Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen.

Von **Otto Szász** in Frankfurt a. M.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 6. Mai 1922.

Einleitung.

Bezüglich der absoluten Konvergenz einer trigonometrischen Reihe

(1) $(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$

kann man nach Sätzen von Denjoy (C. R. 155, 1912, II, S. 135 bis 136), Lusin (C. R. 155, S. 580—582) und Fatou[1]) zwei Fälle unterscheiden: die Reihe (1) ist entweder überall absolut konvergent, oder sie ist es höchstens in einer Punktmenge vom Maße Null, je nachdem die unendliche Reihe

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu - i b_\nu| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|,$$
$$c_\nu = a_\nu - i b_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

konvergiert oder divergiert.

Wenn also die Reihe (1) in einer Punktmenge von positivem Maß absolut konvergieren soll, so muß die Reihe (2) konvergieren, und (1) ist dann offenbar die Fouriersche Reihe einer durchweg stetigen Funktion[2]). Es ist daher von Interesse,

[1]) Man vgl. insbesondere P. Fatou, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, Bulletin de la société mathematique de France 41, 1913, S. 47—53.

[2]) Es ist dann sogar die Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu$ für $|z| \leq 1$ absolut und gleichmäßig konvergent, und die Reihe (1) stimmt offenbar überein mit dem Realteil dieser Potenzreihe für $z = e^{ix}$.

Bedingungen für die stetige, nach 2π periodische Funktion $f(x)$ anzugeben, unter denen die zur Fourierschen Entwicklung

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

gehörige Reihe (2) konvergiert. Den allgemeinsten hierher gehörigen Satz hat Herr S. Bernstein[1]) aufgestellt:

Satz I. Wenn die Funktion $f(x)$ einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade $\alpha > \frac{1}{2}$ genügt, so ist ihre Fouriersche Reihe absolut konvergent (sc. überall); dagegen gibt es zu jeder Zahl $\beta < \frac{1}{2}$ Funktionen, die einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade β genügen und deren Fouriersche Reihe nicht absolut konvergiert[2]).

S. Bernstein gibt hierfür keinen Beweis an, sondern bemerkt nur, daß sich derselbe auf folgende Tatsache stützt, die er dann herleitet:

Das Maximum von

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n, \quad \nu = 1, 2, \ldots n, \quad n = \text{Primzahl}$$

für die Gesamtheit aller trigonometrischen Polynome n^{ter} Ordnung

$$T_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu \cos(\nu x - \alpha_\nu), \quad \varrho_\nu > 0,$$

die der Bedingung

$$|T_n(x)| \leq 1 \quad \text{für} \quad 0 < x < 2\pi$$

genügen, hat die Größenordnung $\sqrt{n}$.

Von den Untersuchungen S. Bernsteins ausgehend gelange ich im folgenden zu einem einfachen Beweis und einer Verschärfung des Satzes I, indem ich eine allgemeinere Fragestellung behandle. Ich sage: eine Klasse (K) stetiger Funktionen besitzt den Konvergenzexponenten γ, wenn einerseits für die Fouriersche Reihe irgend einer Funktion aus (K) und für jedes $\varkappa > \gamma$ die Reihe

[1]) Man vgl. S. Bernstein, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques. Comptes rendus 158 (I, 1914), S. 1661—63.

[2]) Gemeint ist offenbar: nicht für jedes x.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)^{\frac{\varkappa}{2}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^{\varkappa}, \quad (c_\nu = a_\nu - i b_\nu)$$

konvergiert, während es andererseits zu jedem $\varkappa < \gamma$ eine Funktion in der Klasse (K) gibt, so daß die zugehörige Reihe $\sum|c_\nu|^{\varkappa}$ divergiert. Herr T. Carlemann hat gezeigt, daß die Klasse aller stetigen Funktionen den Konvergenzexponenten $\gamma = 2$ besitzt, wobei natürlich $\gamma \leqq 2$ längst bekannt ist. Etwas schärfere Resultate erhielt ich in meiner Arbeit: Über Potenzreihen, die im Einheitskreise beschränkte Funktionen darstellen[1]). Wird die Klasse (K) aus den stetigen Funktionen $f(x)$ gebildet, die einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade α genügen, d. h. gibt es zu jedem $f(x)$ eine von x unabhängige Größe λ, so daß

