die Reinschrift meiner Preisarbeit herzustellen. So wurde letztere nur sehr knapp vor dem Termin fertig. In Paris hatte ich viel im Hause eines entfernten Verwandten verkehrt, dessen Sohn (Herr Sammann) an der École Normale studierte, somit etwas von höherer Mathematik verstand und meine Arbeit in bezug auf die Korrektheit des Französischen durchgesehen hatte. Durch ihn ließ ich die Arbeit bei der Akademie einreichen; es wurde ihm gesagt, er müsse die einzelnen Blätter zuvor binden lassen; wenn dadurch der Termin um einige Tage überschritten würde, so werde dem Verfasser daraus kein Schade entstehen. Als nun in den Comptes rendus 1877 das Urteil der Akademie veröffentlicht wurde, las ich zu meinem Erstaunen: „Der Preis könne nicht erteilt werden, da keine Arbeit eingelaufen sei." Die inzwischen erfolgte Berufung als Extraordinarius nach Freiburg i. B. stellte mich vor so viele neue Aufgaben, daß ich mich darauf beschränkte, eine kurze Zusammenstellung meiner Resultate in den „Berichten der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. B., Bd. 7, Heft 3, 1878" zu veröffentlichen.

Erst jetzt bin ich darauf zurückgekommen. Im Sommer des vorigen Jahres schrieb ich an das Sekretariat der Académie des Scienees unter Angabe meines damaligen Mottos und bat um Überlassung der Arbeit, da ich sie jetzt veröffentlichen wolle. Es wurde mir (unter Beifügung des gedruckten Reglements der Akademie) geantwortet, eingereichte Arbeiten würden grundsätzlich nicht zurückgegeben; es stände mir aber frei, in Paris eine Abschrift zu nehmen oder nehmen zu lassen. Da mir das nicht möglich war, machte ich mich daran, eine deutsche Übersetzung des Konzeptes anzufertigen. Dabei waren natürlich einzelne unwesentliche Änderungen nötig, die hier erwähnt seien.

Die Einleitung (§ 1), die das Zerschneiden einer Riemannschen Fläche und das Verhalten der Integrale an den Querschnitten bespricht, ist jetzt sehr gekürzt. Die Behandlung des in § 6 ff. besprochenen Umkehrproblems ist ausführlicher gestaltet. In der Pariser Abhandlung war nur der einfachste Fall des Umkehrproblems (jetzt § 5) eingehend behandelt und daran sofort der allgemeine Satz von § 9 und dessen Beweis durch Rekursionsschlüsse angeschlossen. Jetzt habe ich zum leichteren Verständnisse und um begreiflich zu machen, wie ich zu dem allgemeinen Satze gekommen bin, in § 7 und § 8 die Ableitung für zwei weitere nächst einfache Fälle eingeschaltet. Umständlich gestaltet sich immer die Bestimmung der δ^p linearen Konstanten, die in die Θ-Funktion δ^{ter} Ordnung eingehen. Darauf bezog sich in meinem Konzepte eine längere durchstrichene Erörterung, die nach einer Bemerkung am Rande für die Reinschrift ganz geändert wurde. Wie diese Änderung geschah und ob sie mit der jetzt gegebenen Darstellung übereinstimmt, vermag ich nicht anzugeben. In § 13, der die Berührungsprobleme für Kurven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung behandelt, habe ich jetzt ebenfalls vor dem allgemeinen (durch Rekursionsverfahren zu beweisenden) Satze noch einige einfache Fälle eingeschaltet. Sonst ist aber nichts geändert. Letzteres betone ich aus folgendem Grunde: Ich hatte Herrn Sammann gebeten, im Sekretariate der Akademie zu fragen, weshalb meine Arbeit trotz der gegebenen Zusage nicht berücksichtigt wurde; er erhielt die Auskunft, die betreffende Kommission wünsche eine Umarbeitung des Schlusses und habe die Aufgabe für nächstes Jahr wiederholt gestellt. Das Verlangen nach Umarbeitung des Schlusses konnte sich nicht auf den letzten ganz einfachen Paragraphen (jetzt § 14) beziehen, vielleicht aber auf den § 13, der wegen der Kompliziertheit der Formeln allerdings ohne die jetzt vorausgeschickten Beispiele schwer verständlich war. Zu einer Umarbeitung fehlte mir deshalb die Veranlassung; es wäre dazu auch zu spät gewesen.

§ 1. Die zu einer algebraischen Kurve gehörenden Abelschen Integrale.

Wir gehen aus von einer „Fundamentalkurve" von der Ordnung n mit d Doppelpunkten,[1] deren Geschlecht also durch die Gleichung

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d \tag{1}$$

[1] Das Auftreten von Rückkehrpunkten würde die Untersuchung wesentlich umständlicher machen, denn bei Berührungsaufgaben geben Rückkehrpunkte immer zu uneigentlichen Lösungen Veranlassung. Wie man sie zu behandeln hat, zeigt z. B. Brill, Math. Annalen Bd. 4 S. 528 ff.

gegeben ist. Da die zu behandelnden Fragen im wesentlichen unabhängig von eindeutigen algebraischen Transformationen sind, ist es nicht notwendig, höhere singuläre Punkte vorauszusetzen. Zur Behandlung der zugehörigen Abelschen Integrale gehen wir von der zur Grundkurve gehörigen Riemannschen Fläche aus, die wir als n-blättrig mit $n(n-1)-2d$ Verzweigungspunkten voraussetzen dürfen. Die Riemannsche Fläche verwandeln wir durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende; nach den Untersuchungen von Lüroth[1] kann dies in folgender Weise geschehen. Wir wählen $2p+2$ Verzweigungspunkte aus, die wir in $p+2$ Paare einteilen:

$$P_1 \text{ und } Q_1,\ P_2 \text{ und } Q_2, \ldots, P_{p+1} \text{ und } Q_{p+1};$$

jedes Paar denken wir durch eine „Übergangslinie" miteinander verbunden, durch deren Ueberschreiten man von einem Blatte in ein anderes Blatt kommt. Um jedes Paar P_i, Q_i für $i = 1, 2, \ldots p$ legen wir einen in sich geschlossenen Schnitt b_i, in dessen Innern die betreffende Übergangslinie verläuft:

$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_p.$$

Andere geschlossene Schnitte

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_p$$

legen wir so, daß jeder von ihnen einen der $2p$ Punkte P_i, Q_i und einen der beiden Punkte P_{p+1}, Q_{p+1} in sich einschließt, also die beiden Übergangslinien zwischen den Punkten P_i, Q_i und den Punkten P_{p+1}, Q_{p+1} schneidet. Endlich legen wir Schnitte

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{p-1}$$

so, daß c_i einen Punkt von b_i mit einem Punkt von b_{i+1} verbindet. Da die Riemannsche Fläche als geschlossene Fläche zu betrachten ist, und da ein Querschnitt von Rand zu Rand gehen soll, müssen wir die Fläche zuerst punktieren, d. h. durch Herausheben eines kleinen Kreises einen Rand schaffen. Der erste Querschnitt läuft dann von einem Punkte dieses Randes zu einem andern Punkte dieses Randes; es sei der Schnitt b_1. Von den beiden Rändern dieses Schnittes können nun weitere Querschnitte ausgehen usf. So erhalten wir folgende $2p$ Schnitte:

$$b_1,\quad c_1 \text{ zusammen mit } b_2,\quad c_2 \text{ mit } b_3, \ldots c_{p-1} \text{ mit } b_p,\ a_1,\ a_2, \ldots a_p.$$

Durchläuft man die beiden Ränder dieser Schnitte in passender Weise, so macht man damit einen Umgang um den ganzen Rand der zerschnittenen (und jetzt einfach zusammenhängenden) Fläche. Den Umgang nennen wir positiv, wenn dabei das Innere der Fläche zur linken Seite bleibt. Die beiden Ufer eines jeden Schnittes unterscheiden wir durch die Zeichen $+$ und $-$. Ein zur Fundamentalkurve gehöriges algebraisches Integral I hat an gegenüberliegenden Punkten der beiden Ufer verschiedene Werte, die demnach mit $I^{(+)}$ und $I^{(-)}$ bezeichnet seien; sie unterscheiden sich durch additive Konstante.

---

[1] Math. Annalen Bd. 4 und Clebsch, ebenda Bd. 6; es wird hier gezeigt, daß das bei den zweiblättrigen Flächen angewandte Verfahren allgemein zulässig ist.

Insbesondere gehören zur Fundamentalkurve p linear unabhängige (überall endliche) Integrale erster Gattung, aus denen durch lineare Kombination p sogenannte Normalintegrale

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_p$$

gebildet werden können, deren Verhalten an den Querschnitten durch die folgenden Gleichungen beschrieben wird; es ist

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\text{am Schnitte } b_k : u_h^{(+)} = u_h^{(-)} + a_{hk}, \\ &\text{am Schnitte } a_k : u_h^{(+)} = u_h^{(-)} \quad \text{falls } h \gtrless k, \\ &\qquad\qquad\quad u_h^{(+)} = u_h^{(-)} + 2\pi i \quad \text{falls } h = k, \\ &\text{am Schnitte } c_k : u_h^{(+)} = u_h^{(-1)}, \\ &\qquad\qquad\quad h, k = 1, 2, 3, \ldots, p. \end{aligned}$$

Die sogenannten Periodizitätsmodulen a_{hk} $(= a_{kh})$ sind durch die Gleichungen

$$(2)\qquad a_{1h} = \int_{a_1} du_h,\ a_{2h} = \int_{a_2} du_h \ldots a_{ph} = \int_{a_p} du_h$$

definiert, wenn $\int_{a_k} du_h$ den Wert des über den Schnitt a_k in positivem Sinne geführten Integrals u_h bezeichnet. Der allgemeinste Wert, den ein Integral u_h durch Änderung des Integrationsweges annehmen kann, ist daher

$$\begin{gathered} u_h + 2 s_h \pi i + \sigma_1 a_{h1} + \sigma_2 a_{h2} + \ldots + \sigma_p a_{hp} \\ h = 1, 2, 3, \ldots p, \end{gathered}$$

wobei mit s_h und σ_h beliebige ganze positive oder negative ganze Zahlen bezeichnet sind.

Neben den Integralen erster Gattung werden wir das mit $\Pi_{\xi\eta}$ bezeichnete Integral dritter Gattung[1] zu benutzen haben, das die Eigenschaft hat, an zwei Stellen ξ, η je logarithmisch unendlich zu werden und sich um $2\pi i$ bei einem positiven Umgange um ξ, und um $-2\pi i$ bei positivem Umgange um η additiv zu ändern. An den Schnitten a_h und c_h bleibt $\Pi_{\xi\eta}$ ungeändert, an den Schnitten b_h ändert es sich um das zwischen ξ und η entstreckte Integral u_h. Ist also $\Pi_{\xi\eta}$ ein Wert des Integrals, so ist der allgemeinste Wert desselben

$$\Pi_{\xi\eta} + 2\sigma\pi i + s_1 \int_\xi^\eta du_1 + s_2 \int_\xi^\eta du_2 + \ldots + s_p \int_\xi^\eta du_p,$$

wenn mit σ, s_1, s_2, $\ldots$, s_p ganze Zahlen bezeichnet werden. Es gilt der Satz für die Vertauschung von Parameter und Argument, nämlich

$$\int_\xi^\eta d\Pi_{\alpha\beta} = \int_\alpha^\beta d\Pi_{\xi\eta}.$$

---

[1] Vgl. Clebsch und Gordan, Abelsche Funktionen S. 116 ff.

§ 2. Die Θ-Funktionen höherer Ordnung.

Im folgenden müssen wir eine Verallgemeinerung der Riemannschen Θ-Funktion benutzen, die wir als Θ-Funktion von der Ordnung δ und mit dem Zeichen Θ_δ bezeichnen. Sie werde definiert durch die Gleichung:

$$\Theta_\delta(v'_h) = \Theta_\delta(v_h) \cdot e^{\frac{1}{2}\delta\sum\sum a_{ik} s_i s_k + \delta\sum s_i v_i}, \tag{1}$$

wo: $$v'_h = 2\sigma_h \pi i + a_{1h} s_1 + a_{2h} s_2 + \ldots + a_{ph} s_p + v_h, \qquad h = 1, 2, 3, \ldots p$$

und zur Abkürzung

$$\Theta_\delta(v_h) = \Theta_\delta(v_1, v_2, \ldots v_p)$$

gesetzt ist, so daß die Funktion von p Argumenten abhängt. Mit δ, σ_h, s_h sind ganze Zahlen bezeichnet, mit $a_{ik} = a_{ki}$ gewisse Konstante. Die Funktion soll eindeutig von den p Argumenten abhängen und für alle endlichen Werte derselben selbst endlich sein. Sie kann dann bekanntlich in folgender Weise in eine p-fach unendliche Reihe entwickelt werden:

$$\Theta_\delta(v_h) = \sum_{r_1=-\infty}^{r_1=+\infty} \cdots \sum_{r_p=-\infty}^{r_p=+\infty} A_{r_1 r_2 \ldots r_p} e^{\sum_{i=1}^{i=p} r_i v_i} = (\Sigma)^p A_r e^{\Sigma r_i v_i}, \tag{2}$$

wo die Konstanten A_r in ihrer Abhängigkeit von den a_{ik} und den Zahlen r_i zu bestimmen sind. Die Anwendung der Relation (1) auf die Funktion (2) ergibt:

$$(\Sigma)^p A_r e^{\Sigma\Sigma a_{ik} r_i s_k + \Sigma r_i v_i} = e^{\frac{1}{2}\delta\Sigma\Sigma a_{ik} s_i s_k} (\Sigma)^p A_r e^{\Sigma(r_i + \delta s_i) v_i}.$$

Auf der linken Seite können wir r_i ersetzen durch $r_i + \delta s_i$; dann ergibt die Vergleichung gleicher Potenzen beider Seiten:

$$A_{r+\delta s} = A_r e^{-\frac{1}{2}\delta\Sigma\Sigma a_{ik} s_i s_k - \delta\Sigma\Sigma a_{ik} r_i s_k}$$

oder, wenn man r an Stelle von s und ν an Stelle von r schreibt:

$$A_{\delta r_1 + \nu_1, \ldots, \delta r_p + \nu_p} = A_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p} e^{-\delta\Sigma\Sigma a_{ik} r_i \left(\frac{1}{2} r_k + \nu_k\right)}.$$

Da man den Zahlen $\nu_1, \ldots \nu_p$ alle Werte 0, 1, $\ldots p-1$ beilegen kann, ohne denselben Ausdruck mehrmals zu erhalten, so repräsentiert diese Bedingung δ^p verschiedene Gleichungen; die Funktion Θ_δ ist demnach eine lineare und homogene Funktion von δ^p speziellen derartigen Funktionen:

$$\Theta_\delta(v_h) = \sum_{\nu_1} \cdot \ldots \sum_{\nu_p} A_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p} \Theta_\delta(v_h, \nu_k), \tag{3}$$

wo die Summe der rechten Seite aus δ^p Termen besteht und wo

$$\Theta_\delta(v_h, \nu_k) = e^{\sum_1^p \nu_i v_i} \sum_r (\Sigma)^p e^{-\frac{1}{2}\delta\Sigma\Sigma a_{ik} r_i r_k + \Sigma r_i (\delta v_i - \Sigma a_{ik} \nu_k)}. \tag{4}$$

Wir werden diese Funktion auch kurz mit $\Theta_\delta\,(v_h;\,A)$ bezeichnen.[1]

Jede der besonderen Funktionen (4) kann aus einer derselben abgeleitet werden, indem man die Argumente um gewisse Konstante vermehrt; man hat nämlich

$$\Theta_\delta\,(v_h, \nu) = \Theta_\delta\left(v_h - \frac{1}{\delta} P_h^{(\nu)},\, \nu\right) \cdot e^{\Sigma \nu_i v_i},$$

wo

$$P_h^{(\nu)} = \nu_1\, a_{1h} + \nu_2\, a_{2h} + \ldots + \nu_p\, a_{ph}.$$

Zu den Θ-Funktionen der Ordnung δ gehört insbesondere auch die δ^{te} Potenz der Θ-Funktion erster Ordnung; sie genügt der Funktionalgleichung (1) und ist deshalb in der Form (2) bzw. (3) darstellbar.

Durch Hinzufügen eines Exponentialfaktors kann man ferner δ^p Θ-Funktionen δ^{ter} Ordnung durch δ^{te} Potenzen von Funktionen erster Ordnung bilden, nämlich

$$e^{\Sigma \nu_i v_i}\left[\Theta\left(v_h - \frac{1}{\delta} P_h^{(\nu)}\right)\right]^\delta.$$

Diese Funktionen sind deshalb ebenfalls in der Form (2) bzw. (3) darstellbar.

§ 3. Die Integrale erster Gattung als Argumente der Funktionen Θ_δ.

Als Argumente der Funktion Θ_δ nehmen wir jetzt die Integrale erster Gattung und suchen die Anzahl der Nullpunkte der Funktion Θ_δ auf der Riemannschen Fläche. Wir verallgemeinern die Aufgabe, indem wir

(1) $$v_h = q \cdot u_h - e_h \quad \text{für} \quad 1, 2, \ldots p$$

setzen, wo q eine positive ganze Zahl bezeichnet und die e_h gegebene Konstante bedeuten. Bezeichnet N die Anzahl der gesuchten Nullpunkte, so ist bekanntlich nach dem Cauchyschen Satze

(2) $$2\pi i \cdot N = \int d \log \Theta_\delta\,(q\, u_h - e_h),$$

wenn das Integral über den Rand der zerschnittenen Fläche, d. h. über beide Ufer der Schnitte a_h, b_h, c_h in positivem Sinne geführt wird. Der positive Sinn führt zunächst über das positive Ufer der Schnitte a_h, b_h, c_h und dann in entgegengesetzter Richtung über die negativen Ufer dieser Schnitte (wobei immer das Innere der Fläche zur Linken liegt). Es ist also:

---

[1] Funktionen Θ_δ hat schon J. Thomae aufgestellt (Die allgemeine Transformation der Θ-Funktionen mit beliebig vielen Variabeln, Göttinger Inauguraldissertation, 1864), was mir 1877 nicht bekannt war, ebenso für $p = 3$ H. Weber, Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht 3, Berlin 1876. Die Funktionen wurden indessen zu Anwendungen nicht benutzt. Vgl. auch Hermite, Comtes rendus t. XL (Sur la transformation des fonctions Abéliennes) und Prym, Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel, Leipzig 1882.

$$(3)\qquad 2\pi i N = \sum_{h=1}^{p} \int_{a_h} d(\log \Theta_\delta^{(+)} - \log \Theta_\delta^{(-)}) + \sum_{h=1}^{p} \int_{b_h} d(\log \Theta_\delta^{(+)} - \log \Theta_\delta^{(-)}) + \sum_{\nu=1}^{p-1} \int_{c_\nu} d(\log \Theta_\delta^{(+)} - \log \Theta_\delta^{(-)}).$$

Die auf die Schnitte a_ν und c_ν bezüglichen Integrale sind nach den Angaben in § 1 gleich Null; am Schnitte b_ν ist

$$v_h^{(+)} - v_h^{(-)} = q \cdot a_{h\nu},$$

also nach (1) § 2 (wo $s_h = q$ zu nehmen ist, während die andern Zahlen s_i gleich Null sind):

$$(4)\qquad \Theta_\delta^{(+)} = \Theta_\delta^{(-)} \cdot e^{\frac{1}{2} q^2 \delta a_{hh} + q\delta (q u_h - e_h)}.$$

Die Gleichung (3) gibt so:

$$2\pi i \cdot N = q^2 \delta \sum_{h=1}^{p} \int_{b_h} d u_h = 2\pi i \cdot q^2 \delta p.$$

Die Anzahl der Nullpunkte der Funktion $\Theta_\delta (q u_h - e_h)$ ist folglich gleich $q^2 \delta p$.

