BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE
ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 125

ALFONS MILLER

Beitrag zur genauen Berechnung langer geodätischer Linien mit elektronischen Rechenautomaten

Mit 26 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn Max Kneißl
am 7. Mai 1965

MÜNCHEN 1966
VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Geodätischen Institut der Technischen Hochschule München. Die Anregung dazu verdanke ich Herrn o. Prof. Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. E. h. M. Kneißl, der mir nicht nur die Möglichkeit gab, diese Arbeit an seinem Lehrstuhl auszuführen, sondern auch seine stete Förderung zuteil werden ließ. Er machte mir ferner an seinem Institut die benötigte Literatur zugänglich und ermöglichte mir insbesondere die Ausführung der umfangreichen Rechen- und Programmierungsarbeiten an der Rechenstelle seines Instituts mit der programmgesteuerten elektronischen Rechenanlage ZUSE Z 23.

Ich bin meinem verehrten Lehrer Herrn o. Prof. Dr. Dr. Kneißl zu herzlichem Dank verpflichtet.

A. Miller

INHALTSÜBERSICHT

Vorbemerkungen

1. Allgemeines 7
2. Genauigkeitsforderungen für die Zahlenrechnung 8
3. Der Inhalt der Arbeit 10

Teil A. Berechnung der Winkel- und Arcusfunktionen mit hoher Genauigkeit

1. Einleitung 11
2. Ableitung von Tschebyscheffschen Polynomen 11
3. Herleitung von Näherungsfunktionen 14
   3.1 Näherungsfunktionen vermittels Tschebyscheffscher Polynome 14
      3.1.1 Näherungspolynome für sin x 14
      3.1.2 Näherungspolynom für cos x 18
      3.1.3 Näherungspolynom für arcsin x 19
   3.2 Kettenbruchentwicklung für arctg x 24
4. Herstellung von Unterprogrammen 27
   4.1 Unterprogramme für die Winkel- und Arcusfunktionen 27
      4.1.1 Unterprogramm für sin x 27
      4.1.2 Unterprogramm für cos x 28
      4.1.3 Unterprogramm für arcsin x 32
      4.1.4 Unterprogramm für arccos x 33
      4.1.5 Unterprogramm für arctg x 35
   4.2 Unterprogramme zur Winkelumwandlung 37
      4.2.1 Unterprogramm zur Winkelumwandlung von Altgrad ins Bogenmaß . . . 38
      4.2.2 Unterprogramm zur Winkelumwandlung vom Bogenmaß in Altgrad . . . 38
5. Zusammenfassung von Teil A 39

Teil B. Berechnung langer geodätischer Linien

1. Einleitung 40
2. Mathematische Grundlagen 40

2.1 Grundbegriffe und Grundformeln 40
2.1.1 Grundbegriffe für das Rotationsellipsoid 40
2.1.2 Der Satz von Clairaut 41
2.1.3 Die Besselschen Hilfsdreiecke 42
2.1.3.1 Das Besselsche Lösungsprinzip 42
2.1.3.2 Die wichtigsten Beziehungen in den sphärischen Hilfsdreiecken . . 42
2.2 Lösungsverfahren für große Entfernungen 44
2.2.1 Die Besselsche Lösung 44
2.2.2 Die Helmertsche Lösung mit Modifikationen nach Bodemüller 47
2.2.3 Die Lösung nach Levallois und Dupuy 51
2.2.4 Die Lösung von Hubeny 54
2.2.5 Die Lösungen von Sodano 58
3. Umstellung der Lösungen für elektronische Rechenanlagen und Entwicklung von Rechenprogrammen 62
3.1 Allgemeines 62
3.2 Vorprogramme 64
3.2.1 Vorprogramm für die 1. Hauptaufgabe 64
3.2.2 Vorprogramm für die 2. Hauptaufgabe 65
3.3 Rechenprogramme für die geodätischen Hauptaufgaben 68
3.3.1 Rechenprogramme nach dem Besselschen Verfahren 69
3.3.2 Rechenprogramme für die Lösungen nach Helmert und Bodemüller 80
3.3.3 Rechenprogramme für die Lösung nach Levallois und Dupuy 95
3.3.4 Rechenprogramm für die erste Hauptaufgabe nach der Lösung von Hubeny 105
3.3.5 Rechenprogramme für die Lösungen nach Sodano 111
3.4 Übersicht über die erstellten Rechenprogramme 118
3.5 Zusammenstellung von Rechenbeispielen 118
4. Vergleich und Beurteilung der Rechenprogramme 127
5. Beurteilung der Lösungsverfahren 131
6. Abschließende Bemerkungen 134
Literaturverzeichnis 137

