Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1926. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1926
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über die an einer Unbestimmtheitsstelle regulären Lösungen eines Systems homogener linearer Differentialgleichungen.

Von F. Lettenmeyer in München.

Vorgelegt von O. Perron in der Sitzung am 12 Juni 1926.

Einleitung.

Von Herrn Perron wurde 1911 folgender Satz bewiesen[1]: „Die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$A_p(x)\,y^{(p)} + A_{p-1}(x)\,y^{(p-1)} + \ldots + A_0(x)\,y = 0$$

seien in dem einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ regulär; A_p habe in $\mathfrak{B}$ genau s Nullstellen (mehrfache mehrfach gezählt) und es sei $s < p$. Dann besitzt die Gleichung mindestens $p - s$ linear unabhängige und im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ reguläre Lösungen."

Der Beweis dieses Satzes wurde 1921 von Herrn Hilb durch Anwendung eines bekannten Hilfssatzes über lineare Gleichungssysteme mit unendlichviel Unbekannten vereinfacht[2]).

In § 3 der vorliegenden Arbeit wird der Perronsche Satz zunächst für Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung in Normalform verallgemeinert werden; d. h. für solche Systeme, welche nach den Ableitungen y_i' $(i = 1, \ldots, n)$ der Unbekannten aufgelöst sind. Dabei wird der erwähnte Hilfssatz die Hauptrolle spielen; da nun ein ausgeführter und insbesondere von der sonstigen Theorie der linearen Gleichungssysteme mit unendlichviel

---

[1]) O. Perron, Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten. Mathem. Annalen **70** (1911), S. 22.

[2]) E. Hilb, Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten. Mathem. Annalen **82** (1921), S. 40—41.

Unbekannten unabhängiger Beweis dieses Hilfssatzes nirgends veröffentlicht ist, sei es gestattet in § 1 einen solchen Beweis mitzuteilen.

Liegt nun ein nicht in Normalform befindliches System 1. Ordnung vor, so sieht man leicht, daß es nutzlos wäre das System nach den y_i' aufzulösen und dann den Satz des § 3 anzuwenden (abgesehen von dem Fall, wo die Determinante aus den Koeffizienten der y_i' keine Nullstelle hat, wo also gar keine Unbestimmtheitsstelle vorliegt). Hier führt jedoch eine Transformation des Systems zum Ziel, welche analog ist zu denjenigen bekannten Umformungen, welchen man eine Polynommatrix unterwirft, um die Elementarteiler zu Tage treten zu lassen. Wir werden daher in § 2, kurz gesagt, die Elementarteilertheorie der Polynommatrizen auf Matrizen von regulären Funktionen übertragen und dadurch in § 4 instandgesetzt sein über nicht in Normalform befindliche Systeme 1. und höherer Ordnung analoge Sätze aufzustellen.

§ 1.

Hilfssatz 1: Die Koeffizienten des Systems von unendlichviel linearen Gleichungen für die unendlichviel Unbekannten $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$

$$(1) \qquad \xi_\lambda + \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\lambda\mu}\, \xi_\mu = c_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

sollen die Voraussetzungen erfüllen:

$$(2) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} |c_{\lambda\mu}|^2 = \vartheta < 1$$

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty} |c_\lambda|^2 = \gamma,$$

wo $\vartheta < 1$ und γ irgendwelche Zahlen $\geqq 0$ sind.

Dann gibt es genau ein Lösungssystem von (1), für welches $\sum_{\lambda=0}^{\infty} |\xi_\lambda|^2$ konvergiert.

Beweis:

1. Wir setzen für jedes $\lambda \geqq 0$ und jedes $\nu \geqq 0$

$$\xi_{\lambda 0} = 0$$

$$\xi_{\lambda, \nu+1} = c_\lambda - \sum_\mu c_{\lambda\mu}\, \xi_{\mu\nu}\ ^{1)}$$

---

1) Alle Summationsindizes in diesem Beweis laufen von 0 bis ∞.

und zeigen durch Induktion, daß sowohl jede Reihe $\sum\limits_{\mu} c_{\lambda\mu}\,\xi_{\mu\nu}$ als auch jede Reihe $\sum\limits_{\lambda} |\xi_{\lambda\nu}|^2$ konvergiert. Ersteres ist für $\nu = 0$, letzteres für $\nu = 0$ und 1 klar. Für $\nu \geqq 1$ folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{\mu} |c_{\lambda\mu}|^2$ und $\sum\limits_{\mu} |\xi_{\mu\nu}|^2$ nach der Cauchyschen Ungleichung[1]) die Konvergenz von $\sum\limits_{\mu} |c_{\lambda\mu}| \cdot |\xi_{\mu\nu}|$. Ferner konvergiert

$$\sum_{\mu} |\xi_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu-1}|^2; \tag{4}$$

denn $\sum\limits_{\mu} |\xi_{\mu\nu}|^2$ und $\sum\limits_{\mu} |\xi_{\mu,\nu-1}|^2$ konvergieren nach Induktionsannahme und daher nach der Cauchyschen Ungleichung auch $\sum\limits_{\mu} 2\,|\xi_{\mu\nu}|\,|\xi_{\mu,\nu-1}|$. Es folgt

$$|\xi_{\lambda,\nu+1} - \xi_{\lambda\nu}|^2 \leqq \Big(\sum_{\mu} |c_{\lambda\mu}|\,|\xi_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu-1}|\Big)^2$$

$$\leqq \sum_{\mu} |c_{\lambda\mu}|^2 \cdot \sum_{\mu} |\xi_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu-1}|^2 \qquad (\text{für jedes } \lambda) \tag{5}$$

$$\sum_{\lambda} |\xi_{\lambda,\nu+1} - \xi_{\lambda\nu}|^2 \leqq \vartheta \sum_{\mu} |\xi_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu-1}|^2, \tag{6}$$

woraus wegen

$$|\xi_{\lambda,\nu+1}|^2 \leqq |\xi_{\lambda,\nu+1} - \xi_{\lambda\nu}|^2 + 2\,|\xi_{\lambda,\nu+1} - \xi_{\lambda\nu}| \cdot |\xi_{\lambda\nu}| + |\xi_{\lambda\nu}|^2 \tag{7}$$

leicht die Konvergenz von $\sum\limits_{\lambda} |\xi_{\lambda,\nu+1}|^2$ folgt.