Die Abhängigkeit der Nullpunkte der Funktion Θ_δ von den gegebenen Größen e_h ergibt sich durch folgende Betrachtung. Die Funktion

$$U = \log \Theta_\delta (q u_h - e_h)$$

wird nach vorstehendem in $q^2 \delta p$ Punkten $x^{(i)}$ logarithmisch unendlich und ändert sich um $2\pi i$, wenn der variable Punkt x um einen dieser $q^2 \delta p$ Punkte einen positiven Umgang beschreibt. Entsprechend dem von Riemann für $\delta = 1$, $q = 1$ angewandten Verfahren legen wir um jeden Punkt $x^{(i)}$ einen kleinen Kreis und verbinden diesen mit einem Punkte der Schnitte a_ν, b_ν durch eine Linie l_i, die keinen der übrigen Schnitte schneidet. Längs dieser Linien l_i schneiden wir die Riemannsche Fläche auf; dann ist U eine in der zerschnittenen Fläche holomorphe Funktion, und an den Schnitten a_ν, b_ν, l_i bestehen die Relationen:

am Schnitte a_h: $U^{(+)} = U^{(-)} - 2\pi i \cdot \delta q$
am Schnitte b_h: $U^{(+)} = U^{(-)} + (q u_h^{(-)} - e_h)\, \delta q + \frac{1}{2} \delta q^2 a_{hh}$ für $h = 1, 2 \ldots p$
am Schnitte l_i: $U^{(+)} = U^{(-)} - 2\pi \sqrt{-1}$ für $i = 1, 2 \ldots q^2 \delta p$.

Dabei gilt als positives Ufer am Schnitte l_i dasjenige, welches beim Umlaufe um den Rand der zerschnittenen Fläche zuerst durchlaufen wird.

An den Schnitten c_k ist die Differenz $U^{(+)} - U^{(-)}$ jetzt gleich einem Vielfachen von $2\pi i$; geht man nunmehr vom Schnittpunkte der Schnitte b_h und c_h längs des Schnittes b_h fort und kommt an einen Punkt $\zeta^{(i)}$, von dem die Linie l_i zum Punkte $x^{(i)}$ führt, so muß zunächst diese Linie durchlaufen und der Umgang um $x^{(i)}$ gemacht werden, wodurch $q u_h - e_h$ um $2q\pi i$ wächst; liegen γ_h solcher Punkte $\zeta^{(i)}$ auf den Schnitten a_h und b_h, so kommt man

am negativen Ufer von c_h mit einem Werte von U an, der um $2\gamma_h \pi i$ größer ist als der Anfangswert, d. h. es ist

$$\text{am Schnitte } c_h\colon\ U^{(+)} = U^{(-)} - 2\gamma_h \pi_i,$$

wo γ_h eine ganze Zahl bezeichnet.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Wert des Integrals

$$W_\nu = \int U\, du_\nu = \int \log \Theta_\delta (q u_h - e_h) \cdot du_\nu \tag{1}$$

angeben, wenn dasselbe um den ganzen Rand der zerschnittenen Fläche geführt wird. Derselbe ist, da W im Innern der zerschnittenen Fläche holomorph ist:

$$\begin{aligned} &\sum_k \int_{a_k} (U^{(+)} - U^{(-)})\, du_\nu + \sum_h \int_{b_h} (U^{(+)} - U^{(-)})\, du_\nu \\ &+ \sum_i \int_{l_i} (U^{(+)} - U^{(-)})\, du_\nu + \sum_j \int_{c_j} (U^{(+)} - U^{(-)})\, du_\nu = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

für $k = 1, 2 \ldots p$, $\quad i = 1, 2, \ldots q^2 \delta p$, $\quad j = 1, 2, \ldots (p-1)$.

Hierin ist:

$$\int_{b_h} (U^{(+)} - U^{(-)})\, du_\nu = 2\pi i \cdot \delta q\, \sigma_h \int_{b_h} du_\nu = 2\pi i \cdot \delta q\, \sigma_h\, a_{h\nu}$$

nach (2) § 1, wo σ_h eine ganze Zahl bedeutet; ferner:

$$\begin{aligned} \int_{a_h} (U^{(+)} - U^{(-)})\, du_\nu &= \delta q \left[q \int_{a_h} u_h^{(-)}\, du_\nu + \left(\tfrac{1}{2} q\, a_{hh} + 2 s_h \pi i - e_h\right) \int_{b_h} du_\nu \right] \\ &= \delta q^2 \int_{a_h} u_h^{(-)}\, du_\nu \quad \text{für } h \gtrless \nu, \\ &= \delta q^2 \int_{a_h} u_h^{(-)}\, du_h + 2\pi i\, \delta q \left(\tfrac{1}{2} q\, a_{hh} + 2 s_h \pi i - e_h\right) \quad \text{für } h = \nu, \end{aligned}$$

nach (2) § 1, wo s_h eine ganze Zahl bezeichnet, ferner:

$$\int_{l_i} (U^{(+)} - U^{(-)})\, du_\nu = -2\pi i \int_{\zeta^{(i)}}^{x^{(i)}} du_\nu = -2\pi i \left(\int_\mu^{x^{(i)}} du_\nu - \int_\mu^{\zeta^{(i)}} du_\nu \right),$$

wenn mit μ ein beliebiger Punkt bezeichnet wird; weiter:

$$\int_{c_j} (U^{(+)} - U^{(-)})\, du_\nu = -2\gamma_j \pi i \cdot \int_{c_j} du_\nu.$$

Die Gleichung (2) gibt somit nach Division mit $2\pi i$ folgende p Relationen

$$\sum_{i=1}^{q^2 \delta p} \int_\mu^{x^{(i)}} du_h = q\, \delta\, e_h + K_h \quad \text{für} \quad h = 1, 2, 3, \ldots p, \tag{3}$$

wo:

$$K_\nu = \sum_{i=1}^{q^2 \delta p} \int_\mu^{\zeta^{(i)}} du_\nu + \delta q \sum_{h=1}^{p} \sigma_h\, a_{h\nu} - \frac{\delta q^2}{2\pi i} \sum_{h=1}^{p} \int_{a_h} u_h^{(-)}\, du_\nu - \frac{1}{2} \delta q^2 a_{\nu\nu} - 2\pi i\, \delta q\, s_\nu - \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \int_{c_j} du_\nu \tag{4}$$

$$\text{für } \nu = 1, 2 \ldots p.$$

Die hier auftretenden Punkte $\zeta^{(i)}$ können auf den Querschnitten ganz beliebig gewählt werden; letztere selbst sind in hohem Grade willkürlich, insbesondere die Schnitte c_j, auf die sich die letzte Summe der rechten Seite von (4) bezieht. Die Größen K_ν sind somit von den $\zeta^{(i)}$ und von der Lage der Schnitte c_j unabhängig und deshalb als Konstante zu betrachten. Sie sind aber nach (4) auch unabhängig von den δ^p Konstanten A, die nach § 2 in Θ_δ vorkommen, so daß es genügt, letztere für irgendeine spezielle Funktion, z. B. die δ^{te} Potenz von Θ, zu berechnen; es ist demnach

$$K_\nu = \delta q^2 \cdot k_\nu, \tag{5}$$

da δk_ν die entsprechenden Werte für die Funktion $\Theta\,(u_h)^\delta$ und $\delta q k_\nu$ für die Funktion $\Theta\,(q\,u_h)^\delta$ bezeichnen.

Die Abhängigkeit der $q^2\delta p$ Nullpunkte $x^{(i)}$ der Funktion $\Theta_\delta\,(q\,u_h - e_h)$ von den gegebenen Größen e_h wird hiernach durch die p Gleichungen (3) geliefert, in denen die Konstanten K_h durch die Gleichungen (4) bzw. (5) bestimmt werden. Die Punkte $x^{(i)}$ hängen außerdem von den in Θ_δ vorkommenden Konstanten A ab.

§ 4. Darstellung algebraischer Funktionen durch Θ-Funktionen höherer Ordnung.

Nach dem Abelschen Theorem und dessen durch das Jacobische Umkehrproblem gegebenen Umkehrung sind die Punkte $x^{(i)}$ die Schnittpunkte der Grundkurve mit einer anderen algebraischen Kurve der Ordnung m, wenn

$$mn = 2d + q^2\delta p + \sigma$$

und diese Kurve durch σ weitere Punkte der Grundkurve hindurchgeht, von denen die Größen e_h abhängen, vorausgesetzt, daß die p Gleichungen der folgenden Form bestehen:

$$\sum_{i=1}^{q^2\delta p} \int_{\xi^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h \equiv 0 \qquad \text{mod } P_h, \quad \text{für } h = 1, 2 \ldots p,$$

wo $\xi^{(i)}$ die Schnittpunkte einer zweiten Kurve m^{ter} Ordnung bezeichnen. Eine in diesen Punkten verschwindende Funktion kann man in folgender Weise konstruieren.

Auf der Riemann schen Fläche ist bekanntlich die Funktion

$$P(x) = e^{\sum m_i \int_\mu^x du_i} \prod_{h=1}^{h=q} \frac{\Theta\left(\int_\mu^x du_h - e_h^{(k)}\right)}{\Theta\left(\int_\mu^x du_h - g_h^{(k)}\right)}, \tag{1}$$

wo die Summe über i von 1 bis p zu nehmen ist, eine algebraische Funktion von x, falls die p Bedingungen

$$\sum_{k=1}^{q}\left(g_h^{(k)} - e_h^{(k)}\right) + \sum_i m_i a_{ih} = 2 M_h \pi \sqrt{-1} \quad \text{für } h = 1, 2 \ldots p \tag{2}$$

erfüllt sind, wo mit M_h ganze Zahlen bezeichnet sind. Wird sie in Q Punkten $\xi^{(i)}$ Null und in Q Punkten $\zeta^{(i)}$ unendlich je von der ersten Ordnung, so kann man sie in der folgenden Form darstellen:

$$P(x) = e^{\sum m_i \int_\mu^x du_i} \prod_{h=1}^{Q} \frac{\Theta\left(\int_\mu^x du_h - w_h - \int_\mu^{\xi^{(h)}} du_h\right)}{\Theta\left(\int_\mu^x du_h - w_h - \int_\mu^{\zeta^{(h)}} du_h\right)}, \tag{3}$$

wo:

$$w_h = \sum_{i=1}^{p-1} \int_{a^{(i)}}^{\varepsilon^{(i)}} du_h + \int_{a^{(p)}}^{\mu} du_h, \tag{4}$$

wenn mit $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots \varepsilon^{(p-1)}$ willkürliche Punkte bezeichnet werden, und wenn ferner nach dem Abelschen Theorem in Übereinstimmung mit (2):

$$\sum_{h=1}^{Q} \int_{\zeta^{(h)}}^{\xi^{(h)}} du_h \equiv o \text{ mod. } P_h, \quad h = 1, 2 \ldots p. \tag{5}$$

Die p Punkte $\alpha^{(i)}$ haben hier und stets im folgenden die gleiche Bedeutung wie in dem Werke von Clebsch und Gordan: es sind die einfachen Berührungspunkte einer adjungierten Kurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die $(n-2)$ weiteren Schnittpunkte der Tangente des beliebigen Punktes μ hindurchgehen.

Analoge Entwicklungen kann man unter Benutzung von Θ-Funktionen δ^{ter} Ordnung durchführen. Wir betrachten z. B. die Funktion:

$$\Phi(x) = e^{\sum_i m_i \int_\mu^x du_i} \cdot \frac{\Theta_\delta\left(\int_\mu^x du_h - e_h; A\right)}{\Theta_\delta\left(\int_\mu^x du_h - g_h; B\right)} \prod_{h=1}^{Q} \frac{\Theta\left(\int_\mu^x du_h - w_h - \int_\mu^{\xi^{(h)}} du_h\right)}{\Theta\left(\int_\mu^x du_h - w_h - \int_\mu^{\zeta^{(h)}} du_h\right)}. \tag{6}$$

Sie ist stetig längs der Schnitte a_h und c_h und sie ändert sich um den Faktor:

$$e^{\delta(g_h - e_h) + \sum_h \int_{\zeta^{(h)}}^{\xi^{(h)}} du_h + \sum_i m_i a_{ih}}$$

wenn x den Schnitt b_h überschreitet. Sie ist daher eine algebraische Funktion, wenn die Gleichungen

$$\delta(g_h - e_h) + \sum_h \int_{\zeta^{(h)}}^{\xi^{(h)}} du_h + \sum m_i a_{ih} = 2 N_h \pi_i \sqrt{-1} \tag{7}$$

erfüllt sind, unter N_h ganze Zahlen verstanden. Man kann übrigens die Zahlen m_i durch passende Wahl der Integrationswege überall zu Null machen, und der Einfachheit halber nehmen wir das im folgenden meist an. Die Funktion hat zu Nullpunkten die Q Punkte $\xi^{(h)}$ und die δp Punkte, in denen die Funktion Θ_δ des Zählers verschwindet. Ebenso hat sie $Q + \delta p$ Pole.

Umgekehrt kann auch jede algebraische Funktion, die $Q + \delta p$ Nullpunkte und ebenso viele Pole besitzt, in der Form (6) dargestellt werden. Zum Beweise betrachten wir zunächst eine algebraische Funktion $\frac{\psi^*}{\chi^*}$, für welche die Q Nullpunkte $\xi^{(i)}$ mit den Q Polen $\zeta^{(i)}$ zusammenfallen, während die δp Pole erster Ordnung in p Pole δ^{ter} Ordnung, die mit $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, ... $z^{(p)}$ bezeichnet sein, zusammenfallen. Letztere sind die Nullpunkte der Funktion $\Theta\left(\int_{\mu}^{x} du_h - e_h\right)$, wenn

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{a(i)}^{z^{(i)}} du_h = e_h. \tag{8}$$

Es werde ferner angenommen, daß die δp Nullpunkte $x^{(1)}, \ldots x^{(\delta p)}$ des Zählers der algebraischen Funktion den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{\delta p} \int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h = \delta e_h - K_h \tag{9}$$

genügen. Dann hat die Kurve $\chi^* = 0$ eine Berührung von der Ordnung $\delta - 1$ mit der Grundkurve in den p Punkten $z^{(i)}$ und durch ihre übrigen Schnittpunkte mit der Grundkurve geht auch die Kurve $\psi^* = 0$ hindurch, welche außerdem die Grundkurve in den Punkten $x^{(i)}$ schneidet. Beide Kurven werden hier und im folgenden als zur Grundkurve adjungiert vorausgesetzt. Nach der Theorie der Teilung der Abelschen Funktionen gibt es (wenn die gemeinsamen Schnittpunkte der Kurven $\psi^* = 0$ und $\chi^* = 0$ mit der Grundkurve gegeben sind) δ^{2p} mit $\chi^* = 0$ gleichberechtigte Kurve $\chi^* = 0$, deren Berührungspunkte $z^{(i)}$ den an Stelle von (8) tretenden allgemeineren Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{a(i)}^{z^{(i)}} du_h = e_h + \frac{1}{\delta}\left(2 s_h \pi \sqrt{-1} + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i a_{ih}\right)$$

genügen. Die oben gewählte Kurve χ^* entspricht der Annahme $s_h = 0$, $\sigma_i = 0$.

Die betrachtete algebraische Funktion läßt sich in der Form (6) durch die Gleichung

$$\frac{\psi^*}{\chi^*} = e^{\sum m_i \int_{\mu}^{x} du_i} \frac{\Theta_\delta\left(\int_{\mu}^{x} du_h - e_h, A\right)}{\left[\Theta\left(\int_{\mu}^{x} du_h - e_h\right)\right]^\delta}. \tag{10}$$

darstellen. In der Tat stimmen beide Seiten dieser Gleichung, wenn die Konstanten A des Zählers entsprechend bestimmt werden, in den Nullpunkten und Polen überein, und die rechte Seite ist eine eindeutige Funktion in der Riemannschen Fläche. Die Funktion $\Theta_\delta(u_h - e_h, A)$ ist nach § 2 eine Summe von δ^p speziellen Funktionen gleicher Art, jede multipliziert mit einer gewissen Konstanten A:

$$\Theta_\delta(u_h - e_h, A) = \sum_{\nu} A_{\nu_1 \ldots \nu_p} \Theta_\delta\begin{pmatrix} u_h - e_h \\ \nu_h \end{pmatrix}.$$

Jede der Funktionen

$$e^{\Sigma m_i u_i} \frac{\Theta_\delta \begin{pmatrix} u_h - e_h \\ \nu_h \end{pmatrix}}{[\Theta(u_h - e_h)]^\delta} \tag{12}$$

ist offenbar ebenfalls eine algebraische Funktion von x, so daß die rechte Seite von (10) eine lineare Kombination dieser δ^p speziellen Funktionen (12) darstellt. Diese haben alle die gleichen Pole und jede verschwindet in δp-Punkten. Es gibt aber nur $(\delta - 1)p + 1$ solche voneinander unabhängige Funktionen, denn von den δp Nullpunkten kann man nur $(\delta - 1)p$ willkürlich wählen, da p durch die übrigen bestimmt sind. Dabei sind Ausnahmen möglich, auf die wir weiter unten in § 13 eingehen. Hieraus folgt, daß $\delta^p - (\delta - 1)p - 1$ der δ^p Funktionen (12) sich linear und homogen durch die übrigen $(\delta - 1)p + 1$ ausdrücken lassen. Allen speziellen Funktionen (12) ist der Exponentialfaktor und der Nenner gemeinsam. Es sind also auch die δ^p Funktionen $\Theta_\delta \begin{pmatrix} u_h - e_h \\ \nu_h \end{pmatrix}$ lineare Funktionen von $(\delta - 1)p + 1$ unter ihnen, wenn unter u_h die Integrale erster Gattung, unter e_h Konstante verstanden werden; in der Funktion Θ_δ kommen daher nur $(\delta - 1)p + 1$ wesentlich voneinander verschiedene Konstante A_ν vor.

Bezeichnet man mit $x^{(i)}$ die δp Nullpunkte des Zählers ψ^*, so hat man $(\delta - 1)p + 1$ lineare homogene Gleichungen

$$\Theta_\delta\left(\int_\mu^{x^{(i)}} du_h - e_h, A\right) = 0$$

zur Bestimmung von $(\delta - 1)p + 1$ konstanten A_ν zu lösen; ist das geschehen, so ist damit die linke Seite von (10) in der verlangten Form dargestellt. Ohne die Nullpunkte $x^{(i)}$ der Funktion ψ^* zu kennen, läßt sich die Bestimmung der A_ν in folgender Weise durchführen. In der Gleichung (10) nimmt man für x nacheinander $(\delta - 1)p + 1$ beliebige Punkte $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(\delta p - p + 1)}$ und berechnet in der angegebenen Weise die Konstanten $A_\nu^{(i)}$ aus den Gleichungen

$$\frac{\psi^*(\eta^{(i)})}{\chi^*(\eta^{(i)})} = e^{\Sigma m_h \int_\mu^{\eta^{(i)}} du_h} \frac{\Theta_\delta\left(\int_\mu^{\eta^{(i)}} du_h - e_h, A\right)}{[\Theta\left(\int_\mu^{\eta^{(i)}} du_h - e_h\right)]^\delta}, \tag{13}$$

$$\text{für } i = 1, 2, \ldots \delta p - p + 1.$$

Die Gleichung (10) ist dann für $\delta p - p + 1$ willkürliche Punkte erfüllt. Eine algebraische Funktion mit gegebenen δp Polen ist durch $\delta(p - 1)$ Nullpunkte bis auf einen konstanten Faktor vollkommen bestimmt, hängt also nur von $\delta p - p$ Parameter ab und kann nicht in $\delta p - p + 1$ Punkten willkürlich (bis auf einen Faktor) gegebene Werte annehmen, es sei denn, daß es sich um identisch erfüllte Bedingungen handelt. Ist also die Gleichung (10) für $\delta p - p + 1$ willkürliche Werte von x befriedigt, so muß sie hier jeden Wert von x bestehen.