$$(3) \qquad |f(x)-f(u)| \leqq \lambda\,|x-u|^{\alpha}$$

für alle x und u, so ist γ eine Funktion von α, die offenbar mit wachsendem α monoton abnimmt, und der Satz I ist gleichbedeutend mit den Ungleichungen:

$$\gamma(\alpha) < 1 \text{ für } \alpha > \tfrac{1}{2} \text{ und } \gamma(\alpha) \geqq 1 \text{ für } \alpha < \tfrac{1}{2}.$$

Im folgenden wird für $0 < \alpha \leqq 1$ $\gamma(\alpha)$ genau bestimmt; es ergibt sich:

$$\gamma(\alpha) = \frac{2}{2\alpha+1}, \quad 0 < \alpha \leqq 1,$$

mit der Verschärfung, daß eine nur von α abhängige Potenzreihe $\sum_{0}^{\infty}\gamma_\nu z^\nu$ angegeben wird, die im abgeschlossenen Einheitskreise eine der Lipschitzschen Bedingung vom Grade α genügende Funktion $G(z)$ darstellt, wobei $\sum|\gamma_\nu|^{\varkappa}$ für jedes $\varkappa < \dfrac{2}{2\alpha+1}$ divergiert.

Schließlich ersetze ich die Bedingung (3) durch eine weit allgemeinere, während der Konvergenzexponent derselbe bleibt (vgl. Satz III).

[1]) Math. Zeitschr. 8, 1920, S. 222—236. Daselbst Literaturnachweis.

§ I. Beweis der Relation $\gamma(\alpha) \leq \frac{2}{2\alpha+1}$.

Hilfssatz 1. Es sei $0 < \alpha < 1$; die stetige Funktion

$$(F) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

genüge der Bedingung

$$(3') \qquad |f(x) - f(u)| \leq \lambda |x-u|^\alpha$$

für alle x und u; ferner sei

$$(4) \begin{cases} s_0 = \frac{a_0}{2}, \quad s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ \sigma_n(x) = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Dann ist

$$(5) \qquad |\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{\lambda C}{n^\alpha}, \quad 0 \leq x < 2\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei C nur von α abhängt (nicht von f, λ und x).

Aus der bekannten Formel

$$(L) \, \sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)] \, dt$$

und aus (3') folgt nämlich sofort

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{2^{\alpha+1}\lambda}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 t^\alpha \, dt,$$

und hieraus wegen

$$\sin t > \frac{2}{\pi} t \quad \text{für} \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

weiter

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{2^{\alpha+1}\lambda}{n\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{t^{2-\alpha}} \, dt.$$

Setzt man hier

$$nt = \tau, \text{ also } dt = \frac{1}{n}\,d\tau, \quad t^{2-\alpha} = \frac{\tau^{2-\alpha}}{n^{2-\alpha}},$$

so wird

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{2^{\alpha-1}\pi\lambda}{n}\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\tau}{n^{\alpha-1}\tau^{2-\alpha}}\,d\tau < \frac{2^\alpha\pi\lambda}{n^\alpha}\int_0^\infty \frac{\sin^2\tau}{\tau^{2-\alpha}}\,d\tau,$$

womit der Hilfssatz 1 bewiesen ist[1]).

Hilfssatz 2. Für nicht negative d_ν, δ_ν und für $p \geqq 1$ gilt die Ungleichung:

$$\sum_{\nu=n_1}^{n_2} d_\nu\,\delta_\nu \leqq \left(\sum_{\nu=n_1}^{n_2} d_\nu\,\delta_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=n_1}^{n_2} d_\nu\right)^{1-\frac{1}{p}} \text{[2])}. \tag{6}$$

Insbesondere für $d_\nu = 1$ $(\nu = n_1, n_1 + 1, \ldots n_2)$ wird

$$\sum_{\nu=n_1}^{n_2} \delta_\nu \leqq n^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=n_1}^{n_2} \delta_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad n = n_2 - n_1 + 1. \tag{7}$$

