

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
PHILOSOPHISCH-HISTORISCHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE · JAHRGANG 2005, HEFT 3

PAUL KUNITZSCH

Zur Geschichte
der ‘arabischen’ Ziffern

Vorgetragen in der
Gesamtsitzung vom 10. Juni 2005

MÜNCHEN 2005

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEIM VERLAG C. H. BECK MÜNCHEN

ISSN 0342-5991
ISBN 3 7696 1634 0

© Bayerische Akademie der Wissenschaften München, 2005
Gesamtherstellung: Druckerei C. H. Beck Nördlingen
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier
(hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff)
Printed in Germany

Die Notation von Zahlen geschieht heute in weiten Teilen der Welt einheitlich mit den Ziffern, die wir 'arabische Ziffern' nennen (im Gegensatz zu den daneben für bestimmte Gelegenheiten ebenfalls noch benutzten 'römischen Ziffern').

Bevor wir uns der Geschichte dieser arabischen Ziffern zuwenden, sei ein kurzer Blick gestattet auf die Form der Zahlennotation vor deren Bekanntschaft in den hier im Blickfeld stehenden Kulturbereichen: der europäischen Antike, der arabisch-islamischen Welt und dem europäischen Mittelalter.

Zahlen konnten natürlich stets auf einfachste Weise voll in Worten ausgeschrieben werden. Daneben wurden im römisch-lateinischen Bereich die römischen Ziffern eingeführt, die von der Antike bis ins Mittelalter gebräuchlich waren und die auch heute noch für besondere Zwecke verwendet werden. Im griechischen Raum gab es eine andere Kurzform der Zahlenschreibung: die 'alphanumerische' Notation, d.h. die Darstellung von Zahlen durch die Buchstaben des Alphabets.

Wie bekannt, haben die Griechen das Buchstabenalphabet im 8./7. Jh. v. Chr. aus dem Nordwestsemitischen („von den Phoinikiern“) übernommen. Dabei wurden wegen der unterschiedlichen Lautverhältnisse einigen Zeichen andere Lautwerte zugewiesen, andere Zeichen verschwanden ganz aus dem griechischen Gebrauchsalphabet. Für die Zahlennotation wurden jedoch drei ansonsten ungebräuchliche semitische Buchstaben mitverwendet.

Die griechische alphanumerische Zahlennotation ist dezimal orientiert. In der Abfolge des Alphabets bezeichnen die Buchstaben die Einer 1–9, die Zehner 10–90 und die Hunderter 100–900. Dezimales Denken scheint beiden Kulturräumen, dem indogermanischen und dem semitischen, grundsätzlich zu eigen gewesen zu sein. In beiden Bereichen gibt es eigene Bezeichnungen für die Zahlen von eins bis zehn sowie für hundert und tausend. Die dazwischen oder darüber liegenden Zahlenbezeichnungen werden

aus Ableitungen und Zusammensetzungen der Grundwörter gebildet. Dieses dezimale Prinzip äußert sich dann auch in der alphanumerischen Buchstaben-Zahlen-Reihe im semitischen und im griechischen Bereich.

Die Frage, ob die Benutzung des Alphabets zur Zahlennotierung zuerst von den Semiten oder von den Griechen eingeführt wurde, ist im Lichte der vorliegenden Dokumente wohl für die Griechen zu entscheiden. Während es Belege für die alphanumerische Notation im Semitischen erst im Althebräischen etwa seit dem 2. Jh. v. Chr. gibt¹, datiert das älteste inschriftliche griechische Vorkommen von ca. 550–530 v. Chr.² In der Folge wird die alphanumerische Zahlennotation auch in den Schriften der griechischen Astronomen, Geographen und Mathematiker verwendet, besonders natürlich in deren oft umfangreichen Zahlentabellen, wo der Platz für die Notierung äußerst beengt war.

Auffällig ist, daß in der griechischen Zahlenbuchstabenreihe die drei semitischen Zeichen waw (ϡ = 6), koppa/qof (Ϟ = 90) und sampi/šade (Ϡ = 900) verwendet werden, die im normalen griechischen Alphabet obsolet geworden waren. Den Grund dafür möchte man erblicken in der stereotypen Alphabetreihe aus der Frühzeit der griechischen Übernahme des semitischen Alphabets, die diese Buchstaben noch mitenthält und für die es inschriftliche Zeugen von ca. 700 bis 420 v. Chr. gibt³. In Anlehnung an derartige Alphabetreihen („Abecedarien“) mag die alphanumerische Reihe gebildet worden sein. Für die Zahlenwerte der Buchstaben und die Abweichungen zwischen der griechischen Reihe und der semitischen Alphabetfolge vgl. unten Tafel 1.

1 Alphanumerische Zahlennotation gibt es weder in phönizischen noch in aramäischen Inschriften; dort werden andere Formen der Zahlennotation verwendet (diese Angaben verdanke ich Herrn Wolfgang Röllig, Tübingen). Im Hebräischen ist diese Notation seit dem 2. Jh. v. Chr. vorhanden, „wahrscheinlich unter hell.[enistischem] Einfluß“, Meyer 1966, 43f.

2 Streckenmarkierungen in der Wasserleitung des Eupalinos in Samos, um 550–530 v. Chr.; cf. Kienast 1995, 148–164. Es erscheinen die Einer 1–9, die Zehner 10–90 und die Hunderter 100–300. Die Hinweise auf die griechischen Inschriften verdanke ich Herrn Walter Burkert, Zürich/Uster.

3 25 Belege bei Jeffery 1990, Plates 10,20; 18,2; 20,16; 39,66; 48,18–23; 50,19; 53,15; 56,23; 79,6 und 7.

Der griechischen alphanumerischen Zahlennotation war ein langes Nachleben im Mittelalter und darüber hinaus beschieden. Auf der einen Seite übernahmen die Araber bei ihren Übersetzungen wissenschaftlicher griechischer Texte (8.–10. Jh.) die alphanumerische Notation, wofür sie – in Abweichung von ihrem eigenen Schriftalphabet – die altsemitische Buchstabenfolge beibehielten. Wie die Griechen, die nach dem letzten semitischen Buchstaben $t = 400$ (bei den Griechen, wegen Auslassung des $\text{šade} = 90$ an der entsprechenden Stelle, $\tau = 300$) die ihnen eigenen Buchstaben Ypsilon bis Omega plus das oben ausgefallene šade/sampi anfügten und so bis 900 reichten, fügten die Araber hinter $t = 400$ die zusätzlichen Buchstaben ihres Alphabets an und reichten damit bis 1000. (Zu beachten ist, daß im arabischen Westen die Reihe abgeändert ist und einigen Buchstaben abweichende Zahlenwerte zugeordnet sind; vgl. unten II und Tafel 1). Nach den vier ersten Buchstaben nennt man die arabische Reihe die *abğad*-Reihe. Die *abğad*-Notierung lebt in der arabischen Welt bis heute weiter und findet Verwendung analog zu unserer heutigen Anwendung der römischen Ziffern.

Neben dieser alphanumerischen Notation in arabischen Buchstaben erhielt sich aber auch die Notation in griechischen Buchstaben. Nach der islamischen Eroberung der Länder im östlichen Mittelmeerraum hatten die Araber für die ersten rund hundert Jahre noch das öffentliche Rechnungswesen der Regionen im alten System beibehalten. Zumal in Ägypten, wo das Koptische die griechische Schrift übernommen hatte, blieb die griechische alphanumerische Zahlennotierung in Gebrauch, wobei die Schreibung der Zeichen unter dem Einfluß des Koptischen gewisse kursive Abwandlungen erfuhr. Durch die Araber wurde diese griechisch-koptische Notation in den arabischen Westen weitergetragen, wo sie in bestimmten Sachbereichen (Verwaltung, Justiz, Handelswesen) bis ins 18. Jahrhundert ein Fortleben fand, hier dann bezeichnet als *rūmī*-Ziffern (*rūmī* = griechisch-byzantinisch) oder 'chiffres de Fès'.

Unerkannt, gingen diese *rūmī*-Ziffern auch in lateinische Handschriften über. Besonders bekannt wurde so z.B. die Handschrift MDU 604 des Diözesanmuseums in Urgell, die patristische Texte enthält und auf 938 datiert ist. Lange Zeit hatte man angenom-

men, in gewissen zuvor unbekannten Zahlzeichen, die dort neben römischen Zahlen die einzelnen Kapitel und Abschnitte markieren, die ältesten arabischen Ziffern in einem europäischen Text vor sich zu haben. Erst kürzlich wurde nun erkannt, daß diese Zahlen vielmehr alphanumerische Ziffern aus der griechisch-koptischen Tradition – sicher durch die Araber vermittelt – darstellen⁴. Nicht nur im westarabischen Raum (al-Andalus, Nordafrika), auch im christlichen Teil Spaniens lebten die griechisch-koptischen alphanumerischen Zahlzeichen noch viele Jahrhunderte weiter⁵.

Eine völlige Revolutionierung der Zahlennotation wurde, wohl im 5. oder 6. Jahrhundert, in Indien gefunden. Mit nur neun Zeichen – für die Einer 1–9 – sowie einem gesonderten Zeichen (unsere Null) für eine ‘leere’ Dezimalstelle, auf der keines der neun Zeichen steht, wurde es so möglich, alle Zahlen beliebiger Größe in einem streng dezimalen Stellensystem niederzuschreiben. Dieses neuartige System der Zahlenschreibung verbreitete sich schnell sowohl ost- wie westwärts. Inschriften aus dem ost- und südostasiatischen Raum des 7. und 8. Jahrhunderts zeigen bereits diese Notation⁶. Im vorderen Orient kennt und rühmt Bischof Severus Sebokht von Qinnasrīn (Syrien) 662 das indische System der neun Zahlzeichen (ohne allerdings diese selbst in seiner Schrift anzuführen) und nennt die Inder ausdrücklich als Beispiel dafür, daß nicht alle großen Errungenschaften der Wissenschaft von den Griechen stammen, sondern daß auch andere Völker dazu wertvolle Beiträge geliefert haben⁷.

In ganz ähnlicher Weise preist übrigens ein sekundärer Einschub in den *Etymologiae* von Isidor von Sevilla (um 570–636) im Codex Vigilanus 976 das ingenium der Inder (wiederholt 992 im Codex Emilianus), wobei hier nun auch die neun Ziffern – in ara-

4 Comes 2002–03 und die dort zitierte weitere Literatur.

5 Labarta–Barceló 1988.

6 Cf. u. a. van der Waerden–Folkerts 1976, 46f.; Gupta 1983, 24. Die indische Inschrift von Gwalior (AD 870) bei van der Waerden–Folkerts 1976, 47, zeigt sehr klar die Zahlen 270 (mit einem kleinen Kreis als Null), 933 und 187.

7 Reich 2000; zum indischen Zahlensystem besonders S. 486.

bischer Reihenfolge, von rechts nach links – wiedergegeben werden⁸.

