Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1947

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Über eine Kennzeichnung der Ovale von der zyklischen Ordnung Vier.

Von **Otto Haupt** in Erlangen.

Vorgelegt am 4. Juli 1947.

Bekannt ist folgender Satz: Ein Oval C ohne Kreisbogen und von stetiger, endlicher Krümmung ist vom zyklischen Ordnungswert Vier, wenn und nur wenn C genau vier Scheitel besitzt. Dabei wird unter dem zyklischen Ordnungswert, kurz OW, eines Bogens B verstanden die maximale Anzahl der Punkte, die ein Kreis mit B gemeinsam hat (falls dieses Maximum existiert); ferner unter dem OW eines Punktes P von C der OW aller hinreichend kleinen Umgebungen von P auf C und unter einem Scheitel ein Punkt von mindestens dem OW Vier.

Unter den Beweisen[1] für diesen Satz gestattet einer[2] eine weitgehende Verallgemeinerung, welche nachstehend angegeben sei. Der fragliche Beweis bedient sich einer Ausgestaltung der auf Mukhopadhyaya[3] zurückgehenden Methode der „monotonen Änderung der Schnittpunkte" und führt gleichzeitig zu einer Vereinfachung des Beweises[4] für den Vierscheitelsatz bzw. seine Verallgemeinerung (vgl. unten Satz (1)). Die Verallgemeinerung selbst besteht darin, daß man an Stelle der Kreise ein System von Kurven, die sogenannten Ordnungscharakteristiken, kurz OCh, treten läßt mit folgenden Eigenschaften:[5] Durch irgend k Punkte ist eine OCh eindeutig bestimmt; die OCh

[1] C. Juel, Danske Vidensk. Selskab Skrifter naturv. og matem. Afd. 7. R., VIII, Nr. 6 (1911). – W. Blaschke, Vorles. über Differentialgeometrie I., 2. Aufl., Berlin 1930, S. 49, Aufg. 21. – R. C. Bose, Math. Zeitschr. 35 (1932) S. 24. – Haupt, Monatsh. f. Math. u. Physik 40 (1933), S. 48. – G. Bol, Abh. math. Seminar Hamburg 13 (1940), S. 319.

[2] vgl. Haupt, a. a. O. Fußnote[1].

[3] S. Mukhopadhyaya, (1) Collected geometrical papers, Calcutta 1929, Part I, S. 13 ff. und S. 105 ff.; sowie (2) Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 648 ff.

[4] Vgl. insbesondere Mukhopadhyaya a. a. O. Fußnote[3] (2). Die hier noch gemachten Annahmen, daß die OCh analytisch (und, ebenso wie der Grundbogen, konvex) seien, werden bei unserem Beweise überflüssig.

[5] Näheres bei Haupt, a. a. O. Fußnote[7] sowie Fußnote[1], S. 7 ff.

ändert sich stetig mit diesen Punkten. Ferner tritt an Stelle des Ovals ein Bogen B oder eine Kurve K (Grundbogen, Grundkurve), der zu allen OCh „normal" liegt, d. h. ist H eine OCh, so lassen sich die gemeinsamen Punkte $P_1, \ldots, P_r$ von B und H in eine solche Reihenfolge bringen, daß sie in dieser sowohl auf B als auf H durchlaufen werden (bei geeigneter Orientierung von B und H). Schließlich soll B in jedem seiner Punkte Q die Eigenschaft haben, daß die OCh durch k auf Q sich zusammenziehende Punkte konvergieren und daß die Limesmenge, die sogen. k-Paratingente an B in Q, mit B nur eine auf B nirgends dichte Menge von Punkten gemeinsam hat.[6] Die Begriffe des Ordnungswertes (OW) eines Bogens sowie eines Punktes, ferner des Scheitels übertragen sich ohne weiteres, wobei $(k + 1)$ an Stelle der Zahl Vier zu treten hat. Die oben erwähnten verallgemeinerten Sätze lauten:

(1) *Ein Grundbogen bzw. eine Grundkurve von mindestens dem* OW $p \geq k + 1$ *besitzt mindestens $(p - k)$ bzw. mindestens p Scheitel.*

(2) *Ein Grundbogen vom* OW $(k + 1)$ *besitzt höchstens $(k + 1)$ Scheitel.* Aus (1) und (2) folgt unmittelbar:

(3) *Die Grundkurve besitzt den* OW $(k + 1)$ *dann und nur dann, wenn sie genau $(k + 1)$ Scheitel besitzt.*

Außerdem ergibt sich unter anderem: *Liegen die Scheitel isoliert auf dem Grundbogen B, so ist B Summe von Bogen des* OW k, *die bis auf Endpunkte fremd sind und deren Endpunkte, soweit sie im Innern von B liegen, gerade die Scheitel sind; diese Scheitel besitzen sämtlich den (minimalen)* OW $(k + 1)$.

Die Beweise von (1), (2) bedienen sich vollständiger Induktion nach k und sollen an anderer Stelle[7] veröffentlicht werden. Später wird auch auf eine andere[8] Kennzeichnung der Kurven vom OW $(k + 1)$ einzugehen sein.

Es darf darauf hingewiesen werden, daß die obigen Sätze sowie deren Beweise direkt geometrisch gefaßt sind.

---

[6] Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so braucht Satz (1) (oben im Text) nicht zu gelten. In der Tat gibt es z. B. für den Fall der Kreise als OCh Ovale mit genau 2 Scheiteln.

[7] Annali di mat. appl. (4) 27.

[8] Vgl. Haupt, Sitz.-Ber. d. physikal.-med. Sozietät Erlangen 65 (1934), 279 ff. sowie ebenda 67 (1935), 13.