Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1943

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
Bibliothek
ZU BERLIN

München 1944
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Über gewisse Umordnungen von Permutationen IV.

Wahrscheinlichkeitsfragen.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgelegt am 10. Dezember 1943.

1. Mit dem in den früheren Noten gleichen Titels[1] behandelten Gegenstand hängen gewisse Wahrscheinlichkeitsfragen zusammen, auf die auch an anderer Stelle hingewiesen wurde[2]. Sie sollen im folgenden für den besonderen Fall behandelt werden, daß die Anzahl f der Kategorien, auf welche die Elemente einer Permutation aufgeteilt sind (vgl. Note I, Nr. **1**), gleich 1 ist. Ist n die Anzahl der Elemente, die wir mit $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnen,

$$P = [a_{\nu_1} \ \ldots . \ a_{\nu_n}] \tag{1}$$

eine Permutation dieser Elemente und $v(P) = m$ die Anzahl der vollständigen Verbände (vgl. Note I, § 2, Nr. **4**) in (1), dann kann man zunächst für jeden Wert von n nach dem wahrscheinlichsten Wert von m fragen. Zu diesem Zweck hat man für jedes $m = 1, \ldots, n$ die Anzahl $Z(m; n)$ derjenigen unter allen $n!$ Permutationen (1) zu bestimmen, für welche $v(P) = m$ ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Anzahl der vollständigen Verbände gleich m ist, wird dann durch

$$W(m; n) = \frac{Z(m; n)}{n!} \tag{2}$$

und der mittlere Wert von $v(P)$ durch

$$\bar{v}(n) = \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n}{}' m Z(m; n) \tag{3}$$

[1] Siehe diese Sitzungsberichte, Jahrgang 1943, S. 131–134, S. 135–148 und S. 269–278. Wir werden diese drei Noten kurz als „Note I", „Note II", „Note III" zitieren.

[2] Vgl. l. c. [12] (im Teil II) Nr. **81**.

gegeben. In § 1 werden diese Werte bestimmt und einige daraus entnehmbare Folgerungen gezogen. Der § 2 beschäftigt sich dann mit der aus P nach dem vormals angegebenen Umordnungsverfahren hergeleiteten Folge[3]

$$P^0 = P,\ P^1,\ P^2,\ \ldots,\ P^\nu,\ \ldots, \tag{4}$$

wobei in unserem Falle ($f = 1$) die Besonderheit eintritt, daß der Grenzwert $\omega(P) = \lim_{\nu \to \infty} v(P^\nu)$ sowie überhaupt jeder Wert $v(P^\nu)$ für $\nu \geqq 2$ sich gleich $v(P^1)$ ergibt, diese Zahl ihrerseits aber entweder gleich $v(P)$ oder gleich $v(P) - 1$ ist. Wieder kann man die Anzahlen der Permutationen der einen oder anderen Art und damit die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten bestimmen. Zum Schluß (§ 3) werden noch einige Bemerkungen über den allgemeinen Fall (f beliebig) gemacht.

§ 1. Permutationen mit vorgegebener Anzahl vollständiger Verbände.

2. Sei $1 \leqq m \leqq n$. Wir schreiben die n Elemente a_ν in absteigender Anordnung auf:

$$a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_2,\ a_1. \tag{5}$$

Man hat dabei $n - 1$ (durch Kommata gekennzeichnete) Zwischenräume. Wenn man nun bei $m - 1$ von diesen $n - 1$ Zwischenräumen einen Trennungsstrich anbringt, so erscheint dadurch (5) in m Verbände

$$V_m,\ V_{m-1},\ \ldots,\ V_1 \tag{6}$$

aufgeteilt. Man erkennt, daß es $\binom{n-1}{m-1}$ Möglichkeiten für eine solche Aufteilung gibt. Betrachten wir nun eine Permutation (1), für welche $v(P) = m$ ist und deren vollständige Verbände durch (6) gegeben sind, dann können wir schreiben:

$$P = [V_{\mu_1}\ V_{\mu_2}\ \ldots\ V_{\mu_m}], \tag{7}$$

[3] Vgl. Note I, § 1, Nr. 3 und Note II, § 3, Nr. 8.