Die arabisch-islamische Welt dürfte im 8. Jahrhundert mit dem indischen Ziffernsystem und den damit verbundenen Rechenmethoden bekannt geworden sein, sei es auf im einzelnen nicht faßbaren Wegen über Persien⁹, sei es im Anschluß an jene indische Gesandtschaft an den Bagdader Kalifenhof (154 d. Hġra/771 oder 156/773), die als Geschenk ein indisches astronomisches Handbuch (*Siddhānta*) mitbrachte, das kurz darauf auf Befehl des Kalifen ins Arabische übersetzt wurde. Derartige Handbücher enthielten üblicherweise auch Abschnitte über das Rechnen, damit die Benutzer die Parameter der darin enthaltenen Tabellen nach Bedarf umrechnen konnten. Hieraus lernten die Araber übrigens auch den Sinus¹⁰ kennen, während in der griechischen Astronomie (Ptolemäus usw.), die sie sich durch Übersetzungen dann ebenfalls weitgehend aneigneten, die Sehne verwendet war.

In der Folge entstand im arabischen Raum eine eigene Gattung von Schriften „über das indische Rechnen“ (*fī l-ḥisāb al-hindī*). Sezgin 1974 verzeichnet bis zur Mitte des 11. Jahrhunderts fünfzehn einschlägige Titel. Zu den ältesten und bekanntesten dieser Werke gehört die Schrift von Muḥammad ibn Mūsā al-Ḥwārizmī (Bagdad, um 820), entstanden also fünfzig oder mehr Jahre nach dem arabischen Kontakt mit dem indischen Ziffern- und Rechensystem. Al-Ḥwārizmīs Schrift ist im Original nicht erhalten; ihr Inhalt läßt sich anhand von Bearbeitungen der lateinischen Übersetzung des 12. Jahrhunderts, die im Original ebenfalls nicht erhalten ist, einigermaßen rekonstruieren. Erhalten und ediert sind indes die Schriften von al-Uqlīdisī (Damaskus, 952–53), von

8 Siehe die Abbildungen in van der Waerden–Folkerts 1976, 54–55. Beide Handschriften sind jetzt in der Real Biblioteca de San Lorenzo, El Escorial, der Vigilanus als Ms. d-I-2, der Emilianus als d-I-1.

9 So Sezgin 1974, 7–24; zum *Siddhānta*, S. 199 f.

10 Arab. *ḡ-γ-b*, meist aufgefaßt als das arabische Appellativ *ḡayb*, „Hemdöffnung über der Brust, Busen“, und so dann auch bei den lateinischen Übersetzern des Mittelalters *sinus*, aber eigentlich Transkription des zugrunde liegenden indischen Wortes und danach besser *ḡib* zu vokalisieren (ohne Bedeutung als arabisches Wort).

Kūšyār ibn Labbān (2. Hälfte des 10. Jahrhunderts) und von ‘Abd al-Qāhir al-Baġdādī (gest. 1037 in Isfarāyīn, Iran)¹¹.

Alle diese sind nach dem gleichen Schema aufgebaut: zu Beginn werden die neun Ziffern, das dezimale Stellensystem und die Bedeutung der Null ausführlich und anhand von Beispielen erklärt. Dann folgen Kapitel über die Rechenoperationen, Addition, Duplikation, Subtraktion, Multiplikation, Division, Quadrierung, Wurzelziehen usw. Festzuhalten ist, daß in all diesen Schriften das System stets auf „die Inder“ zurückgeführt wird.

Es erscheint nach all den genannten testimonia außer Zweifel, daß die neun Ziffern und die Null sowie das Rechnen damit vor dem 7. Jahrhundert in Indien erfunden wurden und sich von daher in die umgebenden Kulturen verbreiteten. Die verschiedenen abweichenden Theorien aus den letzten zwei Jahrhunderten über die Entstehung dieses Systems dürfen daher heute als erledigt gelten. Als Beispiel nenne ich hier nur die Annahme, die indischen Ziffern seien in spätantiker Zeit durch Kaufmannskontakte nach Alexandria gelangt, von da weiter durch die „Neupythagoreer“ und über Boethius nach Spanien, wo sie dann dort die Araber nach der Eroberung von den Bewohnern der Iberischen Halbinsel kennengelernt hätten¹². Durch den Nachweis, daß die bewußte dem Boethius zugeschriebene Schrift erst in Westeuropa im 11. Jahrhundert (also nach dem Eindringen der indisch-arabischen Ziffern dort) verfaßt wurde¹³, ist diese Theorie gänzlich in sich zusammengefallen.

Wenn wir uns nun der Überlieferungsgeschichte der Ziffern selbst zuwenden, so müssen wir drei Bereiche getrennt betrachten: es gilt, die Geschichte der Ziffern im arabischen Osten, dann ihre Geschichte im arabischen Westen (Nordafrika, muslimisches Spanien) und schließlich ihre Geschichte in Europa zu verfolgen.

11 Al-Uqlīdisī: siehe Saidan 1973 und 1978; Kūšyār: siehe Levey–Petrucek 1965; al-Baġdādī: siehe Saidan 1985. Die Handschriften dieser Texte sind allesamt jünger: al-Uqlīdisī 1157 oder 1186, Kūšyār 1283–84, al-Baġdādī vor 1232–33.

12 Vertreten u. a. auch durch F. Woepcke 1863; cf. Kunitzsch 2003, 12.

13 Folkerts 1968, 1970.

I

Der Ort des Kennenlernens und der Übernahme der indischen Ziffern und der damit verbundenen Rechenmethoden war, wie gesagt, der arabische Osten mit der Kalifenresidenz Bagdad als Zentrum. Die hier entwickelten Schreibformen der Ziffern blieben im östlichen arabisch-islamischen Raum, von Ägypten bis Mittelasien, bis auf die heutige Zeit in Gebrauch. Allerdings wurden die „alten“ Formen der 4, 5 und 0 im Lauf der Zeit abgeändert: die Null, einst ein kleiner Kreis, wurde zu einem Punkt; die Vier nahm die Form der alten Fünf an ohne den Aufstrich rechts; die Fünf wurde zu einem kleinen Kreis (vgl. Tafel 2). Wann diese Änderungen eintraten, ist noch nicht genau ermittelt. Wahrscheinlich geschah das erst im 17. Jahrhundert oder später, nicht auf einen Schlag, sondern in allmählichem Übergang. Historiker können daher leicht Irrtümer begehen, wenn sie in Dokumenten die Ziffern „alten“ Stils im Sinne des heutigen Gebrauchs auffassen¹⁴.

Nach übereinstimmenden Angaben der arabischen Arithmetiker wurden die Ziffern und die Rechenoperationen auf einer mit Staub (*ḡubār*, *turāb*) bedeckten Rechentafel (*taḥt*, lat. *tabula*) mit einem Griffel (*mīl*) niedergeschrieben. Im Verlauf der Operationen wurden Zwischenergebnisse wieder gelöscht (*maḥw*, *delere*). Al-Uqlīdisī fügt seinem Traktat eigens ein Kap. IV an über das Rechnen „ohne Tafel und Auswischen, sondern mit Tinte und Pergament“ (*bi-ḡayr taḥt wa-lā maḥw bal bi-dawāt wa-qirtās*). Dieses arabische Rechenbrett, das offenbar im späten 10. Jahrhundert durch die Notierung auf Pergament abgelöst wurde, ist nicht identisch mit dem westlichen Abacus, auf dem ja nicht geschrieben wurde, sondern auf dem Rechensteine in vorgezeichnete dezimale Spalten gesetzt und verschoben wurden¹⁵. Die praktische Anwendung des

14 So ist z.B. bei Serageldin–Ziedan 2002 auf Abb. 18 im Kolophon einer Handschrift des *Kitāb al-manṣūrī* von ar-Rāzī die Jahreszahl 590 (Hiġra = 1194) nach neuem Stil als 495 (= 1101–02) mißdeutet. (Den Hinweis auf diese Stelle verdanke ich Herrn Rainer Degen, München.)

15 Cf. Kunitzsch 2003, 7f.

Staubbretts wird konkret erwähnt in einer Rechenanweisung des Mathematikers und Astronomen as-Siğzī (10. Jh.)¹⁶.

Die Ziffern als solche hießen arabisch *ḥarf* (lat. *littera*) oder *ṣūra* (lat. *figura*), die dezimalen „Stellen“ *manzila*, *martaba* und *rutba* (lat. *mansio*, *differentia*). Ihre Schreibformen scheinen in den ersten Jahrhunderten noch nicht einheitlich festgestanden zu haben. Al-Bağdādī erwähnt, daß „die Iraker“ die 2, 3 und 8 sowie „die Leute“ (*qawm*) die 9 anders schrieben; die älteste lateinische Ḥwārizmī-Bearbeitung notiert, die 5, 6, 7 und 8 hätten abweichende Schreibweisen (hier bleibt allerdings fraglich, ob diese Angabe bereits in al-Ḥwārizmī's Original stand oder ob sie in al-Andalus oder gar erst von dem lateinischen Übersetzer bzw. den Bearbeitern eingefügt wurde¹⁷). In der 1. Hälfte des 11. Jahrhunderts bemerkt al-Bīrūnī (gest. 1048), daß die Ziffernformen in Indien recht verschieden seien und daß die Araber daraus das ihnen am besten Erscheinende ausgewählt hätten; etwa um die gleiche Zeit notiert der Mathematiker an-Nasawī, daß die Formen einiger der neun Zahlzeichen nicht einheitlich feststünden¹⁸.

In den ersten etwa vier Jahrhunderten nach Übernahme des indischen Rechnens blieben die neuen Ziffernformen hauptsächlich auf den engeren Kreis der Facharithmetiker beschränkt, der breiteren Allgemeinheit mögen sie als eine Art Geheimschrift erschienen sein. Selbst in den Schriften der Arithmetiker wurden die vorkommenden Zahlenwerte zumeist in Worten ausgeschrieben, erst dahinter erschien dann zuweilen, mit dem Zusatz „und so sieht das aus“ (*wa-hādīhī ṣūratuhū* o.ä.), die Wiedergabe des betreffenden Wertes in indischen Ziffern.

Die Null wurde von den Arabern (und so anschließend später in den lateinischen Texten) nicht eigentlich den „neun Ziffern“ zugerechnet. Sie war ein Sonderzeichen zur Markierung einer Dezimalstelle, auf der keine der neun Ziffern stand, die also „leer“ war. Diese „Leere“, indisch *śūnya*, nannten die Araber *ṣifr* (daher lat. *cifra* etc., unser „Ziffer“)¹⁹. In früher Zeit scheint diese Leerstelle

16 Cf. Kunitzsch 2003, 8.

17 Cf. Kunitzsch 2003, 7; 13.

18 Cf. Kunitzsch 2003, 7.

19 Cf. Kunitzsch 2003, 4.

durch einen Punkt neben, unter oder über der benachbarten Ziffer bezeichnet worden zu sein²⁰. Bei der arabischen Übernahme des indischen Rechnens hatte die Null aber bereits die Form eines kleinen Kreises²¹, und so blieb sie bis zu ihrer Umformung zu einem Punkt (in dezimaler Stellenpositionierung) in neuerer Zeit (s. o.). Auch außerhalb des arithmetischen Schrifttums war die Null als kleiner Kreis schon früh bekannt²².

