Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1915
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

AKADEMIE D. WISSENSCH.

Über Dirichlets Teilerproblem.

Von **Edmund Landau** in Göttingen.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 3. Juli 1915.

Es bezeichne $T(n)$ die Anzahl der Teiler von n und $\tau(x)$ für $x > 0$ die summatorische Funktion[1])

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{[x]} T(n) = \sum_{m=1}^{[x]} \left[\frac{x}{m}\right] = \sum_{lm \leq x} 1.$$

Dirichlet[2]) hatte

$$\tau(x) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}) \tag{1}$$

bewiesen, wo C die Eulersche Konstante bezeichnet. Erst Voronoï[3]) gelang es, (1) zu verbessern und zwar zu

$$\tau(x) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt[3]{x} \log x). \tag{2}$$

Der Voronoïsche Beweis von (2) ist etwa 40 Seiten lang; ein späterer, ganz verschiedener Beweis von mir[4]), der gleichfalls

---

1) $\sum_{n=1}^{0}$ bedeute 0.

2) *Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie* [Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1849, mathematische Abhandlungen, S. 69—83; Werke, Bd. II, S. 49—66], S. 73 bzw. 56.

3) *Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXVI (1903), S. 241—282].

4) *Die Bedeutung der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie* [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXXI (1912), Abt. IIa, S. 2195—2332], S. 2206—2246.

im Gebiete der reellen Analysis verläuft, erfordert weniger Rechnungen, ist aber auch noch recht lang. Meine Behandlung[1]) dieses Problems (im Rahmen einer allgemeineren Untersuchung) mit den Mitteln der komplexen Funktionentheorie hatte zwar auch über (1) hinausgeführt, aber nur bis fast zu (2), nämlich bis zu $O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ bei jedem $\varepsilon > 0$. Dafür hatte diese komplexe Methode das über

$$\tau_k(x) = \sum_{n=1}^{[x]} T_k(n) = \sum_{m_1 \ldots m_k \leq x} 1 \qquad (k \geq 2)$$

(Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen bis x in k Faktoren) Bekannte zu

$$(3) \qquad \tau_k(x) = x(b_{k-1}\log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}+\varepsilon}\right)$$

bei jedem $\varepsilon > 0$ verschärft; die b sind hierbei Konstanten.

Nunmehr ist es mir gelungen, durch Verschmelzung meiner beiden alten Methoden und einige weitere Kunstgriffe einen Weg mit komplexer Funktionentheorie zu finden, der den ersten kurzen Beweis von (2) ergibt und für $k > 2$ das bisher beste Ergebnis (3) zu

$$(4) \qquad \tau_k(x) = x(b_{k-1}\log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}}\log^{k-1} x\right)$$

verschärft.

Und zwar werde ich nicht $k = 2$ besonders, sondern gleichzeitig alle $k \geq 2$ behandeln; das Ziel (4) enthält ja (2) genau als Spezialfall $k = 2$. Es sei also k eine feste ganze Zahl ≥ 2.

Hilfssatz 1: *Es gibt eine absolute Konstante c derart, daß für alle $U > 0$ und alle $v \gtreqless 0$*

$$\left| \int_0^U u^{-\frac{1}{2}} e^{-ui(\log u - v)} du \right| < c$$

ist.

---

[1]) *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrg. 1912, S. 687—771], S. 695—720.

Beweis: Steht z. B., übrigens mit $c = 18\sqrt{2}$, auf S. 381 meiner Besprechung der Wigertschen Abhandlung *Sur quelques fonctions arithmétiques* [Acta Mathematica, Bd. XXXVII (1914), S. 113—140] in den Göttingischen gelehrten Anzeigen, Jahrgang 1915, S. 377—414. Die Behauptung deckt sich offenbar[1]) mit dem (ebenda nicht vorgekommenen) Spezialfall $\gamma = -\frac{1}{2}$ des Hilfssatzes 10 meiner oben erwähnten Abhandlung aus den Göttinger Nachrichten und ist fast wörtlich wie dieser Hilfssatz beweisbar; was eben l. c. geschah.

