Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über die Extreme einer Funktion von zwei oder drei veränderlichen Grössen.

Von **J. Lüroth.**

(Eingelaufen 9. Juni.)

§ 1.

Es sei $R(x, y)$ eine Potenzreihe der zwei reellen Veränderlichen x und y, die für $(x = 0,\ y = 0)$ verschwindet. Die Veränderlichen seien durch einen Punkt in einer Ebene dargestellt. Um zu untersuchen, ob dem Ursprung O ein Maximum oder Minimum von $R(x, y)$ entspricht, kann man den folgenden Weg einschlagen.

Es seien $(x, y)_{2p}$ die Glieder niedrigster Dimension in R. Man kann immer annehmen, daß sie eine der Veränderlichen, etwa y, in der $2p^{\text{ten}}$ Potenz enthalten, denn wenn dies nicht an sich der Fall ist, kann man es immer durch eine passende lineare Transformation der Veränderlichen erreichen.

Nach dem Weierstraßschen „Vorbereitungssatze"[1]) kann man

$$R(x, y) = C f(x, y) \cdot F(x, y) \tag{1}$$

setzen, wo C eine Konstante, $F(x, y)$ eine Potenzreihe nach x und y ist, die für $x = 0$, $y = 0$ sich auf Eins reduziert, und $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von y bezeichnet, die in Bezug auf y vom Grade $2p$ ist, und deren Koeffizienten Potenzreihen nach x sind, die für $x = 0$ verschwinden. Dabei hat y^{p} den Koeffizienten Eins. Soll nun im Punkte O ein

---

[1]) Weierstraß' Werke, Bd. 2, S. 135. Stickelberger, Math. Annalen Bd. 30, S. 401.

Extremum von R stattfinden, so muß es möglich sein um O ein Quadrat Q so abzugrenzen, daß in ihm R nur in dem Punkte O und sonst nicht verschwindet. Wenn man Q gehörig klein macht, sind die in ihm liegenden Nullen von R mit denen von $f(x, y)$ identisch. Also darf in Q kein von O verschiedener Nullpunkt von f liegen. Wie Weierstraß gezeigt hat, werden aber alle Nullpunkte von R in einem passenden kleinen Bereich erhalten, indem man die Gleichung $f = 0$ nach y auflöst, wobei man x auf ein gewisses Gebiet, $|x| < \delta$, beschränkt. Soll also in O ein Extremum von R eintreten, so muß ein Gebiet von x, $|x| < \delta$, existieren, für welches die Gleichung $f(x, y) = 0$ nur komplexe Wurzeln y liefert, den Punkt $x = 0$ ausgenommen.

Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt so gibt es ein Gebiet um O, in dem $f(x, y)$ überall positiv ist, R also als Zeichen von C hat und nur für O selbst verschwindet. Dann liefert der Punkt O sicher ein Extremum von R. Ein uneigentliches Extremum findet statt, wenn für eine oder mehrere den Punkt O enthaltende Kurven R verschwindet, ohne daß beim Durchschreiten dieser Kurven ein Zeichenwechsel eintritt. Dies verlangt, daß die Gleichung $f(x, y) = 0$ für y reelle Werte ergiebt, ohne daß in deren Nähe f verschiedene Zeichen hätte. Die entsprechenden Wurzeln besitzen dann eine gerade Vielfachheit. Dies erfordert, daß die Diskriminante von $f(x, y)$ gebildet nach y, identisch Null, und daß $f(x, y)$ von der Form $g(x, y)^2 \cdot h(x, y)$ sei, wo h nur komplexe Wurzeln hat.

Die Bedingungen dafür, daß $f(x, y) = 0$ nur komplexe Wurzeln hat, können sich in der Form darstellen

$$S_1(x) > 0, \quad S_2(x) > 0, \ldots, \tag{2}$$

wo die S Potenzreihen nach x sind, die für $x = 0$ verschwinden. Es ist aber auch möglich — und dies tritt z. B. schon ein, wenn $f(x, y)$ vom vierten Grade ist — daß jene Bedingungen nur die alternative Form haben:

$$\begin{aligned} &\text{wenn } S_1(x) > 0 \text{ ist, muß } S_2(x) > 0 \ldots \\ &\text{wenn aber } S_1(x) < 0 \text{ ist, muß } S_3(x) > 0 \ldots \text{ sein.} \end{aligned} \tag{3}$$

Aus den Exponenten der niedrigsten Potenzen von x in den Reihen S und den Zeichen von deren Koeffizienten ist leicht zu entscheiden, ob es für $|x|$ einen Bereich gibt, der die Bedingungen 2) oder 3) erfüllt.