Im allgemeinen Leben brachte man den indischen Ziffern und dem Rechnen damit noch lange Zeit kein Vertrauen entgegen. Der gebildete Polygraph al-Ġāhiz (gest. 868) empfiehlt in seinem *Kitāb al-mu'allimīn* („Buch für Lehrer“) den Lehrern, ihren Schülern anstelle des indischen Rechnens lieber das Fingerrechnen (*hisāb al-ʿaqd* oder *al-ʿuqad*) beizubringen, das weder gesprochenes Wort noch Niederschreiben erfordere. Und der Historiker und Literat Muḥammad ibn Yaḥyā aṣ-Ṣūlī (gest. 946) vermeldet in seinem Werk *Adab al-kuttāb* („Die rechte Bildung der Sekretäre“), die Verwaltungssekretäre würden die indische Zahlennotation meiden, da diese Hilfsmittel erfordere; sie dächten, ein System, das keine Hilfsmittel benötige und das ein Mensch ohne jedwedes Instrument nur mit seinen Gliedmaßen bewältigen könne, sei besser geeignet, Diskretion einzuhalten und ihre Würde zu wahren; dieses System sei das Fingerrechnen, auf das sie sich beschränkten²³.

Als älteste bekannte Zahl in (ost-)arabischen Ziffern gilt bisher die Jahreszahl 260 (Hiġra = 873–74) in einem Papyrus aus Ägypt-

20 Der Bagdader Buchhändler und -kenner Ibn an-Nadīm bespricht in seinem *Fihrist* (um 987) die Zahlennotation der Inder. Dabei notiert er, ungeachtet der vorangehenden arabischen arithmetischen Fachliteratur, die Null immer noch als Punkt. Obendrein erkennt er offenbar nicht den Unterschied zwischen der neuen indischen Ziffernotation und der traditionellen arabischen alphanumerischen Notation; cf. Kunitzsch 2003, 4.

21 Al-Ḥwārizmī, lat. *circulus parvus in similitudine o littere* (Folkerts 1997, 32, lin. 117–118); al-Uqlīdīst, *dāʿira wa-hiya allatī yusammihā ahl hādihī ṣ-ṣināʿa ṣifran* („ein kleiner Kreis, den die Fachleute *ṣifr* nennen“); al-Baġdādī, *dawāʾir tusammā aṣṣāʾir* („Kreise, die *aṣṣāʾir* [Plural von *ṣifr*] genannt werden“).

22 Der Historiker al-Yaʿqūbī beschreibt 889 die Null (*ṣifr*) als „kleinen Kreis“ (*dāʿira ṣaġīra*), ebenso der Enzyklopädist Muḥammad ibn Aḥmad al-Ḥwārizmī um 980 die Nullen (*aṣṣāʾir*) als „kleine Kreise“ (*dawāʾir ṣiġār*); cf. Kunitzsch 2003, 4.

23 Cf. die Zitate bei Kunitzsch 2003, 4f.

ten – falls das wirklich eine Jahreszahl ist²⁴. Die 2 und die 0 in dieser Zahl unterscheiden sich stark von den bekannten zeitgenössischen Formen (die Null ist ein dicker Punkt auf der Grundlinie der Zeile), nur die 6 ähnelt etwas mehr dem gängigen Typ.

Beispiele aus den Jahren 969–972 scheint die Handschrift Paris, BnF ar. 2457 zu bieten. Elf der rund fünfzig darin versammelten zumeist mathematischen Texte nennen im Kolophon als Schreiber den bekannten Mathematiker und Astronomen Aḥmad ibn Muḥammad ibn ‘Abd al-Ġalīl (as-Siġzī); sie wie auch die meisten anderen Texte sind in derselben Hand und könnten also ein Autograph von as-Siġzī sein²⁵. In Kunitzsch 2003, 6 (Fig. 1.2) ist ein Ausschnitt aus fol. 85v der Handschrift abgebildet, der mehrere Tabellen mit geometrischen Zahlenwerten zeigt. Die Ziffern sind hier (unserer Annahme nach von as-Siġzī) sehr flott und locker geschrieben und zeigen vielfältige, subjektiv ausgefallene Formen. Die 2 erscheint sowohl in dem starren Standardtyp, der im arabischen Osten bis heute gebräuchlich ist, als auch in einer Form, die ähnlich später in einigen lateinischen Handschriften des 12. Jahrhunderts auftritt, und in einer vereinfachten Form davon, die einen Übergang zu den westarabischen Formen darstellen könnte. Die 3 erscheint auch wieder in der starren, bis heut im

24 Cf. Grohmann 1935, 435 f. (Nr. 12) und Abb. LVI, 12; Kunitzsch 2003, 5. Prof. W. Diem, Köln, der zahlreiche derartige Papyri untersucht und ediert hat, hält es nicht für absolut sicher, daß die betreffenden Zeichen wirklich die Jahreszahl bedeuten, da an der bewußten Stelle eine explizite Angabe wie *fi sanat ...* („im Jahr ...“) o.ä. fehle. Auf jeden Fall sei in einem anderen Papyrus (bei Karabaček 1897, 13, Nr. 8) die Jahreszahl 275 (Hiġra = 888–89) nicht in indisch-arabischen Ziffern, sondern in griechischer alphanumerischer Notation gegeben, wie es auch sonst in den zeitgenössischen Papyri meist der Fall sei, sofern die Zahlen nicht überhaupt voll in Worten ausgeschrieben seien (Brief v. 6. 8. 1996).

25 Die Handschrift im jetzigen Zustand scheint aus Elementen drei verschiedener früherer Handschriften zusammengefügt zu sein; cf. die Analyse bei Kunitzsch-Lorch 1993. Aufgrund eines Inhaltsverzeichnisses auf fol. 215v–216v, geschrieben von aṣ-Ṣāhib al-Faḍlī und datiert 11. Muḥarram 657 (8. 1. 1259), nimmt u. a. Hogendijk 1993, 144 und 2000, 57 an, die gesamte Handschrift sei vom Verfasser dieses Inhaltsverzeichnisses geschrieben und die Kolophone von as-Siġzī seien von diesem lediglich mit abgeschrieben. Um weitere Aufschlüsse zu gewinnen, müßte man die Handschrift selbst vor Ort untersuchen, der Mikrofilm reicht für subtilere Prüfungen nicht aus.

Osten geläufigen Standardform sowie in einer Form, die wieder ähnlich in lateinischen Handschriften des 12. Jahrhunderts vorkommt und die ebenfalls an westarabische Formen erinnert. Die 5 endlich ist häufig so stark vereinfacht, daß der lange rechte Aufstrich zu einem kleinen Ausläufer rechts unten verkümmert ist, eine Gestalt, die sehr leicht auf die westarabische Form der 5 weiterführen könnte (s. unten Tafel 2, wo einige dieser Nebenformen aus MS Paris 2457 in der Spalte "Eastern Arabic" mit aufgeführt sind).

Die Benutzung der aus Indien übernommenen Ziffern auch außerhalb der mathematischen Fachliteratur setzte sehr zögerlich ein und macht sich in größerem Umfang erst um und nach 1200 bemerkbar. Die Astronomen behielten für ihre platzbeengten Tabellen bis in die Neuzeit die traditionelle alphanumerische Zahlennotation bei, die für die sexagesimale Teilung des Kreises in Grad, Minuten, Sekunden usw. ausreichend war; größere Zahlen wurden weiter in Worten ausgeschrieben und nur allmählich auch in Ziffern ausgedrückt. Die Aussagen hierüber bleiben unsicher, weil die Handschriften, die solche Werke – auch von älteren Autoren – überliefern, meist der Zeit nach 1200 angehören und daher den Usus zur Zeit der Abschriften widerspiegeln können.

Die Schreibform der Ziffern hatte sich bis um 1200 stabilisiert und blieb im arabischen Osten bis heute so erhalten, wobei allerdings, wie schon oben gesagt, die 4, 5 und 0 eine Abänderung erfuhren. Seit Einführung des Buchdrucks erscheinen die Ziffern in dieser modifizierten Form bis jetzt. In nichtarabischen islamischen Ländern, die ebenfalls die arabische Schrift benutzen, weichen einige Ziffern von den in den arabischen Ländern gebräuchlichen Formen ab: in Iran wird weiterhin die alte Form der 4 (nicht die neuere arabische) sowie eine eigene Form der 5 (etwa „herzförmig“) benutzt, die 6 ist gegenüber der gängigen arabischen Form um ca. 45° von rechts oben nach links unten geneigt. Die „herzförmige“ 5 erscheint ebenfalls in Publikationen in Urdu (Pakistan, Bangladesh, indische Muslime), die alte Form der 4 ist zu einer in die Höhe verschobenen Form umstilisiert, und die 7 ist mit der unteren Spitze um 90° nach links gedreht, erscheint also „liegend“.

Die ostarabischen Formen der Ziffern wurden aber auch dem arabischen Westen bekannt. In den Abschnitten II und III werden

wir sehen, daß westarabische Mathematiker sie zitieren und daß sie auch in abendländischen Quellen – in lateinischen und byzantinischen – auftreten. Umgekehrt nahmen auch ostarabische Mathematiker von den westarabischen Formen Kenntnis.

Die Diskussion der Ziffern innerhalb der arabischen Gelehrtenwelt heute ist beeinflußt von den Ergebnissen europäischer Studien und nicht frei von „nationalistischen“ Gedankenspielen²⁶. Eine der vertretenen Tendenzen bezeichnet die westarabischen Ziffern als die eigentlich ‘arabischen’, die ostarabischen dagegen als ‘indisch’, was dazu geführt hat, daß in ostarabischen Publikationen heute vielfach die westarabischen Ziffern (in den auch in Europa usw. üblichen Formen) als ‘echtarabische Ziffern’ gedruckt werden. Freilich mag dazu auch die neue Drucktechnik im Computersatz beitragen.

II

Der arabische Westen (Nordafrika – etwa das heutige Tunesien, Algerien und Marokko – sowie das muslimische Spanien, al-Andalus) empfing und übernahm nach der Eroberung und der Festigung der dortigen Herrschaften alle geistigen Errungenschaften des arabischen Ostens, in Literatur, Kunst, Wissenschaften usw. So gelangte auch die Kenntnis des indischen Rechnens und des damit verbundenen Ziffernsystems in dezimaler Stellenanordnung dorthin. Wohl im Hinblick auf das dabei verwendete Rechenbrett bzw. Staub Brett (s.o.) sprach man hier von *ḥisāb al-ḡubār* („Staubrechnen“) und nannte die geschriebenen Ziffern – im Gegensatz zu dem schriftlosen Finger- und Kopfrechnen – *ḥurūf al-ḡubār* und *qalam al-ḡubār* („Staubbuchstaben, Staubschrift“)²⁷.

26 Vgl. z.B. das Doppelheft 19, 5–6 (Juli-August/September-Oktober 1998) der saudiarabischen Zeitschrift *‘Ālam al-kutub* („Welt der Bücher“), das ganz der Geschichte der Ziffern gewidmet ist. Das Buch von Ṣāliḥ ibn Ibrāhīm al-Ḥasan, *Arqāmūnā – al-ḥaqā’iq wa-l-ḥaqīqa al-muḡayyaba* („Unsere Ziffern – die Realitäten und die verborgene Wirklichkeit“), Riyadh: Mu’assasat al-Yamāma aṣ-Ṣuḥufiyya 2003, blieb mir leider, trotz Bemühungen über mehrere Kanäle, unzugänglich.