Die Ungleichung $\gamma(\alpha) \leqq \frac{2}{2\alpha+1}$ ergibt sich nun folgendermaßen: es ist offenbar nach (F) und (4)

$$f(x) - \sigma_n(x) \sim \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\,(a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x) + \sum_{\nu=n}^{\infty} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x),$$

und hiernach

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\sigma_n(x) - f(x)]^2\,dx = \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 (a_\nu^2 + b_\nu^2) + \sum_{\nu=n}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2).$$

Hieraus und aus (5) folgt nun sofort

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) = \sum_{\nu=n}^{\infty} |c_\nu|^2 \leqq \frac{2\lambda^2 C^2}{n^{2\alpha}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

---

[1]) Man vgl. S. Bernstein, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues. Acad. Roy. de Belgique, Classe des sciences. Mémoires, II. Série, t. IV. Bruxelles 1912, S. 1—104; insb. S. 88—89.

[2]) Man vgl. z. B. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta math. 30, S. 175—193; insb. S. 181.

Aber die Anwendung der Ungleichung (7) für $p = \frac{2}{\varkappa}$, $0 < \varkappa \leq 2$ liefert

$$\sum_{\nu=1+2^\mu}^{2^{\mu+1}} |c_\nu|^\varkappa < 2^{\mu\left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)} \left(\sum_{\nu=1+2^\mu}^{2^{\mu+1}} |c_\nu|^2\right)^{\frac{\varkappa}{2}}, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots,$$

und mit Rücksicht auf (8) ergibt sich nun

$$\sum_{\nu=1+2^\mu}^{2^{\mu+1}} |c_\nu|^\varkappa < 2^{\mu\left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)} \frac{2^{\frac{\varkappa}{2}} \lambda^\varkappa C^\varkappa}{2^{\mu\alpha\varkappa}} < \frac{2^\varkappa \lambda^\varkappa C^\varkappa}{2^{\mu(\alpha\varkappa + \frac{1}{2}\varkappa - 1)}}.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^\varkappa$ für

$$(\alpha + \tfrac{1}{2})\varkappa - 1 > 0, \quad \text{d. h.} \quad \varkappa > \frac{2}{2\alpha + 1}.$$

Damit ist die Ungleichung $\gamma(\alpha) \leq \frac{2}{2\alpha + 1}$ bewiesen.

§ 2. Beweis der Relation $\gamma(\alpha) \geq \frac{2}{2\alpha+1}$.

Hilfssatz 3. Es sei q eine Primzahl $\equiv 1$ mod. 4, und $\left(\frac{\nu}{q}\right)$ das Legendresche Symbol $\left[\left(\frac{\nu}{q}\right) = +1\right.$ oder -1, je nachdem ν für den Modul q quadratischer Rest ist oder nicht; $\left.0 < \nu < q\right]$. Ferner sei

$$\frac{2}{q^{3/2}} (q - \nu) \left(\frac{\nu}{q}\right) = a_\nu^{(q)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots q-1 \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(a_{q-1}^{(q)} + a_{q-2}^{(q)} z + \cdots + a_1^{(q)} z^{q-2} + a_1^{(q)} z^q + a_2^{(q)} z^{q+1} + \cdots \right.$$
$$\left. + a_{q-1}^{(q)} z^{2(q-1)}\right) = \sum_{\nu=0}^{2q-2} C_\nu^{(q)} z^\nu = g_q(z).$$

Dann ist

$$|g_q(z)| \leq 1 \text{ für } |z| \leq 1, \text{ und}$$

$$\sum_{\nu=0}^{2q-2} |C_\nu^{(q)}| = \frac{q-1}{\sqrt{q}}.$$

Für den Beweis verweise ich auf die S. 136 und S. 137 zitierten Arbeiten.