VORBEMERKUNGEN

1. ALLGEMEINES

Im Zusammenhang mit der geplanten Schaffung eines einheitlichen weltweiten Vermessungssystems hat auch das Problem der Berechnung langer geodätischer Linien wieder grundlegende Bedeutung erlangt. Der beabsichtigte Zusammenschluß regionaler und kontinentaler Triangulationsnetze, der nunmehr durch die Methoden der Stellartriangulation und der Satellitengeodäsie realisierbar geworden ist, erfordert in weit größerem Umfang als bisher wirtschaftliche Möglichkeiten zur rechnerischen Überbrückung sehr großer Entfernungen, die bis maximal zum halben Erdumfang reichen können. Aber auch nichtgeodätische Stellen, von denen nur das internationale Funkwesen und die Luftnavigation genannt seien, benötigen immer häufiger zwar nur genäherte, aber durch sphärische Berechnung nicht mehr mögliche Entfernungs- und Azimutbestimmungen bei sehr großen Strecken bis zu 20000 km.

Zur Lösung dieser als geodätische Hauptaufgaben bezeichneten Probleme wird als Referenzfläche für das Geoid ein Rotationsellipsoid verwendet. Ein Parameternetz aus Parallelkreisen und Meridianen ermöglicht die eindeutige Festlegung eines jeden Punktes durch seine geographischen Koordinaten. Zur Definition von Richtungen und Entfernungen zwischen je zwei Punkten wird wegen ihrer besonders günstigen flächentheoretischen Eigenschaften die beide Punkte verbindende kürzeste oder geodätische Linie verwendet. Dabei wird als Richtung das von Norden über Osten gezählte Azimut und als Entfernung die Bogenlänge der zwischen den beiden Punkten verlaufenden geodätischen Linie angegeben.

Als erste geodätische Hauptaufgabe wird das stets eindeutige lösbare Problem der Berechnung der geographischen Koordinaten B_2, L_2 eines Punktes P_2 und des Azimuts A_2 der die Punkte P_1 und P_2 verbindenden geodätischen Linie in P_2 bezeichnet; gegeben sind dabei die geographischen Koordinaten B_1, L_1 und die kürzeste Entfernung Δs sowie das Azimut A_1 der geodätischen Linie in P_1.

Bei der zweiten geodätischen Hauptaufgabe, die abgesehen vom Sonderfall zweier zufällig existierender gleichlanger Verbindungslinien ebenfalls stets eindeutig lösbar ist, sind die geographischen Koordinaten B_1, L_1 und B_2, L_2 zweier Punkte P_1 und P_2 gegeben. Gesucht sind hier die kürzeste Entfernung Δs dieser Punkte sowie die Azimute A_1, A_2 der die Punkte verbindenden geodätischen Linie in den gegebenen Punkten.

Im Prinzip sind diese Probleme auch bei langen Entfernungen längst gelöst. Die zahlenmäßige Berechnung ist jedoch hier immer noch mit erheblichem Rechenaufwand verbunden, so daß das eigentliche Problem nicht mehr so sehr in der Lösung an sich, als vielmehr in der Wirtschaftlichkeit der Lösungen zu sehen ist. Es ist deshalb nicht überraschend, daß

gerade in letzter Zeit eine Reihe von Versuchen unternommen wurden, die vorliegenden Aufgaben möglichst rationellen Lösungen zuzuführen ([6], [7], [16], [24], [26], [27], [29], [34], [39], [40], [41]). Dabei spielt im allgemeinen die Rationalisierung durch weitgehende Tabulierung eine entscheidende Rolle.

Die Fortschritte der letzten Jahre auf dem Gebiet der elektronischen Rechentechnik lassen jedoch erwarten, daß das Problem der Wirtschaftlichkeit endgültig durch den Einsatz programmgesteuerter elektronischer Rechenanlagen gelöst werden kann, zumal sich die Verwendung solcher Rechenautomaten für die Aufgaben der niederen Geodäsie inzwischen mit gutem Erfolg bewährt hat. Grundsätzlich scheint sogar bei der Berechnung langer geodätischer Linien ein besonders hoher Grad der Wirtschaftlichkeitssteigerung mit Hilfe dieser Rechenautomaten möglich zu sein, da hier auf Grund nur weniger Ausgangsdaten erhebliche Rechenarbeit zu bewältigen ist und das Ergebnis dann wieder in der Form nur weniger Zahlenwerte anfällt.