Als ein Beispiel betrachte ich die Reihe

$$R(x,y) = y^4 + a\,x^5\,y + x^6 + b\,x^8\,y + c\,x^7\,y^2 + d\,x^6\,y^3 + (x,y)_5\,y^4 + \cdots$$

Durch unbestimmte Koeffizienten findet man $C = 1$,

$$f(x,y) = y^4 + y^3(d\,x^6 + \cdots) + y^2(c\,x^7 + \cdots) + y(a\,x^5 + b\,x^8 + \cdots) + x^6 + \cdots$$

$$F(x,y) = 1 + (x,y)_5 + \cdots$$

Schafft man in $f(x,y)$ das Glied mit y^3 fort indem man

$$y = z - \frac{1}{4}(d\,x^6 + \cdots)$$

setzt, so erhält man

$$z^4 + z^2(c\,x^7 + \cdots) + z(a\,x^5 + b\,x^8 + \cdots) + x^6 + \cdots$$

Die Bedingungen, daß eine Gleichung vierten Grades

$$z^4 + r\,z^2 + s\,z + t = 0 \tag{4}$$

lauter komplexe Wurzeln habe, sind nun: die Diskriminante

$$16\,r^4\,t - 4\,r^3\,s^2 + 144\,r\,s^2\,t - 128\,r^2\,t^2 + 256\,t^3 - 27\,s^4$$

muß $\geqq 0$, und entweder

$$r^2 - 4\,t < 0 \text{ oder } r^2 - 4\,t \gtrless 0 \text{ und } r > 0$$

sein.

Die Diskriminante wird hier $256\,(x^{18} + \cdots)$, also für gehörig kleine x positiv.

Die Funktion $r^2 - 4\,t$ wird $= -4\,x^6 + \cdots$ folglich < 0. Somit sind die Bedingungen komplexer Wurzeln für gehörig kleine x erfüllt und daher gibt es ein Gebiet, in dem die gegebene Reihe R stets positiv ist, so daß dem Wertsystem ($x = 0$, $y = 0$) ein Minimum entspricht und zwar ein eigentliches, weil die Diskriminante nicht identisch Null ist.

§ 2.

Bei Funktionen von drei Veränderlichen lassen sich die ersten Betrachtungen des vorigen Paragraphen ebenfalls durchführen. An die Stelle der Ungleichungen 2) oder 3) treten dann änliche, in denen statt der Reihen nach x, solche nach zwei Veränderlichen, etwa x und y, vorkommen. Wenn die Bedingungen für komplexe Wurzeln sich stets in die Form 2) bringen ließen, so könnte man nach dem in § 1 gegebenen Verfahren untersuchen, ob es einen Bereich gibt, in dem diese Ungleichungen erfüllt sind. Schwieriger ist die Entscheidung im Falle 3) der alternativen Bedingungen, falls es Gebiete gibt, für die $S_1 > 0$ und andere in denen $S_1 < 0$ ist. Setzt man nach dem Vorbereitungssatze

$$S_1(x, y) = C_1 \cdot f_1(x, y)\, F_1(x, y)$$
$$S_2(x, y) = C_2 \cdot f_2(x, y)\, F_2(x, y),$$

wo die C, f, F analoge Bedeutung haben wie in § 1, so wird man zu untersuchen haben, ob $f_1(x, y) = 0$ als Gleichung für y reelle oder komplexe Wurzeln hat, und ferner ob aus $C_1 f_1(x, y) > 0$ stets auch $C_2 f_2(x, y) > 0$ folge.