Hilfssatz 4. Es sei $P(z)$ ein Polynom n^{ten} Grades, das der Ungleichung

$$|P(z)| \leq 1 \text{ für } |z| < 1 \tag{9}$$

genügt: ε sei eine positive Zahl < 1. Dann ist

$$|P(z) - P(\zeta)| \leq 2n^{\varepsilon}|z-\zeta|^{\varepsilon} \text{ für } |z| \leq 1, \ |\zeta| \leq 1.$$

Zum Beweise bemerke ich zunächst, daß aus (9)

$$|P'(z)| \leq n \text{ für } |z| \leq 1 \tag{10}$$

folgt[1]). Ferner ist nach einem auf Darboux[2]) zurückgehenden Mittelwertsatz

$$P(z) - P(\zeta) = \varrho(z-\zeta)P'(\zeta + \vartheta(z-\zeta)), \ 0 < \vartheta \leq 1, \ |\varrho| \leq 1.$$

Hieraus und aus (10) folgt

$$|P(z) - P(\zeta)| \leq n|z-\zeta| \text{ für } |z| \leq 1, \ |\zeta| \leq 1,$$

also auch

$$|P(z) - P(\zeta)|^{\varepsilon} \leq n^{\varepsilon}|z-\zeta|^{\varepsilon}, \ \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Nun ist mit Rücksicht auf (9) für $0 < \varepsilon \leq 1$

$$|P(z)-P(\zeta)| = |P(z)-P(\zeta)|^{\varepsilon}|P(z)-P(\zeta)|^{1-\varepsilon} \leq 2^{1-\varepsilon}|P(z)-P(\zeta)|^{\varepsilon},$$

und aus (11) folgt weiter

$$|P(z) - P(\zeta)| \leq 2n^{\varepsilon}|z-\zeta|^{\varepsilon}, \ 0 < \varepsilon \leq 1. \quad \text{Qu. e. d.}$$

Es sei jetzt

$$1 < q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$$

eine wachsende Folge von Primzahlen, die den Bedingungen genügen:

$$q_{\nu-1} \equiv 1 \pmod{4}, \ q_\nu \geq (q_1 + q_2 + \cdots + q_{\nu-1}), \ \nu = 2, 3, 4, \cdots \tag{12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\log q_\nu} \text{ konvergiere.} \tag{12'}$$

---

[1]) Man vgl. etwa meine Arbeit: Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe, Math. Zeitschr. 1, 1918, S. 163—183; insb. S. 181.

[2]) Man vgl. z. B. Enzykl. d. math. Wiss., Bd. II, Teil I, S. 68.

Ich setze zur Abkürzung

$n_0 = 0,\ n_\nu = q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu,\ g_{q_\nu}(z) = G_\nu(z),\ \nu = 1, 2, 3, \ldots,$

dann ist die unendliche Reihe

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\frac{G_1(z)}{q_1^\alpha \beta_1} + z^{2n_1-1}\frac{G_2(z)}{q_2^\alpha \beta_2} + z^{2n_2-1}\frac{G_3(z)}{q_3^\alpha \beta_3} + \cdots \\ &\qquad = \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{2n_{\nu-1}-\nu+1}\frac{G_\nu(z)}{q_\nu^\alpha \beta_\nu}, \end{aligned}$$

wobei $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \cdots$ positive Zahlen sind, für $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergent. Es ist nämlich

$$z^{2n_{\nu-1}-\nu+1}\frac{G_\nu(z)}{q_\nu^\alpha \beta_\nu} = z^{2n_{\nu-1}-\nu+1}\frac{g_{q_\nu}(z)}{q_\nu^\alpha \beta_\nu} = U_\nu(z)$$

ein Polynom vom Grade $2n_{\nu-1} - \nu + 1 + 2q_\nu - 2 = 2n_\nu - \nu - 1$, und nach Hilfssatz 3 ist

$$|U_\nu(z)| \leq \frac{1}{q_\nu^\alpha \beta_\nu},\quad |z| \leq 1,\quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{q_\nu^\alpha \beta_\nu}$ wegen (12′) für jedes $\alpha > 0$ konvergiert.