Allerdings ist zu erwarten, daß die neue Rechentechnik auch andere Voraussetzungen sowohl im Hinblick auf die Lösungsverfahren selbst als auch hinsichtlich der Rechenhilfsmittel erfordert. So kommt hier z. B. die Verwendung von Tafelwerken oder von graphischen Hilfsmitteln nicht mehr in Betracht, so daß gleichzeitig die bisherigen Anstrengungen nach einer Rationalisierung der Lösungen weitgehend an Bedeutung verlieren würden.

Zwar sind in der Zwischenzeit bereits Versuche zur Lösung der vorliegenden Probleme mit Hilfe programmgesteuerter Rechenautomaten bekannt geworden ([33], [35]), denen jedoch ein befriedigendes Ergebnis entweder infolge mangelnder Genauigkeit oder eines beschränkten Anwendungsbereiches der Rechenprogramme bzw. der ihnen zugrunde liegenden Verfahren nicht zugesprochen werden kann. Mit der vorliegenden Arbeit soll deshalb ein weiterer Beitrag zur Lösung des Wirtschaftlichkeitsproblems bei der Berechnung langer geodätischer Linien durch Anwendung der neuen Rechentechnik geleistet werden.

2. GENAUIGKEITSFORDERUNGEN FÜR DIE ZAHLENRECHNUNG

Ein entscheidendes Problem bei der Lösung der vorliegenden Aufgaben mit elektronischen Rechenanlagen ergibt sich aus der dabei notwendigen hohen Rechengenauigkeit, da die Rechenautomaten selbst nur mit Zahlen begrenzter Stellenzahl arbeiten.

Es ist deshalb zunächst eine allgemeine Untersuchung über die bei der Lösung der geodätischen Hauptaufgaben erforderliche Genauigkeit notwendig. Diese ist sehr unterschiedlich und hängt ab vom Verwendungszweck der Ergebnisse. Sie ist am größten bei Berechnungen für geodätische Zwecke. Hier wird für den geographischen Breitenwert B und Längenwert L im allgemeinen eine Genauigkeit von

$$\delta B'' = \delta L'' = 1'' \cdot 10^{-4}$$

gefordert. Dies entspricht im linearen Maß auf dem Meridian

$$\overline{\delta B} = \frac{\delta B'' \cdot a}{\varrho''} = \frac{1'' \cdot 10^{-4} \cdot 6{,}38 \cdot 10^{8}}{2''{,}06 \cdot 10^{5}} \text{ cm} = 3{,}1 \text{ mm}$$

und auf dem Parallelkreis

$$\overline{\delta L} = \frac{\delta L'' \cdot a}{\varrho''} \cdot \cos B,$$

also maximal für $B = 0$

$$\overline{\delta L}_{max} = \frac{1'' \cdot 10^{-4} \cdot 6{,}38 \cdot 10^{8}}{2''06 \cdot 10^{5}} \cdot 1 = 3{,}1 \text{ mm}.$$

In Polnähe ist für den Längenwert eine geringere Genauigkeit ausreichend.

Mit den Werten $\overline{\delta B}$ und $\overline{\delta L}$ läßt sich die für die Azimute erforderliche Genauigkeit abschätzen. Einer Querabweichung von $\bar{\delta} = 3{,}1$ mm entspricht eine Winkelgenauigkeit von

$$\delta A'' = \frac{\bar{\delta}}{\mathfrak{m}} \cdot \varrho''.$$

Die reduzierte Länge $\mathfrak{m}$ der geodätischen Linie kann maximal gleich a oder $6{,}38 \cdot 10^{8}$ cm werden. Damit wird

$$\delta A'' = \frac{3{,}1}{6{,}38 \cdot 10^{9}} \cdot 2{,}06 \cdot 10^{5} = 1'' \cdot 10^{-4}.$$

Die Azimute sind also ebenfalls mit einer Genauigkeit von $1'' \cdot 10^{-4}$ anzugeben.

Diesem Wert entsprechen

$$\delta^{\circ} = 2{,}8 \cdot 10^{-8} \text{ Altgrad oder}$$
$$\widehat{\delta} = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ im Bogenmaß}.$$

Für geodätische Zwecke ist die Zahlenrechnung also mit einer Genauigkeit von 10^{-10} auszuführen.

Umgekehrt entspricht

einer Rechengenauigkeit von	eine Lagegenauigkeit von	und eine Winkelgenauigkeit von
10^{-10}	$\bar{\delta} = 3$ mm	$\delta'' = 1'' \cdot 10^{-4}$
10^{-9}	$= 3$ cm	$= 1'' \cdot 10^{-3}$
10^{-8}	$= 30$ cm	$= 1'' \cdot 10^{-2}$
10^{-7}	$= 3$ m	$= 1'' \cdot 10^{-1}$
10^{-6}	$= 30$ m	$= 1''$.