Hilfssatz 2: *Es sei $w > 0$. Dann sind die $k+1$ Integrale*

$$\int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{w^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds = H(w),$$

$$\int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{w^{s+k-1}}{s(s+1)\cdots(s+k-1)}\,ds = H_1(w),$$

. . . . . .

$$\int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{w^s}{s}\,ds = H_k(w)$$

absolut konvergent und zwar bei festem $w_0 > 0$ für $0 < w \leq w_0$ gleichmäßig, so daß jede dieser Funktionen stetig und (von der zweiten an) die Ableitung der vorangehenden ist. Also insbesondere: $H(w)$ ist k Male differentiierbar, und zwar ist:

$$H^{(k)}(w) = H_k(w).$$

Beweis: s werde $= \sigma + ti$ gesetzt. Bekanntlich[2]) ist bei festem σ und sogar (was beim Beweise von Hilfssatz 3 ange-

[1]) Abgesehen von dem unerheblichen Werte der absoluten Konstanten c.

[2]) Vgl. z. B. S. 702 meiner Arbeit aus den Göttinger Nachrichten.

wendet werden wird) bei festem σ_1 und festem $\sigma_2 > \sigma_1$ für $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ gleichmäßig

$$(5) \qquad \frac{1}{\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)} = O(t^{\frac{1}{2}-\sigma}),$$

also für $\sigma = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{1}{s} = O\left(t^{-\frac{k}{4}-1}\right) = O(t^{-\frac{3}{2}}),$$

folglich jeder der $k+1$ Integranden absolut genommen gleich $w^{\frac{3}{4}+\nu}$ $(\nu = k, \ldots, 1, 0)$ mal einer Funktion von t, welche $O(t^{-\frac{3}{2}})$ ist.

Hilfssatz 3: *Es ist für $w > 0$ erstens*

$$(6) \qquad H(w) = \int\limits_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}-\infty i}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}+\infty i} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{w^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds$$

$$(7) \qquad = \int\limits_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}-\infty i}^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\infty i} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{w^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds$$

und zweitens

$$(8) \qquad H^{(k)}(w) = \int\limits_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}-\infty i}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\infty i} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{w^s}{s}\,ds.$$

Beweis: 1) Ich wende den Cauchyschen Satz auf den Integranden in (6), (7) und das Rechteck mit den Ecken

$$\frac{3}{4} - Ui, \quad \frac{3}{4} + Ti, \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2k} + Ti, \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2k} - Ui$$

an, wo $T > 0$, $U > 0$ ist. Dasselbe enthält keinen Pol des

Integranden. (Diese Pole sind ja 1, 3, 5, ... ad inf., sowie die negativen ungeraden Zahlen $> -k$.) (6) und (7) werden also aus Symmetriegründen bewiesen sein, wenn ich für

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}$$

gleichmäßig

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+k)} = 0$$

zeige; dies folgt aber nach (5) so:

$$\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+k)} = O\left(t^{k\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)-k-1}\right)$$

$$= O\left(t^{-\frac{k}{2}-1-k\sigma}\right) = O\left(t^{-\frac{k}{2}-1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}\right) = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right).$$

2) Dieselbe Betrachtung beim Rechteck mit den Ecken

$$\frac{3}{4} - Ui,\quad \frac{3}{4} + Ti,\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + Ti,\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} - Ui$$

ergibt wegen der für $\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}$ gleichmäßigen Abschätzung

$$\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \frac{1}{s} = O\left(t^{k\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)-1}\right) = O\left(t^{k\frac{1}{2k}-1}\right) = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$$

die Behauptung über $H_k(w) = H^{(k)}(w)$.

Hilfssatz 4: *Bei wachsendem w ist*

$$H(w) = O\left(w^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k}\right),$$

$$H^{(k)}(w) = O\left(w^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}\right).$$

Beweis: Bekanntlich[1]) ist bei festem σ, wenn a_1 eine komplexe, nur von σ abhängige Konstante bezeichnet,

$$\frac{1}{\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)} = a_1 t^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-ti(\log t - 1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Folglich ist, wenn a_2 und a_3 zwei nur von k abhängige komplexe Konstanten bezeichnen, für $\sigma = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$

$$\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{1}{s(s+1)\cdots(s+k)}$$

$$= a_2 t^{k\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)-k-1} e^{-kti(\log t - 1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$= a_2 t^{-\frac{1}{2}} e^{-kti(\log t - 1)} + O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{9}$$

und für $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$

$$\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{1}{s} = a_3 t^{k\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)-1} e^{-kti(\log t - 1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$= a_3 t^{-\frac{1}{2}} e^{-kti(\log t - 1)} + O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{10}$$