27 Cf. Kunitzsch 2003, 8–10.

Die älteste bisher bekannte Erwähnung des indischen Rechnens im Westen ist auf 955–56 zu datieren. Der jüdische Gelehrte Abū Sahl Dunas ibn Tamīm in Kairouan bemerkt da in seinem (arabisch geschriebenen) Kommentar zum *Sefer Yešira* („Buch der Schöpfung“), die Inder hätten neun Zeichen für die Darstellung der Einer erdacht, er habe darüber ausführlich in einer Schrift über das indische Rechnen gehandelt, das als *ḥisāb al-ḡubār* („Staubrechnen“) bekannt sei²⁸. Der Historiker und Astronom Šā‘id al-Andalusī schreibt um 1068 in seinen *Ṭabaqāt al-umam* („Klassen der Nationen“), indem er die wissenschaftlichen Errungenschaften der Inder preist: „was von ihren Kenntnissen über die Zahlen zu uns gelangt ist, ist *ḥisāb al-ḡubār* („das Staubrechnen“), das Abū Ġa‘far Muḥammad ibn Mūsā al-Ḥwārizmī ausführlich erklärt hat“²⁹. Al-Ḥwārizmī’s ‘indisches Rechnen’ war um diese Zeit also im Westen bekannt und wird hier ebenfalls als „Staubrechnen“ bezeichnet.

Beim Übergang in den arabischen Westen haben allerdings die neun Ziffern ihre Form deutlich verändert. Damit stehen die Ziffern nicht allein. Die arabische Schrift selbst erscheint im Westen in einer vom östlichen Stil verschiedenen Ausprägung, dem sogenannten maghrebinischen Duktus, der stark an die archaischen ‘kufischen’ Schriftzeichen angelehnt ist; bei zwei Buchstaben ist ferner im Westen die Punktierung von der östlichen Art verschieden: *f* (Ost: ein Punkt oben, West: ein Punkt unten) und *q* (Ost: zwei Punkte oben, West: ein Punkt oben). Verschieden vom Osten sind im Westen auch die normale Alphabetreihenfolge und die Abfolge der Buchstaben der *abġad*-Reihe, d.h. der Buchstabenfolge für die alphanumerische Zahlennotation (s. Tafel 1), was von Fall zu Fall zu substantiellen Fehlern bei Zahlenangaben führen konnte, wenn z.B. in einem aus dem Osten gekommenen Manuskript nach östlicher Art *sin* = 60 war, aber im Westen nach dortiger Weise als 300 aufgefaßt wurde³⁰. In diese Abweichun-

28 Kunitzsch 2003, 8f.

29 Kunitzsch 2003, 9.

30 So hat Gerhard von Cremona im 12. Jahrhundert in Toledo bei der lateinischen Übersetzung des *Almagest* von Ptolemäus aus dem Arabischen im Sternkatalog zunächst alle Breitenwerte der Koordinaten, die 60 betragen bzw. mit 60 zusammengesetzt sind, als 300 (und Zusammensetzungen) wiedergegeben, bis er ab einer bestimmten Stelle auf das richtige 60 umgeschwenkt ist, viel-

gen in doch sehr grundsätzlichen Kulturelementen reihen sich eben auch die Ziffern ein. Die historischen Hintergründe für diese Verschiedenheiten zwischen dem arabischen Osten und Westen scheinen in der Arabistik noch nicht befriedigend geklärt zu sein³¹.

Bei genauerer Betrachtung zeigt sich allerdings, daß die westlichen Ziffernformen – mit zwei Ausnahmen – durchaus aus den östlichen Formen abgeleitet werden können, daß für sie also keine gesonderte, neue Quelle anzunehmen ist (vgl. Tafel 2, die Spalten “Eastern Arabic” und “Western Arabic”). Lediglich die westliche 6 und die 8 bieten keinen Ansatz zu einer Wiedererkennung in den östlichen Formen; für deren Herleitung kann hier kein dokumentarisch belegter Vorschlag vorgebracht werden³².

Die Dokumentation westarabischer Ziffern in westarabischen Handschriften ist bisher sehr unzulänglich (wenn wir einmal von den testimonia im lateinischen Westen absehen, die 976 einsetzen; s. u. Abschnitt III). Zwar zählt der bereits genannte Šāʿid al-Andalusī um 1068 für die Periode von ca. 850 bis zu seiner Zeit

leicht darin einer ähnlich gehaltenen arabischen Handschrift folgend; cf. Kunitzsch 1990, 5f.

- 31 Endress 1982, 177 erklärt, daß sowohl die maghrebinische Alphabetfolge als auch die maghrebinische *abġad*-Reihe die ältere Form (gegenüber den entsprechenden östlichen Reihen) darstellen; S. 181f. stellt er dagegen die östliche *abġad*-Reihe als der Reihenfolge des nordwestsemitischen Alphabets entsprechend [also wohl: als die ursprüngliche, ältere Reihe] und die westliche Reihe als davon abweichend dar.
- 32 Lemay 1977 und 1982 stellt die Theorie auf, die 5, 6 und 8 seien durch die Araber in al-Andalus von der dortigen einheimischen christlichen Bevölkerung übernommen worden: die 5 aus dem (römischen) V in der zeitgenössischen westgotischen Schriftform, die 6 aus einer Ligatur von VI in dieser Schrift und die 8 aus den übereinandergestellten Anfangs- und Endbuchstaben des lateinischen Wortes *octo* („acht“). Dieser Theorie vermögen wir uns nicht anzuschließen, zumal es kaum wahrscheinlich ist, daß die (westlichen) Araber, die das indische Rechnen und die dazugehörigen Ziffern als geschlossenes System aus dem arabischen Osten übernahmen, die zusammenhängende Ziffernreihe 1–9 aufgebrochen und für zwei (bzw. drei) Zeichen daraus Buchstaben (!) des fremden, lateinischen Alphabets eingesetzt haben sollten. Was die westliche 5 angeht, so haben wir bereits oben angemerkt, daß sie sehr wohl aus ähnlichen Verkürzungen der alten östlichen 5 hervorgegangen sein kann, wie sie in Ms. Paris 2457 zu sehen sind.

eine lange Reihe von Mathematikern und Astronomen in al-Andalus auf³³ und erwähnt häufig auch Schriften von ihnen, doch scheint sich davon nur wenig erhalten zu haben, und auch davon ist bisher nur sehr wenig ediert oder untersucht.

Die ältesten mir bekannt gewordenen westarabischen Mathematiker, in deren Werken geschriebene Ziffern vorkommen, sind Abū Bakr al-Ḥaṣṣār (12. Jh.) und Ibn al-Yāsamīn (gest. 1204). Allerdings tragen die Handschriften, in denen die betreffenden Schriften überliefert werden, nur indirekt zur Verfolgung der westlichen Ziffernschreibung bei.

Die älteste Handschrift von Abū Bakr al-Ḥaṣṣār *Kitāb al-bayān wa-t-taḍkār fī ṣanʿat ʿamal al-ġubār* („Buch der Erklärung und Erinnerung über die Rechenkunst“) ist 1194 im Osten, in Bagdad (!), geschrieben, natürlich in ostarabischem Duktus; die Ziffern erscheinen durchgehend in ostarabischer Form³⁴. Eine jüngere Hand (ebenfalls ostarabisch³⁵) hat die Reihenfolge der neun Ziffern in westarabischem Duktus (*qalam*) erst später an den entsprechenden Stellen nachgetragen. Eine zweite Handschrift ist 1432 datiert und ebenfalls im Osten geschrieben; diese enthält die Ziffern in westarabischer Form, aber doch erst im 15. Jahrhundert. Eine maghrebinische Handschrift, in Rabat, zeigt die Ziffern natürlich in westarabischer Form; sie ist nicht datiert, dürfte aber erst der Zeit nach 1500 angehören.

Ibn al-Yāsamīn aus Fes (1191 auch in Sevilla bezeugt) schreibt selbstverständlich im maghrebinischen Duktus, kennt aber auch die ostarabischen Formen der Ziffern. In seinem *Talqīḥ al-afkār fī ʿamal rasm al-ġubār* („Befruchtung der Gedanken, über die Operation mit dem Staubrechnen“) beschreibt er einleitend beide Ziffernreihen: „(die neun Figuren [*aṣkāl*]), sie werden Staubfiguren [*aṣkāl al-ġubār*] genannt, und sie sind folgendermaßen [folgt die Reihe der Ziffern in westarabischer Form]; sie können auch folgendermaßen sein [folgt die Reihe der neun Ziffern in ostarabischer Form, dabei die 5 in seitenverkehrter Wiedergabe; cf. u.], aber bei uns [d.h. im arabischen Westen] folgen die Leute der ersteren

33 Šāʿid al-Andalusī 1985, 158–181.

34 Kunitzsch 2002–03.

35 Kunitzsch 2002–03, 188.

Form“³⁶. Die betreffende Handschrift selbst (jetzt in Rabat, Bibliothèque Générale, Ms. K 222) ist allerdings auch wieder ostarabisch und aus späterer Zeit.

Wenn auch diese Dokumente relativ spät sind, so haben wir immerhin das Zeugnis des andalusischen Korangelehrten Abū ‘Amr ‘Uṭmān ad-Dānī (gest. 1053), der die Null (*ṣifr*) in Form eines kleinen Kreises kennt und sie mit dem bekannten arabischen Zeichen für die Vokallosgkeit eines Konsonanten, *sukūn*, vergleicht³⁷.

Aus dem Vorangehenden ist ersichtlich, daß die ostarabischen Ziffernformen auch westarabischen Mathematikern nicht unbekannt waren. Das ist nicht verwunderlich, da über die Jahrhunderte hinweg ein reger Austausch zwischen Ost und West stattfand. Östliches Material gelangte in den Westen, und viele westliche Gelehrte besuchten den Osten, teils in Zusammenhang mit der Pilgerfahrt nach Mekka, wobei sie sich oft längere Zeit an östlichen Orten aufhielten und dort Studien betrieben³⁸. Umgekehrt ist ebenso ersichtlich, daß westliche Texte – im Fall von Abū Bakr al-Ḥaṣṣār relativ schnell – in den Osten gelangten.

Westarabische Ziffern (5 und 8, neben den östlichen Formen von 2 und 3) erscheinen in zwei auf 1265–66 datierten Texten über mechanische Vorrichtungen zum Transport von Wasser in Ms. Florenz, Or. 152³⁹. Der Sinn dieser Ziffern bleibt hier allerdings vollkommen unklar, da sie (anstelle von Wörtern?) mitten in den laufenden Beschreibungstext der Apparaturen eingefügt sind.

Alle anderen mir bisher bekannt gewordenen Beispiele westarabischer Ziffern in maghrebinischen Handschriften stammen aus späterer Zeit⁴⁰.

36 Siehe das Facsimile dieser Handschriftenseite bei Abū Fāris 1973, 232. Cf. dazu Kunitzsch 2003, 9. Abgebildet auch bei Burnett 2002, 269 (Plate 1).