Die oben geforderte Genauigkeit von 10^{-10} ist mit elektronischen Rechenautomaten nicht ohne weiteres zu erreichen. Größere Rechenanlagen arbeiten zwar teilweise mit einer Mantissenlänge von 38 bis 40 Binärstellen, was etwa 11 bis 12 Dezimalstellen entspricht; bei mittleren Rechenanlagen ist die Wortlänge im allgemeinen wesentlich kürzer. Die Mantissenlänge ist jedoch keineswegs identisch mit der erreichbaren Endgenauigkeit der Ergebnisse, da bereits bei der Konvertierung der Zahlen, insbesondere aber durch eine nicht kontrollierbare Akkumulation von Rundungsfehlern während des Rechenprozesses ein erheblicher Genauigkeitsverlust eintritt. Testberechnungen auf der PERM (programmgesteuerte elektronische Rechenanlage München), die mit einer ca. 12 Dezimalstellen entsprechenden Mantissenlänge arbeitet, ergaben, daß bei der Lösung der vorliegenden Probleme hier nur etwa 9 Dezimalstellen als sicher zu betrachten sind. Um eine Endgenauigkeit von 10^{-10} in jedem Fall sicher zu erreichen, müssen demnach die Berechnungen mit einer ca. 13 bis 14 Dezimalstellen entsprechenden Mantissenlänge ausgeführt werden. Das bedeutet, daß bei Berechnungen für geodätische Zwecke die einfache Wortlänge nicht mehr ausreicht, die arithmetischen Operationen also mit doppelter Genauigkeit auszuführen sind. Berechnungen mit doppelter Wortlänge sind zwar grundsätzlich bei jeder Rechenanlage

möglich. Für vereinfachende Formelsprachen wie Algol oder Fortran fehlen jedoch zur Zeit noch die erforderlichen Unterprogramme, so daß die Rechenprogramme im jeweiligen Maschinen-Code zu erstellen wären.

Speziell für die Rechenanlage ZUSE Z 23 wurde von der Firma ZUSE KG, Bad Hersfeld, ein Unterprogramm zur Berechnung mit doppelter Wortlänge erstellt (Programm Nr. 23044, Hersteller Suppes), das eine weitgehende Verwendung des Freiburger Codes erlaubt. Die Rechenzeiten erhöhen sich dabei zwar auf etwa das Dreifache (Rechengeschwindigkeit bei einfacher Wortlänge ca. 60, bei doppelter Wortlänge ca. 20 Operationen pro Sekunde); die Mantissenlänge beträgt jedoch anstatt ursprünglich 30 (ca. 9 Dezimalstellen) nunmehr 70 Binärstellen, was etwa 20 Dezimalstellen entspricht.

Die Rechenprogramme zur Lösung der geodätischen Hauptaufgaben werden deshalb in der vorliegenden Arbeit zunächst speziell für die ZUSE Z 23 erstellt. Die der eigentlichen Programmierung vorausgehenden Ausführungen über die mathematischen und verfahrenstechnischen Grundlagen werden jedoch bewußt allgemein gehalten, außerdem werden ausführliche Flußdiagramme beigegeben, so daß eine spätere Übersetzung der Programme in eine andere Formelsprache ohne Schwierigkeiten möglich ist.

3. DER INHALT DER ARBEIT

Die Berechnung langer geodätischer Linien mit der oben geforderten Genauigkeit setzt geeignete Unterprogramme zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen und der Arcusfunktionen mit mindestens derselben hohen Genauigkeit voraus. Da jedoch solche Unterprogramme nicht zur Verfügung stehen, muß ihre Herstellung der eigentlichen Berechnung der geodätischen Hauptaufgaben vorausgehen.

Die Arbeit gliedert sich demnach in zwei Teile. In Teil A werden zunächst die rechentechnischen Voraussetzungen für die Lösung der geodätischen Hauptaufgaben durch Erstellung von Unterprogrammen zur genauen Berechnung der Winkel- und Arcusfunktionen geschaffen, wofür allerdings zuvor die Herleitung geeigneter Näherungsfunktionen erforderlich ist. Außerdem werden Unterprogramme zur Winkelumwandlung vom Gradmaß ins Bogenmaß und vom Bogenmaß zurück in Altgrad erstellt.