und es wird dabei stets $\mu_{\lambda+1} \neq \mu_\lambda - 1$ sein. Ordnet man also P die Permutation

$$Q = [b_{\mu_1}\ b_{\mu_2} \ldots b_{\mu_m}]$$

der Elemente $b_1, \ldots, b_m$ zu, so ist $v(Q) = m$. Da es $Z(m) = Z(m; m)$ solcher Permutationen Q gibt, so erschließt man aus dem Gesagten, daß die Anzahl $Z(m; n)$ der Permutationen (1) mit m vollständigen Verbänden durch

$$Z(m; n) = \binom{n-1}{m-1} Z(m) \tag{8}$$

gegeben ist.

3. Um nun die Zahlen $Z(n)$ zu bestimmen, führen wir $Y(n)$ ein als Anzahl aller derjenigen Permutationen (1) mit lauter eingliedrigen Verbänden, für welche $\nu_1 \neq n$ ist, die also nicht mit a_n beginnen. Nun ist leicht zu sehen, daß andererseits die Anzahl aller Permutationen (1) mit lauter eingliedrigen Verbänden, die mit a_n beginnen, durch $Y(n-1)$ gegeben ist,[4] da nach Weglassen des Anfangsgliedes a_n eine nicht mit a_{n-1} beginnende[5] Permutation der $n-1$ Elemente $a_1, \ldots, a_{n-1}$ mit lauter eingliedrigen Verbänden übrigbleibt. Die Gesamtheit aller Permutationen (1) mit lauter eingliedrigen Verbänden wird also, wenn man noch

$$Y(0) = 1 \tag{9}$$

setzt, durch

$$Z(n) = Y(n) + Y(n-1) \qquad (n \geqq 1) \tag{10}$$

gegeben.

4. Für die Zahl $Y(n)$ gewinnen wir nun, wie folgt, eine Darstellung durch Zahlen $Y(\nu)$ mit $\nu < n$ und somit die Möglichkeit rekursorischer Bestimmung. Zunächst ist offenbar[6]

$$Y(1) = 0, \qquad Y(2) = 1. \tag{11}$$

---

[4] Auf diese Feststellung haben wir später noch zurückzukommen.

[5] Andernfalls enthielte ja (1) den zweigliedrigen Verband $a_n, n-1 = [a_n a_{n-1}]$.

[6] Es sind ja $[a_1]$ bzw. $[a_1 a_2)$ die einzigen Permutationen von $n = 1$ bzw. $n = 2$ Elementen mit lauter eingliedrigen Verbänden, wobei nur die letztere nicht mit a_n beginnt.

Sei nun $n \geqq 3$ und P eine nicht mit a_n beginnende Permutation (1) mit lauter eingliedrigen Verbänden (also n gleich einem ν_λ mit $\lambda \neq 1$). Sei ferner Q die aus P durch Weglassen von a_n entstehende Permutation der $n-1$ Elemente $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Dabei ist

$$v(Q) = n - 2 \tag{12}$$

oder

$$v(Q) = n - 1, \tag{13}$$

je nachdem die Elemente $a_{\nu_{\lambda-1}}$ $a_{\nu_{\lambda+1}}$, zwischen denen in P das Element a_n stand, zusammen einen Verband bilden oder nicht, d. h. je nachdem $\nu_{\lambda-1} = \nu_{\lambda+1} + 1$ ist oder nicht.