2. Aus (6) folgt durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung

$$\sum_{\lambda} |\xi_{\lambda,\nu+1} - \xi_{\lambda\nu}|^2 \leqq \vartheta^{\nu} \sum_{\mu} |\xi_{\mu 1} - \xi_{\mu 0}|^2 = \gamma\,\vartheta^{\nu} \tag{8}$$

und a fortiori

$$|\xi_{\lambda,\nu+1} - \xi_{\lambda\nu}| \leqq \sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{\vartheta}^{\,\nu};$$

es ist also $\xi_{\lambda,\nu+1} - \xi_{\lambda\nu}$ das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe, woraus folgt, daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} \xi_{\lambda\nu} = \xi_\lambda$ existiert.

3. Aus (5) und (8) folgt

$$|\xi_{\lambda,\nu+1} - \xi_{\lambda\nu}|^2 \leqq \sum_{\mu} |c_{\lambda\mu}|^2 \cdot \gamma\,\vartheta^{\nu-1}$$

$$|\xi_\lambda - \xi_{\lambda\nu}| = |(\xi_{\lambda,\nu+1} - \xi_{\lambda\nu}) + (\xi_{\lambda,\nu+2} - \xi_{\lambda,\nu+1}) + \dots|$$

$$\leqq \sqrt{\gamma}\,\sqrt{\sum_{\mu} |c_{\lambda\mu}|^2}\,\sqrt{\vartheta}^{\,\nu-1}\,\frac{1}{1-\sqrt{\vartheta}},$$

---

[1]) $(\sum\limits_{\mu} a_\mu b_\mu)^2 \leqq \sum\limits_{\mu} a_\mu^2 \cdot \sum\limits_{\mu} b_\mu^2$, wo $a_\mu \geqq 0$, $b_\mu \geqq 0$, falls die rechtsstehenden Reihen konvergieren.

woraus wegen (3) die Konvergenz von $\sum_\lambda |\xi_\lambda - \xi_{\lambda\nu}|^2$ folgt; hieraus ergibt sich (wie bei (7)) die Konvergenz von $\sum_\lambda |\xi_\lambda|^2$.

4. Die so gewonnenen Zahlen ξ_λ bilden nun in der Tat eine Lösung von (1); denn schreiben wir

$$\sum_\mu c_{\lambda\mu}\xi_\mu = \sum_\mu c_{\lambda\mu}(\xi_\mu - \xi_{\mu\nu}) + c_\lambda - \xi_{\lambda,\nu+1},$$

wo die hier auftretenden Reihen wegen der Konvergenz von $\sum_\mu |c_{\lambda\mu}|^2$, $\sum_\mu |\xi_\mu|^2$ und $\sum_\mu |\xi_\mu - \xi_{\mu\nu}|^2$ konvergieren, so folgt aus der Abschätzung

$$\left|\sum_\mu c_{\lambda\mu}(\xi_\mu - \xi_{\mu\nu})\right|^2 \leqq \sum_\mu |c_{\lambda\mu}|^2 \cdot \sum_\mu |\xi_\mu - \xi_{\mu\nu}|^2 \leqq \gamma\vartheta^2\left(\frac{\sqrt{\vartheta}^{\,\nu-1}}{1-\sqrt{\vartheta}}\right)^2$$

mittels des Grenzüberganges $\nu \to \infty$

$$\sum_\mu c_{\lambda\mu}\xi_\mu = c_\lambda - \xi_\lambda.$$

5. Angenommen schließlich ξ_λ und η_λ seien zwei Lösungen von (1) mit absolut konvergenter Summe der Quadrate, so konvergiert auch $\sum_\mu |\xi_\mu - \eta_\mu|^2$ (wie bei (4) zu ersehen) und es folgt

$$\sum_\lambda |\xi_\lambda - \eta_\lambda|^2 = \sum_\lambda \left|\sum_\mu c_{\lambda\mu}(\xi_\mu - \eta_\mu)\right|^2 \leqq \sum_\lambda\sum_\mu |c_{\lambda\mu}|^2 \cdot \sum_\mu |\xi_\mu - \eta_\mu|^2$$

$$\sum_\lambda |\xi_\lambda - \eta_\lambda|^2 \leqq \vartheta \sum_\mu |\xi_\mu - \eta_\mu|^2; \quad \text{also}$$

$$\sum_\lambda |\xi_\lambda - \eta_\lambda|^2 = 0$$

$$\xi_\lambda = \eta_\lambda.$$

Zusatz zum 1. Hilfssatz: Ersetzt man in (1) die c_λ durch andere Zahlen c'_λ, für welche $\sum_\lambda |c'_\lambda|^2$ konvergiert, so gibt es auch genau ein Lösungssystem ξ'_λ, für welches $\sum_\lambda |\xi'_\lambda|^2$ konvergiert. Dann konvergiert auch, wie man ähnlich wie bei (4) erkennt, $\sum_\lambda |a c_\lambda + b c'_\lambda|^2$ und $\sum_\lambda |a\xi_\lambda + b\xi'_\lambda|^2$, wo a und b Konstante sind, und es folgt:

$\xi''_\lambda = a\xi_\lambda + b\xi'_\lambda$ ist dasjenige einzige Lösungssystem von

$$\xi_\lambda + \sum_\mu c_{\lambda\mu}\xi_\mu = a c_\lambda + b c'_\lambda,$$

für welches $\sum_\lambda |\xi''_\lambda|^2$ konvergiert.

Analoges gilt für beliebig, aber endlich viele Summanden auf der rechten Seite des zusammengesetzten Systems.

§ 2.

Vorgelegt sei die Matrix

$$(A_{ik}) = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

wo die A_{ik} $(i, k = 1, \dots, n)$ gegebene Funktionen der komplexen Veränderlichen x bezeichnen, welche für $|x - x_0| \leq q$ $(q > 0)$ sämtlich regulär sind. Der Rang der Matrix sei r[1]; $r > 0$.

Auf diese Matrix wenden wir Umformungen folgender Art an:

1. Addition der mit ein und derselben in $|x - x_0| \leq q$ regulären Funktion $f(x)$ multiplizierten Elemente einer Zeile zu den entsprechenden Elementen einer anderen Zeile.

2. Die analoge Operation für zwei Kolonnen.

Wir bezeichnen diese Operationen kurz als „Zeilenaddition“ und „Kolonnenaddition“.

