Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1943

München 1944
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Bemerkungen über verknotete und verkettete Linien II.

Vorgeschriebene singuläre Primzahlen für eine Simony-Figur und für ihr Spiegelbild.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 22. Oktober 1943.

1. In der vorangegangenen Note mit gleichem Obertitel[1] war gezeigt worden, wie für eine sogenannte „spezielle" Simony-Figur $L_n = [2, n]$ die singulären Primzahlen zu ermitteln sind.[2] An anderer Stelle[3] wurde dann dargelegt, wie zu jeder vorgegebenen Menge ungerader Primzahlen die Gesamtheit aller Simony-Figuren L_n (Simony-Knoten und Simony-Ketten) bestimmt werden kann, für welche genau die Primzahlen der gegebenen Menge und keine anderen singulär sind, wobei sich zeigte, daß zu gegebener Primzahlmenge stets unendlich viele solche Knoten und unendlich viele Ketten gehören.[4] Man kann nun neben einer

---

[1] Bemerkungen über verknotete und verkettete Linien I. Über die speziellen Simony-Knoten und Simony-Ketten. Diese Sitz.-Ber., Jahrgg. 1942, S. 53–62.

Sei bemerkt, daß die Fertigstellung einer Note (gleichen Obertitels) „Über den letzten der ‚Sechs Knoten' Albrecht Dürers", in der gewisse allgemeinere Methoden über Zusammenfügung von Linienfiguren zu entwickeln sind und über die in der Sitzung vom 9. Juli 1943 berichtet wurde, wegen mannigfacher durch die Kriegsverhältnisse bedingter außerwissenschaftlicher Beanspruchung vorerst etwas zurückgestellt werden mußte. Sie soll als Note III erscheinen.

[2] Vgl. l. c. [1], Nr. **7**, S. 59, Satz 1. Siehe auch l. c. [4], Nr. **3**, S. 4, Satz 2, sowie l. c.[3], § 1, Nr. **1**.

[3] Über spezielle Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen II. (Erscheint in den Monatsheften für Math. und Physik.)

[4] Letzteres ließ sich schon etwas einfacher zeigen in der Arbeit „Über spezielle Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen I", Monatshefte für Math. u. Physik, 51 (1943), S. 1–14.

Simony-Figur $L_n = [2, n]$ auch ihr Spiegelbild $[2, -n] = L'_n$ betrachten und aus den vorgenannten Entwicklungen ist leicht zu entnehmen,[5] daß eine für L_n singuläre Primzahl p zugleich singulär für L'_n ist dann und nur dann, wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist. Die singulären Primzahlen von L_n, die $\equiv 3 \pmod{4}$ sind, werden also gewiß nicht singulär für L'_n sein; dagegen können andere Primzahlen $\equiv 3 \pmod{4}$, die für L_n nicht singulär sind, als singuläre Primzahlen von L'_n auftreten. Will man, analog wie früher für L_n allein, nunmehr für L_n und außerdem für L'_n die singulären Primzahlen vorschreiben, so hat dies notwendigerweise derart zu erfolgen, daß einerseits eine Menge $\mathfrak{P}$ von Primzahlen $\equiv 1 \pmod{4}$ als singulär für beide Figuren L_n, L'_n vorgeschrieben wird, andererseits zwei elementfremde Mengen $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ von Primzahlen $\equiv 3 \pmod{4}$, von denen die Primzahlen der einen Menge für L_n, jene der anderen für L'_n singulär seien. Wird mit P, bzw. Q, bzw. R das Produkt aller Primzahlen aus $\mathfrak{P}$, bzw. $\mathfrak{Q}$, bzw. $\mathfrak{R}$ bezeichnet, so muß, weil n bzw. $(-n)$ durch PQ bzw. durch PR teilbar sein muß,[6] n die folgende Gestalt haben, wobei ρ sowohl wie σ eine der Zahlen 0, 1 bedeutet[7]:

$$n = (-1)^{\rho}\, 2^{\sigma}\, PQRP^*. \tag{1}$$

Dabei kann, weil quadratische Faktoren von n auf die singulären Primzahlen von L_n ohne Einfluß sind[8], die Zahl n quadratfrei angenommen werden, somit die ungerade Zahl P^* als Produkt von Primzahlen, die zu $2PQR$ teilerfremd sind. Die Menge der in P^* aufgehenden „accessorischen" Primzahlen heiße $\mathfrak{P}^*$. Jede Primzahl p^* aus $\mathfrak{P}^*$ muß dabei $\equiv 1 \pmod{4}$ sein, da p^* andernfalls nach den zitierten Entwicklungen[9] für eine der beiden Figuren L_n, L'_n singulär wäre.