Beginnen wir mit dem zweiten Fall (13). Wir fragen uns, wenn eine bestimmte Permutation

$$Q = [a_{\mu_1} \ldots . \ a_{\mu_{n-1}}] \tag{14}$$

der Elemente $a_1, \ldots, a_{n-1}$ mit lauter eingliedrigen Verbänden vorgegeben ist, wieviele Permutationen P der von uns betrachteten Art (also mit $v(P) = n$ und $\nu_1 \neq n$) es gibt, aus denen auf die beschriebene Art die gegebene Permutation Q entsteht. Dazu müssen wir nur sehen, an wieviel Plätzen nach einem der Elemente a_{μ_ν} ($1 \leqq \nu \leqq n-1$) wir das Element a_n einschalten können, derart daß dabei eine Permutation P der gewünschten Art entsteht. Dies wieder hängt nur davon ab, ob $\mu_1 = n - 1$ oder $\mu_1 \neq n - 1$ (und dann ein späteres μ_ν gleich $n-1$) ist. Im ersten Fall, der für $Z(n-1) - Y(n-1) = Y(n-2)$ Permutationen Q eintritt,[7] ist jeder unserer $n-1$ Plätze für die Einschaltung von a_n brauchbar; es gibt also $n-1$ Permutationen P, die auf die betrachtete Permutation Q führen. Im zweiten Fall, der für $Y(n-1)$ Permutationen Q eintritt, scheidet für die Einschaltung von a_n derjenige unserer $n-1$ Plätze aus, der vor dem Element a_{n-1} liegt (da ja sonst P nicht lauter eingliedrige Verbände bekäme); es gibt also dann nur $n-2$ Permutationen P, die auf eine derartige Permutation Q führen. Werden alle unsere der Gleichung (13) genügenden Permutationen Q zusammengenommen, so kommen wir damit auf

[7] Vgl. die in Anm. 4 hervorgehobene Feststellung.

$$(n-1)\,Y(n-2)+(n-2)\,Y(n-1) \tag{15}$$

Permutationen P, denen ein Q der genannten Art entspricht.

Wir gehen nun zum Fall (12) über. Der Permutation Q wollen wir in diesem Fall noch eine Permutation R von $n-2$ Elementen $b_1, \ldots, b_{n-2}$ zuordnen, die aus Q dadurch entsteht, daß man das dem Index $\nu = \nu_{\lambda-1} = \nu_{\lambda+1} + 1$ entsprechende Element a_ν wegläßt, im übrigen aber jedes a_ν durch $b_{\nu-1}$ oder durch b_ν ersetzt, je nachdem $\nu > \nu_{\lambda+1} + 1$ oder $\nu \leqq \nu_{\lambda+1}$ ist. Die so erhaltene Permutation R hat offenbar lauter eingliedrige Verbände. Analog wie im vorhin behandelten Fall (13) denken wir eine bestimmte Permutation

$$R = [b_{\mu_1} \ldots b_{\mu_{n-2}}] \tag{16}$$

mit lauter eingliedrigen Verbänden vorgegeben; wir fragen uns dann, wieviele Permutationen P mit $v(P) = n$ und $\nu_1 \neq n$ es gibt, die auf die beschriebene Art auf R führen. Dazu müssen wir zunächst von R aus zu einer Permutation Q der zuletzt betrachteten Art (mit $n-1$ Elementen und einem zweigliedrigen Verband, sonst lauter eingliedrigen Verbänden) gelangen, indem wir eine der $n-2$ Zahlen μ_ν herausgreifen, das dem Index $\mu = \mu_\nu$ entsprechende Element b_μ durch das Elementepaar $a_{\mu+1}\ a_\mu$ ersetzen, im übrigen aber jedes b_μ durch $a_{\mu+1}$ oder durch a_μ, je nachdem $\mu > \mu_\nu$ oder $\mu < \mu_\nu$ ist. Da dies (je nach der Wahl von μ_ν) auf $n-2$ Arten möglich ist und $Z(n-2)$ Permutationen (16) mit lauter eingliedrigen Verbänden existieren, so sehen wir, daß es

$$(n-2)\,Z(n-2) \tag{17}$$

Permutationen Q gibt, denen ein R der genannten Art entspricht. Will man aber von Q durch Einschaltung von a_n zu P gelangen, so ist der Weg eindeutig vorgezeichnet: da P lauter eingliedrige Verbände haben soll, so muß a_n zwischen die beiden Elemente $a_{\mu+1}\ a_\mu$ des einen zweigliedrigen Verbandes eingeschoben werden, der in Q auftritt. Somit ist (17) auch die Anzahl derjenigen unserer Permutationen P, die auf ein der Gleichung (12) genügendes Q führen.