Der Teil B befaßt sich dann mit der eigentlichen Berechnung langer geodätischer Linien, wobei ein besonderes Augenmerk auf eine höchsten Ansprüchen genügende Genauigkeit gelegt wird. In einem ersten Abschnitt werden zunächst die hierzu notwendigen mathematischen Grundlagen aufgezeigt. Die dabei behandelten Lösungsverfahren werden anschließend zur Verwendung für programmgesteuerte Rechenanlagen umgestellt und schließlich durch Entwicklung von Rechenprogrammen für die ZUSE Z 23 der elektronischen Berechnung zugänglich gemacht. Die Leistungsfähigkeit der Rechenprogramme wird an einer Reihe von Zahlenbeispielen für geodätische Linien verschiedener Länge erprobt. Dadurch ergibt sich schließlich die Möglichkeit, die einzelnen Rechenprogramme und anschließend die ihnen zugrunde liegenden Lösungsverfahren selbst miteinander zu vergleichen und die verschiedenen Methoden hinsichtlich ihrer Eignung für die Berechnung mit elektronischen Rechenanlagen zu beurteilen.

TEIL A. BERECHNUNG DER WINKEL- UND ARCUSFUNKTIONEN MIT HOHER GENAUIGKEIT

1. EINLEITUNG

Die Berechnung langer geodätischer Linien erfordert eine häufige Verwendung der trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen. Die Ermittlung dieser Funktionswerte erfolgt in Rechenautomaten mit Hilfe sog. Unterprogramme, die vom Oberprogramm an entsprechender Stelle aufgerufen werden und nach Berechnung des Funktionswertes wieder zum Oberprogramm zurückführen. Diese Funktionswerte müssen natürlich im Hinblick auf die an die Ergebnisse gestellten hohen Genauigkeitsforderungen von 10^{-10} mindestens eine etwas höhere Genauigkeit als 10^{-10} aufweisen. Entsprechende Unterprogramme, die diesen Erfordernissen genügen können, sind jedoch zur Zeit nicht verfügbar. Die für die ZUSE Z 23 an der Rechenstelle des Geodätischen Instituts der Technischen Hochschule München verwendeten Unterprogramme für die Winkel- und Arcusfunktionen ermöglichen eine Genauigkeit von höchstens 10^{-8}, auch die entsprechenden Prozeduren für die PERM besitzen Maximalfehler von 10^{-8} bis 10^{-9} ([31] S. 5).

Es ergibt sich somit die Aufgabe der Herstellung ausreichend genauer Unterprogramme für die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ und $\operatorname{arctg} x$. Sie werden zunächst nur für die Rechenanlage ZUSE Z 23, und zwar für Berechnungen in doppelter Zahlenlänge erstellt. Da beabsichtigt ist, die Unterprogramme auch zu Genauigkeitsuntersuchungen über die Formelsysteme und Verfahren zur Berechnung langer geodätischer Linien zu verwenden, soll verlangt werden, daß sie die Funktionswerte für $\sin x$ und $\cos x$ mit einer Genauigkeit von 10^{-14} und die Werte für $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ mit einer Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-13}$ liefern.

Die genannten Funktionen werden in Rechenautomaten aus Näherungsfunktionen berechnet. Deshalb müssen zunächst geeignete Näherungsfunktionen hergeleitet werden, aus denen sich die Funktionswerte möglichst einfach und mit geringem Rechenaufwand, aber mit der geforderten hohen Genauigkeit ergeben. Erst auf der Grundlage dieser Näherungsfunktionen können dann die eigentlichen Rechenprogramme erstellt werden.

2. ABLEITUNG VON TSCHEBYSCHEFFSCHEN POLYNOMEN

Die trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen lassen sich aus Taylorentwicklungen berechnen. Um die oben geforderte Genauigkeit zu erreichen, müssen dabei jedoch verhältnismäßig viele Glieder berücksichtigt werden.

Die Konvergenz dieser Reihenentwicklungen kann erhöht werden, indem die Taylorreihen durch schrittweise Reduktion mit Hilfe Tschebyscheffscher Polynome auf Polynome niedrigeren Grades zurückgeführt werden. M. Näbauer hat in [28] dieses Verfahren bereits für die Funktionen $\sin x$ und $\arcsin x$ durchgeführt. Die in [28] hergeleiteten Näherungspolynome für $\sin x$ und $\arcsin x$ besitzen jedoch einen für die vorliegenden Zwecke zu großen Maximalfehler von $3{,}3 \cdot 10^{-9}$ bzw. $3{,}8 \cdot 10^{-8}$. Es ist deshalb die Berechnung von genaueren Polynomen für diese Funktionen und außerdem eines Näherungspolynoms für $\cos x$ erforderlich.