Kehren wir zu einer allgemeinen algebraischen Funktion $\psi : \chi$ mit $p\delta + Q$ Nullpunkten und ebenso vielen Polen zurück. Die Nullpunkte bezeichnen wir mit $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(Q)}, x^{(1)},$

$x^{(2)}, \ldots x^{(\delta p)}$, die Pole mit $\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(Q)}, z^{(1)}, \ldots z^{(\delta p)}$. Für die Nullpunkte $x^{(i)}$ der Funktion $\Theta_\delta(u_h - e_h)$ bestehen nach (3) § 3 die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{\delta p} \int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h = \delta e_h + K_h, \quad h = 1, 2, \ldots p, \tag{16}$$

ebenso für die Nullpunkte $z^{(i)}$ der Funktion $\Theta_\delta(u_h - g_h)$ die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{\delta p} \int_{\mu}^{z^{(i)}} du_h = \delta g_h + K_h, \quad h = 1, 2 \ldots p, \tag{17}$$

so daß auch:

$$\Sigma \int_{z^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = \delta (e_h - g_h), \tag{18}$$

in Übereinstimmung mit den Abel'schen Theoreme, nach welchem:

$$\sum_{i=1}^{\delta p} \int_{z^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{Q} \int_{\zeta^{(i)}}^{\xi^{(i)}} du_h \equiv 0, \quad h = 1, 2 \ldots p. \tag{19}$$

Sind die Kurven $\psi = 0$ und $\chi = 0$ gegeben, so sind damit nach (16) und (17) die Größen e_h und g_h bekannt. Es können deshalb nach vorstehendem in den Ausdrücken

$$\Theta_\delta(u_h - e_h, A) \text{ und } \Theta_\delta(u_h - g_h, B)$$

die Konstanten A und B in mannigfacher Weise so bestimmt werden, daß diese Ausdrücke bzw. in den Punkten $x^{(i)}$ und $z^{(i)}$ verschwinden. Führen wir ferner $p - 1$ willkürliche Punkte $\eta^{(i)}$ ein und setzen:

$$\varepsilon_h^{(i)} = \int_{a^{(1)}}^{\eta^{(1)}} du_h + \ldots + \int_{a^{(p-1)}}^{\eta^{(p-1)}} du_h + \int_{a^{(p)}}^{\xi^{(i)}} du_h,$$

$$\gamma_h^{(i)} = \int_{a^{(1)}}^{\eta^{(1)}} du_h + \ldots + \int_{a^{(p-1)}}^{\eta^{(p-1)}} du_h + \int_{a^{(p)}}^{\zeta^{(i)}} du_h,$$

so wird offenbar:

$$\frac{\psi(x)}{\chi(x)} = C \cdot \frac{\Theta_\delta\left(\int_{\mu}^{x} du_h - e_h, A\right) \cdot \prod_{i=1}^{Q} \Theta\left(\int_{\mu}^{x} du_h - \varepsilon_h^{(i)}\right)}{\Theta_\delta\left(\int_{\mu}^{x} du_h - g_h, B\right) \cdot \prod_{i=1}^{Q} \Theta\left(\int_{\mu}^{x} du_h - \gamma_h^{(i)}\right)}, \tag{20}$$

wo C eine Konstante bedeutet. Jede auf der Riemannschen Fläche eindeutige algebraische Funktion mit $\delta p + Q$ Nullpunkten und Polen kann somit durch die Funktionen Θ_δ und Θ dargestellt werden.

Das Entsprechende gilt, wenn die Zahl der Nullpunkte und Pole kleiner als δp, etwa gleich $\delta p - R$, ist. Dann fallen in (20) im Zähler und Nenner die aus Funktionen Θ gebildeten Produkte fort, und man hat in den Gleichungen (16) und (17) R der Punkte $x^{(i)}$ bzw. $z^{(i)}$ durch dieselben willkürlichen Punkte $\eta^{(i)}$ zu ersetzen.

§ 5. Kurven eines Systems, welche die Grundkurve an einer Stelle von höherer Ordnung berühren.

Es seien $\psi = 0$ und $\chi = 0$ zwei adjungierte Kurven, die den von q Parametern abhängigen Systemen angehören. Sie schneiden die Grundkurve in $Q = m\ n - 2d$ einfachen Punkten; diese seien für $\chi = 0$ mit $c^{(1)}, \ldots c^{(Q)}$ bezeichnet und als fest gegeben betrachtet; für $\psi = 0$ sind sie variabel zu denken und seien mit $x^{(1)}, \ldots x^{(Q)}$ bezeichnet. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{Q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h \equiv 0; \quad h = 1, 2 \ldots p. \tag{1}$$

Ist die Ordnung der Kurven des Systems größer als $n - 3$, was vorläufig angenommen werde, so sind p der Punkte $x^{(i)}$ durch die übrigen bestimmt; man kann also von ihnen $Q - p - q + 1$ beliebig wählen. Diese seien allen Kurven des Systems gemeinsam; dann ist eine einzelne Kurve durch $q - 1$ weitere Punkte festgelegt. Läßt man diese $q - 1$ Punkte in einen Punkt y zusammenfallen, und setzt

$$v_h = \sum_{i=1}^{p+q-1} \int_{\mu}^{c^{(i)}} du_h + \sum_{i=p+q}^{Q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h, \tag{2}$$

wo die rechts auftretenden Punkte $x^{(i)}$ gegeben sind, so ist:

$$\int_{\mu}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\mu}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{\mu}^{x^{(p)}} du_h = v_h - (q-1) \int_{\mu}^{y} du_h. \tag{3}$$

Die links vorkommenden p Punkte $x^{(i)}$ genügen bekanntlich der Gleichung:

$$\Theta \left(\int_{\mu}^{x} du_h - v_h + (q-1) \int_{\mu}^{y} du_h + k_h \right) = 0. \tag{4}$$

Diese Gleichung stellt eine Korrespondenz (vgl. dazu unten § 14) zwischen den Punkten x und y auf der Grundkurve dar. Koinzidenzpunkte derselben sind die gesuchten Stellen, in denen eine Kurve der gegebenen Schar mit der Grundkurve eine Berührung von der Ordnung $q - 1$ eingeht; sie genügen also der Gleichung

$$\Theta \left(q \int_{\mu}^{x} du_h - v_h + k_h \right) = 0. \tag{5}$$

Die Anzahl der Lösungen ist nach den Entwicklungen von § 3 gleich $q^2 p$.[1] Diese Zahl ist in Übereinstimmung mit den von de Jonquières und Brill gegebenen Formeln, nach denen dieselbe gleich $q\,[M + (q-1)(p-1)]$ sein muß, wenn M die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der Schar bedeutet, denn in unserem Falle ist $M = p + q - 1$ zu nehmen. Bei der durch (4) vermittelten Korrespondenz ist die Zahl der einem Punkte y entsprechenden Punkte x gleich $\alpha = p$, und die Zahl der einem Punkte x entsprechenden Punkte y gleich $\beta = (q-1)^2 p$. Die p Punkte x werden durch eine Kurve ausgeschnitten, in deren Schnitt-

[1] Dies Resultat hat schon Roch gefunden: Ueber Theta-Funktionen mit mehrfachem Argumente, Crelles Journal Bd. 66, 1866.

punkten mit der Grundkurve $\gamma = q - 1$ in y zusammenfallen. Nach der von Cayley und Brill aufgestellten Formel ist die Zahl der Koinzidenzpunkte gleich

$$\alpha + \beta + 2\gamma p = p + (q-1)^2 p + 2(q-1)p = q^2 p$$

in Übereinstimmung mit obigem Resultate.

Nennen wir diese Punkte $\xi^{(i)}$, so ist nach den Entwicklungen von § 3 (wo $\delta = 1$ zu nehmen ist)

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{q^2 p} \int_{\mu}^{\xi^{(i)}} du_h = q(v_h - k_h) + K_h, \qquad h = 1, 2 \ldots p,$$

unter K_h gewisse Konstante verstanden. Diese Punkte werden durch eine Kurve der Ordnung N ausgeschnitten, von der D Schnittpunkte in jeden der d Doppelpunkte fallen und E Schnittpunkte in jeden der $mn - 2d - p - q + 1$ festen Punkte der Schar von Kurven m^{ter} Ordnung; es ist dann

$$\begin{aligned} N \cdot n &= q^2 p + Dd + E(mn - 2d - p - q + 1) \\ &= \frac{1}{2} n(n-3)(q^2 - q) + (D - q^2 - E)d + E\,mn + q^2 - q\,E, \end{aligned}$$

also, da der Faktor von d für alle Werte von q durch n teilbar sein muß:

$$(7) \qquad D = q(q+1), \qquad N = q\left[m + \tfrac{1}{2}(n-3)(q-1)\right], \qquad E = q.^1$$

Diese Gleichungen setzen voraus, daß die Bedingungen, welche den linearen Charakter der Schar von Kurven m^{ter} Ordnung bestimmen, keine anderen sind als solche, die den Kurven auferlegen, durch feste Punkte der Grundkurve zu gehen.

Zusammenfassend haben wir folgendes Resultat:

Ist eine Schar von adjungierten Kurven m^{ter} Ordnung gegeben, welche die Grundkurve n^{ter} Ordnung in Q beweglichen Punkten schneiden, und können von diesen $p + q - 1$ Punkte willkürlich gewählt werden, so sind in der Schar $q^2 p$ Kurven enthalten, welche die Grundkurve an einer Stelle von der Ordnung $q - 1$ berühren. Ist die Schar dadurch definiert, daß ihre Kurven durch gewisse feste Punkte der Grundkurve hindurchgehen, so werden die $q^2 p$ Berührungspunkte durch eine Kurve N^{ter} Ordnung ausgeschnitten, wo N durch (7) bestimmt ist.

---

[1] Vgl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie Bd. 1 S. 471 Anm. und S. 735. Brill hat für $q = 3$ die Gleichung der betreffenden Kurve der Ordnung $3m + 3n - 9$ aufgestellt und ihr Verhalten in den festen Punkten untersucht, Math. Annalen Bd. 3, 1871. Dies Resultat habe ich in anderer Weise bestätigt und die entsprechende Aufstellung für $q = 4$ hinzugefügt: Bulletin de la Société mathématique de France t. 10, 1881—82.

§ 6. Das durch § 5 gegebene Umkehrproblem.

Die in § 5 behandelte Berührungsaufgabe kann analytisch in folgende Fassung gebracht werden: Gegeben sind p Größe $v_1, v_2, \ldots v_p$; es sollen aus den p Gleichungen

$$(1) \qquad q\int_{\mu}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\mu}^{x^{(2)}} du_h + \cdots + \int_{\mu}^{x^{(p)}} du_h = v_h, \quad h = 1, 2 \ldots p$$

die oberen Grenzen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$ als Funktion der gegebenen Größen v bestimmt werden, wenn q eine ganze positive Zahl bedeutet.

Das Problem hat q^2p Lösungen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werte von $x^{(1)}$ mit $\xi^{(i)}$, so genügen diese nach (5) und (6) von § 5 den Gleichungen:

$$(2) \qquad \Theta\left(q\int_{\mu}^{x} du_h - v_h + k_h\right) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{q^2p} \int_{\mu}^{\xi^{(i)}} du_h = q\,(v_h - k_h) + K_h,$$

wo nach (5) § 3 $K_h = q^2 k_h$ zu nehmen ist. Diese Konstanten K_h können auch durch folgende Überlegung bestimmt werden. Bei dem Jacobischen Umkehrproblem benutzt man nach Clebsch und Gordan die schon oben eingeführten Punkte $\alpha^{(i)}$, d. h. die p Nullpunkte der Funktion $\Theta\left(\int_{\mu}^{x} du_h\right)$, die als Berührungspunkte einer adjungierten Kurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung definiert sind, welche durch die einfachen Schnittpunkte der Tangente von μ hindurchgeht. Entsprechend führen wir jetzt die q^2p Nullpunkte der Funktion $\Theta\left(q\int_{\mu}^{x} du_h\right)$ ein, die mit $\beta^{(1)}, \ldots \beta^{(q^2p)}$ bezeichnet seien. Diese genügen nach (6) § 5, wo $v_h = k_h$ zu nehmen ist, den p Gleichungen:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{q^2p} \int_{\mu}^{\beta^{(i)}} du_h = K_h, \quad h = 1, 2, \ldots p.$$

Die geometrische Bedeutung der Punkte $\beta^{(i)}$ erkennt man durch folgende Überlegung. Unter P_h seien wieder simultane Periodensysteme verstanden:

$$(4) \qquad P_h = 2\,s_h \pi i + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i a_{ih}, \quad h = 1, 2, \ldots p.$$

Die Punkte $x^{(i)}$, welche der Gleichung

$$(5) \qquad \Theta\left(\int_{\mu}^{x} du_h + (q-1)\int_{\mu}^{y} du_h + \frac{P_h}{2}\right) = 0$$

genügen, erfüllen dann die p Bedingungen:

$$(6) \qquad 2\sum_{i=1}^{p} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + 2\,(q-1)\int_{\mu}^{y} du_h \equiv 0 \mod P_h.$$

Die oberen und unteren Grenzen der links stehenden Integrale sind die Schnittpunkte der Grundkurve mit je einer Kurve der Ordnung $n + q - 3$; die eine berührt die Grundkurve einfach in jedem der p Punkte $\alpha^{(i)}$, ferner von der Ordnung $2q - 3$ in μ, und ihre weiteren

Schnittpunkte fallen zu je q in die $(n-2)$ weiteren Schnittpunkte der Tangente von μ, endlich zu je 2 in jeden Doppelpunkt der Grundkurve; in der Tat ist

$$n(n+q-3) = 2p + 2(q-1) + q(n-2) + 2d.$$

Die andere Kurve der Ordnung $n+q-3$ verhält sich in den Doppelpunkten und den einfachen Schnittpunkten der Tangente von μ ebenso, berührt die Grundkurve je einfach in den p Punkten $x^{(i)}$, und von der Ordnung $2q-3$ in y. Lassen wir nun x mit y zusammenfallen, so wird die Gleichung

$$\Theta\left(q\int_{\mu}^{x} du_h + \frac{1}{2}P_h\right) = 0 \tag{7}$$

von q^2p Punkten $\gamma^{(i)}$ befriedigt, die den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{q^2p}\int_{\mu}^{\gamma^{(i)}} du_h - \frac{1}{2}q\,P_h \equiv K_h = \sum_{i=1}^{q^2p}\int_{\mu}^{\beta^{(i)}} du_h, \quad h = 1, 2, \ldots p \tag{8}$$

genügen. Die Systeme der Punkte $\gamma^{(i)}$ und $\beta^{(i)}$ werden demnach durch je eine Kurve der Ordnung $q^2(n-2)$ ausgeschnitten, welche die Grundkurve in den Punkten $\gamma^{(i)}$ bzw. $\beta^{(i)}$ je einfach berühren und von deren weiteren Schnittpunkten q^2 in die $(n-2)$ Schnittpunkte der Tangente von μ und $2q^2$ in jeden Doppelpunkt der Grundkurve fallen. In der Tat ist

$$q^2n(n-2) = 2q^2p + (n-2)q^2 + 2q^2d. \tag{9}$$

Ausgezeichnet ist der Fall, wo $\frac{1}{2}P_h$ in (7) eine ungerade halbe Periode darstellt, indem

$$s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2 + \ldots + s_p\sigma_p = 2N + 1 \tag{10}$$

ist. In diesem Falle, der bekanntlich für $2^{p-1}(2^p-1)$ Wertsysteme den Zahlen s_i, σ_i vorkommen kann, ist $\Theta\left(\frac{1}{2}P_h\right)$ identisch gleich Null, so daß die Gleichung (7) die Lösung $x=\mu$ zuläßt und somit einer der Punkte $\gamma^{(i)}$ mit μ zusammenfällt. Es sondert sich von der Kurve der Ordnung $q^2(n-2)$ die Tangente von μ ab, und es bleibt eine Kurve der Ordnung $q^2(n-2)-1$, welche die Grundkurve in q^2p-1 Punkten einfach berührt, und von deren weiteren Schnittpunkten q^2-1 in die $(n-2)$ Schnittpunkte der Tangente von μ und $2q^2$ in jeden Doppelpunkt der Grundkurve fallen; es ist hier:

$$n[q^2(n-2)-1] = 2(q^2p-1) + (n-2)(q^2-1) + 2q^2d.$$

Ist aber die linke Seite der Gleichung (10) eine gerade Zahl, so ist $\Theta\left(\frac{1}{2}P_h\right)$ nicht gleich Null, und es findet eine Absonderung der Tangente von μ nicht statt. Unter den $2^{p-1}(2^p+1)$ „geraden halben Perioden" ist diejenige ausgezeichnet, für welche alle Zahlen σ_i und s_i gleich Null sind. Ihr entsprechhen nach (8) die Punkte $\beta^{(i)}$. Zufolge (3) sind also die Konstanten K_h durch die Berührungspunkte der zugehörigen Kurve der Ordnung $q^2(n-2)$ bestimmt.

Diese Kurve ist (ebenso wie die in den Punkten $\alpha^{(i)}$ berührende Kurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung) eindeutig durch das gewählte Querschnittsystem bestimmt; beide Kurven stehen nach dem Abelschen Theorem in der Beziehung:

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{q^2 p} \int_{\alpha^{(i)}}^{\beta^{(i)}} du_h \equiv 0, \quad \text{wenn } \alpha^{(r\,p+s)} = \alpha^{(s)}$$

gesetzt wird, so daß wir folgern müssen:

$$K_h = q^2 k_h.$$

Im vorstehenden ist q zunächst ungerade vorausgesetzt; ist aber q gerade, $= 2r$, so fällt in (8) das Glied $\frac{1}{2} q P_h$ fort, und es bestehen die Gleichungen

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{q^2 p} \int_{\beta^{(i)}}^{\gamma^{(i)}} du_h \equiv 0 \text{ für gerades } q.$$

Die Punkte $\gamma^{(i)}$ und $\beta^{(i)}$ werden also je durch eine Kurve der Ordnung $2r^2(n-2)$ ausgeschnitten, von deren Schnittpunkten je $2r^2$ mit denjenigen der Tangente von μ zusammenfallen, während sich $4r^2$ in jeden Doppelpunkt vereinigen, denn es ist

$$2r^2 n(n-2) = 4r^2 p + 2r^2(n-2) + 4r^2 d.$$

Hier sind somit die Punkte $\gamma^{(i)}$ und $\beta^{(i)}$ nicht als Berührungspunkte, sondern als einfache Schnittpunkte von entsprechenden Hilfskurven mit der Grundkurve gegeben. Ein unterschiedliches Verhalten in bezug auf gerade oder ungerade halbe Periodensysteme kommt bei geradem q nicht in Betracht.

Statt der Kurven von der Ordnung $q^2(n-2)$ bzw. $2r^2(n-2)$ können auch andere von den möglichen Punktsystemen $\gamma^{(i)}$ in (8) statt der $\beta^{(i)}$ eingeführt werden; es hängt dies mit der Theorie der unendlich vielen Formen der Θ-Funktionen[1] zusammen.