Darnach erhalten wir als Gesamtzahl $Y(n)$ aller nicht mit a_n beginnenden Permutationen (1) mit lauter eingliedrigen Ver-

bänden die Summe von (15) und (17), was mit Rücksicht auf (10) die Rekursionsformel

$$Y(n) = (n-2)\,Y(n-1) + (2n-3)\,Y(n-2) + \\ + (n-2)\,Y(n-3) \quad (n \geqq 3) \tag{18}$$

liefert.

5. Man kann (18) auch in der Gestalt $H(n) = -H(n-1)$ schreiben, wenn man $H(n) = Y(n) - (n-1)\,Y(n-1) - -(n-1)\,Y(n-2)$ setzt. Und da gemäß (9), (11) sich $H(2) = 0$ ergibt, so sind alle $H(n) = 0$ und man erhält[8]

$$Y(n) = (n-1)\big(Y(n-1) + Y(n-2)\big). \tag{19}$$

Nunmehr erweisen sich die Zahlen

$$Q_n = \frac{Y(n+1)}{(n+1)!}, \quad (n \geqq -1) \tag{20}$$

für die man

$$Q_n = \frac{n}{n+1}\,Q_{n-1} + \frac{1}{n+1}\,Q_{n-2} \quad (n \geqq 1) \\ \text{nebst } Q_{-1} = 1,\ Q_0 = 0 \tag{21}$$

und

$$Q_n = \sum_{\nu=0}^{n+1}{}' \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \quad (n \geqq -1) \tag{21a}$$

findet, für $n \geqq 0$ als die Näherungsbrüche des schon von Euler aufgestellten (vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, § 45, S. 209) Kettenbruchs[9]

---

[8] Wegen (10) gilt also (bei beliebig festgesetztem $(Z(0))$:

$$Y(n) = (n-1)\,Z(n-1) \qquad (\text{für } n \geqq 1). \tag{19a}$$

Eine andere Herleitung (und zwar durch einen Induktionsbeweis) für die Formeln (19) und (19a) enthält eine Arbeit mit dem Titel „Auf Permutationen bezügliche Wahrscheinlichkeitsfragen und ein Eulerscher Kettenbruch", die an anderer Stelle erscheinen soll.

[9] Vgl. die näheren Ausführungen l. c.[8], wo auch für die aus den Näherungsbrüchen Q_n gebildeten Summen

$$s_n = \sum_{\nu=2}^{n}{}' \frac{Q_{\nu-1}}{(n-\nu)!}, \qquad S_n = \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{(\nu+1)\,Q_\nu}{(n-\nu)!}$$

die Formeln $s_n = 1 - \frac{1}{n!}$, $S_n = n$ hergeleitet werden.

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{|2} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|2} + \frac{2}{|3} + \frac{3}{|4} + \ldots,$$

woraus sich wegen (19a) und (20)

$$Z(n) = (n-1)!\ (n+1)\, Q_n \tag{22}$$

und (bei Heranziehung von $(n-1)!\,(n+1) = n!\,(1+\frac{1}{n})$ und der Stirlingschen Formel für $n!$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z(n)}{(n-1)!\,(n+1)\,e^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{Z(n)}{n^n\, e^{-(n+1)}\sqrt{2\pi n}} = 1 \tag{23}$$

sowie gemäß (2) und (8), bzw. (3)

$$W(m;\, n) = \frac{(m+1)}{(n-m)!\; n}\, Q_m \tag{24}$$

und

$$\bar{v}(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' \frac{m\,(m+1)}{(n-m)!}\, Q_m \tag{24a}$$

ergibt.