Der Integrand in (7) ist $w^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k} w^{ti}$ mal dem Ausdruck (9); der Integrand in (8) ist $w^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}} w^{ti}$ mal dem Ausdruck (10). Also wird offenbar Hilfssatz 4 bewiesen sein, wenn es gelingt, für $w > 0$, $T > 0$

$$\left|\int_0^T t^{-\frac{1}{2}} e^{-kti\left(\log t - 1 - \frac{1}{k}\log w\right)} dt\right| < A = A(k) \tag{11}$$

---

[1]) Vgl. z. B. S. 701 meiner Arbeit aus den Göttinger Nachrichten für $\frac{1}{\Gamma(s)}$, während $\frac{1}{\cos\frac{s\pi}{2}} = 2e^{\frac{\sigma}{2}\pi i} e^{-\frac{\pi}{2}t}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ trivial ist. Übrigens ergibt sich a_1 sogar als absolute Konstante, was aber unerheblich ist.

zu beweisen, wo A nicht von w und T abhängt. Da nun

$$\int_0^T = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^{kT} u^{-\frac{1}{2}} e^{-ui\left(\log u - \log k - 1 - \frac{1}{k}\log w\right)} du$$

ist, so ist (11) nach Hilfssatz 1 wahr, sogar mit dem absolut konstanten $A = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Hilfssatz 5: *Es sei $w > 1$, $0 < v < w$, $\Delta_v H(w)$ die $k$te Differenz bei jeweiligem Fortschreiten um v:*

$$(12) \quad \begin{cases} \Delta_v H(w) = H(w + kv) - \binom{k}{1} H(w + (k-1)v) \\ \qquad + \cdots + (-1)^k H(w). \end{cases}$$

Behauptet wird die Existenz zweier nur von k, nicht von v, w abhängiger Konstanten A_1, A_2, so daß

$$|\Delta_v H(w)| < A_1 w^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k},$$

$$|\Delta_v H(w)| < A_2 v^k w^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}}$$

ist.

Beweis: Nach Hilfssatz 4 ist für $w > 1$

$$(13) \qquad |H(w)| < A_3 w^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k}$$

und

$$(14) \qquad |H^{(k)}(w)| < A_4 w^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}}.$$

1) Nach (12) und (13) ist

$$|\Delta_v H(w)| < A_3 \Big((w + kw)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k} + \binom{k}{1} (w + kw)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k}$$

$$+ \cdots + (w + kw)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k} \Big) = A_1 w^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k}.$$

2) Wegen

$$\Delta_v H(w) = \int_w^{w+v} dw_1 \int_{w_1}^{w_1+v} dw_2 \cdots \int_{w_{k-1}}^{w_{k-1}+v} H^{(k)}(w_k)\, dw_k$$

ist nach (14)

$$|\Delta_v H(w)| < v^k A_4 (w + k w)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}} = A_2 v^k w^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}}.$$

Hilfssatz 6: *Es ist*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{y^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\, ds = \begin{cases} \frac{1}{k!}(y-1)^k & \text{für } y > 1, \\ 0 & \text{für } 0 < y \leqq 1. \end{cases}$$

Beweis: Steht z. B. auf S. 380 meiner Besprechung der Wigertschen Arbeit.

Es ist für $\sigma > 1$

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n^s} = (\zeta(s))^k.$$

Die Riemannsche Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{s\pi}{2}\, \Gamma(s)\, \zeta(s) \tag{15}$$

gibt demnach

$$Z(s) = \frac{(2\pi)^{ks}}{2^k} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\right)^k} Z(1-s),$$

also für $\sigma < 0$

$$Z(s) = \frac{1}{2^k} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\right)^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n} (2^k \pi^k n)^s. \tag{16}$$

Ich setze für $x > 0$ zur Abkürzung

$$\Phi(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{[x]} T_k(n)(x-n)^k = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{k-1}} \tau_k(x_k)\, dx_k.$$