Die Lösung des durch die Gleichungen (1) gegebenen Umkehrproblems geschieht nun in der Weise, daß man zunächst die $q^2 p$ Punkte, die als obere Grenze des in q multiplizierten Integrals vorkommen können, durch eine Gleichung vom Grade $q^2 p$ bestimmt. Nach dem Vorgange für den Fall $q = 1$ geschieht dies auf Grund der Darstellung einer Integralsumme dritter Gattung durch Θ-Funktionen. Es ist offenbar:

$$(13) \qquad \sum \int_{\beta^{(i)}}^{\xi^{(i)}} d\Pi_{\eta\vartheta} = \log \frac{\Theta\left(q \int_{\mu}^{\vartheta} du_h\right) \cdot \Theta\left(q \int_{\mu}^{\eta} du_h - w_h\right)}{\Theta\left(q \int_{\mu}^{\eta} du_h\right) \cdot \Theta\left(q \int_{\mu}^{\vartheta} du_h - w_h\right)},$$

wo:

$$(14) \qquad w_h = \sum_{i=1}^{q^2 p} \int_{\beta^{(i)}}^{\xi^{(i)}} du_h, \quad h = 1, 2, \ldots p,$$

denn die beiden Seiten der Gleichung (13) stimmen in ihrem Verhalten an den Querschnitten und in den Unendlichkeitspunkten überein. Es seien $\psi = 0$ und $\chi = 0$ zwei Kurven gleicher Ordnung, ebenso $\psi_1 = 0$ und $\chi_1 = 0$; dann sind die $q^2 p$ Punkte $\xi^{(i)}$ bekannt, wenn wir diejenigen Kurven des Büschels $\psi - \lambda\chi = 0$ und ebenso des Büschels $\psi_1 - \lambda\chi_1 = 0$ kennen, welche durch die gesuchten Punkte $\xi^{(i)}$ hindurchgehen. Es seien nun $\eta^{(k)}$ die

[1] Vgl. Clebsch und Gordan a. a. O. S. 300 ff.

Schnittpunkte von $\psi - \lambda\chi = 0$ mit der Grundkurve und $\vartheta^{(k)}$ diejenigen von $\chi = 0$; dann bestehen nach (13) die Gleichungen:

$$\log\left[\left(\frac{\psi}{\chi}\right)_{\xi^{(1)}} - \lambda\right] - \log\left[\left(\frac{\psi}{\chi}\right)_{\beta^{(1)}} - \lambda\right] = -\sum_k \int_{\beta^{(1)}}^{\xi^{(1)}} d\Pi_{\eta^{(k)}\vartheta^{(k)}}$$

$$\log\left[\left(\frac{\psi}{\chi}\right)_{\xi^{(2)}} - \lambda\right] - \log\left[\left(\frac{\psi}{\chi}\right)_{\beta^{(2)}} - \lambda\right] = -\sum_k \int_{\beta^{(2)}}^{\xi^{(2)}} d\Pi_{\eta^{(k)}\vartheta^{(k)}}$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$\log\left[\left(\frac{\psi}{\chi}\right)_{\xi^{(\pi)}} - \lambda\right] - \log\left[\left(\frac{\psi}{\chi}\right)_{\beta^{(\pi)}} - \lambda\right] = -\sum_k \int_{\beta^{(\pi)}}^{\xi^{(\pi)}} d\Pi_{\eta^{(k)}\vartheta^{(k)}},$$

wo zur Abkürzung π für q^2p geschrieben ist. Addiert man die Gleichungen und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so ergibt sich eine Gleichung von der Form:

$$\lambda^{q^2p} + M_1\,\lambda^{q^2p-1} + \cdots + M_{q^2p} = M, \tag{15}$$

deren Wurzeln die gesuchten Werte der Funktion $\frac{\psi}{\chi}$ in den gesuchten Punkten $\xi^{(i)}$ sind, und deren Koeffizienten bekannte Funktionen der q^2p gegebenen Integralsummen w_h darstellen. Für eine zweite Funktion $\frac{\psi_1}{\chi_1}$ ergibt sich eine analoge Gleichung, deren Lösungen sich durch die Wurzeln der Gleichung (15) rational ausdrücken lassen.[1]

Sind so die q^2p Punkte $\xi^{(i)}$ gefunden, so können für jeden Punkt $\xi^{(i)}$ die zugehörigen $p-1$ Punkte $x^{(i,k)}$ entsprechend den Gleichungen (1), die wir in der Form

$$\int_\mu^{\xi^{(i)}} du_h + \int_\mu^{x^{(i,1)}} du_h + \cdots + \int_\mu^{x^{(i,p-1)}} du_h = v_h - (q-1)\int_\mu^{\xi^{(i)}} du_h,\quad h = 1, 2 \cdots p \tag{16}$$

schreiben, gefunden werden. Wir haben ein gewöhnliches Jacobisches Umkehrproblem, bei dem von den gesuchten p oberen Grenzen eine bereits bekannt ist.

In Gleichung (16) kann der Index i eine der Zahlen 1 bis q^2p bedeuten. Summiert man alle diese Werte, so entsteht:

$$q\sum_{i=1}^{q^2p}\int_\mu^{\xi^{(i)}} du_h + \sum_i\sum_k\int_\mu^{x^{(i,k)}} du_h = q^2p\,v_h$$

oder unter Benutzung von (3):

$$\sum_i\sum_k\int_\mu^{x^{(i,k)}} du_h = q^2(p-1)\,v_h + q^2k_h - qK_h,$$

wo nach (12) $K_h = q^2k_h$ zu nehmen ist. Zufolge § 3 sind die Punkte $x^{(i,k)}$ die Nullpunkte einer Funktion

$$\Theta_\delta\left(\int_\mu^x du_h - e_h;\, A\right),\quad \text{wo } \delta = q^2(p-1), \tag{17}$$

[1] Vgl. das entsprechende Verfahren bei Clebsch und Gordan a. a. O. S. 143.

wo die Größen A noch zu bestimmen sind, und wo:

$$\delta e_h + K_h = q^2(p-1)e_h + q^2 k_h = q^2(p-1)v_h + q^2 k_h - q^3 k_h,$$

oder

$$e_h = v_h - \frac{q}{p-1} k_h. \tag{18}$$

Die Größen v_h haben die gleiche Bedeutung wie in (2), § 4. Von den δ^p Größen A sind nach den Entwicklungen von § 4 nur $(\delta-1)p+1 = (p-1)(q^2p-1)$ wesentlich; sie lassen sich in der dort angegebenen Weise berechnen, wenn die Nullpunkte der Funktion Θ_δ bekannt sind. Man braucht aber diese Nullpunkte nicht einzeln zu kennen; es genügt, wenn man eine algebraische Funktion angeben kann, die diese Punkte zu Nullpunkten hat; dann lassen sich die Konstanten A durch Benutzung von $\delta p - p + 1$ willkürlichen Punkten $\eta^{(i)}$ nach (13) § 4 berechnen.

§ 7. Kurven einer gegebenen Schar, welche die Grundkurve in zwei Punkten von beliebiger Ordnung berühren.

Die Ordnung der Berührung sei durch die Zahlen $q_1 - 1$ und $q_2 - 1$ gegeben. Da p Schnittpunkte einer Kurve der Schar mit der C_n durch die übrigen bestimmt sind, so ist die Zahl der Parameter gleich $q_1 + q_2 - 2$, und die Zahl der beweglichen Schnittpunkte gleich

$$Q = q_1 + q_2 + p - 2. \tag{1}$$

Es werde ein Punkt t der C_n beliebig angenommen; dann gibt es nach § 5 in der Schar $q_1^2 p$ Kurven, welche die Grundkurve in t von der Ordnung $q_2 - 2$, in Punkten $y_1^{(i)}$ je von der Ordnung $q_1 - 1$ berühren und die C_n noch je einfach in $p-1$ Punkten $z^{(i,k)}$ schneiden. Sind ferner $\vartheta^{(i)}$ die Q Schnittpunkte einer fest gedachten Kurve der Schar mit der Grundkurve, so bestehen nach dem Abelschen Theoreme die $q_1^2 p^2$ Gleichungen:

$$q_1 \int_\mu^{y_1^{(i)}} du_h + (q_2-1)\int_\mu^t du_h + \sum_{k=1}^{p-1} \int_\mu^{z^{(i,k)}} du_h = v_h = \sum_{k=1}^{Q} \int_\mu^{\vartheta^{(k)}} du_h \tag{2}$$

für $i = 1, 2, \ldots q_1^2 p$, $\quad h = 1, 2, 3 \ldots p$. Die $q_1^2 p$ Punkte $y_1^{(i)}$ sind die Nullpunkte der Funktion

$$\Theta\left(q_1 \int_\mu^x du_h - v_h + (q_2-1)\int_\mu^t du_h + k_h\right); \tag{2a}$$

denn setzt man für v_h die Werte aus (2) ein, so ergibt sich für Θ der Wert

$$\Theta\left(-\sum_1^{p-1} \int_\mu^{z^{(ik)}} du_h + k_h\right),$$

der bekanntlich identisch gleich Null ist; sie genügen nach (6) § 5 den p Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{q_1^2 p} \int_\mu^{y_1^{(i)}} du_h = q_1\left[v_h - (q_2-1)\int_\mu^t du_h - k_h\right], + q_1^2 k_h.$$

Summiert man die Gleichungen (2) nach dem Index i, so folgt:

$$\sum_{i=1}^{q_1^2 p} \sum_{h=1}^{p-1} \int_{\mu}^{z^{(ih)}} du_h + q_1^2 \left[v_h - (q_2 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h\right] + (q_1^3 - q_1^2) k_h + q_1^2 p (q_2 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h = q_1^2 p v_h$$

oder:

$$\Sigma \Sigma \int_{\mu}^{z^{(ih)}} du_h = q_1^2 (p-1) \left[v_h - (q_2 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h\right] - q_1^2 (q_1 - 1) k_h.$$

Nach § 3 genügen die δp Nullpunkte $x^{(i)}$ einer Funktion

$$\Theta_\delta \left(\int_{\mu}^{x} du_h - w_h\right) \tag{3}$$

den p Gleichungen:

$$\sum_{i} \int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h = \delta w_h + \delta k_h. \tag{4}$$

Um eine Anwendung auf die Punkte $z^{(i,h)}$, die an Stelle der Punkte $x^{(i)}$ treten, zu machen, müssen wir δ durch $q_1^2 (p-1)$, w_h durch $v_h - (q_2 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h - \frac{q_1 - 1}{p - 1} k_h$ ersetzen. Die $q_1^2 p (p-1)$ Punkte $z^{(i,h)}$ sind demnach die Nullpunkte der Funktion

$$\Theta_\delta \left(\int_{\mu}^{x} du_h - v_h + (q_2 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h + \frac{q_1 + p - 2}{p - 1} k_h\right), \text{ wo } \delta = q_1^2 (p-1). \tag{5}$$

Fällt einer dieser Punkte z mit dem Punkte t zusammen, so berührt an dieser Stelle eine Kurve des Systems von der Ordnung $q_2 - 1$; solche Stellen findet man also durch die Gleichung

$$\Theta_\delta \left(q_2 \int_{\mu}^{x} du_h - v_h + \frac{q_1 + p - 2}{p - 1} k_h\right) = 0, \text{ wo } \delta = q_1^2 (p-1). \tag{6}$$

Ihre Anzahl ist nach § 3 gleich $\delta p q_2^2 = q_1^2 q_2^2 p (p-1)$. In dem gegebenen Kurvensysteme gibt es also $q_1^2 q_2^2 p (p-1)$ Kurven, welche die Grundkurve an einem Punkte von der Ordnung $q_1 - 1$, an einem anderen Punkte von der Ordnung $q_2 - 1$ berühren. Letztere Stellen werden durch die Gleichung (6) geliefert, erstere ebenso durch die Gleichung

$$\Theta_\delta \left(q_1 \int_{\mu}^{x} du_h - v_h + \frac{q_2 + p - 2}{p - 1} k_h\right) = 0, \text{ wo } \delta = q_2^2 (p-1). \tag{7}$$

Hierbei muß zunächst vorausgesetzt werden, daß q_1 von q_2 verschieden sei. Ist $q_1 = q_2$, so werden die Gleichungen (6) und (7) miteinander identisch; in diesem Falle ist also die Zahl der Kurven, welche die Grundkurve an zwei Stellen je von gleicher Ordnung $q - 1$ berühren, gleich $\frac{1}{2} q^4 p (p-1)$.

In den hier auftretenden Funktionen Θ_δ kommen nach § 4 $(\delta - 1) p + 1$ zu bestimmende Konstante A vor, für die Funktion (5) also $q_1^2 p (p-1) - p + 1$ Konstante. Kennt man ebenso

viele Paare von Punkten x-t, welche die Funktion (2a) zum Verschwinden bringen, so ist die Aufgabe durch lineare Gleichungen gelöst. Man nehme also $(\delta - 1)p + 1$ Punkte x beliebig an und bestimme die zugehörigen Punkte t gemäß (2a), oder man nehme $(\delta - 1)p + 3$ Punkte t beliebig an und bestimme die zugehörigen Punkte x nach den Regeln von § 5; damit hat man alle Hilfsmittel zur Berechnung der Konstanten A.

§ 8. Berührung an drei verschiedenen Punkten.

Auch für den Fall von 3 Berührungspunkten mögen die entsprechenden Rechnungen noch durchgeführt werden. Es handelt sich um das Umkehrproblem:

$$(1) \qquad q_1 \int_{\mu}^{y_1} du_h + q_2 \int_{\mu}^{y_2} du_h + q_3 \int_{\mu}^{y_3} du_h = w_h, \qquad h = 1, 2 \cdots p,$$

wo die Größen w_h gegeben sind. Wir nehmen an, daß die Aufgabe für zwei Zahlen q_1, q_2 gelöst sei, daß also die Kurven bekannt sind, welche die Grundkurve an einer Stelle y_1 von der Ordnung $q_1 - 1$, an einer zweiten y_2 von der Ordnung $q_2 - 1$ und an einer dritten t von der Ordnung $q_3 - 2$ berühren, so daß die Gleichungen bestehen:

$$(2) \qquad q_1 \int_{\mu}^{y_1} du_h + q_2 \int_{\mu}^{y_2} du_h + (q_3 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h + \sum_{k=1}^{p-2} \int_{\mu}^{z^{(k)}} du_h = v_h = \sum_{k=1}^{Q} \int_{\mu}^{\vartheta^{(k)}} du_h,$$

wo $Q = q_1 + q_2 + q_3 + p - 3$ die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte des gegebenen Kurvensystems bedeutet. Nach (7), § 7 befriedigen die Punkte y_1 die Gleichung:

$$(3) \qquad \Theta_{\delta_1}\left(q_1 \int_{\mu}^{x} du_h - v_h + (q_3 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h + \frac{q_2 + p - 2}{p - 1} k_h\right) = 0, \quad \text{wo } \delta_1 = q_2^2 (p - 1),$$

genügen also nach § 3 den p Gleichungen:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{K} \int_{\mu}^{y_1^{(i)}} du_h = \delta_1 q_1 \left[v_h - (q_3 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h - \frac{q_2 + p - 2}{p - 1} k_h\right] + \delta_1 q_1^2 k_h,$$

wo $\delta_1 = q_2^2 (p - 1)$, $K = q_1^2 q_2^2 p (p - 1)$. Ebenso bestehen für die Punkte $y_2^{(i)}$ die Gleichungen:

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{K} \int_{\mu}^{y_2^{(i)}} du_h = \delta_2 q_2 \left[v_h - (q_3 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h - \frac{q_1 + p - 2}{p - 1} k_h\right] + \delta_2 q_2^2 k_h,$$

wo $\delta_2 = q_1^2 (p - 1)$, $K = q_1^2 q_2^2 p (p - 1)$. Summiert man also alle K Gleichungen (2), so entsteht:

$$q_1^2 \delta_1 \left[v_h - (q_3 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h - \frac{q_2 + p - 2}{p - 1} k_h\right] + q_2^2 \delta_2 \left[v_h - (q_3 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h - \frac{q_1 + p - 2}{p - 1} k_h\right]$$

$$+ q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2)(p - 1) k_h + q_1^2 q_2^2 p (p - 1)(q_3 - 1) \int_{\mu}^{t} du_h + \sum \sum \int_{\mu}^{z^{(i,k)}} du_h = q_1^2 q_2^2 p (p - 1) v_h$$

oder

$$(6)\quad \sum_{k=1}^{p-2}\sum_{i=1}^{K}\int_{\mu}^{z^{(i,k)}} du_h = q_1^2 q_2^2 (p-1)(p-2)\left[\tau_h - (q_3-1)\int_{\mu}^{t} du_h\right] - q_1^2 q_2^2 (q_1+q_2-2)(p-2)k_h.$$

Die oberen Grenzen z genügen folglich der Gleichung

$$(7)\quad \Theta_\delta\left(\int_{\mu}^{x} du_h - v_h + (q_3-1)\int_{\mu}^{t} du_h + \frac{q_1+q_2+p-3}{p-1}k_h\right) = 0, \text{ wo } \delta = q_1^2 q_2^2 (p-1)(p-2).$$

Vereinigt sich einer dieser Punkte z mit t, so berührt an dieser Stelle eine Kurve des Systems die Grundkurve von der Ordnung $q_3 - 1$ und außerdem an zwei andern Stellen von der Ordnung $q_1 - 1$ bzw. $q_2 - 1$. Der betr. Punkt $t\,(=x)$ wird folglich durch die Gleichung

$$(8)\qquad \Theta_\delta\left(q_3\int_{\mu}^{x} du_h - v_h + \frac{q_1+q_2+p-3}{p-1}k_h\right) = 0,\quad \delta = q_1^2 q_2^2 (p-1)(p-2)$$

gegeben, und ihre Anzahl ist gleich $K' = q_1^2 q_2^2 q_3^2 p\,(p-1)(p-2)$. Bezeichnen wir sie mit $y_3^{(i)}$, so bestehen die p Gleichungen:

$$(9)\qquad \begin{aligned}\sum_{i=1}^{K'}\int_{\mu}^{y_3^{(i)}} du_h &= \delta q_3 v_h - q_3 q_1^2 q_2^2 (q_1+q_2+p-3)(p-2)k_h + \delta q_3^2 k_h\\ &= q_3 q_1^2 q_2^2 (p-1)(p-2)v_h - q_3 q_1^2 q_2^2 (p-2)k_h[q_1+q_2+p-3-q_3(p-1)].\end{aligned}$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die Punkte $y_1^{(i)}$ und $y_2^{(i)}$. Die Bestimmung der in den verschiedenen Funktionen Θ_δ auftretenden Konstanten A geschieht wie im Falle von zwei Berührungspunkten.

Sind zwei der 3 Zahlen q_1, q_2, q_3 einander gleich, so verringert sich die Anzahl der berührenden Kurven auf die Hälfte, ist also gleich $\frac{1}{2} q_1^4 q_3^2 p(p-1)(p-2)$. Wird auch $q_3 = q_1 = q_2$, d. h. soll eine Kurve des Systems die Grundkurve in drei Punkten je von gleicher Ordnung $q-1$ berühren, so wird die Anzahl der Lösungen $\frac{1}{2.3} q^6 p(p-1)(p-2)$, denn die drei Lösungen mit den Anzahlen

$$\tfrac{1}{2} q_1^4 q_3^2 p\,(p-1)(p-2),\qquad \tfrac{1}{2} q_2^4 q_1^2 p\,(p-1)(p-2),\qquad \tfrac{1}{2} q_3^4 q_1^2 p\,(p-1)(p-2)$$

fallen dann in eine Lösung zusammen.

Die Durchführung des in (1) gegebenen Umkehrproblems geschieht wieder auf Grund der Formeln für Integrale dritter Gattung.

§ 9. Berührung der Grundkurve an τ Stellen von beliebiger Ordnung.