Dann besteht folgender Satz:

Hilfssatz 2: Die Matrix (A_{ik}) läßt sich durch eine endliche Anzahl von Zeilen- und Kolonnenadditionen in folgende Normalform überführen:

$$\begin{pmatrix} A_1 B_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_1 A_2 B_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_1 A_2 \dots A_r B_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

wo $A_1, \dots, A_r$ nichtverschwindende Polynome sind, welche keine Nullstelle außerhalb des Gebietes $|x - x_0| \leq q$ haben und deren jedes bei der höchsten Potenz von x den Koeffizienten 1 hat, und $B_1, \dots, B_r$ in $|x - x_0| \leq q$ reguläre und daselbst nirgends verschwindende Funktionen sind.

Dieser Satz ist wohlbekannt für den Fall, daß sowohl die A_{ik} als auch die oben genannten Multiplikatoren f Polynome sind;

---

[1]) Der Begriff des Ranges bezieht sich hier natürlich auf identisches Verschwinden bzw. Nichtverschwinden der Determinanten.

$B_1, \ldots, B_r$ reduzieren sich dann auf von Null verschiedene Konstante. Der Beweis des Spezialfalles[1]) läßt sich auf unseren Satz ohne weiteres übertragen.

Beweis:

Jede in $|x - x_0| < q$ reguläre Funktion F besitzt die eindeutige Zerlegung
$$F = \pi \cdot \beta,$$
wo π ein Polynom bezeichnet, welches keine Nullstelle außerhalb des Gebietes $|x - x_0| < q$ und bei der höchsten Potenz von x den Koeffizienten 1 hat, und β eine in $|x - x_0| < q$ reguläre und daselbst nirgends verschwindende Funktion ist. Im Fall $F = 0$ setzen wir $\pi = 0$, $\beta = 1$. Im folgenden Beweis werden die Buchstaben π und β stets in dieser Bedeutung gebraucht; zu welcher Funktion sie gehören, ist aus den Indizes zu ersehen.

π heißt Teiler von F_1, wenn π Teiler von π_1 ist. Ohne weiteres folgen die Begriffe des größten gemeinsamen Teilers und der Teilerfremdheit.

Wir setzen nun $A_{ik} = \pi_{ik}\beta_{ik}$. Wegen $r > 0$ sind nicht alle $\pi_{ik} = 0$; es gibt also unter den $\pi_{ik} \neq 0$ eines oder mehrere von kleinstem Grade. Es sei etwa $\pi_{11} \neq 0$ und vom Minimalgrad[2]).

Ist $A_{21} \neq 0$, so liefert die Division von π_{21} durch π_{11} die Beziehung
$$\pi_{21} = g\pi_{11} + h,$$
wo h von geringerem Grade als π_{11} oder $= 0$ ist; sodann führen wir mit der Funktion $f = g\dfrac{\beta_{21}}{\beta_{11}}$ die Zeilenaddition
$$A_{2k}^* = A_{2k} - fA_{1k}$$
aus, welche bewirkt:
$$A_{21}^* = (\pi_{21} - g\pi_{11})\beta_{21} = h\beta_{21} = \pi_{21}^*\beta_{21}^*,$$
wo erst recht π_{21}^* von geringerem Grade als π_{11} oder $= 0$ ist. Offenbar kann man durch Wiederholung dieses Verfahrens er-

---

[1]) Vgl. etwa C. Jordan, Cours d'analyse, Bd. III, Paris 1915, S. 176—179.

[2]) Dies kann man durch Zeilen- und Kolonnenadditionen erreichen; denn wie aus dem Schema
$$(a, b),\ (a, -a+b),\ (a+(-a+b), -a+b) = (b, -a+b),\ (b, -a)$$
ersichtlich ist, kann man eine beliebige Kolonne an die Stelle einer andern Kolonne bringen; analog für Zeilen.

reichen, daß in der ersten Kolonne nur noch ein Element $\neq 0$ ist, und sodann — was hier bequemer ist — durch einfache Additionen, daß in der ersten Kolonne lauter gleiche Elemente $A_1 = \pi_1 \beta_1 \neq 0$ stehen. Für die übrigen Elemente verwenden wir nun wieder die ursprüngliche Bezeichnung A_{ik}.

Ist nun π_1 nicht Teiler aller übrigen π_{ik}, etwa nicht von π_{j2}[1]), so liefert die Division von π_{j2} durch π_1 die Beziehung

$$\pi_{j2} = g_1 \pi_1 + h_1,$$

wo h_1 von geringerem Grade als π_1 und $\neq 0$ ist; sodann führen wir mit der Funktion $f = g_1 \frac{\beta_{j2}}{\beta_1}$ die Kolonnenaddition

$$A_{i2}^* = A_{i2} - f A_i$$

aus, welche bewirkt:

$$A_{j2}^* = (\pi_{j2} - g_1 \pi_1)\beta_{j2} = h_1 \beta_{j2} = \pi_{j2}^* \beta_{j2}^*,$$

wo erst recht π_{j2}^* von geringerem Grade als π_1 und $\neq 0$ ist. Damit ist der ursprüngliche Minimalgrad sämtlicher π_{ik} verringert; wir beginnen mit diesem A_{j2}^* das ganze bisherige Verfahren von neuem.

Es muß also (in der Bezeichnung des ersten Schrittes) nach endlich vielen solchen Schritten der Fall eintreten, daß π_1 ein Teiler aller übrigen π_{ik} ist.

Dann läßt sich aber durch einfache Subtraktionen sofort eine Matrix folgender Form herstellen:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi_1 A_{22}^* & \dots & \pi_1 A_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \pi_1 A_{n2}^* & \dots & \pi_1 A_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Es ist klar, daß man auf die Matrix $(\pi_1 A_{ik}^*)$ $(i, k = 2, \dots, n)$, sofern sie nicht schon vom Rang 0 ist, dasselbe Verfahren anwenden kann, ohne daß dadurch die erste Zeile und die erste Kolonne der vorigen Matrix geändert werden und ohne daß die Teilbarkeit der Elemente durch π_1 verloren geht, und daß schließlich durch wiederholte Anwendung des Verfahrens die Form der Behauptung herbeigeführt wird.

---

[1]) Siehe vorige Seite Fußnote [2]).

Da der Rang der Matrix weder bei Zeilen- noch bei Kolonnenadditionen sich ändert, ist der Index r in der Endform der Matrix der Rang von (A_{ik}).