37 Kunitzsch 2003, 4.

38 Vernet 1992; Djebbar 2002.

39 Kunitzsch 2003, 11 f. mit Fig. 1.3 a und 1.3 b.

40 So das magische Quadrat in Ms. Rabat, Bibliothèque Générale 321, p. 45; die Handschrift selbst ist datiert 1284, das Quadrat (sowohl in Ziffern als auch daneben in *abḡad*-Notation dargestellt) scheint jedoch in dieser Galen-Handschrift erst später, auf einer zuvor leer gebliebenen Seite, eingetragen zu sein; s. Kunitzsch 2003, 12 und Fig. 1.4 auf S. 13. Der dort auf S. 14 (Fig. 1.5)

Die Formen der westarabischen Ziffern, die sich anscheinend über die Zeit hinweg kaum noch verändert haben, inspirierten einen Anonymus zu einem Gedicht in drei Memorialversen (im Metrum *kāmil*), worin die Formen der neun Ziffern mit gewissen Buchstaben des Alphabets im maghrebinischen Duktus verglichen werden. Diese Verse wurden im Westen zuerst von al-Qalaṣādī (gest. 1486), dann aber auch im Osten von Ḥusayn ibn Muḥammad al-Maḥallī (gest. 1756) zitiert; sie können sehr wohl auf ältere Zeit zurückgehen⁴¹.

Ein wichtiges Desiderat der Forschung bleibt also, in Zukunft ältere Belege – vor 1300 – für westarabische Ziffernformen zu finden, sei es in Handschriften – nicht nur mathematischen Inhalts, sondern auch in beliebigen anderen Handschriften, wo die Ziffern bei der Kapitel-, Folien- und Lagenzählung und bei der Datierung auftreten können –, sei es auf Münzen oder in Inschriften aller Art.

Ein interessantes Zwischenstadium zwischen ost- und westarabischer Ziffernschreibung hat C. Burnett in Sizilien gefunden. Sizilien wurde von Tunis her erobert, also aus dem westlichen Einzugsgebiet heraus. Gleichzeitig bestanden hier aber auch vielfältige Beziehungen in den arabischen Osten. Burnett kann so drei Dokumente⁴² vorführen, in denen neben ostarabisch 2, 3, 7 und 9 westarabisch 6 und 8 vorkommen; die 5 erscheint hier in ostarabischer Form, aber seitenverkehrt, mit dem vertikalen Aufstrich auf der linken statt wie im Osten auf der rechten Seite – wie die 5 ja auch in der Ibn al-Yāsamīn-Handschrift vorkommt⁴³.

Die wissenschaftsgeschichtliche Bedeutung der westarabischen Ziffern beruht indes vorzüglich darauf, daß über sie das lateinische

abgebildete Text – dort noch als “after 1344” angegeben – ist erst “shortly after 1600” geschrieben (cf. *ibid.*, Postscript, S. 16).

41 S. dazu Kunitzsch 2003, 15.

42 Zwei Münzen von Roger II. von 533 (Hiġra = 1138–39) und 543/1148–49, Burnett 2002, Plates 7 und 8; ein dreisprachiger Psalter in Ms. London, BL Harley 5786, von ca. 1153 (die griechische Zählung in alphanumerischer Notation, die lateinische in römischen Ziffern, die arabische in gemischt ost-westlichen Formen), *ibid.* Plate 5; die Handschrift Vatican Pal. lat. 1371 mit der griechisch-lateinischen Übersetzung des *Almagest*, *ibid.* Plate 6.

43 Dazu Burnett 2002, 243–245 und die Tabelle S. 266, II: Palermitan Forms. (Die Handschrift Vat. lat. 2056 jener *Almagest*-Übersetzung benutzt dagegen, im Sternkatalog, römische Ziffern; s. Kunitzsch 1991, 11.)

Europa die letztlich indischen Ziffern und das Rechnen damit kennenlernte und daraus die Ziffernformen entwickelte, die heute allgemein in weiten Teilen der Welt verbreitet sind.

Infolge der Ähnlichkeit der westarabischen Ziffern mit den in Europa entwickelten Formen ergab sich, daß in den Druckerzeugnissen aller Art in den nordafrikanischen Ländern stets die in Europa und international gebräuchlichen Ziffernformen eingesetzt werden.

III

Das Eindringen der arabischen Ziffern nach Europa erfolgte ab dem 10. Jahrhundert über Spanien. Dabei haben wir es nicht mit einem einmaligen Übernahmevorgang in einem einzigen bestimmten Sachzusammenhang zu tun. In den Anfängen begegneten die Europäer in Spanien den Ziffern in westarabischer Form bei den Muslimen in al-Andalus. Im Rahmen der ausgedehnten arabisch-lateinischen Übersetzungsbewegung im christlichen Teil Spaniens im 12. Jahrhundert traf man in den arabischen Handschriften dann sowohl auf west- wie auch auf ostarabische Ziffern. Dieses Jahrhundert ist gekennzeichnet von vielen Versuchen der Auseinandersetzung mit den neuartigen Ziffern. Von den vielerlei Ansätzen, die in den lateinischen Handschriften sichtbar werden, hat sich in Europa letzten Endes die westarabische Ziffernform durchgesetzt und wurde – besonders nach dem Einsetzen des Buchdrucks – die einzige benutzte und heute in weiten Teilen der Welt verbreitete. Neben Spanien gab es Berührungen und Übernahmen der Ziffern auch in Sizilien und in den Kreuzungsländern des vorderen Orients sowie, im Osten, im griechisch-byzantinischen Raum.

Im lateinischen Einzugsbereich lassen sich also zwei Kontakt- und Übernahmewellen erkennen: im späten 10. und im 12. Jahrhundert.

Die erste Welle ist gekennzeichnet durch das Auftreten der arabischen Ziffern in jenem Einschub in zwei Isidor-Handschriften und in Schriften über Form und Gebrauch des Abacus sowie im Pseudo-Boethius des 11. Jahrhunderts. In den beiden Isidor-

Handschriften, Codex Vigilanus von 976 und gleichförmig Codex Emilianus von 992 (cf. o. mit Anm. 8), erscheinen die Ziffern einheitlich in der westarabischen Form, wenn auch – besonders bei der 4 – leicht verfremdet⁴⁴. Viel stärker verfremdet, aber in sich relativ einheitlich, erscheinen die Ziffernformen in den Abacusschriften des 11. Jahrhunderts und im Pseudo-Boethius ("Geometria II")⁴⁵. Beim Rechenbrett (Abacus) werden die Ziffern verwendet bei der Markierung der dezimalen vertikalen Spalten sowie zur Kennzeichnung der „Rechensteine“ (die seit karolingischer Zeit bis dahin in alphanumerischer Notation mit griechischen Buchstaben, A–Θ für 1–9, gekennzeichnet wurden – eine Null wurde auf dem Abacus ja nicht benötigt). Wie weit Gerbert von Aurillac (als Papst: Silvester II., 999–1003) an der Einführung der arabischen Ziffern in die Abacuspraxis beteiligt war, ist nicht sicher zu erkennen. Von 967–970 weilte er zu Studienzwecken in Katalonien, dort hätte er sehr wohl mit arabischem Gut bekannt werden können. In seinen authentisch eigenen Schriften findet sich allerdings kein direkter Hinweis darauf.

In der Abacuserliteratur werden den neun Ziffern auch gewisse exotische Namen beigegeben: 1 = *igin*, 2 = *andras*, 3 = *ormis*, 4 = *arbas*, 5 = *quimas*, 6 = *calc(t)is*, 7 = *zenis*, 8 = *temenias*, 9 *celentis*. Von diesen lassen sich *arbas*, *quimas* und *temenias* klar als arabisch erkennen (*arbaʿa*, *ḥamsa*, *ṭamāniya*), *igin* könnte berberisch sein. Die anderen Namen bleiben unerklärlich⁴⁶.

Mit dem Bekanntwerden der indisch-arabischen Arithmetik und klarerer Formen der dazugehörigen Ziffern durch die lateinischen Übersetzungen des 12. Jahrhunderts verlor der Abacus in Europa seine Bedeutung.

Wenden wir uns bei Betrachtung der Entwicklungen im 12. Jahrhundert zunächst der Arithmetik selbst zu.

Das zentrale Werk war hier die Schrift über das indische Rechnen (*De numero Indorum*) von al-Ḥwārizmī. Der Name des Über-

44 Siehe die Abbildungen der beiden Textseiten in van der Waerden–Folkerts 1976, 54–55.

45 Cf. die Abbildungen bei Folkerts 1970, Tafeln 1–21; van der Waerden–Folkerts 1976, 58.

46 Cf. Folkerts 2000, 2001.

setzers und der Zeitpunkt der Übersetzung stehen nicht fest, auch hat sich die Übersetzung selbst im Original nicht erhalten. Es folgte darauf jedoch sehr schnell eine größere Anzahl von Bearbeitungen und eigenen lateinischen Algorismus-Schriften, was zeigt, welche Bedeutung von da an den 'arabischen' Ziffern und den damit verbundenen Rechenmethoden zugemessen wurde. Aus einer latinisierten Form des Namens von al-Ḥwārizmī wurde sehr bald die Bezeichnung 'Algorismus' für diese neue Art des Rechnens und Zahlenschreibens geprägt⁴⁷.

Die vermutlich älteste Bearbeitung von al-Ḥwārizmīs Schrift liegt in zwei im Wortlaut nicht immer völlig identischen Handschriften des 13. Jahrhunderts vor⁴⁸. Wie man sehen kann, werden auch hier die Zahlen allermeist in Worten und oft in römischen Ziffern geschrieben; nur in besonderen Fällen werden bestimmte Werte in arabischen Ziffern angegeben, sorgfältig eingerahmt und eingeleitet durch Formeln wie *et hec est figura eiusdem/eorum* u.a., die wörtlich dem *wa-hāḍihī šūratuhū* der arabischen Texte entsprechen (s.o.). In der Cambridger Handschrift sind die meisten arabischen Ziffern an den betreffenden Stellen ausgelassen, verstreut kommen nur 1, 2, 3, 5 und die Null vor⁴⁹; besonders die 2 hat hier eine andere Form als in der New Yorker Handschrift (cf. deren Faksimile bei Folkerts 1997). Ziffernformen ähnlich denjenigen der New Yorker Handschrift werden auch verwendet in mehreren (älteren) Handschriften des *Liber abbaci* von Leonardo von Pisa, während jüngere Handschriften die geläufigen, „moderneren“ Formen der späteren Zeit zeigen; Leonardo hat offenbar also nicht, wie zuweilen angenommen, im Gefolge seiner persönlichen Kon-

47 So führt sogar Albrecht von Scharfenberg (13. Jh.) in seinem mittelhochdeutschen Versepos „Der jüngere Titrel“ *Abacus* und *Algorismus* als Personen ein; cf. Kunitzsch 1989.

48 New York, Hispanic Society of New York, HC 397/726, untersucht und ediert (mit Beigabe von Fotografien des Originals auf Tafel 1–16) von Folkerts 1997; Cambridge, University Library, li.6.5, ediert von B. Boncompagni 1857–62, K. Vogel 1963 und A. Allard 1992, cf. Folkerts 1997, 19–25. Bei Folkerts 1997, 8–12 eine gedrängte Übersicht über die lateinischen Algorismustexte des 12.–13. Jahrhunderts.

49 Cf. Vogel 1963, 42f. und die Tafel auf S. 51, sub DNI (muß heißen: DA!).

takte mit der arabischen Welt eigene, neue Ziffernformen im Westen eingeführt⁵⁰.

