Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$.

Von **Otto Volk.**

Vorgelegt von F. Lindemann in der Sitzung am 14. Januar 1922.

Es gilt zunächst der Satz:

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ konvergiert gleichmäßig für alle x des Intervalls $-1 < x < +1$ und es ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}.$$

C. Neumann[1]) spricht im Anschluß an den Beweis dieses Satzes, den er in sehr einfacher Weise mit Hilfe der Laplaceschen Formeln führt, die Vermutung aus, daß die Reihe absolut divergiert. Im folgenden soll nun die Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$ bewiesen werden.

Nach Heine[2]) ist, $x = \cos\vartheta$ gesetzt:

$$P_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\left[\left(1-\frac{1}{4n}\right)\cos\left((n+\tfrac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{8n}\operatorname{cotg}\vartheta\cdot\sin\left((n+\tfrac{1}{2})\vartheta-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

1) Vgl. C. Neumann, Beiträge zum Studium der Randwertaufgaben. Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Bd. XXXV, VII. (1920), S. 529, Anmerkung.

2) Vgl. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen I (1878), S. 178.

wenn nur $0 < \vartheta < \pi$ ist. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n \cos \vartheta)|$ wird sich also von einem hinreichend großen N ab verhalten wie die Reihe:

$$S = \sum_{n=N}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\vartheta}} \left|\cos\left((n+\tfrac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)\right|. \tag{2}$$

Die Divergenz dieser Reihe läßt sich nun leicht mit Hilfe des folgenden von Fatou[1]) aufgestellten Satzes beweisen:

Konvergiert oder divergiert die Fouriersche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

in zwei Punkten absolut, so konvergiert oder divergiert sie absolut für alle dazwischen liegenden Punkte.

Betrachten wir nämlich die Reihe:

$$S_1 = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\left|\cos\left((n+\frac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sqrt{n}}$$

und nehmen wir an, daß sie absolut konvergiere. Bilden wir mit Fatou:

$$\cos\left((n+\tfrac{1}{2})(\vartheta+h) - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left((n+\tfrac{1}{2})(\vartheta-h) - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$- 2\cos\left((n+\tfrac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\left((n+\tfrac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\cdot \sin^2 (n+\tfrac{1}{2})h,$$

so folgt hieraus:

$$\left|\cos\left((n+\tfrac{1}{2})(\vartheta-h) - \frac{\pi}{4}\right)\right| < \left|\cos\left((n+\tfrac{1}{2})(\vartheta+h) - \frac{\pi}{4}\right)\right|$$
$$+ 2\left|\cos\left((n+\tfrac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)\right| \cdot (1 + 2\sin^2(n+\tfrac{1}{2})h)$$

und daher:

---

[1]) Vgl. P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta math., Bd. 30 (1906), S. 398.

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\left|\cos\left((n+\tfrac{1}{2})(\vartheta - h) - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sqrt{n}} < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\left|\cos\left((n+\tfrac{1}{2})(\vartheta + h) - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sqrt{n}}$$

$$(4) \qquad + 2\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1 + 2\sin^2 (n+\tfrac{1}{2}) h}{\sqrt{n}} \cdot \left|\cos\left((n+\tfrac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Hieraus ergibt sich:

Konvergiert die Reihe S_1 absolut in dem Intervall ϑ bis $\vartheta + h$, so konvergiert sie auch in dem dazu symmetrischen Intervall $\vartheta - h$ bis ϑ.

Würde nun die Reihe S_1 innerhalb eines beliebigen Intervalls innerhalb 0 bis $\frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{2}$ bis π absolut konvergieren, so würde aus obigem Satze folgen, daß die Reihe S_1 auch in den Grenzpunkten $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \pi$ absolut konvergiert. Nun divergieren aber die beiden $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Wir kommen also zu einem Widerspruche. Die Reihe S_1 divergiert daher absolut im ganzen Intervall 0 bis π. Somit gilt entsprechend (1) und (2) der Satz:

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x)|$ divergiert für alle x des Intervalls $-1 < x < 1$.

Betrachten wir nun die Reihe[1]):

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\vartheta),$$

so wird diese Reihe innerhalb des Einheitskreises ab-

[1]) Solche verallgemeinerte Kugelfunktionen-Reihen wurden von T. J. J'A. Bromwich, Investigations on series of zonal harmonics, Proc. of the Lond. math. Soc. (2), 4 (1906), S. 204—222 untersucht; diese Untersuchungen sind ganz analog denen von Pringsheim, Hardy u. a. über das Verhalten von Potenzreihen an der Konvergenzgrenze.

solut und gleichmäßig konvergieren. Auf dem Einheitskreise bleibt sie für $0 < \vartheta < \pi$, $\pi < \vartheta < 2\pi$ gleichmäßig konvergent, während sie absolut divergiert; für $\vartheta = 0$ divergiert sie gleichmäßig; für $\vartheta = \pi$ schwankt sie zwischen $+1$ und -1.

Während Bromwich[1]) bemerkt, daß man bei den Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\vartheta)$ aus dem Verhalten in einem Punkte des Konvergenzkreises nicht ohne weiteres auf das Verhalten in anderen Punkten schließen kann, haben wir hier ein Beispiel, das dies gestattet, und man kommt so unmittelbar zu der Frage, ob nicht mit Hilfe des Fatouschen Satzes sich noch weitere Konvergenz- und Divergenzkriterien für das Verhalten solcher Reihen auf der Konvergenzgrenze aufstellen lassen.

[1]) l. c. S. 205.