Anmerkung: Es bezeichne δ_ν $(\nu = 1, \ldots, r)$ den größten gemeinsamen Teiler aller ν-reihigen Determinanten von (A_{ik}); die Polynome δ_ν sind invariant gegenüber den hier angewandten Operationen; aus der Endform der Matrix ist somit ersichtlich, daß

$$\delta_\nu = \Lambda_1^\nu \Lambda_2^{\nu-1} \ldots \Lambda_\nu$$

ist. Die Polynome

$$\Lambda_1 = \delta_1, \quad \Lambda_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1^2}, \quad \Lambda_3 = \frac{\delta_3 \delta_1}{\delta_2^2}, \quad \ldots, \quad \Lambda_r = \frac{\delta_r \delta_{r-2}}{\delta_{r-1}^2}$$

sind also durch die Matrix (A_{ik}) eindeutig bestimmt.

Definition: Unter einer „*Transformationsmatrix*" wollen wir eine (quadratische) Matrix von in $|x - x_0| < q$ regulären Funktionen verstehen, deren Determinante in $|x - x_0| < q$ keine Nullstelle hat.

Dann ist offenbar die reziproke Matrix wiederum eine Transformationsmatrix.

Hilfssatz 3: Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes 2 gilt: Es lassen sich zwei Transformationsmatrizen (Γ_{ik}) und (Δ_{ik}) $(i, k = 1, \ldots, n)$ derart finden, daß

$$(\Gamma_{ik})(A_{ik})(\Delta_{ik}) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \Lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Beweis:

Eine in der Matrix (A_{ik}) vorzunehmende Zeilenaddition $A_{ik} + f A_{jk}$ kann durch folgende Multiplikation mit einer Transformationsmatrix erreicht werden:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot & & & & \\ & \cdot 1 \ldots f \ldots & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot 1 \end{pmatrix} (A_{ik}) = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{i1} + f A_{j1} & \ldots & A_{in} + f A_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

wo im ersten Faktor der linken Seite f in der i-ten Zeile und j-ten Kolonne steht und alle leeren Plätze außerhalb der Hauptdiagonale durch Nullen auszufüllen sind.

Ebenso leistet die Formel

$$(A_{ik})\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & f & & \ddots \\ & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \dots A_{1i} + fA_{1j} \dots A_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1} \dots A_{ni} + fA_{nj} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$$

eine in der Matrix (A_{ik}) vorzunehmende Kolonnenaddition.

Die mit der Matrix (A_{ik}) gemäß Hilfssatz 2 vorzunehmenden Operationen lassen sich also auch so darstellen, daß (A_{ik}) mit einer gewissen Anzahl von Matrizen multipliziert wird, und zwar in der Art, daß dem jeweils vorhandenen Produkt ein neuer Faktor vorangesetzt oder nachgesetzt wird, je nachdem es sich um eine Zeilen- oder Kolonnenaddition handelt. Die Elemente dieser Faktoren sind in $|x - x_0| \leq q$ reguläre Funktionen; die Determinante jedes Faktors ist $= 1$. Multiplizieren wir die vor (A_{ik}) befindlichen Matrizen aus, ebenso die hinter (A_{ik}) befindlichen, so ergibt sich eine Darstellung der Form

$$(U_{ik})\,(A_{ik})\,(\Delta_{ik}) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 \dots \\ \dots\dots \end{pmatrix},$$

wo rechts die Matrix des Hilfssatzes 2 steht. Letztere zerlegen wir etwa in

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & & \\ 0 & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & 0 & & \\ 0 & A_1 A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

wo im ersten Faktor die letzten $n - r$ (willkürlich bleibenden) Elemente der Hauptdiagonale $= 1$ gesetzt sind. Setzen wir noch

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & & \\ 0 & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot (U_{ik}) = (\Gamma_{ik}),$$

so haben wir die Behauptung; und zwar mit

$$|\Gamma_{ik}| = \frac{1}{B_1 \dots B_r}; \quad |\Delta_{ik}| = 1.$$

§ 3.

Satz 1: Die Funktionen $B_{ik}(x)$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ seien im Punkte x_0 regulär; $s_1, s_2, \ldots, s_n$ seien ganze Zahlen $\geqq 0$ und $\sum_{i=1}^{n} s_i < n$.

Dann hat das System linearer Differentialgleichungen

$$(\mathrm{I}) \qquad (x-x_0)^{s_i} y_i' = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} y_k \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mindestens $n - \sum_{i=1}^{n} s_i$ linear unabhängige und in x_0 reguläre Lösungen.

Beweis:

Setzen wir

$$B_{ik}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{ik\nu} (x-x_0)^{\nu} \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

so gibt es ein $q > 0$ derart, daß alle B_{ik} in $|x - x_0| \leqq q$ regulär sind, und daher ein $M > 0$ derart, daß

$$(9) \qquad |b_{ik\nu}| \leqq \frac{M}{q^{\nu}} \qquad (i, k = 1, \ldots, n;\ \nu \geqq 0).$$

Gehen wir mit dem Ansatz

$$y_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_{i\nu} (x-x_0)^{\nu} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

in das System (I), so ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung folgendes Gleichungssystem für die Unbekannten $D_{i\nu}$:

$$(10) \quad (\nu - s_i + 1) D_{i, \nu - s_i + 1} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=0}^{\nu} b_{ik, \nu-\lambda} D_{k\lambda} \quad (i = 1, \ldots, n;\ \nu \geqq 0),$$

wobei $D_{i\nu} = 0$ für $\nu < 0$ zu setzen ist.

Wir betrachten zunächst von dem System (10) für jedes i nur die Gleichungen mit $\nu \geqq N + s_i$, wo N ein Index ist, über welchen noch verfügt wird; wir bezeichnen die weggelassenen Gleichungen mit (10 a), das verbleibende Gleichungssystem mit (10 b). In letzterem setzen wir, um die Form von (1) in § 1 zu erhalten, zur Abkürzung

$$\beta_{ik\nu\lambda} = \frac{b_{ik, \nu-\lambda}}{\nu - s_i + 1}, \quad c_{ik\nu\lambda} = -\beta_{ik\nu\lambda} (\vartheta q)^{\nu - s_i + 1 - \lambda}, \quad D_{i\nu} = \frac{\xi_{i\nu}}{(\vartheta q)^{\nu}},$$

wobei ϑ eine beliebig, aber fest gewählte Zahl mit $0 < \vartheta < 1$ sei.