Auf dem Gebiet der Arithmetik war al-Ḥwārizmī's Schrift das einzige Werk, das im 12. Jahrhundert ins Lateinische übersetzt wurde⁵¹. Dies allein reichte aus, um jene Fülle einschlägiger Arbeiten⁵² auszulösen, die die Kenntnis des indischen Rechnens und der arabischen Ziffern im westlichen Europa verbreiteten.

Zahlen traten natürlich auch in Texten anderer Fachrichtungen auf, besonders in der Astronomie mit ihren zahlreichen, oft umfangreichen Tabellen, in der Astrologie, in Geometrie und Trigonometrie usw.

Bei den astronomischen Tabellen ist zu beobachten, daß die alphanumerischen Werte der arabischen Handschriften von den Übersetzern zunächst in römische Ziffern umgesetzt wurden, die jedoch ab dem 13. Jahrhundert zunehmend, in Einzelfällen aber auch schon im 12. Jahrhundert als arabische Ziffern erscheinen.

Einige Handschriften fallen dadurch auf, daß in ihnen gewisse Ziffern in einer Form erscheinen, die von den üblichen westarabischen Formen abweicht⁵³, so die 2 und 3 mit dem auffälligen Abstrich nach unten, die einigen Formen in der arabischen *Siğzī*-Handschrift Paris 2457 (s. o.) ähneln; andererseits erscheint die 4 in der moderneren Form, als Schleife (ø), verkürzt aus dem linken Teil der arabischen Form (sowohl ost- wie westarabisch).

Unter den Handschriften, die in die Hände der lateinischen Übersetzer gelangten, gab es nicht nur die in al-Andalus umlaufenden im westarabischen Duktus gehaltenen, sondern auch in den Westen gelangte ostarabische Handschriften. So finden sich in la-

50 Cf. Kunitzsch 2003, 16 (Appendix).

51 Cf. die tabellarische Übersicht 'Arabic Mathematical Works Translated into Latin' bei Lorch 2001, 317f., Table 3. Die meisten hier genannten Texte gehören zur Geometrie und sphärischen Trigonometrie, einige reichen in das Gebiet der Astronomie.

52 Es wird nochmals verwiesen auf die Übersicht bei Folkerts 1997, 8–12 (vgl. o. Anm. 48).

53 München, Clm 13021, um 1163–68, Toledanische Tafeln (cf. Lemay 1977, Fig. 4a–4b); München, Clm 18927, 13. Jh. – aber diese Stücke vielleicht älter?, Toledanische Tafeln (cf. Lemay 1977, Fig. 1b); Wien, ÖNB 275, datiert 1143, Algorismus (cf. van der Waerden–Folkerts 1976, 62).

teinischen Handschriften denn auch nicht selten die ostarabischen Ziffernformen⁵⁴. In manchen Handschriften wird zur Erleichterung der Identifizierung die ost- und westarabische Notation der Ziffernformen in einer Übersicht eigens zusammengestellt⁵⁵. Welche Schwierigkeit den Schreibern die Ziffernreihe im 13. Jahrhundert anscheinend immer noch bietet, kann man daran ersehen, daß sie hier und da die eine oder andere Zahl auslassen und nachträglich in die Reihe einfügen müssen⁵⁶. Bei der ostarabischen 3 versetzen manche Schreiber die beiden Bogen oben rechts im lateinischen Schreibsinn nach links⁵⁷.

Wie schwer sich die lateinischen Übersetzer oder eher die Schreiber der Handschriften bei der Darstellung von Zahlen taten, wird zum Beispiel in zwei kürzlich edierten größeren Werken des arabischen Astrologen Abū Maʿṣar (Albumasar, 787–886) sichtbar. Im arabischen Text des *Introduitorium maius* sind alle Zahlen voll in Worten oder in alphanumerischer *abʿad*-Notation dargeboten⁵⁸. Die Übersetzung von Johannes Hispalensis (1133) verwendet die in Spanien verbreiteten modifizierten römischen Ziffern (insbesondere 40 = X̄, 90 = LX̄) sowie für die Einer zuweilen die Anfangsbuchstaben von deren lateinischen Namen⁵⁹. In der Übersetzung des Hermann von Kärnten (1140) dagegen werden allgemein die traditionellen römischen Ziffern verwendet⁶⁰. In

54 Kunitzsch 2003, 11; Burnett 2002 kann hierzu 26 Handschriften aufzählen (vgl. die Liste, S. 255–260, sowie Table III: Eastern Forms, S. 266 f., und die zugehörigen Abbildungen). Viele dieser Beispiele scheinen mit Pisa zusammenzuhängen, es gibt aber auch Fälle aus Westeuropa (cf. dort, Plates 9–13, 19b).

55 Burnett 2002, Plate 3 (München, Clm 18927 – dies auch bei Lemay 1977, Fig. 1 a; der Schreiber hat hier in der ersten Reihe als ‘toletane figure’ die Ziffern nach westarabischem Typ aufgezeichnet, in der zweiten Reihe als ‘indice figure’ die ostarabischen und in der dritten Reihe die innerhalb der Handschrift selbst verwendeten Formen), Plate 16 (Oxford, Digby 40), 17 (London, BL Arundel 377) und 19 a (Oxford, Selden supra 26).

56 Cf. Burnett 2002, Plate 3 (in der zweiten Reihe die 4, in der dritten die 8 nachgetragen). In Plate 17 werden in der oberen Reihe (westarabisch) für 4, 5 und 6 gewisse Varianten darübergeschrieben.

57 Burnett 2002, Plate 9, 13, 19a–b.

58 Lemay 1995–96, IV, 322, n. 38.

59 Lemay 1995–96, IV, 321–327.

60 Lemay 1995–96, VII, 137–142.

Abū Maʿsars *De magnis coniunctionibus* (Übersetzer ungewiß, vielleicht Johannes Hispalensis) erscheint einmal eine neunstellige Zahl (I 1, 18); im arabischen Text wird sie zunächst in Worten ausgeschrieben und danach eigens in „indischen Ziffern“ hinzugefügt (*wa-takūnu bi-ṣ-ṣūra al-hindīya* ...) ⁶¹, und ebenso im Lateinischen (*eritque hoc per figuram indicam* ...) ⁶². Die Null wird hier im Lateinischen als *circulus* bezeichnet (z.B. ...*et circulum, quod est nichil, tertiorum* ... für „und 0““, oder *et circulum quartarum* für „und 0““) ⁶³. Handschriften der lateinischen Übersetzung der *Introduction to Astrology* von al-Qabīṣī (Alcabitius, Syrien, Mitte 10. Jh.) verhalten sich bei der Wiedergabe der Zahlen verschieden (z.B. Berlin lat. fol. 307: sowohl ost- wie westarabische Ziffern ⁶⁴; Oxford Ashmole 369: „a crude and unpractised form of the Hindu-Arabic numerals is used“ ⁶⁵; Vat. Reg. lat. 1285: im Grundtext römische Ziffern, in I 51–53 später entsprechende arabische Ziffern dazugeschrieben ⁶⁶). Die Handschriften von Gerhard von Cremonas lateinischer Übersetzung des *Almagest* aus dem Arabischen verwenden bei der Notation der Koordinaten im Sternkatalog zunächst römische Ziffern, die im 13. Jahrhundert allmählich von den zeitgenössischen Formen der arabischen abgelöst werden ⁶⁷. Die Handschriften der lateinischen Übersetzung des *Almagest* aus dem Griechischen (Sizilien, um 1150–60) sind gespalten; während Vat. lat. 2056 (Anfang 13. Jh.) römische Ziffern hat ⁶⁸, zeigt Vat. Pal. lat. 1371 ostarabische Ziffern (in der palermitanischen Variante, d.h. die 5 seitenverkehrt, mit dem vertikalen Aufstrich links statt rechts) ⁶⁹.

Aber die mit den fremdartigen Zahlzeichen konfrontierten Schreiber verfielen auch noch auf andere Lösungen. Manche schreiben die arabischen Ziffern als lateinische Buchsta-

61 Yamamoto–Burnett 2000, I, 18, Z. 163–166.

62 Yamamoto–Burnett 2000, II, 12, Z. 164–166.

63 Yamamoto–Burnett 2000, II, 11, Z. 138 und 146.

64 Burnett–Yamamoto–Yano 2004, 210f.

65 Burnett–Yamamoto–Yano 2004, 213.

66 Burnett–Yamamoto–Yano 2004, 216.

67 Kunitzsch 1990, 8f.

68 Kunitzsch 1991, 11.

69 Burnett 2002, Tabelle S. 16 (unter II) und Plate 6.

ben⁷⁰ oder stark angenähert an lateinische Buchstaben⁷¹, zuweilen auch in falscher Dezimalfolge von rechts (Hunderter) nach links (Einer)⁷²; die ostarabische 5 kann in einer Form ähnlich griechisch θ oder ähnlich der 8 erscheinen.

Neben diesen vielerlei Versuchen der Auseinandersetzung mit den exotischen arabischen Ziffern gibt es im lateinischen Bereich aber auch Ansätze zur Einführung einer alphanumerischen Notation mit lateinischen Buchstaben, ähnlich der griechischen und arabischen alphanumerischen Notation.

Gut gelungen erscheint ein solcher Versuch auf dem sogenannten 'karolingischen Astrolab'. Hier handelt es sich vermutlich um ein den gelehrten Mönchen in Katalonien gegen Ende des 10. Jahrhunderts aus dem muslimischen Spanien in die Hände gekommenes blanco-Astrolab, d.h. also ohne Beschriftung, das man dann versuchte mit lateinischer Beschriftung zu versehen, analog zu den arabischen Instrumenten, die dort in dieser ersten Periode der europäischen Begegnung mit arabischer Astronomie und speziell mit dem Astrolab vorlagen⁷³. Das Instrument trägt eine Beschriftung, die 'alt' zu sein und dem Ende des 10. Jahrhunderts anzugehören scheint; daneben wurden zu späterer Zeit noch weitere Beschriftungen hinzugefügt. Die Gradangaben an verschiedenen Stellen, in der 'alten' Schrift, imitieren recht genau die westarabischen alphanumerischen Zahlenangaben auf den spanisch-arabischen Astrolabien (s. Tafel 1, letzte Spalte)⁷⁴.

70 Burnett 2002, Plate 2 (*llb* für 116, *bl[x]* für 141), Plate 4 (*lib* = 116, *blob* = 141); Burnett nennt diese Ziffern "fossiled forms".

71 Burnett 2002, Plate 11; vgl. auch Plate 19b (hier eigentlich: ostarabische Ziffern).

72 Burnett 2002, Plate 9 (051 für 150, 76 für 67, 03 für 30, 7 lxxvi 1 [sic] für 147).

73 Die – an sich unzutreffende – Bezeichnung stammt von seinem Besitzer Marcel Destombes (gest. 1983), nach dessen Tod das Instrument in den Besitz des Museums des Institut du Monde Arabe, Paris, überging. Die Authentizität des Instruments ist noch umstritten. S. dazu die Beiträge eines speziellen Symposiums (Zaragoza 1993) in *Physis* 23, fasc. 2–3 (1995).