Gesetzt es seien die Bedingungen aufzustellen, daß aus $F(w) > 0$ folge $G(w) > 0$, wenn $F(w)$ und $G(w)$ ganze Funktionen von w sind. Man zerlege $F(w) = \Phi(w)^2 f(w)$, $G(w) = \Psi(w)^2 g(w)$ wo die Funktionen f und g nur einfache Nullen haben. Ist $f(w)$ constant oder hat es nur komplexe Nullstellen, so muß $g(w)$ stets > 0 sein, darf also nur komplexe Nullen haben. Hat $f(w) = 0$ reelle Wurzeln, so muß entweder $g(w)$ stets > 0 sein, darf also nur komplexe Nullen haben. Oder es ist notwendig und hinreichend, daß für alle reellen Nullen von $f(w)$ die Funktion $g(w) > 0$ sei, und für alle reellen Nullen von $g(w)$ die Funktion $f(w)$ negativ aus-falle. Unter Umständen folgt die eine Aussage aus der anderen. Stellt man sich die beiden Gleichungen auf, von denen die eine die Werte von f für alle — reelle und komplexe — Nullen von g, und die andere die Werte von g in den Nullpunkten von f zu Wurzeln hat, so sind deren Koeffizienten rational durch die Koeffizienten von F und G ausdrückbar. Die eine von ihnen darf dann keine positiven, die andere keine negativen Wurzeln haben, was sich mit Sturmschen Reihen, vielleicht schon mit der Descartes'schen Zeichenregel, entscheiden läßt.

Wendet man diese Methode auf den vorhin erörterten Fall an, so kommt man wieder auf die Betrachtung von Potenzreihen nach x zurück. Hier dürfte es indessen bequemer sein für die Wurzeln von $f_1(x, y) = 0$ und $f_2(x, y) = 0$ in bekannter Weise Reihenentwicklungen aufzustellen und mit deren Hilfe die Entscheidung nach den oben gegebenen Kriterien zu treffen.

Als Beispiel diene die Reihe

$$z^4 + z^2(3y^2 - x^2 + (x, y)_4 + \cdots) + y^4 + x^4 + (x, y)_5 + \cdots$$

die schon die Form der Funktion f hat.

In den Bezeichnungen von 4) ist $s = 0$, daher die Diskriminante $= 16(r^2 - 4t)^2 \cdot t$. Damit die Gleichung für z vier komplexe Wurzeln habe, muß also $t > 0$, und entweder $r^2 - 4t < 0$ oder $r^2 - 4t \geqq 0$ und $r > 0$ sein. Setzt man

$$(x, y)_5 = d_0 x^5 + d_1 x^4 y + \cdots d_5 y^5$$

so wird

$$t = y^4 + y^3(d_5 x^2 + \cdots) + y^2(d_2 x^3 + \cdots) + y(d_1 x^4 + \cdots)$$
$$+ x^4 + d_0 x^5 \cdots = f_1(x, y).$$

Mit $y = \eta - \frac{1}{4}(d_5 x^2 + \cdots)$ folgt

$$f_1(x, y) = \eta^4 + \eta^2(d_2 x^3 + \cdots) + \eta(d_1 x^4 + \cdots$$
$$+ x^4 + d_0 x^5 + \cdots$$

Schreibt man dies

$$f_1(x, y) = \eta^4 + r_1 \eta^2 + s_1 \eta + t_1,$$

so wird die Diskriminante $256\, x^{12} + \cdots, r_1^2 - 4\, t_1 = -4\, x^4 + \cdots$ Also sind für gehörig kleine x die Bedingungen komplexer Wurzeln erfüllt, t ist für kleine x und y positiv and verschwindet nur für $x = y = 0$. Die Kombination $r^2 - 4\, t$ ergibt sich

$$5\, y^4 - 6\, y^2 x^2 - 3\, x^4 - 4\, (x, y)_6 + 6\, y^2 (x, y)_4 - 6\, x^2 (x, y)_4 + \cdots$$

Setzt man diese Reihe $S_2(x\, y)$ und bestimmt dazu $f_2(x, y)$, so wird $C_2 = 5$,

$$f_2(x, y) = y^4 + y^3 \left(-\frac{4}{5} d_3 x^2 + \cdots\right) + y^2 \left(-\frac{6}{5} x^2 + \cdots\right)$$
$$+ y \left(-\frac{4}{5} d_1 x^4 + \cdots\right) - \frac{3}{5} x^4 + \cdots$$

Mit $y = \eta - \frac{1}{5} d_3 x^2 + \cdots$ folgt

$$f_2(x, y) = \eta^4 + \eta^2 \left(-\frac{6}{5} x^2 + \cdots\right)$$
$$+ \eta \left(\left(-\frac{4}{5} d_1 + \frac{12}{5} d_3\right) x^4 + \cdots\right) - \frac{3}{5} x^4 + \cdots$$