6. Für $n \geqq 3$, $1 \leqq m \leqq n$ ergibt sich unter Beachtung von $Q_n \geqq 0$ und $Q_n > 0$ für $n \geqq 1$ sowie von (21), daß

$$\begin{aligned}(n-m+1)!\; n\,\big(W(m;n) - W(m-1;n)\big) &= \\ = (n-m)\, m\, Q_{m-1} + (n-m+1)\, Q_{m-2} &> 0,\end{aligned}$$

also

$$W(m;n) > W(m-1;n) \tag{25}$$

ist. Der wahrscheinlichste Wert von $m = v(P)$ ist also der Wert n, wobei speziell

$$W(n;n) = \frac{n+1}{n}\, Q_n = Q_{n-1} + \frac{1}{n}\, Q_{n-2}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} W(n;n) = \frac{1}{e}$$

ist. — Das Überwiegen der Wahrscheinlichkeit dafür, daß $m = v(P)$ gleich einem der größtmöglichen Werte ($= n$ oder nahe an n) ausfällt, kommt in noch stärkerer Weise zur Geltung, wenn man fragt, ob etwa als Grenzfall für wachsendes n eine

Wahrscheinlichkeitsfunktion $\varphi(x)$ aufgestellt werden kann, derart, daß für großes n die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $v(P)$ zwischen $n\xi$ und $n\eta$ liegt, angenähert durch $\int_{\xi}^{\eta}\varphi(x)dx$ gegeben würde. Setzt man $x = \frac{m}{n}$ rational voraus, so müßte dann angenähert $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} nW(nx; n)$ sein. Da aber, wie aus (24), etwa unter Heranziehung der Stirlingschen Formel, ersichtlich ist, für $1 - x > 0$ dieser Limes $= 0$ ist, so kann es eine Funktion $\varphi(x)$ der gewünschten Art nicht geben.

§ 2. Stationäre und nicht-stationäre Permutationen.

7. Ist eine Permutation P durch (7) gegeben, dann liefert das l. c.[3] beschriebene Umordnungsverfahren zunächst die Permutation[10]

$$P^1 = [V_{\mu_2} \dots V_{\mu_m} V_{\mu_1}]$$

und es wird

$$v(P^1) = m - 1 \tag{26}$$

oder

$$v(P^1) = m, \tag{27}$$

je nachdem $\mu_m = \mu_1 + 1$ oder $\neq \mu_1 + 1$ ist, je nachdem also $V_{\mu_m} V_{\mu_1}$ zusammen einen einzigen Verband bilden oder nicht. Im ersten Fall liegt ein Zusammenschluß dritter Art vor.[11] Es ist das aber der einzige Zusammenschluß, der überhaupt bei Bildung der Folge (4) eintreten kann. Denn da nach Voraussetzung jeder Verband V_{μ_λ} in P vollständig ist, so bilden $V_{\mu_\lambda} V_{\mu_{\lambda+1}}$ für kein λ ($1 \leqq \lambda \leqq m - 1$) zusammen einen einzigen Verband, woraus man unschwer erkennt, daß für $\nu \geqq 1$ durchwegs $v(P^{\nu+1}) = v(P^\nu)$ und daher

$$\omega(P) = \lim_{\nu\to\infty} v(P^\nu) = v(P^1), \tag{28}$$

somit P^1 allemal stationär, dagegen P nicht-stationär oder stationär ist, je nachdem (26) oder (27) gilt.

---

[10] Wegen $f = 1$ ist ja sowohl der Fundamentalblock $F(P)$ als auch der zugehörige konvertierte Block $K(F)$ einfach $= V_{\mu_1}$.

[11] Vgl. Note II, § 3, Nr. 8. Gemäß der dortigen Formel (16) ist dann $z_3^0 = 1$.