Die Reihe (13) ist, wenn man die $U_\nu(z)$ ausführlich anschreibt und nicht voneinander trennt, eine Potenzreihe, die für $|z| < 1$ konvergiert und für $|z| \leq 1$ eine stetige Funktion $G(z)$ darstellt:

$$\begin{aligned} G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu = \frac{C_0^{(q_1)}}{q_1^\alpha \beta_1} + \frac{C_1^{(q_1)}}{q_1^\alpha \beta_1} z + \cdots + \frac{C_{2q_1-2}^{(q_1)}}{q_1^\alpha \beta_1} z^{2q_1-2} \\ + \frac{C_0^{(q_2)}}{q_2^\alpha \beta_2} z^{2q_1-1} + \cdots \end{aligned}$$

Nun ist

$$G(z) - G(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [U_\nu(z) - U_\nu(\zeta)],\quad |z| \leq 1,\quad |\zeta| \leq 1,$$

und aus Hilfssatz 4 folgt mit Rücksicht auf Ungl. (12)

$$(\mathrm{U})\quad |U_\nu(z) - U_\nu(\zeta)| \leq 2|z-\zeta|^\varepsilon \frac{(2n_\nu)^\varepsilon}{q_\nu^\alpha \beta_\nu} < \frac{8|z-\zeta|^\varepsilon}{q_\nu^{\alpha-\varepsilon}\beta_\nu},\quad \nu = 1, 2, 3, \cdots$$

Da nun für $a > \varepsilon$ die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^{a-\varepsilon}\beta_\nu}$ konvergiert, so genügt die Funktion $G(z)$ für jedes $\varepsilon < a$ einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade ε im Kreise $|z| \leq 1$. Ist außerdem $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\nu}$ eine konvergente Reihe, so genügt $G(z)$ sogar einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade a. Hier darf auch $a = 1$ sein. Andererseits ist für $\varkappa > 0$ nach Hilfssatz 3

$$\sum_{\mu=2n_{\nu-1}-\nu+1}^{2n_\nu-\nu-1} |\gamma_\nu|^\varkappa = \left(|C_0^{(q_\nu)}|^\varkappa + \cdots + |C_{2q_\nu-2}^{(q_\nu)}|^\varkappa\right) \frac{1}{q_\nu^{a\varkappa}\beta_\nu^\varkappa}$$

$$= \frac{1}{q_\nu^{a\varkappa+3/2\varkappa}\beta_\nu^\varkappa}\left[1 + 2^\varkappa + 3^\varkappa + \cdots + (q_\nu - 1)^\varkappa\right] = S_\nu$$

und

$$1 + 2^\varkappa + \cdots + (q_\nu - 1)^\varkappa > \int_0^{q_\nu - 1} x^\varkappa\, dx = \frac{(q_\nu - 1)^{\varkappa+1}}{\varkappa + 1}, \quad \varkappa > 0.$$

Also ist

$$S_\nu > \frac{(q_\nu - 1)^{\varkappa+1}}{q_\nu^{\varkappa(a+3/2)}\beta_\nu^\varkappa} > \frac{1}{2^{\varkappa+1}} \cdot \frac{q_\nu^{-\varkappa(a+1/2)+1}}{\beta_\nu^\varkappa}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

setzt man nun

$$\beta_\nu = \log q_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

so genügt mit Rücksicht auf die Bedingung (12′) die Funktion $G(z)$ einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade a im Kreise $|z| \leq 1$, während andererseits für

$$1 - \varkappa(a + \tfrac{1}{2}) > 0, \quad \text{d. h.}\ \varkappa < \frac{2}{2a+1} \qquad \lim_{\nu\to\infty} S_\nu = +\infty$$

wird, also die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu|^\varkappa$ für jedes $\varkappa < \frac{2}{2a+1}$ divergiert.