Hierfür werden die Tschebyscheffschen Polynome $T_{13}(\xi)$ bis $T_{23}(\xi)$ für das Intervall $-1 \leqq \xi \leqq +1$ benötigt. Die Polynome bis $T_{13}(\xi)$ sind in [28] angegeben; die höheren Polynome $T_{14}(\xi)$ bis $T_{23}(\xi)$ müssen aus den niedrigeren hergeleitet werden. Es gelten hierfür die Rekursionsformeln

$$T_{n+1}(\xi) = \xi \cdot T_n(\xi) - \frac{1}{4}\, T_{n-1}(\xi) \quad \text{und} \tag{2.1}$$

$$T_{n+2}(\xi) = \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot T_n(\xi) - \frac{1}{16}\, T_{n-2}(\xi). \tag{2.2}$$

Nachstehend werden die Tschebyscheffschen Polynome $T_0(\xi)$ bis $T_{23}(\xi)$ für das Intervall $-1 \leqq \xi \leqq +1$ angegeben:

Tschebyscheffsche Polynome $T_0(\xi)$ bis $T_{23}(\xi)$

$$
\begin{aligned}
T_0(\xi) &= 1 \\
T_1(\xi) &= \xi \\
T_2(\xi) &= \xi^2 - \tfrac{1}{2} \\
T_3(\xi) &= \xi^3 - \tfrac{3}{4}\xi \\
T_4(\xi) &= \xi^4 - \xi^2 + \tfrac{1}{8} \\
T_5(\xi) &= \xi^5 - \tfrac{5}{4}\xi^3 + \tfrac{5}{16}\xi \\
T_6(\xi) &= \xi^6 - \tfrac{3}{2}\xi^4 + \tfrac{9}{16}\xi^2 - \tfrac{1}{32} \\
T_7(\xi) &= \xi^7 - \tfrac{7}{4}\xi^5 + \tfrac{7}{8}\xi^3 - \tfrac{7}{64}\xi \\
T_8(\xi) &= \xi^8 - 2\xi^6 + \tfrac{5}{4}\xi^4 - \tfrac{1}{4}\xi^2 + \tfrac{1}{128} \qquad (2.3) \\
T_9(\xi) &= \xi^9 - \tfrac{9}{4}\xi^7 + \tfrac{27}{16}\xi^5 - \tfrac{15}{32}\xi^3 + \tfrac{9}{256}\xi \\
T_{10}(\xi) &= \xi^{10} - \tfrac{5}{2}\xi^8 + \tfrac{35}{16}\xi^6 - \tfrac{25}{32}\xi^4 + \tfrac{25}{256}\xi^2 - \tfrac{1}{512} \\
T_{11}(\xi) &= \xi^{11} - \tfrac{11}{4}\xi^9 + \tfrac{11}{4}\xi^7 - \tfrac{77}{64}\xi^5 + \tfrac{55}{256}\xi^3 - \tfrac{11}{1024}\xi \\
T_{12}(\xi) &= \xi^{12} - 3\xi^{10} + \tfrac{27}{8}\xi^8 - \tfrac{7}{4}\xi^6 + \tfrac{105}{256}\xi^4 - \tfrac{9}{256}\xi^2 + \tfrac{1}{2048} \\
T_{13}(\xi) &= \xi^{13} - \tfrac{13}{4}\xi^{11} + \tfrac{65}{16}\xi^9 - \tfrac{39}{16}\xi^7 + \tfrac{91}{128}\xi^5 - \tfrac{91}{1024}\xi^3 + \tfrac{13}{4096}\xi \\
T_{14}(\xi) &= \xi^{14} - \tfrac{7}{2}\xi^{12} + \tfrac{77}{16}\xi^{10} - \tfrac{105}{32}\xi^8 + \tfrac{147}{128}\xi^6 - \tfrac{49}{256}\xi^4 + \tfrac{49}{4096}\xi^2 - \tfrac{1}{8192} \\
T_{15}(\xi) &= \xi^{15} - \tfrac{15}{4}\xi^{13} + \tfrac{45}{8}\xi^{11} - \tfrac{275}{64}\xi^9 + \tfrac{225}{128}\xi^7 - \tfrac{189}{512}\xi^5 + \tfrac{35}{1024}\xi^3 - \tfrac{15}{16384}\xi \\