74 Zu beachten die Unterscheidung von arab. $d = 4$ (hier D) und westarab. $d = 90$ (hier δ). G für arab. 'ayn tritt in den lateinischen Astrolabschriften dieser Zeit in Transkriptionen arabischer termini auch sonst mehrfach auf. O für westarab. $\varsigma (= 60)$ ist ungewöhnlich, mag aber wohl durch die Buchstabenfolge des lateinischen Alphabets bedingt sein.

Ganz anders in einem Text des 12. Jahrhunderts, den R. Lemay für die *Astronomia* des Hermann von Kärnten hält, C. Burnett dagegen für den *Liber Mamonis* eines unbekannten Autors im Umkreis von Stephanus von Pisa – oder eher von Stephanus selbst, der 1127 in Antiochia, in den Kreuzzugsländern, das medizinische Kompendium *al-Kitāb al-malakī* (*Regalis dispositio*) von ‘Alī ibn al-‘Abbās al-Mağūsī übersetzt hatte⁷⁵. In beiden Werken wird eine Zahlennotation mit Buchstaben in der Abfolge des lateinischen Alphabets – also stark abweichend von der griechischen und arabischen alphanumerischen Notation – angewendet, die auch im ‘Dresdner *Almagest*’⁷⁶ und in einer *Rhetorica ad Herennium*⁷⁷ auftritt.

Dieser lateinischen alphanumerischen Zahlennotation, die Lemay zu Recht “*abjad latin avorté*” nennt, war keine weitere Verbreitung und kein Nachleben beschieden.

Die arabischen Ziffern wurden nicht nur dem lateinischen Westen Europas bekannt. Auch im griechisch-byzantinischen Osten treten sie seit dem 12. Jahrhundert in mathematischen Handschriften auf. Wie bei der unmittelbaren Nachbarschaft nicht anders zu erwarten, werden hier die Ziffern zumeist in der ostarabischen Form übernommen⁷⁸, doch gibt es auch Beispiele mit westarabischen Formen⁷⁹.



Der lange Weg, den die Ziffern, die wir ‘arabisch’ nennen, genommen haben, steht nun hinlänglich fest. Von Indien aus gelangten sie über den arabischen Osten, Bagdad, in den arabischen Westen, wo die Europäer sie aus dem muslimischen Spanien, in westarabischer Form, übernahmen und zu der Form entwickelten, die seit Einführung des Buchdrucks in Europa und heute in vielen

75 Lemay 2000; Burnett 2003.

76 Teilweise Übersetzung des *Almagest*, anscheinend aus dem Arabischen, in Ms. Dresden Db. 87; cf. Burnett 2003.

77 Ms. Mailand, Ambrosiana, E.7 sup.; cf. Burnett 2003, 35.

78 Kunitzsch 2003, 8 (mit Bezug auf F. Woepcke, 1859, der die Ziffernformen aus vier Handschriften der *Psephophoria kat’ Indous* des Maximus Planudes, 2. Hälfte 13. Jh., abbildet); weitere Stellen aus dem 12.–14. Jahrhundert bei Burnett 2002, 252f., Table III (auf S. 267), Plate 20–21.

79 Burnett 2002, Table I (auf S. 266: Ms. Vat. gr. 184).

Teilen der Welt verbreitet ist. Viele Nebenzweige und Sonderformen, die sich im Laufe des Rezeptionsprozesses im Orient wie auch in Europa gebildet hatten, fanden keine Fortsetzung und starben wieder ab.

Die Übernahme der Ziffern in allgemeinen Gebrauch, jenseits der Fachwissenschaften Mathematik, Astronomie usw., verlief im Orient und in Europa ähnlich zögerlich. Nach der ersten Bekanntheit im 8. Jahrhundert dauerte es im Orient bis ins 12. Jahrhundert oder länger, bis die Ziffern in größerem Rahmen auch in nichtwissenschaftlichen Kontexten anzutreffen sind. In Europa starben die Ziffernformen der ersten Übernahmewelle, im 10. Jahrhundert, mit dem Gebrauch des Abacus wieder aus; sie wurden im 12. Jahrhundert ersetzt durch die mit der zweiten Welle einströmenden verbesserten Ziffernformen. Außerhalb wissenschaftlicher Texte verbreiteten sie sich in weiteren Kreisen schrittweise ab dem 13.–14. Jahrhundert. Noch zu dieser Zeit wurde bekanntlich in italienischen Handelsstädten der Gebrauch der arabischen Ziffern für kaufmännische Verwendung förmlich verboten wegen der Gefahr der Mißdeutung – die Schreibformen variierten noch zu stark – oder der leichten Fälschung⁸⁰.

Ein seltenes, sehr frühes Beispiel für den Gebrauch der arabischen Ziffern in nicht-fachwissenschaftlichem Zusammenhang sind die Annalen des Domherrn Hugo von Lerchenfeld aus Regensburg⁸¹. In seinem „Notizbuch“ hat er eine Chronik notiert, deren Jahreszahlen von „1“ bis „1167“ in arabischen Ziffern angegeben sind⁸². Die von ihm verwendeten Ziffern lehnen sich an diejenigen in Ms. München, Clm 13021, das im Kloster Prüfening bei Regensburg unter Abt Eberhard (1163–68) geschrieben wurde⁸³.

80 Cf. u. a. Lemay 1982, 396.

81 Den Hinweis auf Hugo von Lerchenfeld verdanke ich Herrn Horst Fuhrmann, Regensburg/München. Für Kopien des Textes aus der Handschrift München, Clm 14733 danke ich Dr. F. Fuchs, Regensburg.

82 Ms. München, Clm 14733, fol. 25r–34r. Die danach noch folgenden Jahre bis 1201 sind in römischen Ziffern notiert. Zu Hugo cf. Bischoff 1967, zu den Annalen Wattenbach-Schmale 1976, 233.

83 Charakteristisch ist das Zeichen **𐌹** für „3“, das in Clm 13021 neben der alten Sonderform mit dem Abstrich nach unten ebenfalls vorkommt (Tabellen aus

Als letztes sei hier noch ein Kuriosum erwähnt: der Re-export (ost-)arabischer Ziffern aus Europa in den Orient. Vom 16. Jahrhundert bis um 1800 wurden in Europa Uhren und astronomische Instrumente hergestellt als hohe Geschenke an den osmanischen Sultan in Istanbul und für den Schah von Persien sowie für kommerzielle Zwecke. In Nachahmung römischer Ziffern auf entsprechenden europäischen Instrumenten der Zeit wurden dabei für die Zifferblätter und Skalen merkwürdig stilisierte, starr wirkende Formen ostarabischer Ziffern entworfen⁸⁴. Unnötig zu sagen, daß diesen merkwürdigen Ziffern im Orient irgendein Nachleben nicht beschieden war. Heutzutage ist es so, daß im Orient etwa an den Stellen, wo wir weiterhin noch römische Ziffern verwenden, die alphanumerische Notation der *abġad*-Reihe eingesetzt wird⁸⁵.

den Toledanischen Tafeln auf fol. 65 v); cf. auch Lemay 1977, Fig. 4a (3 mit Abstrich nach unten), Fig. 4b (beide Formen).

84 Cf. u. a. King 1999, 284–295 (mit Abbildungen und einer Liste von anderweitig bekannten und abgebildeten Objekten), ebenfalls 211, Abb. 4.4.2b–c.

85 Ich danke Herrn Menso Folkerts, München, der das Manuskript dieser Arbeit in eine computergerechte Druckvorlage umgesetzt hat.

Literatur

- Abū Fāris 1983 Abū Fāris, Dalīl ḡadīd ‘alā ‘urūbat al-arqām al-musta‘mala fī l-maḡrib al-‘arabī, in: *al-Lisān al-‘Arabi* 10 (1392/1973), 231–233.
- Bischoff 1967 B. Bischoff, Regensburger Beiträge zur mittelalterlichen Dramatik und Ikonographie, in idem, *Mittelalterliche Studien* 2 (1967), 156–168.
- Burnett 2000 C. Burnett, Latin Alphanumeric Notation, and Annotation in Italian, in the Twelfth Century: MS London, British Library, Harley 5402, in *Sic itur ad astra* (s. u.), 76–90.
- Burnett 2002 C. Burnett, Indian Numerals in the Mediterranean Basin in the Twelfth Century, with Special Reference to the “Eastern Forms”, in *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, hg. v. Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts, B. van Dalen, Stuttgart 2002, 237–288 (mit Plates 1–23).
- Burnett 2003 C. Burnett, The Transmission of Arabic Astronomy via Antioch and Pisa in the Second Quarter of the Twelfth Century, in *The Enterprise of Science in Islam. New Perspectives*, hg. v. J. P. Hogendijk – A. I. Sabra, Cambridge, Mass., – London 2003, 23–51.
- Burnett-Yamamoto-Yano 2004 *Al-Qabīṣī (Alcabitius): The Introduction to Astrology*, Editions of the Arabic and Latin texts and an English translation, by C. Burnett, K. Yamamoto, M. Yano, London – Turin 2004.
- Comes 2002–03 R. Comes, Arabic, Rūmī, Coptic or merely Greek Alphanumeric Notation? The Case of a Mozarabic 10th Century Andalusī Manuscript, in: *Suhayl* 3 (2002–03), 157–185.
- Djebbar 2000 A. Djebbar, La circulation des mathématiques entre l’Orient et l’Occident musulmans: Interrogations anciennes et éléments nouveaux, in *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, hg. v. Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts, B. van Dalen, Stuttgart 2002, 213–235.

- Endress 1982 G. Endress, Die arabische Schrift, in *Grundriß der arabischen Philologie*, I: *Sprachwissenschaft*, hg. v. W. Fischer, Wiesbaden 1982, 165–197.
- Folkerts 1968 M. Folkerts, Das Problem der pseudo-boethischen Geometrie, in: *Sudhoffs Archiv* 52 (1968), 152–161; englisch als *The Geometry II* Ascribed to Boethius, in idem, *Essays on Early Medieval Mathematics*, Aldershot: Ashgate–Variorum 2003, Text IX.
- Folkerts 1970 M. Folkerts, “Boethius” *Geometrie II*, ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters, Wiesbaden 1970.
- Folkerts 1997 M. Folkerts, *Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Ḥwārizmī*, München 1997 (Bayerische Akademie der Wissenschaften, Philos.-hist. Kl., Abhandlungen, NF, Heft 13).
- Folkerts 2000 M. Folkerts, Frühe westliche Benennungen der indisch-arabischen Ziffern und ihr Vorkommen, in *Sic itur ad astra* (s. u.), 216–233.
- Folkerts 2001 M. Folkerts, The names and forms of the numerals on the abacus in the Gerbert tradition, in: *Gerberto d’Aurillac da Abbate di Bobbio a Papa dell’Anno 1000*, Atti del Congresso internazionale Bobbio ... 2000, hg. v. F. G. Nuvolone, *Archivum Bobiense, Studia* IV, 2001, 245–265.
- Grohmann 1935 A. Grohmann, Texte zur Wirtschaftsgeschichte Ägyptens in arabischer Zeit, in: *Archiv Orientalní* 7 (1935), 437–472.
- Gupta 1983 R. C. Gupta, Spread and Triumph of Indian Numerals, in: *Indian Journal of History of Science* 18 (1983), 23–38.
- Hogendijk 1993 J. P. Hogendijk, The Arabic version of Euclid’s *On Divisions*, in *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*, hg. v. M. Folkerts – J. P. Hogendijk, Amsterdam – Atlanta, GA 1993, 143–162.
- Hogendijk 2000 J. P. Hogendijk, Al-Nayrīzī’s Mysterious Determination of the Azimuth of the Qibla at Baghdad, in: *Sciamus* 1 (2000), 49–70.
- Jeffery 1990 L. H. Jeffery, *The Local Scripts of Archaic Greece*, 2nd ed., Oxford 1990.