Es ist also

$$\gamma(a) \geq \frac{2}{2a+1}, \quad 0 < a \leq 1. \quad \text{Qu. e. d.}$$

Da aber im § 1 gezeigt wurde, daß $\gamma(\alpha) \leqq \frac{2}{2\alpha+1}$ ist, so hat man das Resultat

$$(14) \qquad \gamma(\alpha) = \frac{2}{2\alpha+1}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Offen bleibt dabei die Frage, wie sich die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^{\frac{2}{2\alpha+1}}$ verhält. Ich zeige, daß im Falle $\alpha > \frac{1}{2}$ diese Reihe auch noch divergieren kann. Jetzt wird nämlich für $\varkappa = \frac{2}{2\alpha+1} < 1$

$$S_\nu > \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\beta_\nu}\right)^{\frac{2}{2\alpha+1}}, \qquad \nu = 1, 2, 3 \ldots$$

Nun setze ich

$$\beta_\nu = \nu^{1/2(2\alpha+1)}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

offenbar ist jetzt $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\nu}$ konvergent, also genügt $G(z)$ einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade α; dagegen ist

$$S_\nu > \frac{1}{4\nu},$$

also $\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^{\frac{2}{2\alpha+1}}$ divergiert. Hierbei ist $0 < \alpha < 1$.

Zusammenfassend gilt der Satz II:

Wenn die Funktion

$$f(x) \sim \frac{a_\nu}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

einer Lipschitzschen Bedingung vom Grade α genügt:

$$(3'') \qquad |f(x) - f(u)| \leqq \lambda\, |x-u|^\alpha, \text{ wobei } 0 < \alpha < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu - i b_\nu|^\varkappa = \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^\varkappa$ für jedes $\varkappa > \frac{2}{2\alpha+1}$ konvergent; dagegen gibt es eine Funktion $f(x)$, so daß sogar die zugehörige Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - i b_\nu) z^\nu = G(z)$ der Lipschitzschen Bedingung

$$|G(z) - G(\zeta)| \leq \lambda |z - \zeta|^\alpha, \quad |z| \leq 1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

genügt und die Reihe $\Sigma |c_\nu|^\varkappa$ für jedes $\varkappa < \dfrac{2}{2\alpha + 1}$ divergiert. Ist $\alpha > \frac{1}{2}$, so kann schon die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^{\frac{2}{2\alpha+1}}$ divergieren.

Ob z. B. für $\alpha = \frac{1}{2}$ die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|$ divergieren kann, ist eine offene Frage.

§ 3. Zusätze.

1. Die Formel (14) gilt auch für $\alpha = 1$, denn es ist offenbar

$$\gamma(1) \leq \gamma(\alpha) \text{ für } 0 < \alpha < 1,$$

also

$$\gamma(1) \leq \tfrac{2}{3}.$$

Andererseits folgt aus Satz II

$$\gamma(1) \geq \tfrac{2}{3};$$

also ist

$$\gamma(1) = \tfrac{2}{3}.$$

2. Satz II läßt sich verschärfen durch Untersuchung der Konvergenz bzw. Divergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\tau |c_\nu|^\varkappa = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\tau (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{\varkappa}{2}}, \quad 0 < \varkappa < 2, \quad \tau \geq 0.$$

Man setze in Ungleichung (6)

$$d_\nu = \nu^{\frac{2\tau}{2-\varkappa}}, \quad \delta_\nu = \frac{|c_\nu|^\varkappa}{\nu^{\frac{\varkappa\tau}{2-\varkappa}}}, \quad p = \frac{2}{\varkappa} > 1;$$

dann erhält man

$$\sum_{\nu=n_1}^{n_2} \nu^\tau |c_\nu|^\varkappa \leq \left(\sum_{\nu=n_1}^{n_2} |c_\nu|^2\right)^{\frac{\varkappa}{2}} \left(\sum_{\nu=n_1}^{n_2} \nu^{\frac{2\tau}{2-\varkappa}}\right)^{\frac{2-\varkappa}{2}}$$

$$< \left(\sum_{\nu=n_1}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{\frac{\varkappa}{2}} \left(\sum_{\nu=1}^{n_2} \nu^{\frac{2\tau}{2-\varkappa}}\right)^{\frac{2-\varkappa}{2}}.$$