Wir kommen jetzt zu dem allgemeinen durch die p Gleichungen

$$(1)\qquad q_1\int_{\mu}^{y_1} du_h + q_2\int_{\mu}^{y_2} du_h + \cdots + q_\tau\int_{\mu}^{y_\tau} du_h + \int_{\mu}^{y_{\tau+1}} du_h + \cdots + \int_{\mu}^{y_p} du_h = v_h$$

gegebenen Umkehrprobleme. Die Anzahl der Lösungen läßt sich nach den Entwicklungen von § 5 und § 8 durch ein Rekursionsverfahren leicht finden. Durch ein solches kommen wir zu folgendem allgemeinen Satze:

Gegeben sei ein System von adjungierten Kurven m^{ter} Ordnung, in dem eine einzelne Kurve durch $q_1+q_2+\ldots+q_\tau-\tau$ Bedingungen bestimmt wird, und dessen Kurven die Grundkurve in Q beweglichen Punkten schneiden (so daß z. B. $Q=mn-2d-p-q_1-q_2\ldots-q_\tau+\tau$, falls eine Kurve nur durch gewisse feste Punkte der Grundkurve bestimmt ist), dann gibt es in dem Systeme[1]

$$\Delta = q_1^2 q_2^2 \ldots q_\tau^2 \cdot p(p-1)\ldots(p-\tau+1) \tag{2}$$

Kurven, welche die Grundkurve in τ Punkten berühren, und zwar von der Ordnung q_1-1, $q_2-1, \ldots q_\tau-1$, vorausgesetzt, daß die Zahlen q voneinander verschieden sind. Die Punkte, an denen eine Berührung von der Ordnung q_1-1 z. B. stattfindet, sind die Nullpunkte einer Funktion

$$\Theta_\delta\left(q_1\int_\mu^x du_h - v_h + k_h + \frac{q_2+q_3+\cdots+q_\tau-\tau+1}{p-1}k_h\right), \tag{3}$$

wo

$$\delta = q_2^2 q_3^2 \ldots q_\tau^2 (p-1)(p-2)\ldots(p-\tau+1)$$

und k_h die oben eingeführten Konstanten bedeuten, während v_h gegebene p Größen sind, bestimmt durch die Gleichungen:

$$v_h = \sum_{i=1}^{Q}\int_\mu^{\vartheta^{(i)}} du_h, \quad h=1,2\ldots p, \text{ wo z. B. } Q=\Sigma q_i+p-\tau, \tag{4}$$

wenn alle festen Punkte des Kurvensystems auf der Grundkurve liegen. Hierbei sind $\vartheta^{(i)}$ die freien Schnittpunkte irgendeiner Kurve des Systems mit der Grundkurve.

Wir setzen voraus, daß dieser Satz für den Fall bewiesen sei, daß man τ durch $\tau-1$ ersetzt. Die q_1 Punkte $y_1^{(i)}$, q_2 Punkte $y_2^{(i)}$, $\ldots q_{\tau-1}$ Punkte $y_{\tau-1}^{(i)}$ und die einfachen Schnittpunkte $z^{(i,k)}$ genügen dann den folgenden p Gleichungen

$$q_1\int_\mu^{y_1} du_h + q_2\int_\mu^{y_2} + \cdots + q_{\tau-1}\int_\mu^{y_{\tau-1}} du_h + \sum_{k=1}^{R}\int_\mu^{z_k} du_h = v_h,$$

$$R=p-\tau+2, \quad h=1,2,\ldots p,$$

und hier sind z. B. die Punkte y_1 bestimmt als Lösungen der Gleichung:

$$\Theta_{\delta_1}\left(q_1\int_\mu^x du_h - v_h + k_h + \frac{q_2+q_3+\cdots q_{\tau-1}-\tau+2}{p-1}k_h\right) = 0,$$

$$\delta_1 = q_2^2 q_3^2 \ldots q_{\tau-1}^2 (p-1)(p-2)\ldots(p-\tau+2),$$

allgemein y_r durch die Gleichung:

---

[1] An einem nicht zu einfachen Beispiele habe ich mich davon überzeugt, daß dieses einfache Resultat mit den umständlichen (auf rein algebraischem Wege gewonnenen) Rekursionsformeln von de Jonquières und Brill in Übereinstimmung ist.

$$(5)\qquad \Theta_{\delta_r}\left(q_r\int_\mu^x du_h - v_h + k_h + \frac{\Sigma q_i - q_r - \tau + 2}{p-1}k_h\right) = 0,$$

$$\delta_r = q_1^2 q_2^2 \cdots q_{r-1}^2 q_{r+1}^2 \cdots q_{\tau-1}^2 (p-1)\cdots(p-\tau+2)$$

Wir gehen zu dem allgemeinen in (2) vorliegenden Probleme über, indem wir jetzt $R = p-\tau+1$ annehmen und von den freien Punkten $q_\tau - 1$ in einen willkürlichen Punkt t fallen lassen, wo dann die Punkte y durch die Bedingungen

$$(6)\qquad q_1\int_\mu^{y_1} du_h + q_2\int_\mu^{y_2} du_h \cdots + q_{\tau-1}\int_\mu^{y_{\tau-1}} du_h + (q_\tau - 1)\int_\mu^t du_h + \sum_{k=1}^{R}\int_\mu^{z_k} du_h = v_h$$

bestimmt werden sollen. Der Annahme nach geschieht dies, indem man in (3) τ durch $\tau-1$ und v_h durch $v_h - (q_\tau - 1)\int_\mu^t du_h$ ersetzt. Die Punkte $y_1^{(i)}$ z. B. müssen den Bedingungen genügen:

$$(7)\qquad \Theta_{\delta_1}\left(q_1\int_\mu^x du_h - v_h + (q_\tau - 1)\int_\mu^t du_h + k_h + \frac{q_2 + \cdots + q_{\tau-1} - \tau + 2}{p-1}k_h\right) = 0,$$

$$\delta_1 = q_2^2 q_3^2 \ldots q_{\tau-1}^2 (p-1)(p-2)\ldots(p-\tau+2),$$

so daß die Zahl der Punkte y_1 gleich $\delta_1 q_1^2 p = \Delta'$ ist und sie den p Gleichungen genügen:

(8)

$$\sum_{i=1}^{\Delta'}\int_\mu^{y_1^{(i)}} du_h = q_1\delta_1\left[v_h - (q_\tau - 1)\int_\mu^t du_h - \frac{q_2 + \cdots + q_{\tau-1} + p - \tau + 1}{p-1}k_h + q_1 k_h\right], h = 1, 2, \ldots p.$$

Die in der Funktion Θ_δ auftretenden Konstanten A sind durch Lösung der Gleichung (7) für eine entsprechende Zahl von Punkteparen $t - y_1$ zu bestimmen (vgl. oben § 8) und können als bekannt angenommen werden, da die Lösung des Problems für $\tau - 1$ Berührungspunkte als gegeben vorausgesetzt wird.

Analoge Gleichungen gelten für die je in gleicher Zahl vorhandenen Punkte $y_2^{(i)}, \ldots y_{\tau-1}^{(i)}$. Die Gleichung (6) steht an Stelle von

$$\delta_1 q_1^2 p = q_1^2 q_2^2 \cdots q_{\tau-1}^2 \cdot p(p-1)\cdots(p-\tau+2) = \delta_i q_i^2 \cdot p = \Delta'' p(p-1)$$
$$(\text{für } i = 1, 2, \cdots \tau - 1)$$

einzelnen Gleichungen. Summiert man dieselben nach dem Index i, so ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{\tau-1}\delta_i q_i^2\left[v_h - (q_\tau - 1)\int_\mu^t du_h - \frac{\Sigma q_r - q_i + p - \tau + 1}{p-1}k_h\right] + \sum_{i=1}^{\tau-1} q_i^3\delta_i \cdot k_h + \sum_{i=1}^{\Delta'}\sum_{k=1}^{R}\int_\mu^{z^{(i,k)}} du_h$$
$$= \Delta' \cdot v_h \cdot p\,(p-1)$$

oder nach einigen Umformungen:

$$(9)\qquad \Sigma\Sigma\int_\mu^{z^{(i,k)}} du_h = \Delta''(p-1)(p-\tau+1)\left[v_h - (q_\tau - 1)\int_\mu^t du_h\right] - \Delta''(\Sigma q_i - \tau + 1)(p-\tau+1).$$

Nach § 3 genügen die oberen Grenzen z folglich (wenn die in Θ eingehenden Konstanten A passend bestimmt sind) den Gleichungen:

$$(10)\qquad \Theta_\delta\left(\int_\mu^x du_h - v_h + (q_\tau - 1)\int_\mu^t du_h + \frac{\Sigma q_i + p - \tau}{p-1} k_h\right) = 0,$$

$$\text{wo } \delta = \Delta'' p(p-1)(p-\tau+1).$$

Soll jetzt x mit dem Punkte t zusammenfallen (so daß an dieser Stelle eine Berührung der Ordnung $q_\tau - 1$ entsteht), so folgt:

$$(11)\qquad \Theta_\delta\left(q_\tau \int_\mu^x du_h - v_h + \frac{\Sigma q_i + p - \tau}{p-1} k_h\right) = 0,$$

wobei Σq_i zur Abkürzung für $q_1 + q_2 \ldots + q_{\tau-1}$ geschrieben ist. Die Anzahl der gesuchten Punkte, die durch diese Gleichung bestimmt werden, ist gleich

$$q_\tau^2 \cdot \delta p = q_1^2 q_2^2 \ldots q_\tau^2 \cdot p(p-1)\ldots(p-\tau+1) = \Delta$$

und sie genügen den p Gleichungen:

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{\Delta} \int_\mu^{y_\tau^{(i)}} du_h = q_\tau \cdot q_1^2 q_2^2 \cdots q_{\tau-1}^2 (p-2)\cdots(p-\tau+1)\left[(p-1)v_h - (\Sigma q_i + p - \tau)k_h + q_\tau(p-1)k_h\right].$$

Die hier in der Funktion Θ_δ enthaltenen Konstanten sind dieselben, die in der Funktion (9) vorkamen, und somit bekannt. Vertauscht man in (11) und (12) den Index τ mit 1, 2, ... $\tau - 1$, so entstehen analoge Gleichungen für die Punkte $y_1^{(i)} \ldots y_{\tau-1}^{(i)}$, die für jeden Index i ebenfalls in der Anzahl Δ vorhanden sind. Hiermit ist der aufgestellte Satz allgemein bewiesen.

Für den Fall, daß $\varkappa$ Zahlen q_i einander gleich sind, hat man die Anzahl Δ mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \varkappa$ zu dividieren, um die Zahl der die Aufgabe lösenden Berührungskurven zu erhalten. Wir kommen darauf in § 10 zurück, auf das durch die Gleichungen (1) gegebene Umkehrproblem in § 11.

Für den Fall, daß alle festen Punkte des Systems von Kurven m^{ter} Ordnung auf der Grundkurve liegen und das System durch die festen Punkte völlig bestimmt ist, läßt sich die Ordnung einer Kurve, welche die Berührungspunkte auf der Grundkurve ausschneidet, leicht bestimmen. Die Zahl der beweglichen Schnittpunkte war gleich $\Sigma(q_i - 1) + p$; die Zahl der einfachen Schnittpunkte mit der Grundkurve ist also gleich $mn - 2d - \Sigma(q_i - 1)$. Bezeichnet N die Ordnung der gesuchten Kurve, $M \cdot D$ die Anzahl der in jedem Doppelpunkte der Grundkurve vereinigten Schnittpunkte, $M \cdot E$ die Anzahl der in jeden einfachen festen Punkt fallenden Schnittpunkte, so muß die Gleichung

$$N \cdot n = \left[q_1^2 \cdot p(p-1) + D \cdot d + E\left(mn - 2d - \Sigma(q_i - 1) - p\right)\right] \cdot M,$$

bestehen, wo zur Abkürzung

$$M = q_2^2 q_3^2 \ldots q_\tau^2 (p-2)(p-3)\ldots(p-\tau+1)$$

gesetzt ist. Setzen wir $N = M \cdot N'$, so wird:

$$N' \cdot n = q_1^2 (p-1)\left[\tfrac{1}{2} n(n-3) - d + 1\right] + D \cdot d + E\left[mn - d - \tfrac{1}{2} n(n-3) - 1 - \Sigma(q_i - 1)\right].$$

Sei ferner $N' = N''\left(1 + \Sigma(q_i - 1)\right)$, $D = D'\left(1 + \Sigma(q_i - 1)\right)$, $E = E'\left(1 + \Sigma(q_i - 1)\right)$, so folgt:

$N'' = q_1(p-1)\left[m+\frac{1}{2}(n-3)\Sigma(q_i-1)\right]$, $D' = q_1(p-1)\left(2+\Sigma(q_i-1)\right)$, $E' = q_1(p-1)$.

Es werden also die Stellen, in denen eine Berührung von der Ordnung q_1-1 stattfindet, auf der Grundkurve ausgeschnitten durch eine Kurve von der Ordnung

$$N = q_1(p-1)\,M\left[m+\tfrac{1}{2}(n-3)\Sigma(q_i-1)\right],$$

von deren Schnittpunkten MD in jeden Doppelpunkt, ME in jeden einfachen gemeinsamen Punkt der Kurven m^{ter} Ordnung fallen, falls

$$D = q_1(p-1)\left(2+\Sigma(q_i-1)\right),\quad E = q_1(p-1).$$

Für $\tau = 1$, ist $q_1 = q$, $M = p-1$, $\Sigma(q_i-1) = q_1-1$, so daß diese Zahlen mit den am Schlusse von § 5 gegebenen übereinstimmen.

§ 10. Berührung an verschiedenen Stellen von teilweise gleicher Ordnung.

Schon in § 7 haben wir bemerkt, daß bei zwei Berührungspunkten die Zahl der Lösungen sich auf die Hälfte reduziert, wenn die Ordnung der Berührung an beiden Punkten die gleiche ist. Die Anzahl der dort auftretenden Punkte $z^{(i,k)}$, der einfachen Schnittpunkte der berührenden Kurven mit der Grundkurve, verringert also auch auf die Hälfte. Diese Punkte genügen der Gleichung (6) des § 8, wenn man dort $v_h - (q_3-1)\int_\mu^t du_h$ durch v_h ersetzt; jeder von ihnen kommt aber in den oberen Grenzen der Integrale $\int_\mu^z du_h$ zweimal vor; für die Gesamtheit der einfachen Schnittpunkte besteht also die Gleichung:

$$(1)\qquad \Sigma\Sigma\int_\mu^{z^{(i,k)}} du_h = \tfrac{1}{2}q^4(p-1)(p-2)v_h - q^4(p-1)(p-2)k_h.$$

Sollen nun bei drei Berührungen die Zahlen q_1, q_2 einander gleich sein, während q_3 davon verschieden bleibt, so genügen die Punkte z den Gleichungen (indem v_h wieder durch $v_h-(q_3-1)\int_\mu^t du_h$ ersetzt wird):

$$(2)\qquad \Theta_\delta\left(\int_\mu^x du_h - v_h + (q_3-1)\int_\mu^t du_h + k_h + 2\frac{q-1}{p-1}k_h\right) = 0,\quad \delta = \tfrac{1}{2}q^4(p-1)(p-2).$$

Wird $t = x$, so entsteht die Gleichung:

$$(3)\qquad \Theta_\delta\left(q_3\int_\mu^x du_h - v_h + k_h + 2\frac{q-1}{p-1}k_h\right) = 0,$$

welche $q_3^2\delta p = \frac{1}{2}q^4q_3^2p\,(p-1)\,(p-2)$ Lösungen hat. Dies ist die Zahl der Kurven, welche die Grundkurve an einer Stelle von der Ordnung q_3-1 und an zwei Stellen je von der Ordnung $q-1$ berühren. Ist aber auch $q_3 = q$, so fallen drei entsprechende Gleichungen zusammen, und die Zahl der gesuchten Kurven wird gleich $\frac{1}{3}q_3^2\delta p = \frac{1}{6}q^6\cdot p\,(p-1)\,(p-2)$.

So kann man fortfahren zu schließen. Wenn alle τ Zahlen q einander gleich sind, so wird die Zahl der Lösungen gleich

$$q^{2\tau}\frac{p\,(p-1)\ldots(p-\tau+1)}{1.2.3\ldots\tau};$$

und ihre Berührungspunkte genügen der Gleichung

$$\Theta_\delta\left(q\int_\mu^x du_h - v_h + k_h + (\tau-1)\frac{q-1}{p-1}\right) = 0,\quad \delta = q^{2\tau-2}\,\frac{(p-1)\ldots(p-\tau+1)}{1.2.3\ldots(\tau-1)}$$

Ist insbesondere $\tau = p$, so wird die Zahl der Lösungen gleich q^{2p}, d. h. gleich der Zahl der Lösungen des Teilungsproblems der Abelschen Funktionen, und in der Tat werden die Gleichungen (1) § 9 in diesem Falle identisch mit den Gleichungen dieses Problems.

Durch Fortsetzung der vorstehend gemachten Schlüsse kommt man offenbar zu folgendem allgemeinen Satze:

Gegeben sei ein System von zur Grundkurve adjungierten Kurven m^{ter} Ordnung, das von

$$M = \varkappa_1(q_1-1) + \varkappa_2(q_2-1)\ldots + \varkappa_\sigma(q_\sigma-1)$$

Parametern abhängt, so daß durch M weitere Bedingungen eine Kurve des Systems bestimmt wird, dann gibt es

$$K = q_1^{2\varkappa_1} q_2^{2\varkappa_2}\ldots q_\sigma^{2\varkappa_\sigma}\frac{p\,(p-1)\ldots(p-\varkappa_1-\varkappa_2\ldots\varkappa_\sigma+1)}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_\sigma!} \tag{9}$$

Kurven des Systems, welche die Grundkurve in $\varkappa_1$ Punkten von der Ordnung q_1-1, in $\varkappa_2$ Punkten von der Ordnung $q_2-1,\ldots$ in $\varkappa_\sigma$ Punkten von der Ordnung $q_\sigma-1$ berühren, und die Punkte, in denen eine Berührung der Ordnung q_r-1 stattfindet, sind die Nullpunkte einer Funktion

$$\Theta_\delta\left(q_r\int_\mu^x du_h - v_h + k_h + C_h^{(r)}\right),\quad \text{wo } \delta = \frac{K\cdot\varkappa_r}{q_r^2\cdot p}$$
$$C_h^{(r)} = \frac{\Sigma(q_i-1)\varkappa_i - (q_r-1)}{p-1}\,k_h,\quad v_h = \sum_{i=1}^{T}\int_\mu^{\vartheta_i} du_h, \tag{10}$$

wenn $T = \Sigma(q_i-1)\varkappa_i + p$ und die Punkte ϑ_i die freien Schnittpunkte einer beliebigen fest gewählten Kurve des Systems bedeuten.

Die Bestimmung der Berührungspunkte hängt zuerst von einer Gleichung des Grades K ab und dann von K Gleichungen vom Grade $\varkappa_1$, K Gleichungen vom Grade $\varkappa_2,\ldots K$ Gleichungen vom Grade $\varkappa_\sigma$.