Dann ergibt Hilfssatz 6 für $x > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)} Z(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n^s}\, ds$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} T_k(n) n^k \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\, ds = \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{[x]} T_k(n) n^k \left(\frac{x}{n} - 1\right)^k = \Phi(x).$$

Nun werde der Cauchysche Satz auf das Rechteck mit den Ecken

$$2 - Ui,\ 2 + Ti,\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} + Ti,\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} - Ui$$

(wo $T > 0$, $U > 0$ ist) und den Integranden

$$\frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)} Z(s) \tag{17}$$

angewendet. Darin liegt der Pol $k$ter Ordnung $s = 1$ und der Pol erster Ordnung $s = 0$ mit der Residuensumme

$$R(x) = x^{k+1}(g_{k-1}\log^{k-1} x + \cdots + g_0) + g x^k,$$

wo $g_{k-1}, \ldots, g$ reelle Konstanten bezeichnen (die nur von k und ihrem Index abhängen). Das Integral über die wagerechten Rechtecksseiten strebt gegen Null, da bekanntlich[1]) für $\sigma \geqq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$ gleichmäßig

$$\zeta(s) = O\left(t^{1-\frac{1}{2k}}\right),$$

also für $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \leqq \sigma \leqq 2$ gleichmäßig der Integrand (17)

$$O\left(t^{k-\frac{1}{2}-k-1}\right) = O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right) = o(1)$$

ist. Demnach ist

$$F(x) = \Phi(x) - R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}-\infty i}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}+\infty i} \frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)} Z(s)\,ds,$$

folglich nach (16)

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^k}\int_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}-\infty i}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}+\infty i} \frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n}(2^k\pi^k n)^s\,ds.$$

---

[1]) Man pflegt es aus (15) abzuleiten.

Hier ist Vertauschung von Summation und Integration erlaubt, da

$$\left|\frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n}\,(2^k\pi^k n)^s\right|$$

$$= O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\,t^{k\left(1-\frac{1}{2k}\right)}\right) = O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)$$

ist. Demnach ist

$$F(x) = -\frac{i}{2^{1+k+k^2}\pi^{1+k^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n^{k+1}}\int_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}-\infty i}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}+\infty i}\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{(2^k\pi^k nx)^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds$$

$$= -\frac{i}{2^{1+k+k^2}\pi^{1+k^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n^{k+1}}\,H(2^k\pi^k nx), \tag{18}$$

nach (6).

Nun setze ich für $x > 1$, indem z die Bedeutung $x^{\frac{k-1}{k+1}}$ hat,

$$\Delta_z F(x) = F(x+kz) - \binom{k}{1}F(x+(k-1)z) + \cdots + (-1)^k F(x).$$

Dann ist nach (12) und (18) für $x > 1$

$$\Delta_z F(x) = -\frac{i}{2^{1+k+k^2}\pi^{1+k^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n^{k+1}}\,\Delta_v H(w),$$

worin $w = 2^k\pi^k nx$, $v = 2^k\pi^k nz$ gesetzt ist. Nach Hilfssatz 5 ist demnach

$$\Delta_z F(x) = O\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n^{k+1}}\,\mathrm{Min.}\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k}x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k},\ n^k x^{\frac{k(k-1)}{k+1}}n^{2^{-\frac{1}{2k}}}x^{2^{-\frac{1}{2k}}}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{k(k-1)}{k+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}\sum_{n=1}^{\left[x^{\frac{k-1}{k+1}}\right]}\frac{T_k(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k}\sum_{n=\left[x^{\frac{k-1}{k+1}}\right]+1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2k}}}\right).$$

Bekanntlich ist, nämlich als leichte Folge der rohesten Abschätzung $\tau_k(x) = O(x \log^{k-1} x)$,

$$\sum_{n=1}^{[y]} \frac{T_k(n)}{n^\lambda} = O(y^{1-\lambda} \log^{k-1} y) \qquad \text{für } \lambda < 1$$

und

$$\sum_{n=[y]+1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n^\lambda} = O(y^{1-\lambda} \log^{k-1} y) \qquad \text{für } \lambda > 1;$$