Dann nimmt (10b) folgende Form an:

$$\xi_{i,\nu-s_i+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu}c_{ik\nu\lambda}\,\xi_{k\lambda}=0 \qquad (i=1,\ldots,n;\ \nu\geq N+s_i)$$

oder $(\mu+s_i=\nu)$:

$$\text{(10b)}\quad \xi_{i,\mu+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\mu+s_i}c_{ik,\mu+s_i,\lambda}\,\xi_{k\lambda}=0 \quad (i=1,\ldots,n;\ \mu\geq N).$$

Aufgrund von (9) und für ein hinreichend groß gewähltes N gilt:

$$|\beta_{ik\nu\lambda}|\leq\frac{M}{q^{\nu-\lambda}}\cdot\frac{1}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+1}{\nu-s_i+1}<\frac{2M}{(\nu+1)\,q^{\nu-\lambda}}$$

$$|c_{ik\nu\lambda}|<\frac{2M}{(\nu+1)\,q^{\nu-\lambda}}(\vartheta q)^{\nu-s_i+1-\lambda}\leq\frac{M_1}{\nu+1}\vartheta^{\nu-\lambda},$$

wo $M_1>0$ eine geeignet gewählte Konstante ist.

Wir schreiben (10b) in der Form

$$\text{(10c)}\quad \xi_{i,\mu+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=N+1}^{\mu+s_i}c_{ik,\mu+s_i,\lambda}\,\xi_{k\lambda}=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{N}c_{ik,\mu+s_i,\lambda}\,\xi_{k\lambda}$$

$$(i=1,\ldots,n;\ \mu\geq N),$$

wobei $\sum\limits_{N+1}^{N}=0$ zu setzen ist. Bezüglich der linken Seiten gilt die Abschätzung $(\mu+s_i=\nu)$:

$$\sum_{\lambda=N+1}^{\mu+s_i}|c_{ik,\mu+s_i,\lambda}|^2=\sum_{\lambda=N+1}^{\nu}|c_{ik\nu\lambda}|^2<\frac{M_1^2}{(\nu+1)^2}(\vartheta^0+\vartheta^2+\vartheta^4+\ldots)$$

$$=\frac{M_2}{(\nu+1)^2}\leq\frac{M_2}{(\mu+1)^2}$$

$$\sum_{\mu=N}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=N+1}^{\mu+s_i}|c_{ik,\mu+s_i,\lambda}|^2<n^2M_2\left(\frac{1}{(N+1)^2}+\frac{1}{(N+2)^2}+\ldots\right)$$

$$<1$$

für hinreichend groß gewähltes N.

Wir betrachten nun diejenigen $n(N+1)$ Gleichungssysteme, welche aus (10c) dadurch hervorgehen, daß die rechte Seite lediglich durch

$$-c_{ik,\mu+s_i,\lambda}$$

ersetzt wird. Für jedes dieser Gleichungssysteme sind offenbar die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt; jedes hat daher eine und nur eine Lösung, für welche $\sum_{\mu=N+1}^{\infty} \sum_{i=1} |\xi_{i\mu}|^2$ konvergiert. Diese Lösungen seien:

$$\xi_{i\mu}^{(k,\lambda)} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \mu \geqq N+1).$$

Dann ist nach dem Zusatz zum Hilfssatz 1

$$(11) \quad \xi_{i\mu} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=0}^{N} \xi_{k\lambda}\, \xi_{i\mu}^{(k,\lambda)} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \mu \geqq N+1)$$

diejenige einzige Lösung von (10b), welche nach willkürlicher Annahme der Zahlen $\xi_{k\lambda}$ ($k = 1, \ldots, n$; $\lambda = 0, \ldots, N$) die Eigenschaft der Konvergenz der eben genannten Quadratsumme hat.

Diese Eigenschaft einer Lösung von (10b) ist nun für unseren Zweck gerade notwendig und hinreichend. Denn ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} D_{i\nu}(x-x_0)^\nu$ eine in x_0 reguläre Lösung von (I), so folgt aus bekannten Eigenschaften der regulären Integralsysteme, daß diese Lösung auch in $|x - x_0| \leqq q$ regulär ist. Es gibt also ein $M_3 > 0$ derart, daß

$$|D_{i\nu}| \leqq \frac{M_3}{q^\nu} \text{ oder } |\xi_{i\nu}| \leqq M_3 \vartheta^\nu$$

ist, woraus die genannte Konvergenzeigenschaft der $\xi_{i\nu}$ folgt. Umgekehrt liefert uns eine Lösung von (10), für welche

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |D_{i\nu}|^2 (\vartheta q)^{2\nu}$$

konvergiert, eine in x_0 reguläre Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} D_{i\nu}(x-x_0)^\nu$; denn da für hinreichend große ν

$$|D_{i\nu}| (\vartheta q)^\nu < 1$$

ist, konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} D_{i\nu}(x-x_0)^\nu$ absolut für $|x - x_0| < \vartheta_1 q$, wo wo $0 < \vartheta_1 < \vartheta$.

Das Gleichungssystem (11) ist also für unseren Zweck äquivalent mit (10b) und wir haben daher nur noch die willkürlichen Konstanten $\xi_{k\lambda}$ in (11) so zu wählen, daß auch die Gleichungen (10a) erfüllt sind.

Es sei $S = \operatorname{Max} s_i$ und $S > 0$[1]); es sei $s_j = S$. Dann ent-

[1]) Im Fall $S = 0$ sind alle $s_i = 0$; (10a) enthält dann genau die Unbekannten $D_{i0}, \ldots, D_{iN}$, welche keinen weiteren Bedingungen genügen

hält die Gleichung von (10a) mit $i = j$ und $\nu = N + s_j - 1$ genau die Unbekannten

$$D_{i0},\ D_{i1},\ \ldots,\ D_{i,N+S-1};$$

denn das auf der linken Seite dieser Gleichung stehende $D_{j,N}$ ist wegen $S > 1$ schon mit angeschrieben. Man sieht leicht, daß in keiner Gleichung von (10a) weitere Unbekannte vorkommen. Wir spalten nun von (11) die Gleichungen mit $\mu \leqq N + S - 1$ ab und nehmen sie zu (10a) hinzu (im Fall $S = 1$ bleibt dieser Schritt weg); dann haben wir für die $n(N + s)$ Unbekannten

$D_{i0},\ D_{i1},\ \ldots,\ D_{i,N+s-1}$ genau $\sum\limits_{i=1}^{n}(N + s_i) + n(S-1)$ homogene lineare Gleichungen, während durch die übrigen Gleichungen von (11) sofort die $D_{i,N+s},\ D_{i,N+s+1},\ \ldots$ eindeutig geliefert werden.

Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen des homogenen Gleichungssystems ist also mindestens gleich

$$n(N + S) - \sum_{i=1}^{n}(N + s_i) - n(S-1) = n - \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

Diesen Lösungen entsprechen aber linear unabhängige Integralsysteme.

§ 4.

Satz 2: Die Koeffizienten $A_{ik}(x)$ und $B_{ik}(x)$ des Systems linearer Differentialgleichungen

$$\text{(II)} \qquad \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, y'_k = \sum_{k=1}^{n} B_{ik}\, y_k \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n)$$

seien im Punkt x_0 regulär; die Determinante $|A_{ik}(x)|$ sei nicht identisch Null und habe den Punkt x_0 genau als s-fache Nullstelle; ferner sei $s < n$.

Dann hat das System (II) mindestens $n - s$ linear unabhängige und im Punkt x_0 reguläre Lösungen.

---

müssen, da durch (11) sofort die $D_{i,N+1},\ D_{i,N+2},\ \ldots$ eindeutig geliefert werden. Man hat also nN homogene lineare Gleichungen für $n(N+1)$ Unbekannte; der Rang des Systems ist, wie man leicht erkennt, gleich nN; man erhält also genau n linear unabhängige Lösungen und somit das gewöhnliche Existenztheorem für eine reguläre Stelle von (I).

Beweis:

Es sei $q > 0$ so klein gewählt, daß alle A_{ik} und B_{ik} in $|x - x_0| < q$ regulär sind und $|A_{ik}|$ daselbst außer $x = x_0$ keine weitere Nullstelle hat. Es sei (Γ_{ik}) irgend eine Transformationsmatrix bezüglich dieses Gebietes (s. § 2).

Multiplizieren wir die j-te Gleichung von (II) mit Γ_{ij} und summieren über j, so erhalten wir:

$$(12)\qquad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}A_{jk}y_k' = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}B_{jk}y_k \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Bezeichnen wir nun allgemein, wenn (φ_{ik}) eine gegebene Matrix ist, mit dem Ausdruck $(\varphi_{ik})(y)$ die Gesamtheit der n Funktionen

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_{ik}y_k \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

die wir uns untereinander geschrieben denken, so läßt sich (II) in der Form

$$(\text{II a})\qquad (A_{ik})(y') = (B_{ik})(y)$$

und (nach Definition des Matrizenproduktes) das aus (II) folgende System (12) in der Form

$$(12\,\text{a})\qquad (\Gamma_{ik})(A_{ik})(y') = (\Gamma_{ik})(B_{ik})(y)$$

schreiben. Da $(\Gamma_{ik})^{-1}$ ebenfalls eine Transformationsmatrix ist, folgt aus (12a):

$$(\Gamma_{ik})^{-1}(\Gamma_{ik})(A_{ik})(y') = (\Gamma_{ik})^{-1}(\Gamma_{ik})(B_{ik})(y);$$

d. i. wieder (IIa).

Das System (12a), welches wegen

$$|(\Gamma_{ik})(A_{ik})| = |\Gamma_{ik}|\cdot|A_{ik}|$$

genau denselben Voraussetzungen wie (II) genügt (denn $|\Gamma_{ik}|$ hat ja keine Nullstelle in $|x - x_0| \leq q$) besitzt also *die nämlichen* in $x = x_0$ regulären Lösungen wie (II).

Nun sei (Δ_{ik}) ebenfalls eine Transformationsmatrix bezüglich des Kreises $|x - x_0| \leq q$. Wir setzen

$$y_i = \sum_{k=1}^{n}\Delta_{ik}z_k \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

oder kurz

$$(13)\qquad E(y) = (\Delta_{ik})(z) \qquad (E = \text{Einheitsmatrix}).$$

Wegen

(14) $$(\Delta_{ik})^{-1}(y) = E(z)$$

sind also mit $y_1, \ldots, y_n$ auch $z_1, \ldots, z_n$ in $x = x_0$ reguläre Funktionen und umgekehrt.

In (II) eingesetzt:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \sum_{j=1}^{n} (\Delta_{kj} z_j' + \Delta_{kj}' z_j) = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{kj} z_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

oder (j und k vertauscht und umgeordnet):

(15) $$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \Delta_{jk} z_k' = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (B_{ij} \Delta_{jk} - A_{ij} \Delta_{jk}') z_k \quad (i = 1, \ldots, n)$$

oder

(15 a) $$(A_{ik})(\Delta_{ik})(z') = ((B_{ik})(\Delta_{ik}) - (A_{ik})(\Delta_{ik}'))(z).$$

Ebenso wie (15 a) aus (II a) folgt aus (15 a):

$$(A_{ik})(\Delta_{ik})(\Delta_{ik})^{-1}(y')$$
$$= (((B_{ik})(\Delta_{ik}) - (A_{ik})(\Delta_{ik}'))(\Delta_{ik})^{-1} - (A_{ik})(\Delta_{ik})(\bar{\Delta}_{ik}'))(y),$$

wo gesetzt ist: $$(\Delta_{ik})^{-1} = (\bar{\Delta}_{ik}).$$

Dies ist aber wieder (II a), wie man durch Differentiation der in

$$(\Delta_{ik})(\bar{\Delta}_{ik}) = E$$

zusammengefaßten Beziehungen sofort erkennt.

Das System (15 a) für die z_i, welches wiederum genau denselben Voraussetzungen wie (II) genügt, ist also dem System (II) bezüglich der in $x = x_0$ regulären Lösungen *äquivalent* in dem Sinn, daß jeder solchen Lösung des einen Gleichungssystems eine ebensolche Lösung des anderen Gleichungssystems mittels der Formeln (13) und (14) umkehrbar eindeutig entspricht.