Nun ist für $\varrho \geqq 0$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\varrho} < \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\nu}^{\nu+1} x^{\varrho}\, dx = \int_{1}^{n+1} x^{\varrho}\, dx = \frac{1}{\varrho+1}\left[(n+1)^{\varrho+1} - 1\right],$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\varrho} < (n+1)^{\varrho+1};$$

hieraus und aus der Formel (8) folgt für

$$n_1 = 2^{\mu}, \quad n_2 = 2^{\mu+1} - 1, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

die Ungleichung

$$\sum_{\nu=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1} \nu^{\tau} \,|\, c_\nu \,|^{\varkappa} < \frac{(2\,\lambda^2\, C^2)^{\frac{\varkappa}{2}}}{2^{\mu\alpha\varkappa}} \cdot 2^{(\mu+1)(2\tau+2-\varkappa)1/2} < \frac{\lambda^{\varkappa} C^{\varkappa}}{2^{\mu\alpha\varkappa}}\, 2^{\mu\left(\tau+1-\frac{\varkappa}{2}\right)};$$

also schließlich:

$$\sum_{\nu=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1} \nu^{\tau} \,|\, c_\nu \,|^{\varkappa} < \frac{\lambda^{\varkappa}\, C^{\varkappa}}{2^{\mu\left(\alpha\varkappa+\frac{\varkappa}{2}-\tau-1\right)}}, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Hieraus folgt unmittelbar die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\tau} \,|\, c_\nu \,|^{\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\tau} (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{\varkappa}{2}},$$

falls

$$\tau \geqq 0, \quad 0 < \varkappa < 2, \quad \alpha\varkappa + \frac{\varkappa}{2} > \tau + 1$$

ist. Dies heißt

$$0 \leqq \tau < \varkappa\, \frac{2\alpha+1}{2} - 1, \quad 0 < \varkappa < 2;$$

offenbar muß dabei

$$\varkappa > \frac{2}{2\alpha+1}, \quad \text{d. h.} \quad \varkappa > \gamma(\alpha) \ \text{sein.}$$

3. Eine weitere Verschärfung des Satzes II besteht darin, daß die Bedingung (3″) durch die erheblich allgemeinere

$$(15)\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx \leqq 8\lambda^2 t^{2\alpha} \text{ für } t>0$$

ersetzt wird.

Es kommt ersichtlich nur darauf an, zu zeigen, daß auch unter dieser Voraussetzung die Beziehung (8) gilt, die ihrerseits aus der Ungleichung

$$(16)\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\sigma_n(x)-f(x)]^2\,dx \leqq \frac{2\lambda^2 C^2}{n^{2\alpha}},\quad n=1,2,3,\ldots$$

(C eine Konstante, die nur von α abhängt) folgt.

Um nun diese Ungleichung zu beweisen, setze ich nach Formel (L)

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}[f(x+2t)$$
$$+f(x-2t)-2f(x)]\,dt,$$

und wende hierauf die bekannte Ungleichung

$$\left(\int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx\right)^2 \leqq \int\limits_a^b \varphi(x)^2\,dx\cdot\int\limits_a^b \psi(x)^2\,dx,\quad b>a$$

an. Dann wird

$$(\sigma_n(x)-f(x))^2 \leqq \frac{1}{n^2\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2-\alpha}dt\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2+\alpha}[f(x+2t)$$
$$+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dt;$$

nun ist

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2-\alpha}dt<\frac{\pi^{2-\alpha}}{2^{2-\alpha}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^{2-\alpha}dt<\frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^{\infty}\frac{(\sin\tau)^{2-\alpha}\cdot n^{2-\alpha}}{n\,\tau^{2-\alpha}}\,d\tau$$
$$<\frac{\pi^2}{4}n^{1-\alpha}\left[1+\int\limits_1^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha}}\right]<\frac{\pi^2}{2}\,\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha},\quad 0<\alpha<1,\quad n=1,2,3,\ldots$$

Also wird

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\sigma_n(x)-f(x)]^2\,dx < \frac{1}{2\pi(1-\alpha)n^{1+\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2+\alpha}\int_0^{2\pi}[f(x+2t)\right.$$

$$\left. + f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx\right\}dt,$$

und mit Rücksicht auf die Bedingung (15) wird

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\sigma_n(x)-f(x)]^2\,dx < \frac{8\lambda^2}{(1-\alpha)n^{1+\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2+\alpha} t^{2\alpha}\,dt.$$