Da die Diskriminante

$$= -\left(16 \cdot \frac{6^4}{5^4} \cdot \frac{3}{5} + 128 \cdot \frac{6^2}{5^2} \cdot \frac{9}{25} + 256 \frac{3^3}{5^3}\right) x^{12} + \cdots$$

ist, so hat $f_2(x, y) = 0$ zwei reelle und zwei komplexe Wurzeln und folglich kann $r^2 - 4\, t = S_2(x, y)$ positiv oder negativ sein. Somit liegt der Fall 3) vor und wir haben noch $r = S_3(x, y)$ zu betrachten. Hier findet sich $C_3 = 3$ und

$$f_3(x, y) = y^2 + y\, (e_1 x^3 + \cdots) - \frac{1}{3} x^2 + \cdots$$

wobei $(x, y)_4 = e_0 x^4 + 3\, e_1 x^3 y + \cdots$ gesetzt ist. Es muß nun, wenn die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nur komplexe Wurzeln haben soll, da die Diskriminante > 0 ist, aus $r^2 - 4\, t > 0$ auch

$r > 0$ oder aus $f_2(x, y) > 0$ $f(x, y) > 0$ folgen. Da $f_2(x, y) = 0$ nur zwei reelle Wurzeln y hat, so genügt es hiezu, daß die Nullen von $f_3(x, y)$ die Funktion $f_2(x, y) < 0$ machen. Jene Nullen haben die Entwickelung

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \cdots \text{ und } y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \cdots$$

Trägt man in $f_2(x, y)$ ein, so erhält man beidemale $-\frac{8}{9}x^4 + \cdots$ Alles zusammengenommen folgt also, daß es für die x, y einen Bereich gibt, in dem die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nur komplexe Wurzeln hat und somit stets > 0 bleibt. Aber die Diskriminante kann auch Null werden. Dies tritt ein für $t = 0$ und $r^2 - 4t = 0$, also für die Kurven $f_1(x, y) = 0$ und $f_2(x, y) = 0$. Die erstere hat, wie oben bewiesen, außer $(x = y = 0)$ keinen reellen Punkt in der Nähe des Ursprungs. Die zweite geht aber mit zwei reellen Ästen durch den Ursprung, und für sie wird

$$f(x, y, z) = \left(z^2 + \frac{r}{2}\right)^2,$$

also $= 0$, wenn $z^2 + \frac{r}{2} = 0$ ist. Für die reellen Wurzeln von $f_2(x, y) = 0$ ergibt sich

$$y = \pm\sqrt{\frac{3 + \sqrt{24}}{5}}\, x + \cdots$$

$$r = \frac{1}{5}(3\sqrt{24} + 4)x^2 + \cdots$$

$$z^2 = -\frac{1}{10}(3\sqrt{24} + 4)x^2 + \cdots;$$

also werden, für kleine x, auch wenn die Deskriminante Null ist, die Wurzeln von $f(x, y, z) = 0$ imaginär, folglich wird diese Funktion in der Nähe des Ursprungs überhaupt nicht Null und bleibt beständig > 0. Sie hat demnach im Ursprung ein eigentliches Minimum.

§ 3.

Wenn man die Bedingungen für komplexe Wurzeln stets durch eine Reihe von Ungleichungen darstellen könnte, ohne Alternative, könnte man das geschilderte Verfahren auf Funktionen von beliebig vielen Variabeln ausdehnen. Sicher geht dies an, wenn die Glieder niedrigster Dimension in allen vorkommenden Reihen von der zweiten Dimension sind.

Gegenüber den Methoden von Scheeffer, Stolz und Dantscher[1]) hat die obige den Vorteil, daß sie theoretisch übersichtlicher ist und in jedem Fall die Entscheidung liefert. Ein Nachteil ist, wenigstens zur Zeit, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für lauter komplexe Wurzeln einer Gleichung nur für Gleichungen der niedrigsten Grade bekannt sind und für Gleichungen höherer Grade erst durch die Sturmschen Reihen gebildet werden müssen. Ferner ist bei Funktionen von mehr als drei Veränderlichen die Anwendung von Reihenentwicklungen nicht stets möglich und damit unter Umständen die Entscheidung nach der im § 2 entwickelten Methode mühsam.

[1]) Zitate findet man in der Enzykl. d. Math. Bd. 2, Teil 1, S. 83.