T_{16}(\xi) &= \xi^{16} - 4\xi^{14} + \tfrac{13}{2}\xi^{12} - \tfrac{11}{2}\xi^{10} + \tfrac{165}{64}\xi^8 - \tfrac{21}{32}\xi^6 + \tfrac{21}{256}\xi^4 - \tfrac{1}{256}\xi^2 + \tfrac{1}{32768} \\
T_{17}(\xi) &= \xi^{17} - \tfrac{17}{4}\xi^{15} + \tfrac{119}{16}\xi^{13} - \tfrac{221}{32}\xi^{11} + \tfrac{935}{256}\xi^9 - \tfrac{561}{512}\xi^7 + \tfrac{357}{2048}\xi^5 - \tfrac{51}{4096}\xi^3 + \tfrac{17}{65536}\xi \\
T_{18}(\xi) &= \xi^{18} - \tfrac{9}{2}\xi^{16} + \tfrac{135}{16}\xi^{14} - \tfrac{273}{32}\xi^{12} + \tfrac{1287}{256}\xi^{10} - \tfrac{891}{512}\xi^8 + \tfrac{693}{2048}\xi^6 - \tfrac{135}{4096}\xi^4 + \tfrac{81}{65536}\xi^2 - \tfrac{1}{131072} \\
T_{19}(\xi) &= \xi^{19} - \tfrac{19}{4}\xi^{17} + \tfrac{19}{2}\xi^{15} - \tfrac{665}{64}\xi^{13} + \tfrac{1279}{256}\xi^{11} - \tfrac{2717}{1024}\xi^9 + \tfrac{627}{1024}\xi^7 - \tfrac{627}{8192}\xi^5 + \tfrac{285}{65536}\xi^3 - \tfrac{19}{262144}\xi \\
T_{20}(\xi) &= \xi^{20} - 5\xi^{18} + \tfrac{85}{8}\xi^{16} - \tfrac{25}{2}\xi^{14} + \tfrac{2275}{256}\xi^{12} - \tfrac{1001}{256}\xi^{10} + \tfrac{2145}{2048}\xi^8 - \tfrac{165}{1024}\xi^6 + \tfrac{825}{65536}\xi^4 - \tfrac{25}{65536}\xi^2 + \tfrac{1}{524288} \\
T_{21}(\xi) &= \xi^{21} - \tfrac{21}{4}\xi^{19} + \tfrac{189}{16}\xi^{17} - \tfrac{119}{8}\xi^{15} + \tfrac{735}{64}\xi^{13} - \tfrac{5733}{1024}\xi^{11} + \tfrac{7007}{4096}\xi^9 - \tfrac{1287}{4096}\xi^7 + \tfrac{2079}{65536}\xi^5 - \tfrac{385}{262144}\xi^3 + \tfrac{21}{1048576}\xi \\
T_{22}(\xi) &= \xi^{22} - \tfrac{11}{2}\xi^{20} + \tfrac{209}{16}\xi^{18} - \tfrac{561}{32}\xi^{16} + \tfrac{935}{64}\xi^{14} - \tfrac{1001}{128}\xi^{12} + \tfrac{11011}{4096}\xi^{10} - \tfrac{4719}{8192}\xi^8 + \tfrac{4719}{65536}\xi^6 - \tfrac{605}{131536}\xi^4 + \tfrac{121}{1048576}\xi^2 - \tfrac{1}{2097152} \\
T_{23}(\xi) &= \xi^{23} - \tfrac{23}{4}\xi^{21} + \tfrac{115}{8}\xi^{19} - \tfrac{1311}{64}\xi^{17} + \tfrac{1173}{64}\xi^{15} - \tfrac{2737}{256}\xi^{13} + \tfrac{2093}{512}\xi^{11} - \tfrac{16445}{16384}\xi^9 + \tfrac{9867}{65536}\xi^7 - \tfrac{3289}{262144}\xi^5 + \tfrac{253}{524288}\xi^3 - \tfrac{23}{4194304}\xi
\end{aligned}
$$