8. Mit P zugleich ist natürlich die Permutation

$$Q = [b_{\mu_1}\, b_{\mu_2} \ldots b_{\mu_m}]$$

der m Elemente $b_1, \ldots, b_m$ stationär oder nicht-stationär[12] und aus Überlegungen ähnlich denen in Nr. **2** erschließt man die Gültigkeit der Gleichungen

$$T(m;\, n) = \binom{n-1}{m-1} T(m), \quad U(m;\, n) = \binom{n-1}{m-1} U(m), \tag{29}$$

wobei $T(m;\, n)$ bzw. $U(m;\, n)$ die Anzahl der nicht-stationären bzw. der stationären unter den Permutationen von n Elementen mit m vollständigen Verbänden bedeutet und

$$T(n;\, n) = T(n), \quad U(n;\, n) = U(n) \tag{30}$$

gesetzt ist. Natürlich ist

$$T(m;\, n) + U(m;\, n) = Z(m;\, n)$$

und speziell

$$T(n) + U(n) = Z(n). \tag{31}$$

Insgesamt hat man dabei

$$\mathfrak{T}(n) = \sum_{m=1}^{n}{}' T(m;\, n) \tag{32}$$

nicht-stationäre und

$$\mathfrak{U}(n) = \sum_{m=1}^{n}{}' U(m;\, n) \tag{33}$$

stationäre unter den $n!$ Permutationen von n Elementen. Die Bestimmung aller dieser Anzahlen läuft ersichtlich allein auf jene der Zahlen $T(n)$ und $U(n)$ hinaus.

9. Was diese letzteren Zahlen betrifft, so hat man zunächst

$$T(1) = 0,\ U(1) = 1; \quad T(2) = 1,\ U(2) = 0, \tag{34}$$

[12] Vgl. hierzu in der Arbeit: „Über gewisse Umordnungen von Permutationen und ein zugehöriges Stabilitäts-Kriterium", Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver., Band 53, Jahrg. 1943 (Teil I in Heft 2, S. 147–182, Teil II in Heft 3) die allgemeinen Bemerkungen (in Nr. **46**) über die „Verbands-Isomorphie" einer jeden gegebenen Permutation mit einer solchen mit nur eingliedrigen Verbänden.

wie daraus erhellt, daß unter den Permutationen mit lauter eingliedrigen Verbänden die einzige mit $n = 1$ Element, nämlich $[a_1]$, stationär ist, dagegen die einzige mit $n = 2$ Elementen, nämlich $[a_1\ a_2]$, offenbar nicht-stationär. Weiterhin ist aber eine rekursorische Bestimmung durch die in Nr. **10** zu beweisende Formel

$$T(n) = U(n - 1) \qquad (n \geqq 2) \tag{35}$$

gesichert, wenn man noch von den Werten der Zahlen $Z(n)$ (vgl. Nr. **5**) Gebrauch macht; denn aus (35) gewinnt man zunächst $T(3) = 0$, wegen $Z(3) = 3$ aus (31) somit $U(3) = 3$; aus (35) folgt nun $T(4) = 3$; wegen $Z(4) = 11$ aus (31) somit $U(4) = 8$, usw. Man bestätigt aber im Hinblick auf (10) sofort, daß den Gleichungen (31), (35) durch

$$\begin{aligned} T(n) &= Y(n - 1) + (-1)^n, \\ U(n) &= Y(n) \qquad + (-1)^{n+1} \end{aligned} \tag{36}$$

genügt wird, und da diese Formeln auch mit (34) in Einklang stehen, so sind sie damit durch vollständige Induktion allgemein bewiesen.