Die Nullpunkte $y_r^{(i)}$ der Funktion (10), d. h. die Stellen mit Berührung der Ordnung q_r-1, genügen den p Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{\varkappa_r K}\int_\mu^{y_r^{(i)}} du_h = \frac{K\cdot\varkappa_r}{q_r(p-1)}\cdot(p-2)\ldots(p-\Sigma\varkappa_i+1)\ldots$$
$$\ldots\left[(p-1)v_h - \{\Sigma(q_i-1)\varkappa_i - (q_r-1)\}k_h + q_r(p-1)k_h\right]. \tag{11}$$

Die Gesamtheit der einfachen Schnittpunkte $s^{(ik)}$ der berührenden Kurven mit der Grundkurve genügt den Gleichungen

$$(12) \qquad \Sigma\,\Sigma \int_{\mu}^{z^{(i,k)}} du_h = K(p-\tau)\,v_h - K\frac{p-\tau}{p-1}\,\Sigma\,(q_i-1)\,\varkappa_i \cdot k_h.$$

Die Berührungspunkte gleicher Ordnung werden jeweils durch gewisse algebraische Kurven auf der Grundkurve ausgeschnitten. Ist N_r die Ordnung der Kurve für die Berührungspunkte der Ordnung $q_r - 1$, von deren Schnittpunkten D_r in jeden Doppelpunkt der Grundkurve fallen und E_r in jeden einfachen festen Punkt des Kurvensystems, so ist

$$(13) \qquad N_r \cdot n = K\,[m + d \cdot D_r + E_r(mn - 2d - \Sigma\,\varkappa_i q_i + \Sigma\,\varkappa_i - p),$$

wenn man voraussetzt, daß die Bedingungen, denen die Kurven m^{ter} Ordnung unterworfen sind, nur darin bestehen, daß sie durch feste Punkte der Grundkurve hindurchgehen. Es wird

$$N_r = \frac{K \cdot \varkappa_r}{q_r \cdot (p-1)}\left[(p-1)\,m + \frac{1}{2}\{(p-1)(q_r-1) - \Sigma\,(q_i-1)\,\varkappa_i + (q_r-1)\}(n-3)\right],$$

$$D_r = \frac{K \cdot \varkappa_r}{q_r}, \qquad E_r = \frac{K \cdot \varkappa_r}{q_r(p-1)}\,[(p-1)(q_r-1) - \Sigma\,(q_i-1)\,\varkappa_i + q_r - 1].$$

Die $K\,(\Sigma q_i \varkappa_i + p - \Sigma \varkappa_i)$ einfachen Schnittpunkte $z^{(ik)}$ werden von einer Kurve ausgeschnitten, für welche die entsprechenden Zahlen folgende Werte haben:

$$N = K\left[m(p-1) + \frac{1}{2}(n-3)\,\Sigma\,\varkappa_i(q_i-1)\right], \qquad E = K(p-\tau),$$

$$D = \frac{K(p-\tau)}{p-1}\,[2p - 2 - \Sigma\,\varkappa_i(q_i-1)].$$

§ 11. Das zu § 9 gehörige Umkehrproblem.

Wie die Gleichungen (1) § 6 und § 8 ein Umkehrproblem aus der Theorie der Abelschen Funktionen darstellen, so geben die Gleichungen (1) von § 9 zu einem analogen Probleme Veranlassung. Die Lösung desselben gelingt, nachdem eine entsprechende Summe von Integralen dritter Gattung als Funktionen der gegebenen Größen v_h dargestellt ist. Dazu dient die leicht zu erweisende Formel:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{K} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\eta\vartheta} = \log \frac{\Theta_\delta\left(q\int_{\mu}^{\eta} du_h - w_h\right) \cdot \Theta_\delta\left(q\int_{\mu}^{\vartheta} du_h - \omega_h\right)}{\Theta_\delta\left(q\int_{\mu}^{\vartheta} du_h - w_h\right) \cdot \Theta_\delta\left(q\int_{\mu}^{\eta} du_h - \omega_h\right)}.$$

Hier bedeuten $x^{(i)}$ die K Nullpunkte der Funktion $\Theta_\delta\left(q\int_{\mu}^{x} du_h - w_h\right)$ und $c^{(i)}$ die Nullpunkte der Funktion $\Theta_\delta\left(q\int_{\mu}^{x} du_h - \omega_h\right)$.

In unserem Falle sollen die K oberen Grenzen $x^{(i)}$ mit den Punkten $y_1^{(i)}$ zusammenfallen, in denen eine Kurve des gegebenen Systems von der Ordnung $(q_1 - 1)$ berührt, so daß q durch q_1 zu ersetzen ist, und nach (3) § 8

$$
\begin{aligned}
K &= q_1^2 q_2^2 \ldots q_\tau^2 \cdot p\,(p-1)\ldots(p-\tau+1) \\
\delta &= q_2^2 q_3^2 \ldots q_\tau^2 \cdot (p-1)(p-2)\ldots(p-\tau+1) \\
w_h &= v_h - k_h - \frac{q_2 + q_3 \ldots + q_\tau - \tau + 1}{p-1} k_h
\end{aligned} \tag{2}
$$

zu nehmen ist, während die in Θ_δ eingehenden Konstanten A bekannt sind, nämlich dieselben Werte haben wie in der Gleichung (10) § 7. Die Größen $c^{(i)}$ sind vollständig willkürlich, und von ihnen hängen die Größen ω_h in bekannter Weise ab. Wenn das Argument in der Form $q_1 u_h - \omega_h$ angenommen wird, so ist damit gesagt, daß die Punkte $c^{(i)}$ einem analogen Berührungsproblem genügen.

Zur Vereinfachung der Gleichung (1) kann man insbesondere $\omega_h = 0$ annehmen, d. h. unter den $c^{(i)}$ die Nullpunkte der Funktion $\Theta_\delta\,(q_1 \int_\mu^x d u_h)$ verstehen. Dadurch würde volle Analogie mit der Gleichung (13) § 6 hergestellt und eine Beziehung zu den früher eingeführten Punkten $\alpha^{(i)}$ und zu den weiteren Schnittpunkten der Tangente von μ gewonnen sein. Einfacher erreicht man dies, indem man die Funktion Θ_δ durch die δ^{te} Potenz der Funktion Θ ersetzt wie in § 4. Die Gleichung (1) wird dadurch:

$$
\sum_{i=1}^{K} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\eta\vartheta} = \log \frac{\Theta_\delta(q_1 \int_\mu^\eta d u_h - w_h) \cdot [\Theta(q_1 \int_\mu^\vartheta d u_h)]^\delta}{\Theta_\delta(q_1 \int_\mu^\vartheta d u_h - w_h) \cdot [\Theta(q_1 \int_\mu^\eta d u_h)]^\delta}. \tag{3}
$$

Ist der Index i bei den Punkten α größer als p, so ist er $\bmod p$ zu reduzieren, wie in Gleichung (11) § 6. Setzt man für η und ϑ nacheinander die Schnittpunkte einer Kurve $\psi - \lambda\chi = 0$ und einer Kurve $\chi = 0$ ein, so erhält man K verschiedene Gleichungen, aus denen in bekannter Weise (vgl. oben § 6) eine Gleichung vom Grade K abgeleitet werden kann, deren Wurzeln die Werte einer algebraischen Funktion in den gesuchten K Punkten gibt.

Zeichnet man in vorstehenden Gleichungen statt des Index 1 bei q_1 einen andern Index aus (und ändert die Werte der in Θ_δ eingehenden Konstanten entsprechend), so ergeben sich entsprechende Gleichungen (je vom Grade K) für die Stellen, in denen eine Berührung von der Ordnung $q_2 - 1, q_3 - 1, \ldots q_\tau - 1$ möglich ist.

Denken wir uns eine dieser Gleichungen gelöst und einen Punkt y_1 entsprechend bestimmt. Alle Kurven des gegebenen Systems, welche die Grundkurve in y_1 von der Ordnung $q_1 - 1$ berühren, bilden ein System mit $q_2 + q_3 \ldots + q_\tau - \tau$ Parametern; in ihm gibt es also

$$
\Gamma = (q_2 - 1)^2\, q_3^2 \ldots q_\tau^2\, p\,(p-1)\ldots(p-\tau+2)
$$

Kurven, welche die Grundkurven in $\tau - 1$ weiteren Punkten bzw. von der Ordnung $q_2 - 2$, $q_3 - 1, \ldots q_\tau - 1$ berühren. Unter diesen Γ Kurven muß es aber eine geben, deren Berüh-

rung an der betr. Stelle von der Ordnung $q_2 - 1$ (statt $q_2 - 2$) ist; d. h. es müssen zwei der Γ Kurven einander unendlich benachbart sein. Die Gleichung vom Grade Γ, durch welche die Γ Kurven bestimmt werden, hat somit eine Doppelwurzel, die rational bekannt ist, d. h. sich rational durch die Koeffizienten der Gleichung Γ^{ten} Grades und folglich rational durch Wurzeln der Gleichung K^{ten} Grades ausdrücken läßt.

Man braucht nur eine der zu bildenden τ Gleichungen K^{ten} Grades zu lösen; durch die Wurzeln derselben lassen sich die Wurzeln der anderen $\tau - 1$ Gleichungen rational ausdrücken.

§ 12. Eine Verallgemeinerung des Problems der Teilung.

Die vorstehend gewonnenen Resultate vereinfachen sich (durch Reduktion der betr. Gleichungen), falls $\tau = p$ ist und die Zahlen q_i einen gemeinsamen Teiler r zulassen. Nehmen wir wieder an, daß die Zahlen q_i in Gruppen zu je $\varkappa_i$ einander gleich seien, ersetzen q_i durch $q_i \cdot r$ $(i = 1, 2, \ldots \sigma)$ und sind $p - \Sigma\varkappa_i$ Zahlen gleich r, so können die beiden Seiten der p Gleichungen des Umkehrproblems je mit r dividiert werden, wenn man rechts zuvor ganze Vielfache der Perioden hinzufügt. So entstehen die p Gleichungen:

$$(1)\qquad q_1 \sum_1^{\varkappa_1} \int_\mu^{y_1^{(k)}} du_h + q_2 \sum_1^{\varkappa_2} \int_\mu^{y_2^{(k)}} du_h + \ldots + q_\sigma \sum_1^{\varkappa_\sigma} \int_\mu^{y_\sigma^{(k)}} du_h + \sum_{h=1}^{p-\Sigma\varkappa_i} \int_\mu^{z^{(k)}} du_h = \frac{1}{r} v_h + \frac{1}{r} P_h,$$
$$h = 1, 2, 3 \ldots p.$$

Es gibt r^{2r} wesentlich verschiedene Systeme von Perioden P_h; jedem solchen Systeme entspricht eine Lösung der Gleichungen (1). Nach § 11 gibt es aber im ganzen $r^{2p} \cdot K$ Lösungen, falls gesetzt wird:

$$(2)\qquad K = q_1^{2\varkappa_1} q_2^{2\varkappa_2} \ldots q_\sigma^{2\varkappa_\sigma} \cdot \frac{p\,(p-1)\ldots(p-\Sigma\varkappa_i+1)}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_\sigma!}.$$

Die Punkte, in denen eine Berührung von der Ordnung $r q_\varrho - 1$ stattfinden kann, sind nach § 10 die Nullpunkte einer Funktion

$$(3)\qquad \Theta_\delta\left(q_\varrho \int_\mu^x du_h - \frac{1}{r} v_h - \frac{1}{r} P_h k_h + C_h^{(\varrho)}\right), \text{ wo}$$
$$\delta = K \cdot \frac{\varkappa_\varrho}{q_\varrho^2} \cdot C_h^{(\varrho)} = \frac{\Sigma\,(q_i - 1)\,\varkappa_i - (q_\varrho - 1)}{p-1} k_h.$$

Andererseits kann man die Schlußweise von § 10 direkt (d. h. vor Division mit r) anwenden, und dann ist die Zahl der Lösungen gleich

$$(4)\qquad (q_1 r)^{2\varkappa_1} (q_r r)^{2\varkappa_2} \ldots (q_\varrho r)^{2\varkappa_\varrho} r^{2p-2\Sigma\varkappa_i} \cdot \frac{p\,(p-1)\ldots 3.2.1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_\sigma!\,(p-\Sigma\varkappa_i)!}.$$

diese Zahl ist in der Tat gleich $r^{2p} \cdot K$. Geht man von diesem Ansatze aus, so müssen diejenigen Punkte, in denen eine Berührung von der Ordnung $r q_\varrho - 1$ stattfinden kann, als Nullpunkte der Funktion

$$\Theta_\varepsilon\Big(r q_\varrho \int_\mu^x d u_h - v_h + k_h + C_h^{(\varrho)}\Big) \tag{5}$$

erscheinen, wobei:

$$\varepsilon = r^{2p-2} K \frac{\varkappa_\varrho}{q_\varrho^2} \cdot C_h^{(\varrho)} = \frac{\Sigma (r q_i - 1)\varkappa_i + (r-1)(p - \Sigma \varkappa_i) - (r q_\varrho - 1)}{p-1} k_h$$

$$= (r-1) k_h + \frac{r}{p-1}\left[\Sigma (p_i - 1)\varkappa_i - (q_\varrho - 1)\right] k_h.$$

Diese Nullpunkte sind also dieselben, für welche das Produkt aller r^{2p} Funktionen (3) verschwindet. Ersetzt man in (5) das Integral

$$\int_\mu^x d u_h \text{ durch } \int_\mu^x d u_h + 2 m_h \pi \sqrt{-1} + \Sigma \mu_i a_{ih}, \tag{6}$$

so ändert sich die Funktion um einen Exponentialfaktor e^U, wo

$$U = \varepsilon r q_\varrho (\Sigma \mu_i M_i + r q_\varrho \Sigma \Sigma \mu_i \mu_k a_{ik}$$

und zur Abkürzung:

$$M_h = r q_\varrho \int_\mu^x d u_h - v_h + r k_h + \frac{r}{p-1}\left[\left[(q_i - 1)\varkappa_k - (q_i - 1)\right]\right] k_h.$$

Um den gleichen Faktor (wenn man nur M_h durch $M_h - \Sigma P_h^{(i)}$ ersetzt) ändert sich auch bei der Substitution (6) das Produkt der r^{2p} Funktionen (3). Hieraus folgt, daß die Funktion (5) bis auf einen Exponentialfaktor gleich dem Produkte der r^{2p} Faktoren ist, welche aus (3) entstehen, wenn man für $\frac{1}{r} P_h$ alle wesentlich voneinander verschiedenen Periodensysteme einsetzt.

Den Gleichungen, von deren Lösung das in (1) aufgestellte Problem abhängt, kommen alle die Eigenschaften zu, welche aus der Theorie der Teilung der Abelschen Funktionen bekannt sind; insbesondere gelten folgende Sätze:

Diejenigen adjungierten Kurven, eines von $\Sigma \varkappa_i (r q_i - 1)$ Parametern abhängenden Systems, welche die Grundkurve in $\varkappa_1$ Punkten von der Ordnung $r q_1 - 1, \ldots$ in $\varkappa_\sigma$ Punkte von der Ordnung $r q_\sigma - 1$ und in $p - \Sigma \varkappa_i$ Punkten von der Ordnung $r - 1$ berühren, werden bestimmt durch eine Gleichung vom Grade r^{2p}, sodann durch r^{2p} Gleichungen vom Grade K, ferner durch K Gleichungen, die bzw. von den Graden $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_\sigma$ sind. Die erste Gleichung am Grade r^{2p} ist eine Abelsche Gleichung; ihre Wurzeln lassen sich rational durch eine von ihnen und eine Wurzel einer Gleichung vom Grade $r^{2p} - 1$ ausdrücken, welche letztere wieder auf Hilfsgleichungen von den Graden

$$\frac{\nu_1^{2p-1}}{\nu_1 - 1}, \quad \frac{\nu_2^{2p-1}}{\nu_2 - 1}, \ldots$$

zurückzuführen sind, wenn r sich in der Form $\nu_1^{a_1}, \nu_2^{a_2} \ldots$ durch die Primzahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots$ ausdrücken läßt. Ausgezeichnet ist der Fall $r = 2$, in welchem die Gleichung vom Grade 2^{2p} in zwei Gleichungen bzw. vom Grade $2^{p-1}(2^p - 1)$ und $2^{p-1}(2^p + 1)$ zerfällt, und sich die Wurzeln der letzteren Gleichung durch die Wurzeln der ersteren rational ausdrücken lassen.[1]

[1] Vgl. Clebsch und Gordan, a. a. O. S. 231 ff.

Für die so bestimmten berührenden Kurven gelten analoge Sätze, wie sie Clebsch[1] für den Fall des gewöhnlichen Teilungsproblems aufgestellt hat, z. B.: Jedesmal, wenn die Gleichungen

$$\frac{1}{r} P_h^{(1)} + \frac{1}{r} P_h^{(2)} + \ldots + \frac{1}{r} P_h^{(r)} = P_h$$

bestehen, so kann man durch die Berührungspunkte der zu den Perioden $P_h^{(1)}, \ldots P_h^{(r)}$ gehörigen Kurven eine adjungierte Kurve m^{ter} Ordnung legen, welche die festen Punkte des gegebenen Systems enthält und die Grundkurve in $r\varkappa_1$ Punkten von der Ordnung $qr_1 - 1$, $\ldots$, in $r\varkappa_\sigma$ Punkten von der Ordnung $q_\sigma r - 1$ berührt.

§ 13. Adjungierte Kurven der Ordnung $n-3$, welche die Grundkurve in mehreren Punkten von verschiedener Ordnung berühren.

Bisher wurden Systeme von adjungierten Kurven m^{ter} Ordnung betrachtet, von deren Schnittpunkten mit der Grundkurve p durch die übrigen bestimmt sind. Das ist nicht der Fall, wenn $m \leqq n-3$ ist. Wenn auch für $m > n-3$ weniger als p Punkte durch die übrigen bestimmt sind, so kann man bekanntlich das gleiche Schnittpunktsystem stets auch durch Kurven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung auf der Grundkurve anschneiden. Im folgenden wird angenommen, daß $p - \rho$ Schnittpunkte durch die übrigen bestimmt sind; dann hat das Kurvensystem $p + q - \rho - 1$ veränderliche Schnittpunkte mit der Grundkurve gemein, wenn es von $q - 1$ Parametern abhängt und $p - q + \rho - 1$ feste Schnittpunkte. Bedeuten $\xi^{(i)}$ diese letzteren Schnittpunkte, so ist ($2p - 2$ = Gesamtzahl der Schnittpunkte) nach dem Abelschen Theoreme:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{p+q-\rho-1} \int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{p-q+\rho-1} \int_{\mu}^{\xi^{(i)}} du_h \equiv 2 \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\mu}^{\beta^{(i)}} du_h \equiv v_h,$$

wenn $\beta^{(i)}$ die $p-1$ Berührungspunkte irgendeiner Kurve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bezeichnen. Diese stehen bekanntlich zu den Punkten $\alpha^{(i)}$ (Berührungspunkte der zu μ gehörigen Kurve $[n-2]^{\text{ter}}$ Ordnung) in der Beziehung:

$$(2) \qquad 2 \sum_{i=1}^{p} \int_{\mu}^{\alpha^{(i)}} du_h \equiv 2 \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\mu}^{\beta^{(i)}} du_h \equiv v_h.$$

Sind $x^{(1)} \ldots x^{(p)}$ ganz beliebige Punkte, so verschwindet bekanntlich die Funktion

$$(3) \qquad \Theta \left(\int_{\mu}^{x} du_h - \Sigma \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h \right) \text{ für } x = x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots \text{ und } x^{(p)},$$

d. h. es besteht die Gleichung

---

[1] Vgl. Crelles Journal Bd. 63 und Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie Bd. 1 S. 839 ff., 1876.

$$(4)\qquad \Theta\Big(\sum_{i=1}^{p-1}\int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int_{a}^{\mu} du_h\Big) = 0 \text{ identisch für alle } p-1 \text{ Punkte } x^{(i)}.$$

Liegen aber die p Punkte $x^{(i)}$ auf einer Kurve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, so sagt das Verschwinden der Funktion (3) nichts aus, denn das Argument ist, wenn $x^{(p+1)}, x^{(2p-2)}$ die weiteren $p-2$ Schnittpunkte bezeichnen, gleich

$$(5)\qquad \int_{\mu}^{x} du_h - \sum_{i=1}^{p}\int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = \sum_{i=\mu+1}^{p-2}\int_{a^{(i)}}^{x^{(p+i)}} du_h + \int_{a^{(p+1)}}^{x} du_h + \int_{a^{(p)}}^{\mu} du_h,$$

d. h. von der Form des Argumentes der Funktion (3); letztere kann also nicht zur Bestimmung der übrigen p Punkte dienen, wenn $p-2$ Punkte gegeben sind. Nach dem Vorgange von Clebsch und Gordan[1] umgeht man die Schwierigkeit durch Einführung eines willkürlichen Punktes η oder mehrerer solcher Punkte.