Es ist auch leicht zu sehen, daß bei dieser Transformation die lineare Unabhängigkeit mehrerer Lösungen gewahrt bleibt. Es seien

$$y_i^{[1]}, \ldots, y_i^{[N]} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

N Lösungen von (II) und

$$z_i^{[1]}, \ldots, z_i^{[N]} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

die entsprechenden Lösungen von (15 a). Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen, daß aus Beziehungen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu y_i^{[\nu]} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

entsprechende Beziehungen für die $z_i^{[\nu]}$ folgen. Man erhält nach (13):

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik} \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu z_k^{[\nu]} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

woraus wegen $|\Delta_{ik}| \neq 0$ folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu z_k^{[\nu]} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Wir wählen nun die Transformationsmatrizen (Γ_{ik}) und (Δ_{ik}) gemäß dem Hilfssatz 3; die Polynome Λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ sind dann wegen

$$|\Gamma_{ik}|\,|A_{ik}|\,|\Delta_{ik}| = \Lambda_1^n \Lambda_2^{n-1} \ldots \Lambda_n$$

von der Form

$$\Lambda_i = (x - x_0)^{t_i} \qquad (t_i > 0 \text{ ganz});$$

und es ist

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \ldots \Lambda_i = (x - x_0)^{s_i},$$

wo

$$s_i = t_1 + t_2 + \ldots + t_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = n t_1 + (n-1) t_2 + \ldots + t \;= s.$$

Die beiden Transformationen mit diesen Transformationsmatrizen führen also (II) in folgendes System über:

$$(16) \qquad (x - x_0)^{s_i} z_i' = \sum_{k=1}^{n} B_{ik}^{*} z_k \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

welches nach Satz 1 mindestens $n - s$ linear unabhängige und in $x = x_0$ reguläre Lösungen hat.

Anmerkung zu Satz 2: Ist die Determinante $|A_{ik}|$ identisch Null, so gestattet der Gang des Beweises von Satz 2 folgende Transformation des Systems (II):

Es sei $r\,(0 < r < n)$ der Rang der Matrix (A_{ik}). Wählt man dann $q > 0$ so klein, daß das durch (A_{ik}) nach Anmerkung zu Hilfssatz 2 wohlbestimmte Polynom $\delta_r = \Lambda_1^r \Lambda_2^{r-1} \ldots \Lambda_r$ in $|x - x_0| < q$ außer $x = x_0$ keine Nullstelle hat (und natürlich wieder die A_{ik} und B_{ik} daselbst regulär sind), so bleibt der ganze Beweisgang des Satzes 2 bis zur Aufstellung des Systems (16) wörtlich erhalten, nur daß (nach Hilfssatz 3) die A_i mit $i > r$ durch 0 zu ersetzen sind. Wir erhalten also in diesem Fall ein zu (II) äquivalentes System der Form

$$(x - x_0)^{s_i} z_i' = \sum_{k=1}^{n} B_{ik}^* z_k \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

$$0 = \sum_{k=1}^{n} B_{ik}^* z_k \qquad (i = r + 1, \ldots, n)$$

mit $n - r$ endlichen Gleichungen. Dabei ist $\sum_{i=1}^{r} s_i$ die Vielfachheit, in welcher x_0 gemeinsame Nullstelle *aller* r-reihigen Determinanten von (A_{ik}) ist.

Satz 3: Die Koeffizienten $A_{ik}(x)$ und $B_{ik}(x)$ des Systems linearer Differentialgleichungen

$$\text{(III)} \qquad \sum_{k=1}^{n} A_{ik} y_k' = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} y_k \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

seien in dem einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ regulär; die Determinante $|A_{ik}(x)|$ sei nicht identisch Null und habe in $\mathfrak{B}$ genau s Nullstellen (mehrfache mehrfach gezählt); ferner sei $s < n$.

Dann hat das System (III) mindestens $n - s$ linear unabhängige und im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ reguläre Lösungen.

Beweis.

Es sei a ein Punkt des Bereiches $\mathfrak{B}$, der nicht Nullstelle von $|A_{ik}|$ ist. In a ist das System (III) äquivalent mit dem nach den y_i' aufgelösten System. Es sei

$$\eta_i^{[1]}, \ldots, \eta_i^{[n]} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

ein Fundamentalsystem an der Stelle a; im Punkte a ist also

$$\eta_i = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \eta_i^{[\nu]} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

die allgemeine Lösung, wenn die c_ν willkürliche Konstante sind.

Nun sei x_0 eine σ-fache Nullstelle von $|A_{ik}|$ in $\mathfrak{B}$. Nach Satz 2 gibt es $n - \sigma$ linear unabhängige und in x_0 reguläre Lösungen

$$\zeta_i^{[1]}, \ldots, \zeta_i^{[n-\sigma]} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Jede dieser Lösungen können wir von x_0 aus innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}$ nach a fortsetzen; es ist also

$$\zeta_i^{[\varkappa]} = \sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu\varkappa}\, \eta_i^{[\nu]} \qquad (i = 1, \ldots n;\ \varkappa = 1, \ldots, n-\sigma).$$

Da die $\zeta_i^{[\varkappa]}$ linear unabhängig sind, hat die Matrix der Zahlen $c_{\nu\varkappa}$ den Rang $n-\sigma$.

Ferner ist

$$\zeta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n-\sigma} d_\varkappa\, \zeta_i^{[\varkappa]} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{\varkappa=1}^{n-\sigma} c_{\nu\varkappa}\, d_\varkappa\right) \eta_i^{[\nu]} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

wo die $d_\varkappa$ willkürliche Konstante sind, eine in x_0 reguläre Lösung.

Wählen wir also in η_i die Konstanten c_ν derartig, daß die Gleichungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{n-\sigma} c_{\nu\varkappa}\, d_\varkappa = c_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{17}$$

eine Auflösung nach den Unbekannten $d_1, \ldots, d_{n-\sigma}$ besitzen, so sind wir sicher, daß die so spezialisierte Lösung η_i auch in x_0 regulär ist. Da die Matrix der $c_{\nu\varkappa}$ vom Rang $n-\sigma$ ist, lassen sich σ lineare homogene Bedingungsgleichungen zwischen den c_ν angeben, welche notwendig und hinreichend dafür sind, daß die Gleichungen (17) eine Lösung $d_1, \ldots, d_{n-\sigma}$ besitzen.