- Karabaček 1897 J. Karabaček, Aegyptische Urkunden aus den königlichen Museen zu Berlin, in: *Wiener Zeitschrift für die Kunde des Morgenlandes* 11 (1897), 1–21.
- Kienast 1995 H.J. Kienast, *Die Wasserleitung des Eupalinos auf Samos*, Bonn 1995 (= SAMOS, Bd. XIX).
- King 1999 D.A. King, *World-Maps for Finding the Direction and Distance to Mecca*, London – Leiden/Boston/Köln 1999.
- Kunitzsch 1989 P. Kunitzsch, *Algorismus und Abacus im 'jüngeren Titule'*, in: *Studien zu Wolfram von Eschenbach, Festschrift für Werner Schröder zum 75. Geburtstag*, hg. v.K. Gärtner – J. Heinzle, Tübingen 1989, 529–532; nachgedr. in: P. Kunitzsch, *Reflexe des Orients im Namengut mittelalterlicher europäischer Literatur*, Hildesheim–Zürich–New York 1996, 185–188.
- Kunitzsch 1990 Claudius Ptolemäus, *Der Sternkatalog des Almagest, Die arabisch-mittelalterliche Tradition, II: Die lateinische Übersetzung Gerhards von Cremona*, hg. v.P. Kunitzsch, Wiesbaden 1990.
- Kunitzsch 1991 Claudius Ptolemäus, *Der Sternkatalog des Almagest, Die arabisch-mittelalterliche Tradition, III: Gesamtkonkordanz der Sternkoordinaten*, hg. v.P. Kunitzsch, Wiesbaden 1991.
- Kunitzsch 1991–92 P. Kunitzsch, *Letters in Geometrical Diagrams, Greek – Arabic – Latin*, in: *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften* 7 (1991–92), 1–20; nachgedr. in P. Kunitzsch, *Stars and Numbers, Astronomy and Mathematics in the Medieval Arab and Western Worlds*, Aldershot: Ashgate–Variorum 2004, Text XXVIII.
- Kunitzsch 2002–03 P. Kunitzsch, *A New Manuscript of Abū Bakr al-Ḥaṣṣār's Kitāb al-bayān*, in: *Suhayl* 3 (2002–03), 187–192.
- Kunitzsch 2003 P. Kunitzsch, *The Transmission of Hindu-Arabic Numerals Reconsidered*, in *The Enterprise of Science in Islam. New Perspectives*, hg. v.J.P. Hogendijk – A.I. Sabra, Cambridge, Mass. – London 2003, 3–21; nachgedr. in idem, *Stars and Numbers* (s.o.), Text XXIX.
- Kunitzsch–Lorch 1993 P. Kunitzsch – R. Lorch, *A Note on Codex Paris BN ar. 2457*, in: *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften* 8 (1993), 235–240.
- Labarta–Barceló 1988 A. Labarta – C. Barceló, *Números y cifras en los documentos arábigo-hispanos*, Córdoba 1988.

- Lemay 1977 R. Lemay, The Hispanic Origin of Our Present Numeral Forms, in: *Viator* 8 (1977), 435–462, Figs. 1a – 11.
- Lemay 1982 R. Lemay, Arabic Numerals, in *Dictionary of the Middle Ages*, Editor in Chief Joseph R. Strayer, I, New York 1982, 382–398.
- Lemay 1995–96 *Abū Maʿšar al-Ballḥī [Albumasar], Liber introductorii maioris ad scientiam judiciorum astrorum*, arab. u. lat. hg. v. R. Lemay, I–IX, Neapel 1995–96.
- Lemay 2000 R. Lemay, Nouveautés fugaces dans des textes mathématiques du XIIe siècle. Un essai d'*abjad* latin avorté, in *Sic itur ad astra* (s. u.), 376–392 (mit 2 Abb.).
- Levey–Petruck 1965 M. Levey – M. Petruck, *Kūshyār ibn Labbān, Principles of Hindu Reckoning*, Madison – Milwaukee 1965.
- Lorch 2001 R. Lorch, Greek–Arabic–Latin: The Transmission of Mathematical Texts in the Middle Ages, in: *Science in Context* 14 (2001), 313–331.
- Meyer 1966 R. Meyer, *Hebräische Grammatik*, Dritte, neubearbeitete Auflage, I, Berlin 1966 (Sammlung Götschen, Band 763/763a/763b).
- Reich 2000 E. Reich, Ein Brief des Severus Sēbōkt, in *Sic itur ad astra* (s. u.), 478–489.
- Šāʿid al-Andalusī 1985 Šāʿid al-Andalusī, *Ṭabaqāt al-umam*, hg. v. H. Bū-ʿAlwān, Beirut 1985.
- Saidan 1973 A. S. Saidan, *Al-Uqlīdīsī, al-Fuṣūl fī l-ḥisāb al-hindī*, Amman 1973.
- Saidan 1978 A. S. Saidan, *The Arithmetic of al-Uqlīdīsī*, Dordrecht – Boston 1978.
- Saidan 1985 A. S. Saidan, *ʿAbd al-Qāhir ibn Ṭāhir al-Baghdādī, al-Takmila fī l-ḥisāb*, Kuwait 1985.
- Serageldin–Ziedan 2002 I. Serageldin – Y. Ziedan, *El catálogo de los manuscritos del monasterio del Escorial*, Alexandria 2002.
- Sezgin 1974 F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, V: *Mathematik, bis ca. 430 H.*, Leiden 1974.
- Sic itur ad astra* *Sic itur ad astra. Studien zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften, Festschrift für den Arabisten Paul Kunitzsch zum 70. Geburtstag*, hg. v. M. Folkerts – R. Lorch, Wiesbaden 2000.

- van der Waerden–Folkerts 1976 B. L. van der Waerden – M. Folkerts, *Written Numbers*, Walton Hall, Milton Keynes: The Open University Press 1976.
- Vernet 1992 J. Vernet, *La transmisión de algunas ideas científicas [sic] de Oriente a Occidente y de Occidente a Oriente en los siglos XI–XIII*, Rom 1992 (Unione Internazionale degli Istituti di Archeologia Storia e Storia dell'Arte in Roma, Conferenze, 9).
- Vogel 1963 K. Vogel, *Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus, Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern*, Aalen 1963.
- Wattenbach–Schmale 1976 W. Wattenbach – F.-J. Schmale, *Deutschlands Geschichtsquellen im Mittelalter, Vom Tode Kaiser Heinrichs V. bis zum Ende des Interregnum*, I, Darmstadt 1976.
- Woepcke 1863 F. Woepcke, *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*, in: *Journal asiatique*, 6^e série, 1 (1863), 27–79; 234–290; 442–529; nachgedr. in F. Woepcke, *Études sur les mathématiques arabo-islamiques, Nachdruck von Schriften aus den Jahren 1842–1874*, Frankfurt am Main 1986.
- Yamamoto–Burnett 2000 Abū Maʿšar, *On Historical Astrology ... (On the Great Conjunctions)*, arab. und lat. hg. v. K. Yamamoto – C. Burnett, I–II, Leiden–Boston–Köln 2000.

Zu den Tafeln

Tafel 1: Übersicht über die Wertigkeiten der alphanumerischen Notation. Nach der lfd. Nummer in Spalte 1: die Zahlenwerte; Spalte 2: die griechische Notation; Spalte 3: die allgemein semitische Notation; Spalte 4: die ostarabische Notation, mit den rechts daneben gesetzten abweichenden Werten in der westarabischen Notation (Nordafrika, muslimisches Spanien); Spalte 5: die der westarabischen Notation nachempfundene lateinische Notation auf dem „karolingischen Astrolab“ (vermutlich Ende 10. Jh., Katalonien).

Tafel 2: Die (ursprünglich indischen) Ziffern im arabischen und anschließend im westlich-lateinischen Gebrauch. Nach den Ziffernwerten in Spalte 1: links die (ältere) Ziffernreihe im ostarabischen Raum mit rechts daneben gesetzten Formen aus der vermutlich von as-Siğzī um 970 in Schiras geschriebenen Handschrift Paris, BnF ar. 2457; am rechten Außenrand dazu die im arabischen Osten heute üblichen Formen der 4, 5 und 0, die wohl nach 1600 in Gebrauch kamen; Spalte 2: westarabische Formen – die 6 und 8 markiert, weil diese beiden sich nicht aus den bekannten ostarabischen Formen herleiten lassen; Spalte 3: aus den westarabischen Formen abgeleitete Formen in lateinischen Handschriften.

serial number	number value	Greek	Semitic	Arabic (East)	West Arabic (Maghrebi)	astrolabe caro- lingien
1.	1	A	ʾ	[ʾ]		A
2.	2	B	b	ب [b]		b
3.	3	Γ	g	ج [j, ǧ]		C
4.	4	Δ	d	د [d]		D
5.	5	E	h	ه [h]		E
6.	6	ς	w	و [w]		V
7.	7	Z	z	ز [z]		z
8.	8	H	ḥ	ح [ḥ]		h
9.	9	Θ	ṭ	ط [ṭ]		T
10.	10	I	y	ع [y]		I
11.	20	K	k	ك [k]		K
12.	30	Λ	l	ل [l]		L
13.	40	M	m	م [m]		M
14.	50	N	n	ن [n]		N
15.	60	Ξ	s [sāmekḥ]	س [s]	ص [s]	O
16.	70	O	ʿ	ع [ʿ]		G
17.	80	Π	p	ف [f]		F
18.	90	Ϙ	ṣ	ص [ṣ]	ض [ḍ]	ð
19.	100	P	q	ق [q]		
20.	200	Σ	r	ر [r]		
21.	300	T	sh [shīn]	ش [sh, ṣ]	س [s]	
22.	400	Υ	t	ت [t]		
23.	500	Φ		ث [th, ṭ]		
24.	600	X		خ [kh, ḥ]		
25.	700	Ψ		ذ [dh, ḍ]		
26.	800	Ω		ض [ḍ]	ظ [z]	
27.	900	Ϡ		ظ [z]	غ [gh, ǧ]	
28.	1000			غ [gh, ǧ]	ش [sh, ṣ]	

Tafel 1

	Eastern Arabic عربي مشرقى newer forms ١٢٣٤٥٦٧٨٩٠	Western Arabic عربي مغربى	Latin اوروپى
1	١	1	1 1
2	٢ ٢٢٢	2 2 2	2 7 2 2
3	٣ ٣٣	3 3 3 3	3 3 3
4	٤ ٤٤ ٤٤٤	4 4 4	4 4 4 4
5	٥ ٥٥ ٥٥٥	5 5	5 5 5
6	٦	6 6	6 6
7	٧	7 7 7	7 7 7
8	٨ ٨٨	8 8 8	8
9	٩ ٩٩	9	9
0	٠ .	٠	٠

Tafel 2