Um nach Analogie zu dem Ansatze in § 5 zu verfahren, lassen wir $q-1$ von den freien $p+q-\rho-1$ Punkten in eine willkürliche Stelle t fallen.

Dann ist nach dem Abelschen Theorem

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{p-\varrho}\int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h + (q-1)\int_{\mu}^{t} du_h = \sum_{i=1}^{Q}\int_{\mu}^{\vartheta^{(i)}} du_h = v_h,$$

wo $\vartheta^{(i)}$ die $Q = p+q-\rho-1$ freien Schnittpunkte einer beliebigen Kurve bezeichnen. Fügt man auf beiden Seiten die auf ρ willkürliche Punkte $\eta^{(i)}$ bezüglichen Integrale (die durch ein ρ-faches Integral ersetzt werden mögen) hinzu, so entstehen die p Gleichungen

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{p-\varrho}\int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h + (q-1)\int_{\mu}^{t} du_h + \rho\int_{\mu}^{\eta} du_h = v_h + \rho\int_{\mu}^{\eta} du_h.$$

Die $p-\rho$ Punkte $x^{(i)}$ und der ρfach zählende Punkt η genügen also der Gleichung

$$(8)\qquad \Theta\Big(\int_{\mu}^{x} du_h - v_h - \rho\int_{\mu}^{\eta} du_h + (q-1)\int_{\mu}^{t} du_h + k_h\Big) = 0,$$

die an Stelle von (4) § 5 tritt. Soll nun einer der $p-\rho$ Punkte $x^{(i)}$ mit t zusammenfallen und dadurch eine Berührung der Ordnung $q-1$ ermöglichen, so entsteht die Gleichung:

$$(9)\qquad \Theta\Big(q\int_{\mu}^{x} du_h - v_h - \rho\int_{\mu}^{\eta} du_h + k_h\Big) = 0.$$

Es gibt wieder $q^2 p$ Lösungen $y^{(i)}$, die den p Gleichungen

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{q^2 p}\int_{\mu}^{y^{(i)}} du_h = q(v_h - k_h) + q^2 k_h + q\rho\int_{\mu}^{\eta} du_h$$

genügen. Da die Lösungen unabhängig von dem völlig willkürlichen Punkte η sein müssen, so folgt, daß $q\rho$ von den Punkten $y^{(i)}$ sich mit dem Punkte η vereinigen. Die Anzahl der

[1] Vgl. a. a. O. § 60. Vgl. auch Riemann, Über das Verschwinden der Θ-Funktion, Crelles Journal Bd. 65, 1865; Ges. Werke S. 198. Die Einführung des willkürlichen Punktes η bedingt das Verschwinden der Differentialquotienten der Θ-Funktion.

adjungierten Kurven, von deren Schnittpunkten $p-\rho$ durch die übrigen bestimmt sind, und welche die Grundkurve in einem Punkte von der Ordnung $q-1$ berühren, ist daher gleich $q^2p-q\rho$.

Nach einer bekannten Formel[1] ist diese Anzahl gleich $q\,[M+(q-1)\,(p-1)]$, wenn M die Zahl der beweglichen Schnittpunkte des gegebenen Systems bedeutet. Bei uns ist $M=p+q-\rho-1$, wodurch in der Tat $M+(q-1)\,(p-1)=qp-\rho$ wird.

Sollen an zwei Stellen Berührungen von der Ordnung q_1-1 bzw. q_2-1 stattfinden, so ist die Zahl der beweglichen Schnittpunkte gleich $Q=q_1+q_2+p-\rho-2$. Bezeichnet $y_1^{(i)}$ einen der Berührungspunkte $(q_1-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und t einen beliebig als Berührungspunkt $(q_2-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gewählten Punkt, sind ferner $z^{(i,k)}$ die einfachen Schnittpunkte der dem Index 1 entsprechenden Kurven, so ist analog zu (2) § 7:

$$(11)\qquad q_1\int_\mu^{y_1^{(i)}} du_h+(q_2-1)\int_\mu^{t} du_h+\sum_{k=1}^{p-\rho-1}\int_\mu^{z^{(i,k)}} du_h=\sum_{k=1}^{Q}\int_\mu^{\vartheta^{(k)}} du_h=v_h$$

für $i=1,2\ldots(q_1^2p-q_1\rho)$. Die Punkte $y_1^{(i)}$ sind also nach (9) unter den Nullpunkten der Funktion

$$(12)\qquad \Theta\left(q_1\int_\mu^{y} du_h-v_h+k_h+(q_2-1)\int_\mu^{t} du_h-\rho\int_\mu^{\eta} du_h\right)$$

enthalten, wenn wieder η einen willkürlichen Punkt bezeichnet, und sie genügen (indem das auf η bezügliche Integral sich beiderseits forthebt) den p Gleichungen

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{q_1^2p-q_1\rho}\int_\mu^{y_1^{(i)}} du_h=q_1\left\{v_h-(q_2-1)\int_\mu^{t} du_h\right\}+k_h\,q_1\,(q_1-1).$$

Summiert man die Gleichungen (11) nach dem Index i, so folgt:

$$(14)\qquad \sum_{i=1}^{q_1^2p-\rho\,q_1}\sum_{k=1}^{p-\rho-1}\int_\mu^{z^{(i,k)}} du_h=q_1\,[q_1\,(p-1)-\rho]\,\left[v_h-(q_2-1)\int_\mu^{t} du_h\right]-(q_1^3-q_1^2)\,k_h.$$

Um die Punkte z als Nullpunkte einer Funktion Θ_δ darzustellen, muß man ihre Anzahl durch Hinzufügen willkürlicher Punkte so ergänzen, daß sie gleich δp wird, wobei δ gleich dem Faktor von v_h in (14) zu nehmen ist:

$$(15)\qquad \delta=q_1\,[q_1\,(p-1)-\rho].$$

Die Anzahl der Punkte z ist gleich $(q_1^2p-q_1\rho)\,(p-\rho-1)=q_1^2p^2-q_1p\rho-(\rho+1)\cdot(q_1^2p-q_1\rho)$. Ist M die Anzahl der fehlenden Punkte, so muß also

$$\delta p=q_1p\,[q_1\,(p-1)-\rho]=M+q_1^2p^2-q_1p\rho-(\rho+1)\,(q_1^2p-q_1\rho)\quad\text{sein}$$

oder $M=\rho\,(q_1p-\rho-1)\,q_1$. Auf beiden Seiten der Gleichung (14) ist somit das Glied $M\int_\mu^{\eta} du_h$ hinzuzufügen. Die Punkte $z^{(i,k)}$ sind folglich unter den δp Nullpunkten der Funktion

[1] Vgl. z. B. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. 1, S. 1, S. 469, erste Auflage.

$$(16)\qquad \Theta_\delta\Big(\int_\mu^x du_h - v_h + (q_2-1)\int_\mu^t du_q - \rho\delta^{-1}q_1(q_1p-\rho-1)\int_\mu^\eta du_h + \delta^{-1}\left[q_1^3+q_1^2(p-2)-\rho q_1\right]k_h\Big)$$

enthalten, wo δ durch (15) gegeben ist. Für einen der gesuchten Berührungspunkte y_2 muß wieder $x = t$ werden; sie sind also unter den Nullpunkten der Funktion

$$(17)\quad \Theta_\delta\Big(q_2\int_\mu^x du_h - v_h - \rho\delta^{-1}q_1(q_1p-\rho-1)\int_\mu^\eta du_h + \delta^{-1}\left[q_1^3+q_1^2(p-2)-\rho q_1\right]k_h\Big)$$

enthalten und genügen nach § 3 den p Relationen:

$$(18)\quad \Sigma\int_\mu^{y^{(i)}} du_h = q_2\delta v_h - q_2\left[q_1^3+q_1^2(p-2)-\rho q_1\right]k_h + q_2^2\delta k_h + \rho q_2 q_1(q_1p-\rho-1)\int_\mu^\eta du_h.$$

Wegen der Willkürlichkeit des Punktes η müssen wieder $\rho q_1 q_2(q_1p-\rho-1)$ Nullpunkte der Funktion (17) mit η zusammenfallen. Die Anzahl der brauchbaren Lösungen ist daher gleich

$$(19)\quad q_2^2\delta p - \rho q_1 q_2 p(q_1-\rho-1) = q_1^2q_2^2p(p-1) - \rho p q_1 q_2(q_1+q_2) + \rho(\rho+1)q_1q_2.$$

Dies ist die Anzahl derjenigen adjungierten Kurven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung eines Systems mit $q_1+q_2+p-\rho-2$ beweglichen Schnittpunkten, welche die Grundkurve in zwei Punkten bzw. von der Ordnung q_1-1 und q_2-1 berühren.

Sollen höhere Berührungen an drei Stellen stattfinden, so verfahren wir analog zu § 8. Nimmt man eine Kurve des Systems, welche die Grundkurve an einem beliebigen Punkte t von der Ordnung q_3-1 berührt und außerdem an zwei Stellen bzw. von der Ordnung q_1-1 und q_2-1, so genügen ihre weiteren Schnittpunkte z den p Gleichungen

$$(20)\quad q_1\int_\mu^{y_1^{(i)}} du_h + q_2\int_\mu^{y_2^{(i)}} du_h + (q_3-1)\int_\mu^{y_3^{(i)}} du_h + \sum_{k=1}^{p-\varrho-2}\int_\mu^{z^{(i,k)}} du_h = \sum_{k=1}^{Q}\int_\mu^{\vartheta^{(k)}} du_h = v_h$$

für $i = 1, 2, \ldots R$, wenn R die in (19) gegebene Zahl bezeichnet und wenn wieder $\vartheta^{(k)}$ die $Q = q_1+q_2+q_3+p-\rho-3$ Schnittpunkte einer beliebigen fest gewählten Kurve des Systems bezeichnen. Nach (18) befriedigen die Punkte $y_2^{(i)}$, nachdem beiderseits das von η abhängige Integral gestrichen ist, die p Gleichungen:

$$(21)\quad \sum_{i=1}^{R}\int_\mu^{y_2^{(i)}} du_h = q_2\delta\left[v_h-(q_3-1)\int_\mu^t du_h\right] - q_2\left[q_1^3+q_1^2(p-2)-\rho q_1\right]k_h + q_2^2\delta k_h,$$

wo R durch (19) und δ durch (15) gegeben ist. Eine analoge Gleichung, bei der δ durch δ' ersetzt sein möge, besteht für die Punkte $y_1^{(i)}$, wenn man q_1 mit q_2 vertauscht. Summiert man also die Gleichungen (20) nach dem Index i, so ergibt sich:

$$\Sigma\Sigma\int_{\mu}^{z^{(i,k)}} du_h = (R - q_2^2\delta - q_1^2\delta')\,[v_h - (q_3 - 1)\int_{\mu}^{t} du_h] + C\cdot k_h,$$

wo

$$C = q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2 + 2p - 4) - \rho q_1 q_2 (q_2^3\delta + q_1^3\delta')$$
$$= -q_1^2 q_2^2 (p-2)(q_1 + q_2 - 2) + \rho q_1 q_2 (q_1^2 - q_1 + q_2^2 - q_2).$$

Um diese Punkte z als Nullpunkte einer Funktion Θ_ε darzustellen, muß ε gleich dem Faktor von $v_h + (1 - q_3)\int_{\mu}^{t} du_h$ gesetzt werden, also:

(23) $$\varepsilon = R - q_2^2\delta - q_1^2\delta' = q_1^2 q_2^2 (p-1)(p-2) - q_1 q_2 (p-1)(q_1 + q_2)\rho + q_1 q_2 \rho(\rho + 1).$$

Ferner müssen links und rechts entsprechende Integrale, die sich auf einen willkürlichen Punkt beziehen, hinzugefügt werden oder statt dieser ein mehrfaches Integral $M\cdot\int_{\mu}^{\eta} du_h$. Es ist εp die Zahl der Nullpunkte von Θ_ε, also

$$\varepsilon p = M + R(p - \rho - 2) = Rp - (q_2^2\delta + q_1^2\delta')p,$$

und hieraus

(24) $$M = \rho q_1^2 q_2^2 p(p-1) - \rho q_1 q_2 p(q_1 + q_2)(\rho + 1) + \rho q_1 q_2 (\rho + 1)(\rho + 2).$$

Die Punkte z sind dann enthalten unter den Nullpunkten der Funktion

(25) $$\Theta_\varepsilon\Big(\int_{\mu}^{x} du_h - v_h + (q_3 - 1)\int_{\mu}^{t} du_h - \varepsilon^{-1} M\int_{\mu}^{\eta} du_h + \varepsilon^{-1} C\cdot k_h\Big).$$

Ein dritter Berührungspunkt, und zwar von der Ordnung $q_3 - 1$, tritt ein, falls $x = t$ wird, d. h. für diejenigen Nullpunkte der Funktion

(26) $$\Theta_\varepsilon\Big(q_3\int_{\mu}^{x} du_h - v_h - \varepsilon^{-1} M\int_{\mu}^{\eta} du_h + \varepsilon^{-1} C\cdot k_h\Big),$$

welche nicht mit η zusammenfallen. Die Zahl derselben ist gleich Z_3, wenn:

$$Z_3 = \varepsilon q_3^2 p - q_3 M = q_1^2 q_2^2 q_3^2\cdot p(p-1)(p-2) - \rho q_1 q_2 q_3\cdot(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3)\cdot p(p-1)$$
$$+ \rho q_1 q_2 q_3\cdot(q_1 + q_2 + q_3)(\rho + 1)p - \rho q_1 q_2 q_3 (\rho + 1)(\rho + 2).$$

Fährt man in dieser Weise fort zu schließen, so kommt man zu folgendem allgemeinen Satze:

Es sei ein System von zur Grundkurve adjungierten Kurve gegeben, welche die Grundkurve in $q_1 + q_2 \ldots + q_\tau + p - \rho - \tau$ beweglichen Punkten schneiden, von denen $p - \rho$ durch die übrigen bestimmt sind. In demselben gibt es Z_τ Kurven, welche die Grundkurve in τ Punkten bzw. von der Ordnung $q_1 - 1$, $q_2 - 1$, $\ldots$ $q_\tau - 1$ berühren, wobei die Zahlen $q_1, q_2 \ldots q_\tau$ voneinander verschieden seien, wobei ferner:

$$
\begin{aligned}
(27)\quad Z_\tau &= q_1^2 q_2^2 \dots q_\tau^2 \cdot p\,(p-1)(p-2)\dots(p-\tau+1)\\
&\quad -\rho q_1 q_2 \dots q_\tau \{p\,(p-1)\dots(p-\tau+2)\Sigma q_1 q_2 \dots q_{\tau-1}\\
&\qquad -(\rho+1)p\,(p-1)\dots(p-\tau+3)\Sigma q_1 q_2 \dots q_{\tau-2}\\
&\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\qquad +(-1)^{\tau-2}(\rho+1)(\rho+2)\dots(\rho+\tau-2)p\,\Sigma q_1\\
&\qquad +(-1)^{\tau-1}(\rho+1)(\rho+2)\dots(\rho+\tau-1)\}\\
&= q_1^2 q_2^2 \dots \underset{\tau-1}{q_\tau^2} \cdot p\,(p-1)\dots(p-\tau+1)\\
&\quad -q_1 q_2 \dots q_\tau \sum_{i=0} (-1)^i \rho(\rho+1)\dots(\rho+i)p(p-1)\dots(p-\tau+i+2)\Sigma q_1 q_2 \dots q_{\tau-i-1}.
\end{aligned}
$$

Dabei ist mit $\Sigma q_1 q_2 \dots q_i$ in bekannter Weise die Summe aller Produkte bezeichnet, die aus den τ Zahlen q_i zu je i Faktoren gebildet werden können.

Die Punkte, in denen eine Berührung der Ordnung $q_r - 1$ stattfindet, genügen der Gleichung

$$
(28)\qquad \Theta_{\delta_{r\tau}}\Big(q_r \int_\mu^x du_h - v_h + C^{(r\tau)} k_h + M^{(r\tau)} \int_\mu^\eta du_h\Big) = 0,
$$

wo η einen willkürlichen Punkt bezeichnet, mit dem eine M-fach auszumerzende Lösung zusammenfällt. Hierbei ist:

$$
\begin{aligned}
\delta_{r\tau} &= q_1^2 q_2^2 \dots q_{r-1}^2 q_{r+1}^2 \dots \underset{i=\tau-3}{q_\tau^2}(p-1)(p-2)\dots(p-\tau+1)\\
(28\,a)\qquad &\quad -q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_\tau \Big[\sum_{i=0} \{(-1)^i \rho(\rho+1)\dots(\rho+i)\cdot\\
&\quad \cdot (p-1)\dots(p-\tau+i+2)\,\Sigma q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_{\tau-i-2}\} \pm \rho(\rho+1)\dots(\rho+\tau-2)\Big].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^{(r\tau)} \cdot \delta_{r\tau} &= \delta_{r\tau} + q_1^2 \dots q_{r-1}^2 q_{r+1}^2 \dots q_\tau^2 (p-2)\dots(p-\tau+1) \sum_{i=1}^{\tau} (q_i - \tau - q_r + 1)\\
(28\,b)\qquad &\quad -q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_\tau \Big[\sum_{i=0}^{\tau-4} \{(-1)^i \rho \dots (\rho+i)\cdot (p-2)\dots(p-\tau+i+2)\cdot\\
&\quad \cdot \Sigma (q_1^2 - q_1) q_2 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_{\tau-i-2}\} \pm \rho(\rho+1)\dots(\rho+\tau-3)\,\Sigma (q_1^2 - q_1)\Big].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M^{(r\tau)} \cdot \delta_{r\tau} &= q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_\tau \Big[\sum_{i=0}^{\tau-2} \{(-1)^i \rho \dots (\rho+i)p\,(p-1)\dots(p-\tau+i+2)\cdot\\
&\quad \cdot q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_{\tau-i-1}\} \pm \rho(\rho+1)\dots(\rho+\tau-1)\Big].
\end{aligned}
$$

Zwischen diesen Zahlen besteht die Relation $\delta_{r\tau} q_r^2 p = Z_\tau + q_r M_{r\tau} \delta_{r\tau}$. Den Beweis liefert man, indem man voraussetzt, der Satz sei richtig für $\tau - 1$ und ihn dann für τ daraus ableitet.