(19) liefert also

$$\begin{aligned} \Delta_z F(x) &= O\left(x^{\frac{k(k-1)}{k+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\frac{k-1}{k+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)} \log^{k-1} x\right) \\ &\quad + O\left(x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k+\frac{k-1}{k+1}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)} \log^{k-1} x\right) \\ &= O(x^{k-1} \log^{k-1} x) = O(z^{k+1} \log^{k-1} x). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\Delta_z R(x) = z^k R^{(k)}(\xi) \qquad \left(x \leqq \xi \leqq x + k x^{\frac{k-1}{k+1}}\right),$$

also, wegen

$$\begin{aligned} R^{(k)}(x) &= x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + b, \\ \Delta_z R(x) &= z^k (x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + b + O(z \log^{k-1} x)) \\ &= z^k x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O(z^{k+1} \log^{k-1} x), \end{aligned}$$

$$\Delta_z \Phi(x) = \Delta_z F(x) + \Delta_z R(x)$$

$$= z^k x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O(z^{k+1} \log^{k-1} x). \tag{20}$$

Wegen

$$\Delta_z \Phi(x) = \int_x^{x+z} dx_1 \int_{x_1}^{x_1+z} dx_2 \ldots \int_{x_{k-1}}^{x_{k-1}+z} \tau_k(x_k)\, dx_k$$

ist

$$z^k \tau_k(x) \leqq \Delta_z \Phi(x) \leqq z^k \tau_k(x + kz). \tag{21}$$

Aus (20) und (21) folgt erstens

$$\tau_k(x) \leqq x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} x\right), \tag{22}$$

zweitens

$$\tau_k\left(x + k x^{\frac{k-1}{k+1}}\right) \geqq x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} x\right),$$

d. h., $x + k x^{\frac{k-1}{k+1}} = y$ als neue Variable eingeführt,

$$\tau_k(y) \geqq \left(y + O\left(y^{\frac{k-1}{k+1}}\right)\right)\left(b_{k-1}\left(\log y + O\left(y^{\frac{k-1}{k+1}-1}\right)\right)^{k-1} + \cdots + b_0\right)$$
$$+ O\left(y^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} y\right)$$

(23) $$= y(b_{k-1}\log^{k-1} y + \cdots + b_0) + O\left(y^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} y\right).$$

(22) und (23) besagen zusammen

(4) $$\tau_k(x) = x(b_{k-1}\log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} x\right).$$

Der Spezialfall $k = 2$ der Identität (18) steht (wenn auch mit längerem Beweis) schon[1]) in der Voronoïschen Arbeit *Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries*[2]), S. 497, Z. 3 v. u. Voronoï hat aber nicht bemerkt, daß der lange direkte Beweis von (2) in seiner anderen Arbeit (aus Crelles Journal) durch die obige kurze Schlußweise von (18) aus ersetzt werden kann; die von mir verwandten asymptotischen Abschätzungen[3]) der Funktionen $H(w)$ und $H^{(k)}(w)$ kommen[4]) in jener Arbeit (aus den Annales de l'École Normale) vor, soweit es sich um seinen Fall $k = 2$ handelt.

Göttingen, den 21. Juni 1915.

---

[1]) Der Leser, welcher die gliedweise Übereinstimmung beider Formeln verifizieren will, muß sich z. B. durch Anwendung des Cauchyschen Satzes davon überzeugen, daß (für $k = 2$) mein $H(w)$ gleich $-2\pi i$ mal der Residuensumme des Integranden in den Polen 1, 3, 5, ... ist, und daß diese Residuensumme

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{w^{2\lambda+3}}{(2\lambda)!\,(2\lambda+3)!}\left(\log w + 2C - \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2\lambda}\right) - \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2\lambda+3}\right)\right)$$

ist, also in Voronoïscher Bezeichnung $= \frac{4}{\pi^2} w + \frac{2}{\pi^2}(\xi_3(w) - \eta_3(w))$.

[2]) Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. III, Bd. XXI (1904), S. 207—267 und S. 459—533.

[3]) Nicht etwa die Fassung des obigen Hilfssatzes 5 und seine Anwendung, worin gerade mein (der Pfeifferschen Methode entnommener) Ausgangspunkt besteht.

[4]) Wenn man den in der drittletzten Fußnote angedeuteten Übergang von $H(w)$ zu Voronoïs Funktionen hinzunimmt.