Ferner ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{2+\alpha} t^{2\alpha}\,dt < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2+\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin nt)^{2+\alpha}}{t^{2-\alpha}}\,dt$$

$$< \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\int_0^{\infty}\frac{(\sin\tau)^{2+\alpha}\cdot n^{2-\alpha}}{n\,\tau^{2-\alpha}}\,d\tau < 8\,n^{1-\alpha}\left[1+\int_1^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha}}\right] < 16\,\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Daher wird schließlich

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\sigma_n(x)-f(x)]^2\,dx < \frac{128\lambda^2}{(1-\alpha)^2 n^{2\alpha}},\quad n=1,2,3,\ldots,$$

womit die Ungleichung (16) bewiesen ist $\left(C=\frac{8}{1-\alpha}\text{ gesetzt}\right)$.

Es ist bemerkenswert, daß die Bedingung (15) sich durch die Fouriersche Reihe von $f(x)$ leicht ausdrücken läßt. Es ist nämlich

$$f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\sim -2\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\cos 2\nu t)(a_\nu\cos\nu x$$

$$+\,b_\nu\sin\nu x),\quad 1-\cos 2\nu t = 2\sin^2\nu t,$$

also

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx = 16\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)\sin^4\nu t.$$

Wir haben somit den, auch direkt beweisbaren, Satz gewonnen: Satz III.

Ist für ein positives $\alpha < 1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \sin^4 \nu t \leqq \lambda^2 t^{2\alpha} \text{ für } t > 0,$$

λ eine Konstante,

so ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{\varkappa}{2}}$ für $\varkappa > \frac{2}{2\alpha + 1}$ konvergent.

Ich beweise, daß es andererseits Funktionen $f(x)$ gibt, für die sogar

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \sin^2 \nu t \leqq \lambda^2 t^{2\alpha}, \quad t > 0$$

gilt, während $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{1}{2\alpha+1}}$ divergiert; dabei ist α eine Zahl des Intervalles $0 < \alpha \leqq 1$.

Setzt man nämlich für die in § 2 definierte Funktion $G(z)$ wiederum

$$\beta_\nu = \nu^{\alpha + 1/2}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

so ist, wie schon gezeigt wurde, $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2)^{\frac{1}{2\alpha+1}}$ divergent. Andererseits ist $G(z)$ eine für $|z| \leqq 1$ stetige Funktion und da in den Polynomen $U_\nu(z)$ keine gemeinsame Potenz von z vorkommt, wird

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(e^{i(x+2t)}) - G(e^{ix})|^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |U_\nu(e^{i(x+2t)}) - U_\nu(e^{ix})|^2 \, dx.$$

Nun ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big|\sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu e^{i\nu(x+2t)} - \gamma_\nu e^{i\nu x})\Big|^2 dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu|^2 \, |1 - e^{2i\nu t}|^2$$

$$= 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu|^2 \sin^2 \nu t,$$

und aus der Ungleichung (U) folgt für $\varepsilon = \alpha$

$$|U_\nu(e^{i(x+2t)}) - U_\nu(e^{ix})|^2 \leq \frac{8^2\, |1 - e^{2it}|^{2\alpha}}{\nu^{2\alpha+1}},$$

also

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |U_\nu(e^{i(x+2t)}) - U_\nu(e^{ix})|^2\, dx \leq 8^2\, 4^\alpha \sin^{2\alpha} t \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2\alpha+1}}.$$

Somit wird

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu|^2 \sin^2 \nu t < 8^2\, t^{2\alpha} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2\alpha+1}}. \quad \text{Qu. e. d.}$$

Schlußbemerkung.

Aus unserem Resultat folgt insbesondere:

Genügt die Funktion $f(x)$ für ein $\alpha > \frac{1}{2}$ der Bedingung (15), so ist sie durchweg stetig.

Es wäre von Interesse, hierfür einen direkten Beweis zu geben.