Führen wir diese Betrachtung für jede Nullstelle von $|A_{ik}|$ in $\mathfrak{B}$ durch, so finden wir $\Sigma\sigma = s$ lineare homogene Bedingungsgleichungen zwischen den c_ν, deren Bestehen die Regularität der so spezialisierten Lösung η_i im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ garantiert. Es bleiben also mindestens $n-s$ der Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ willkürlich, woraus die Behauptung folgt.

Satz 4: *Die Koeffizienten $A_{ik\mu}(x)$ des Systems linearer Differentialgleichungen p-ter Ordnung*

$$\sum_{\mu=0}^{p} \sum_{k=1}^{n} A_{ik\mu}\, y_k^{(\mu)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{IV}$$

seien in dem einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ regulär; die Determinante $|A_{ikp}(x)|$ sei nicht identisch Null und habe in $\mathfrak{B}$ genau s Nullstellen (mehrfache mehrfach gezählt); ferner sei $s < np$.

Dann hat das System (IV) mindestens $np-s$ linear unabhängige und im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ reguläre Lösungen.[1])

Beweis:

Der Satz braucht nur noch für $p>1$ bewiesen zu werden. Wir setzen

$$y_i^{(\mu)} = y_{i\mu} \qquad (i=1,\ldots,n;\ \mu=0,\ldots,p-1);$$

dann geht (IV) über in das System von np Differentialgleichungen 1. Ordnung für die np Unbekannten $y_{i\mu}$:

$$(18)\quad \begin{cases} y'_{i\mu} = y_{i,\mu+1} & (i=1,\ldots,n;\ \mu=0,\ldots,p-2) \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{ikp}\, y'_{k,p-1} = -\sum\limits_{\mu=0}^{p-1}\sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik\mu}\, y_{k\mu} & (i=1,\ldots,n). \end{cases}$$

Jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Lösung von (IV) liefert eine ebensolche von (18) und umgekehrt. Dabei bleibt auch die lineare Unabhängigkeit mehrerer Lösungen gewahrt; beim Übergang von (IV) zu (18) ist dies klar; hat man umgekehrt N linear unabhängige Lösungen von (18)

$$(19)\qquad y_{i\mu}^{[1]},\ \ldots,\ y_{i\mu}^{[N]} \qquad (i=1,\ldots,n;\ \mu=0,\ldots,p-1),$$

so sind auch die

$$y_{i0}^{[1]},\ \ldots,\ y_{i0}^{[N]} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

für sich linear unabhängig; denn aus Relationen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu\, y_{i0}^{[\nu]} = 0 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

mit nicht sämtlich verschwindenden Konstanten $\gamma_1,\ldots,\gamma_N$ würde sich durch sukzessives Differenzieren eine lineare Abhängigkeit der Lösungen (19) ergeben.

Es genügt also nachzuweisen, daß das System (18) mindestens $np-s$ linear unabhängige und in $\mathfrak{B}$ reguläre Lösungen besitzt; dies ist nach Satz 3 in der Tat der Fall, da die Determinante aus den Koeffizienten der Ableitungen in (18) gerade die in Satz 4 genannte Determinante $|A_{ikp}|$ ist.

[1]) Für $n=1$ ist dies der in der Einleitung genannte Perronsche Satz.

Satz 5 (Hauptsatz): Die Koeffizienten $A_{ik\mu}(x)$ des Systems linearer Differentialgleichungen (unter denen sich speziell endliche Gleichungen befinden können)

$$(\mathrm{V}) \quad \sum_{\mu=0}^{p_i} \sum_{k=1}^{n} A_{ik\mu}\, y_k^{(\mu)} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n;\ p_i \geqq 0;\ \text{nicht alle } p_i = 0)$$

seien in dem einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ regulär; die Determinante

$$|A_{ikp_i}| = \begin{vmatrix} A_{11p_1} & \ldots & A_{1np_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1p_n} & \ldots & A_{nnp_n} \end{vmatrix}$$

sei nicht identisch Null und habe in $\mathfrak{B}$ genau s Nullstellen (mehrfache mehrfach gezählt); ferner sei $s < \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Dann hat das System (V) mindestens $\sum_{i=1}^{n} p_i - s$ linear unabhängige und im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ reguläre Lösungen.

Beweis:

Es sei $p = \operatorname{Max} p_i$. Das System

$$(20) \qquad \frac{d^{p-p_i}}{dx^{p-p_i}} \sum_{\mu=0}^{p_i} \sum_{k=1}^{n} A_{ik\mu}\, y_k^{(\mu)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 4 und hat daher $N > np - s$ linear unabhängige Lösungen

$$y_{i1}, \ldots, y_{iN} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Es sind also die Ausdrücke

$$\sum_{\mu=0}^{p_i} \sum_{k=1}^{n} A_{ik\mu}\, y_{i\nu}^{(\mu)} = P_{i\nu}(x) \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, N)$$

Polynome von höchstens $(p - p_i - 1)$-tem Grad bzw. identisch Null im Fall $p_i = p$. Wir stellen nun lineare Verbindungen

$$(21) \qquad \sum_{\nu=1}^{N} C_\nu\, y_{i\nu} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

dieser Lösungen auf, welchen ebensolche Polynome

$$\sum_{\mu=0}^{p_i} \sum_{k=1}^{n} A_{ik\mu} \sum_{\nu=1}^{N} C_\nu\, y_{i\nu}^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{N} C_\nu\, P_{i\nu}(x) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

entsprechen, und suchen die Konstanten $C_1, \ldots, C_N$ so zu bestimmen, daß diese letzten Polynome identisch verschwinden, d. h. daß (21) eine Lösung von (V) ist. Dies gibt

$$\sum_{i=1}^{n}(p-p_i) = np - \sum_{i=1}^{n} p_i$$

homogene lineare Bedingungsgleichungen für die C_ν; man kann also auf mindestens

$$N-(np-\sum_{i=1}^{n} p_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i - s$$

linear unabhängige Arten die Konstanten C_ν in der gewünschten Art bestimmen, woraus die Behauptung folgt.

Ein Spezialfall von Satz 5 ist

Satz 6: Sind die $A_{ik\mu}$ des Satzes 5 ganze Funktionen und hat $|A_{ikp_i}|$ in der ganzen x-Ebene genau s Nullstellen (mehrfache mehrfach gezählt), ist ferner $s < \sum_{i=1}^{n} p_i$, dann hat das System (V) mindestens $\sum_{i=1}^{n} p_i - s$ linear unabhängige Lösungen, die ganze Funktionen sind.