10. Der noch ausständige Beweis von (35) aber ergibt sich dadurch, daß man jeder nicht-stationären (also der Bedingung $\nu_n = \nu_1 + 1$ genügenden) Permutation (1) mit lauter eingliedrigen Verbänden diejenige Permutation Q der $n - 1$ Elemente $b_1, \ldots, b_{n-1}$ zuordnet, die man aus P erhält, wenn man a_{ν_1} wegläßt und im übrigen jedes Element a_ν durch $b_{\nu-1}$ oder durch b_ν ersetzt, je nachdem $\nu \geqq \nu_n$ oder $\nu < \nu_n$ ist. Dabei erweist sich Q als stationär. Hat umgekehrt $Q = [b_{\mu_1} \ldots b_{\mu_{n-1}}]$ lauter eingliedrige Verbände und ist dabei $\mu_{n-1} \neq \mu_1 + 1$, somit Q stationär, dann entspricht Q nach dem Gesagten genau einer (ersichtlich nicht-stationären) Permutation (1), nämlich derjenigen, die man aus Q erhält, indem man zunächst jedes b_μ, je nachdem $\mu \geqq \mu_{n-1}$ oder $< \mu_{n-1}$ ist, durch $a_{\mu+1}$ oder durch a_μ ersetzt und hierauf noch das Element $a_{\mu_{n-1}}$ an den Anfang schreibt. Dieses umkehrbar eindeutige Entsprechen der betrachteten Permutationen P und Q ergibt die Richtigkeit von (35).

11. Mit $\Omega(m; n)$ bezeichnen wir die Anzahl derjenigen Permutationen (1) von n Elementen, für welche $\omega(P)$ (d. h. also gemäß (28) in unserem Falle $v(P^1)$) den Wert m hat; ferner bedeute

$$\bar{\omega}(n) = \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n}{}' m\, \Omega(m; n) \tag{37}$$

den mittleren Wert von $\omega(P)$. Nun kann gemäß Nr. **7**, **8** die Gleichung $v(P_1) = m$ nur entweder für eine nicht-stationäre Permutation P mit $v(P) = m + 1$ oder für eine stationäre mit $v(P) = m$ gelten, woraus unter Beachtung der Definition der Funktionen T und U in Nr. **8** sofort

$$\Omega(m; n) = T(m + 1; n) + U(m; n) \tag{38}$$

folgt. Für $\Omega(m; n)$, $\bar{\omega}(n)$ sowie für die in Nr. **8** eingeführten Zahlen $\mathfrak{T}(n)$, $\mathfrak{U}(n)$ ergeben sich dann aus (32), (33), (38), (37), (29), (36), (20), (35) die Werte[13]

$$\mathfrak{T}(n) = \sum_{m=1}^{n}{}' \frac{(n-1)!\, Q_{m-2}}{(n-m)!} = (n-1)!\ \sigma_{n-1} = (n-1)! \quad (\text{für } n \geqq 2), \tag{39}$$

$$\mathfrak{U}(n) = \sum_{m=1}^{n}{}' \frac{(n-1)!\, m\, Q_{m-1}}{(n-m)!} = (n-1)!\ S_{n-1} = (n-1)!\ (n-1) \quad (\text{für } n \geqq 2), \tag{40}$$

$$\Omega(m; n) = \binom{n}{m} U(m) = \frac{n!}{(n-m)!}\, Q_{m-1} + (-1)^{m+1} \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!}\, Q_{m-2} \quad (\text{für } 1 \leqq m \leqq n), \tag{41}$$

$$\bar{\omega}(n) = \sum_{m=1}^{n}{}' \frac{m\, Q_{m-1}}{(n-m)!} + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m=1}^{n}{}' (-1)^{m+1} \binom{n-1}{m-1} = S_{n-1} = n-1 \quad (\text{für } n \geqq 2). \tag{42}$$

---

[13] Wegen der „Näherungsbrüche" Q_n, einschließlich Q_{-1} vgl. Nr. **5**, Formeln (21), (21a); über S_n und die für $\sigma_n = \sum_{m=0}^{n}{}' \frac{Q_{m-1}}{(n-m)!} = \frac{1}{n!} + s_n$ gültige Formel $\sigma_n = 1$ siehe Anm. 9.

§ 3. Der Fall mehrerer Kategorien von Elementen ($f > 1$).