2. Eine genauere Durcharbeitung[10] führt nun zu folgendem Resultat.

---

[5] Vgl. insbesondere l. c.[1], Nr. 8, S. 60, Satz 3.

[6] Vgl. die l. c.[2] angeführten Stellen.

[7] Es ist L_n ein Knoten oder eine Kette, je nachdem $\sigma = 0$ oder 1 ist; es ist L_n positiv oder negativ gedreht, je nachdem $\rho = 0$ oder 1 ist.

[8] Gemäß den l. c.[2] angeführten Kriterien.

[9] Vgl. insbesondere l. c.[1], Nr. 8, S. 60, 61, Satz 2 und 4.

[10] Vgl. eine in der Math. Zeitschrift erscheinende Arbeit.

Wir bezeichnen mit α bzw. γ die Anzahl der Primzahlen aus $\mathfrak{P}$, die $\equiv 1$ bzw. $\equiv 5$ (mod. 8) sind, ferner mit β bzw. δ die Anzahl der Primzahlen $\equiv 3$ bzw. $\equiv 7$ (mod. 8) aus $\mathfrak{Q}$; die gleiche Bedeutung wie β, δ für $\mathfrak{Q}$, bzw. α, γ für $\mathfrak{P}$ mögen β', δ' für $\mathfrak{R}$, bzw. α^*, γ^* für $\mathfrak{P}^*$ haben. Wir setzen

$$c = \alpha + \gamma, \qquad d = \beta + \delta,$$
$$d' = \beta' + \delta', \qquad b = c + d.$$

Für vorgeschriebene ρ, σ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ gelten dann die Sätze:

Satz 1. Wenn $\sigma = 1$, ferner $\rho, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ beliebig vorgeschrieben sind und α^* beliebig, γ^* aber gemäß der „Anzahl-Bedingung"

$$0 \equiv b + (\rho + 1)(d + d') + \sigma(\beta + \beta' + \gamma + \gamma^*) + \\ + \tfrac{1}{2}(d + d')(d + d' - 1) \pmod{2} \tag{2}$$

gewählt wird, dann gibt es unendlich viele Möglichkeiten, um $\mathfrak{P}^*$ als Menge von $\alpha^* + \gamma^*$ Primzahlen so zu wählen, daß (1) eine Simony-Kette L_n mit den für L_n und L_n' vorgeschriebenen singulären Primzahlen liefert.

Satz 2. Wenn $\sigma = 0$ und $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ so vorgeschrieben sind, daß die Kongruenz

$$d \equiv d' \pmod{2} \tag{3}$$

und außerdem (2) besteht, dann gibt es bei beliebig vorgeschriebenem ρ unendlich viele Möglichkeiten, die Menge $\mathfrak{P}^*$ der accessorischen Primzahlen so zu wählen, daß (1) einen Simony-Knoten L_n mit den für L_n und L_n' vorgeschriebenen singulären Primzahlen liefert.

Satz 3. Wenn $\sigma = 0$ und $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ so vorgeschrieben sind, daß nicht die Kongruenz (3) besteht, die Zahl ρ (und damit der Drehungssinn von L_n) aber so vorgeschrieben ist, daß (2) erfüllt wird, dann gibt es unendlich viele Möglichkeiten, die Menge $\mathfrak{P}^*$ so zu wählen, daß (1) einen Simony-Knoten L_n von der für L_n und L_n' vorgeschriebenen Art liefert.

Satz 4. Wenn $\sigma = 0$ und $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ so vorgeschrieben sind daß (3) und außerdem die Kongruenz

$$1 \equiv b + \tfrac{1}{2}(d + d')(d + d' - 1) \pmod{2}$$

besteht, dann ergibt, wie auch ρ vorgeschrieben sei, niemals die gemäß (1) bestimmte Zahl n einen Simony-Knoten L_n von der verlangten Art.

So gibt es beispielsweise keinen Simony-Knoten L_n, so daß 5 und 3 für L_n, ferner 5 und 7 für L_n' die einzigen singulären Primzahlen sind.