Wir nehmen also an, daß der Satz für $\tau - 1$ Berührungspunkte bewiesen ist und sich auf Berührungen von den Ordnungen $q_1 - 1$, $q_2 - 1, \dots q_{\tau-1} - 1$ bezieht, wozu das durch die p Gleichungen

$$
(29)\qquad q_1 \int_\mu^{y_1^{(i)}} du_h + q_2 \int_\mu^{y_2^{(i)}} du_h + \dots + q_{\tau-1} \int_\mu^{y_{\tau-1}^{(i)}} du_h + \sum_{k=1}^{p-\varrho-\tau+1} \int_\mu^{z^{(i,k)}} du_h = v_h
$$

gegebene Umkehrproblem gehört. Nach Voraussetzung ist die Zahl der Lösungen gleich

$$
\begin{aligned}
Z_{\tau-1} &= q_1^2 q_2^2 \dots q_{\tau-1}^2 p\,(p-1)\,(p-2)\dots(p-\tau+2)\\
&\quad -q_1 q_2 \dots q_{\tau-1} \sum_{i=0}^{\tau-3} (-1)^i \rho(\rho+i)\dots(\rho+i)\,p\,(p-3)\dots(p-\tau+i+3)\,\Sigma q_1 q_2 \dots q_{\tau-i-2}\\
&\quad -(-1)^{\tau-2} q_1 q_2 \dots q_{\tau-1}\,\rho(\rho+1)\dots(\rho+\tau-2),
\end{aligned}
\tag{30}
$$

so daß der Index i in (29) die Werte $1, 2, \dots Z_{\tau-1}$ annehmen kann. Die Punkte $y_r^{(i)}$, in denen eine Berührung der Ordnung $q_r - 1$ stattfinden kann, genügen den p Gleichungen:

$$
\sum_{i=1}^{Z_{\tau-1}} \int_{\mu}^{y_r^{(i)}} du_h = q_r \cdot \delta_{r,\tau-1}\,(v_h - C^{(r,\tau-1)} k_h) + q_r^2\,\delta_{r,\tau-1}\,k_h
\tag{31}
$$

und sind die Nullpunkte einer Funktion

$$
\Theta_{\delta_{r,\tau-1}}\Big(q_r \int_{\mu}^{x} du_h - v_h + C^{(r,\tau-1)} k_h - M_{r,\tau-1} \int_{\mu}^{\eta} du_h\Big),
\tag{32}
$$

deren weitere $M_{r,\tau-1}$ Nullpunkte mit dem willkürlichen Punkte η zusammenfallen. Der Index r kann die Werte $1, 2, \dots \tau-1$ annehmen. Durch Addition der $Z_{\tau-1}$ Gleichungen (31) und Benützung von (29) findet man für die $Z_{\tau-1}\,(p-\rho-\tau+1)$ Punkte z die Bedingungen

$$
\sum_i \sum_k \int_{\mu}^{z^{(i,k)}} du_h = Z_{\tau-1}\,v_h - \sum_{r=1}^{\tau-1} \left[q_r^2\,\delta_{r,\tau-1}\,(v_h - C^{(r,\tau-1)} k_h) + q_r^3\,\delta_{r,\tau-1}\,k_h\right].
\tag{33}
$$

Den Faktor von v_h bezeichnen wir aus sogleich ersichtlich werdenden Gründen mit $\delta_{r,\tau}$, also:

$$
\delta_{r,\tau} = Z_{\tau-1} - \sum_{r=1}^{\tau-1} q_r^2\,\delta_{r,\tau-1}
\tag{34}
$$

und hierin ist

$$
\begin{aligned}
\sum_r q_r^2\,\delta_{r,\tau-1} &= (\tau-1)\,q_1^2 q_2^2 \dots q_{\tau-1}^2\,(p-1)\,(p-2)\dots(p-\tau+2)\\
&\quad -q_1 q_2 \dots q_{\tau-1} \sum_{i=0}^{\tau-4} \left[(-1)^i (\tau-i-2)\,\rho(\rho+1)\dots(\rho+i)\,(p-1)\dots(p-\tau+3+i)\cdot\right.\\
&\quad \left.\cdot\,\Sigma q_1 q_2 \dots q_{\tau-i-2}\right] - (-1)^{\tau-3} q_1 \dots q_{\tau-1}\,\rho(\rho+1)\dots(\rho+\tau-3)\,\Sigma q_1.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Die Gleichung (33) wird somit

$$
\Sigma \Sigma \int_{\mu}^{z^{(i,k)}} du_h = \delta_{r,\tau}\,v_h + \left[\Sigma q_r^2\,\delta_{r,\tau-1}\,C^{(r,\tau-1)} - \Sigma q_r^3\,\delta_{r,\tau-1}\right] k_h.
\tag{36}
$$

Die Punkte z sind folglich unter den Nullpunkten einer Funktion Θ_δ enthalten, wenn δ durch $\delta_{r,\tau}$ ersetzt wird, und wenn die Zahl $Z_{\tau-1}\,(p-\rho-\tau+1)$ durch Hinzufügen eines M-fach zählenden willkürlichen Punktes η zu $p \cdot \delta_{r,\tau}$ ergänzt wird; es ist also:

$$
M = \delta_{\tau,\tau} \cdot p - Z_{\tau-1} \cdot (p-\rho-\tau+1),
\tag{37}
$$

und dieser Wert stimmt mit den oben in (28b) angegebenen Werten überein, wenn man dort r gleich τ nimmt.

Nach den allgemeinen Entwicklungen in § 3 können die den Gleichungen (36) genügenden Punkte $z^{(i,h)}$ und η als Nullpunkte einer Funktion

$$\Theta_{\delta_{\tau,\tau}}\left(\int_{\mu}^{x} du_h - v_h + K_h - M_{\tau,\tau}\int_{\mu}^{\eta} du_h;\ A\right)$$

betrachtet werden, denn diese Nullpunkte genügen den Bedingungen

$$\Sigma\,\Sigma\int_{\mu}^{z^{(i,h)}} du_h + \delta_{\tau,\tau} M_{\tau,\tau}\int_{\mu}^{\eta} du_h = \delta_{\tau,\tau}\left(v_h - K_h + M_{\tau,\tau}\int_{\mu}^{\eta} du_h + k_h\right),$$

die mit (36) übereinstimmen, wenn man setzt:

$$\delta_{\tau,\tau} K_h = \delta_{\tau,\tau}\cdot k_h - \Sigma\, q_r^2\,\delta_{r,\tau-1}\,C^{(r,\tau-1)}\cdot k_h + \Sigma\, q_r^3\,\delta_{r,\tau-1}\cdot k_h. \tag{38}$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned}\sum_r q_r^2\,\delta_{r,\tau-1}\,C^{(r,\tau-1)} = \sum_r q_r^2\,\delta_{r,\tau-1} &+ (\tau-2)\,q_1^2\dots q_{\tau-1}^2\,(p-2)\dots(p-\tau+2)\,(\Sigma q_1-\tau+1)\\ &- q_1 q_2\dots q_{\tau-1}\sum_{i=0}^{\tau-4}\big[(-1)^i(\tau-i-2)\,\rho(\rho+1)\dots(\rho+i)\,(p-2)\dots(p-\tau+i+2)\cdot\\ &\cdot\,\Sigma(q_1^2-q_1)\,q_2\dots q_{\tau-i-1}\big] - q_1 q_2\dots q_{\tau-1}(-1)^{\tau-3}\,\rho(\rho+1)\dots(\rho+\tau-3)\cdot\\ &\cdot\,\Sigma(q_1^2-q_1)\,q_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma\, q_r^3\,\delta_{r,\tau-1} &= q_1^2 q_2^2\dots q_{\tau-1}^2\,(p-1)(p-2)\dots(p-\tau+2)\cdot(\tau-1)\,\Sigma q_1\\ &- q_1 q_2\dots q_{\tau-1}\Big[\sum_{i=0}^{\tau-4}(-1)^i(\tau-i-2)\,\rho(\rho+1)\dots(\rho+i)\,(p-1)\dots(p-\tau+i+3)\cdot\\ &\cdot\,\Sigma q_1^2 q_2\dots q_{\tau-i-2}\Big] - (-1)^{\tau-3} q_1 q_2\dots q_{\tau-1}\,\rho(\rho+1)\dots(\rho+\tau-3)\,\Sigma q_1^2.\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\sum_r q_r^2\,C^{(r,\tau-1)}\,\delta_{r,\tau-1} - \sum_r q_r^3\,\delta_{r,\tau-1} &= -q_1^2\dots q_{\tau-1}^2\,(p-2)\dots(p-\tau+1)\,\Sigma(q_1-1)\\ &+ q_1\dots q_{\tau-1}\sum_{i=0}^{\tau-4}(-1)^i\rho\dots(\rho+i)\,(p-2)\dots(p-\tau+i+2)\,\Sigma(q_1^2-q_1)\,q_2\dots q_{\tau-i-2}\\ &+ (-1)^{\tau-3} q_1 q_2\dots q_{\tau-1}\,\rho(\rho+1)\dots(\rho+\tau-3)\,\Sigma(q_1^2-q_1).\end{aligned}$$

Der rechts stehende Ausdruck ist gleich $-C^{(\tau,\tau)}\,\delta_{\tau,\tau}+\delta_{\tau,\tau}$, d. h. gleich dem Ausdruck der oben mit $C^{(r,\tau)}\cdot\delta_{r,\tau}$ bezeichnet wurde, wenn man r durch τ ersetzt. Aus (38) folgt somit:

$$K_h = C^{(\tau,\tau)}\,k_h, \tag{39}$$

und die Punkte $z^{(i,h)}$ genügen der Gleichung

$$\Theta_{\delta_{\tau,\tau}}\left(\int_{\mu}^{x} du_h - v_h + C^{(\tau,\tau)}\,k_h - M_{\tau,\tau}\int_{\mu}^{\eta} du_h\right) = 0. \tag{40}$$

Soll jetzt ein weiterer Berührungspunkt von der Ordnung $q_\tau - 1$ auftreten, so hat man v_h zu ersetzen durch $v_h - (q_\tau - 1)\int_\mu^t du_h$, so daß in t zunächst ein Berührungspunkt der Ordnung $q_\tau - 2$ angenommen wird, um dann diesen Punkt mit einem der Punkte $z^{(i,k)}$ zusammenfallen zu lassen (wie oben im Falle $\tau = 2$ und $\tau = 3$). Die Berührungspunkte von der Ordnung $q_\tau - 1$ sind demnach unter den Nullpunkten der Funktion

$$\Theta_{\delta_{\tau,\tau}}(q_\tau \int_\mu^x du_h - v_h + C^{(\tau,\tau)} - M_{\tau,\tau}\int_\mu^\eta du_h)$$

enthalten, von denen $M_{\tau,\tau}$ mit η zusammenfallen müssen. Ihre Anzahl ist nach § 3 gleich $q_\tau^2\,\delta_{\tau,\tau}\,p - q_\tau\,M_{\tau,\tau}\,\delta_{\tau,\tau}$, d. h. gleich dem oben in (27) angegebenen Wert Z_τ. Vertauscht man in $\delta_{\tau,\tau}$, $C_{\tau,\tau}$, $M_{\tau,\tau}$ den ersten Index τ mit r, so erhält man die Angaben des oben ausgesprochenen allgemeinen Satzes, der also damit bewiesen ist.

In der Funktion Θ_δ sind in jedem Falle die Konstanten A zu bestimmen, wofür oben in § 4 und § 7 die nötigen Anweisungen gegeben sind. Ihr Wert hat nach den Entwicklungen in § 3 keinen Einfluß auf die Zahl der Lösungen. Ihre Berechnung kann wesentlich vereinfacht werden, indem man den willkürlichen Punkt η mit dem ebenfalls willkürlichen Punkt μ zusammenfallen läßt; dann fällt in den Argumenten der Funktion Θ_δ das Glied mit dem Faktor M fort. Es ist zu beachten, daß in den Gleichungen (28) bis (40) die Definition der Zahlen C und M sich um den Faktor δ von der in den Gleichungen (16) bis (26) benutzten Definition unterscheidet.

Sind z. B. $\varkappa$ der Zahlen q_i einander gleich, so ist die Zahl Z_τ durch $\varkappa!$ zu dividieren, wie es in § 10 geschah. Haben alle Zahlen q_i einen gemeinsamen Teiler, so ergeben sich wieder Verallgemeinerungen des Teilungsproblems. Wir betrachten als Beispiel die adjungierten Kurven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Grundkurve in $p - 1$ Punkten berühren. Hier ist $\tau = p - 1$, $\rho = 1$, $q_1 = q_2 \ldots = q_{p-1} = 2$. Die Zahl der Lösungen wird

$$\begin{aligned}\frac{Z_{p-1}}{(p-1)!} &= p\cdot 2^{2p-2} - 2^{p-1}\sum_{i=0}^{p-2}(-1)^i\frac{p(p-1)\ldots(i+3)}{(p-i-2)!}\,2^{p-i-2}\\ &= -2^{p-1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}2^{p-i} + 2^{2p-1}\\ &= 2^{2p-1} - 2^{p-1}(2-1)^p = 2^{p-1}(2^p-1),\end{aligned}$$

in der Tat das bekannte Resultat.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Doppeltangenten einer Kurve n^{ter} Ordnung mit d Doppelpunkten, aber ohne Rückkehrpunkte. Eine gerade Linie kann durch eine feste Kurve $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung zu einer adjungierten Kurve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ergänzt werden. Er ist also $q_1 = q_2 = 2$, $p - \rho = n - 2$, $\rho = \frac{1}{2}(n-2)(n-3) - d$. Da die Zahl Z_2 durch $1\cdot 2$ dividiert werden muß, so wird nach (19):

$$\begin{aligned}t &= 8p(p-1) - 8p(p-n+2) + 2(p-n+2)(p-n+3)\\ &= 8p(n-3) + 2(p-n+2)(p-n+3) = 2[(p+n)^2 + 5(p-n) + 6] - 24p.\end{aligned}$$

Ist $d = 0$, so ergibt sich die von Jacobi zuerst aufgestellte Zahl $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$.

Ebenso findet man für die Zahl die Wendepunkte: $w = 6p + 3n - 6$.

§ 14. Das Brillsche Reziprozitätsgesetz.

„Ist ein lineares System von $r+1$ Kurven $\psi_i = 0$ gegeben und gruppiert man dieselben zu je r in lineare Untersysteme und sucht die Punkte, in denen die Grundkurve von einer Kurve eines solchen Untersystems berührt wird von der Ordnung r, so kann man durch diese Punkte eine Kurve $\Psi = 0$ legen, welche die Grundkurve außerdem nur in den festen Punkten des Systems trifft; wendet man den gleichen Prozeß auf die so erhaltenen $r+1$ Kurve Ψ an, so kommt man zu den gegebenen Kurven ψ zurück."

Diesen Satz hat Brill als Folgerung gewisser Determinantensätze aufgestellt.[1] Für den Fall, daß die Kurve $\psi = 0$ zur Grundkurve adjungiert wird, erscheint er hier als einfache Folge der Gleichung (4) § 5.

$$\Theta\Big(\int_{\mu}^{x} du_h + (q-1)\int_{\mu}^{y} du_h - v_h + k_h\Big) = 0, \tag{1}$$

die auf der Grundkurve eine Korrespondenz zwischen den Punkten x und y begründet. Zu allgemeinerer Folgerung gibt die Gleichung

$$\Theta\Big(q\int_{\mu}^{x} du_h + r\int_{\mu}^{y} du_h - v_h + k_h\Big) = 0 \tag{2}$$

Veranlassung. Nach den vorstehenden Ausführungen ergibt sich unmittelbar das folgende Resultat:

Es sei gegeben ein lineares System von adjungierten Kurven $\psi = 0$, das von $q+r+p-1$ Parametern abhängt. Unter den Kurven des Systems, welche die Grundkurve in einem Punkte x von der Ordnung $q-1$ berühren, gibt es r^2p Kurven, welche die Grundkurve je in einem Punkte y von der Ordnung $r-1$ berühren; ihre Berührungspunkte werden durch eine Kurve $\Psi_x = 0$ ausgeschnitten, von deren weiteren Schnittpunkten (nach dem Schema von § 5) r in jeden festen Punkt des gegebenen Systems fallen, also qr in den Ausgangspunkt x, d. h. die Kurve $\Psi_x = 0$ berührt die Grundkurve in x von der Ordnung $qr-1$. Ebenso gibt es unter den Kurven $\psi = 0$, welche die Grundkurve in y von der Ordnung $r-1$ berühren, q^2p Kurven, die noch eine Berührung der Ordnung $q-1$ mit der Grundkurve in Punkten x eingehen. Letztere werden durch eine Kurve $\Psi_y = 0$ ausgeschnitten, die in x eine Berührung $(qr-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hat. Das System aller Kurven $\Psi_x = 0$ hat also zu festen einfachen Punkten die r^2p Punkte y, und die einzelnen Kurven dieses Systems berühren die Grundkurve von der Ordnung $rq-1$ in je einem Punkte x; die Anzahl dieser Kurven

---

[1] Vgl. Brill, Math. Annalen Bd. 4 S. 527, 1871. Ich habe auf Grund des von Cayley und Brill aufgestellten Korrespondenzprinzipes eine andere Ableitung gegeben, dabei gleichzeitig gezeigt, daß sich eine solche Korrespondenz (nicht jede beliebige Korrespondenz) durch eine lineo-lineare Gleichung zwischen den Ausdrücken ψ und Ψ darstellen läßt. Vgl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. 1 S. 465 ff. (1877) und t. 2 p. 176 ff. der französischen Uebersetzung. Im Anschluß an die oben erwähnte Arbeit von Roch und an meine obige Gleichung (2) hat Hurwitz gezeigt, daß man mittels Θ-Funktionen auch solche Korrespondenzen behandeln kann, die sich nicht durch eine einzige algebraische Gleichung zwischen den Punkten x und y darstellen lassen, ferner auch Korrespondenzen, die nur auf „singulären" Riemannschen Flächen möglich sind: Math. Annalen Bd. 28, 1886.

$\Psi = 0$ ist gleich r^2q^2p. Wendet man auf jeden dieser Punkte x die gleiche Betrachtung an (d. h. sucht diejenigen Kurven $\Psi = 0$, welche in y von der Ordnung $r - 1$ berühren und außerdem in einem andern Punkte von der Ordnung $q - 1$), so kommt man zu den ursprünglichen Kurven $\psi = 0$ zurück. Jede der letzteren zählt dann q-fach. Entsprechendes gilt, wenn man r mit q und x mit y vertauscht. Für $r = 1$ ergibt sich der Brillsche Satz.

Ähnliche Sätze wird man aus der allgemeineren Gleichung

$$\Theta_\delta\left(q\int_\mu^x du_h + r\int_\mu^y du_h - v_h + K_h\right) = 0$$

ableiten können.

Unser Beweisgang setzt überall nur adjungierte Kurven voraus. Wie die rein algebraische Behandlung zeigt, gelten die Resultate zum Teil auch für nichtadjungierte Kurvensysteme. Für letztere kann man durch Anwendung des von Clebsch und Gordan behandelten erweiterten Umkehrproblems[1] ähnliche Betrachtungen mit Hilfe der zugehörigen erweiterten Θ-Funktionen durchführen, nachdem man auch hier Θ-Funktionen höherer Ordnung eingeführt hat.

---

[1] Wie man dieses Problem nach den Riemannschen Methoden zu behandeln hat, habe ich in Bd. 1 S. 867 ff. der Vorlesungen über Geometrie gezeigt.

Verbesserungen.

Seite 6 Zeile 10 v. o.: lies $u_h^{(-)}$ statt $u_h^{(-1)}$.
Seite 12 Zeile 6 v. u.: lies π statt π_i.
Seite 23 Zeile 9 v. o.: Auf der linken Seite der Gleichung (1) ist hinzuzufügen:

$$\sum_{i=1}^{p-3}\int_\mu^{x^{(i)}} du_h.$$

Inhalt.

Einleitung 3

§ 1. Die zu einer algebraischen Kurve gehörenden Abelschen Integrale 4

§ 2. Die Θ-Funktionen höherer Ordnung 7

§ 3. Die Integrale erster Gattung als Argumente der Funktion Θ_δ 8

§ 4. Darstellung algebraischer Funktionen durch Θ-Funktionen höherer Ordnung 11

§ 5. Kurven eines Systems, welche die Grundkurve an einer Stelle von höherer Ordnung berühren 16

§ 6. Das durch § 5 gegebene Umkehrproblem 18

§ 7. Kurven einer gegebenen Schar, welche die Grundkurve in zwei Punkten von beliebiger Ordnung berühren 22

§ 8. Berührung in drei Punkten 24

§ 9. Berührung der Grundkurve an τ Stellen von beliebiger Ordnung 25

§ 10. Berührung an verschiedenen Stellen von teilweise gleicher Ordnung 29

§ 11. Das zu § 9 gehörige Umkehrproblem 31

§ 12. Eine Verallgemeinerung des Problems der Teilung 33

§ 13. Adjungierte Kurven der Ordnung $n-3$, welche die Grundkurve an mehreren Punkten von verschiedener Ordnung berühren 35

§ 14. Das Brillsche Reziprozitätsgesetz 44

Verbesserungen 45