12. Einige der vorangegangenen Überlegungen lassen sich auf den Fall $f > 1$ übertragen. Ist n_i die Anzahl der Elemente $a_\nu^{(i)}$ der i-ten Kategorie ($1 \leqq \nu \leqq n_i$), $n_1 + \ldots + n_f = N$ die Anzahl aller Elemente und $m_i(P)$ die Anzahl derjenigen vollständigen Verbände $V_{\mu_i}^{(i)}$ in einer Permutation P, deren Elemente zur i-ten Kategorie gehören $(m_1 + \ldots + m_f = m = v(P))$, bezeichnet ferner $Z(m_1, \ldots, m_f; n_1, \ldots, n_f)$ die Anzahl derjenigen Permutationen, für welche die Gleichungen $m_i(P) = m_i$ gelten, somit $Z(n_1, \ldots, n_f) = Z(n_1, \ldots, n_f; n_1, \ldots, n_f)$ die Anzahl der Permutationen mit lauter eingliedrigen Verbänden, im besonderen $Z_h^{(i)}(n_1, \ldots, n_f)$ die Anzahl derjenigen letztgenannten Permutationen, die mit dem Element $a_h^{(i)}$ beginnen, dann ergibt sich zunächst aus analogen Betrachtungen[14] wie in Nr. **2** die Gleichung

$$Z(m_1, \ldots, m_f;\ n_1, \ldots, n_f) = Z(m_1, \ldots, m_f) \prod_{i=1}^{f} \binom{n_i - 1}{m_i - 1},$$

die für $f = 1$ in (8) übergeht. Auch eine Übertragung von Überlegungen aus Nr. **3** ist ausführbar und führt z. B. auf

$$Z_{n_i}^{(i)}(n_1, \ldots, n_f) = Z(n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \ldots, n_f) - \\ - Z_{n_i-1}^{(i)}(n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \ldots, n_f),$$

d. i. auf eine Formel, die eine Verallgemeinerung von (10) auf $f > 1$ darstellt. Im übrigen aber sind die Fälle mit $f > 1$ schon bei der Bildung der Fundamentalblocks F^ν und dann der konvertierten Blocks $K(F^\nu)$ (vgl. Note I, § 1, Nr. **2**, **3**; Note II, § 3, Nr. **7**, **8**) dadurch gekennzeichnet, daß neben Zusammenschlüssen dritter Art auch solche erster und zweiter Art auftreten können,[15] ferner aber auch durch die Möglichkeit, daß $v(P) = qf + r$ einen Rest $r > 0$ ergibt, was die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen bei Bildung der Folge (4) wesentlich erhöht.[16] Um einen

---

[14] Diese beruhen im Wesentlichen darauf, daß eine beliebige Permutation stets mit einer anderen mit lauter eingliedrigen Verbänden „verbands-isomorph" ist (vgl. Anm. 12).

[15] Vgl. l. c.[1] Nr. **8** und l. c.[12], Teil II, § 4, Nr. **47** sowie Teil I, § 3, Nr. **34**, Anm. 50.

[16] Siehe l. c.[1] Note II, Nr. **15** ff., sowie l. c.[12], Teil II, Nr. **67** ff. Vgl. dort

ersten Einblick zu gewinnen, mag man hier daran denken, etwa zunächst Fälle mit $n_1 = \ldots = n_h = 1$, $n_{h+1} = \ldots = n_f = 2$ zu studieren; also Fälle, die bezüglich Kleinheit der Werte der n_i extrem nach der einen Seite sind, ebenso wie der in den §§ 1 und 2 studierte Fall des kleinstmöglichen Wertes von f ein extremer nach der anderen Seite ist.

---

die Bildungsweise der $C^{\nu}_{*\alpha}$, $D^{\nu}_{*\alpha}$, von denen die ersteren für $r = 0$ entfallen; desgleichen vereinfachen sich dabei die dort besprochenen Stabilitätskriterien.