3. HERLEITUNG VON NÄHERUNGSFUNKTIONEN

3.1 Näherungsfunktionen vermittels Tschebyscheffscher Polynome

3.1.1 *Näherungspolynom für sin x*

Die Funktion sin x soll im Intervall

$$-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{4} \tag{3.1}$$

durch ein Polynom mit möglichst wenigen Gliedern ersetzt werden, ohne daß der dabei begangene Fehler größer als 10^{-14} ist.

Die Taylorentwicklung lautet

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \frac{1}{13!}x^{13} - \frac{1}{15!}x^{15} + R_{15}. \tag{3.2}$$

Durch die Beziehung

$$x = \frac{\pi}{4}\xi \tag{3.3}$$

wird entsprechend [28] die Unbekannte ξ eingeführt, die nunmehr im Intervall

$$-1 \leqq \xi \leqq +1 \tag{3.4}$$

liegt. Damit lautet (3.2)

$$\begin{aligned} \sin x = {} & \frac{\pi}{4}\xi - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \xi^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \xi^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \xi^7 + \frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^9 \xi^9 - \\ & - \frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{11} \xi^{11} + \frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} \xi^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \xi^{15} + R_{15}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Auf beiden Seiten von (3.5) wird das Polynom $\frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} T_{15}(\xi)$ addiert:

$$\begin{aligned} & \sin x + \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} T_{15}(\xi) = \\ & \quad \xi \left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \cdot \frac{15}{16384}\right\} - \xi^3 \left\{\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \cdot \frac{35}{1024}\right\} \\ & \quad + \xi^5 \left\{\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \cdot \frac{189}{512}\right\} - \xi^7 \left\{\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \cdot \frac{225}{128}\right\} \\ & \quad + \xi^9 \left\{\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^9 - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \cdot \frac{275}{64}\right\} - \xi^{11} \left\{\frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{11} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \cdot \frac{45}{8}\right\} \\ & \quad + \xi^{13} \left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \cdot \frac{15}{4}\right\} + R_{15}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Wegen sich dabei ergebender Vereinfachungen für die numerische Berechnung der Reihenkoeffizienten erfolgt bereits hier die Rückkehr zu x durch Einsetzen von (3.3) auf der rechten Seite von (3.6):

$$
\begin{aligned}
\sin x = \; & x \left\{ 1 - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} \cdot \frac{1}{16384} \right\} - x^3 \left\{ \frac{1}{3!} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{12} \cdot \frac{35}{1024} \right\} \\
& + x^5 \left\{ \frac{1}{5!} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{10} \cdot \frac{189}{512} \right\} - x^7 \left\{ \frac{1}{7!} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{8} \cdot \frac{15}{128} \right\} \\
& + x^9 \left\{ \frac{1}{9!} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{6} \cdot \frac{275}{64} \right\} - x^{11} \left\{ \frac{1}{11!} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{4} \cdot \frac{3}{8} \right\} \\
& + x^{13} \left\{ \frac{1}{13!} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2} \cdot \frac{1}{4} \right\} + R^{(15)}_{\sin x} .
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Dabei ist

$$
R^{(15)}_{\sin x} = R_{15} + \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} T_{15}(\xi). \tag{3.8}
$$

Bei Vernachlässigung von $R^{(15)}_{\sin x}$ wird ein Fehler begangen, der sich durch Abschätzen von $|R^{(15)}_{\sin x}|$ überschlagsmäßig ermitteln läßt. Es ist nach (3.8)

$$
|R^{(15)}_{\sin x}| \leqq |R_{15}| + \left| \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} T_{15}(\xi) \right|. \tag{3.9}
$$

Darin entspricht R_{15} dem ersten vernachlässigten Glied in (3.5):

$$
|R_{15}| \leqq \frac{1}{17!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{17}. \tag{3.10}
$$

Für das Polynom $T_n(\xi)$ gilt entsprechend [28] S. 3 die Beziehung

$$
|T_n(\xi)| \leqq \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{3.11}
$$

Also ist

$$
|T_{15}(\xi)| \leqq \frac{1}{2^{14}}. \tag{3.12}
$$

Durch Überschlagsrechnung ergibt sich

$$
\frac{1}{17!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{17} < 4{,}63 \cdot 10^{-17}, \quad \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} < 2{,}05 \cdot 10^{-14}, \quad \frac{1}{2^{14}} < 6{,}11 \cdot 10^{-5} \tag{3.13}
$$

und damit

$$
|R^{(15)}_{\sin x}| < 4{,}76 \cdot 10^{-17}. \tag{3.14}
$$

Die Berechnung der Koeffizienten in (3.7), die mit $s_1, s_3, \ldots, s_{13}$ bezeichnet werden, ergibt

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 0{,}99999\,99999\,99999\,976 \\
s_3 &= 0{,}16666\,66666\,66665\,226 \\
s_5 &= 0{,}83333\,33333\,30812 \cdot 10^{-2} \\
s_7 &= 0{,}19841\,26982\,18076 \cdot 10^{-3} \\
s_9 &= 0{,}27557\,31151\,154 \cdot 10^{-5} \\
s_{11} &= 0{,}25050\,47163\,5 \cdot 10^{-7} \\
s_{13} &= 0{,}15882\,1505 \cdot 10^{-9}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

und damit das Näherungspolynom

$$\sin x = s_1 x - s_3 x^3 + s_5 x^5 - s_7 x^7 + s_9 x^9 - s_{11} x^{11} + s_{13} x^{13}. \tag{3.16}$$

Die Koeffizienten sind mit einer Genauigkeit von etwa 10^{-18} berechnet. Das Polynom (3.16) liefert deshalb die Funktionswerte $\sin x$ im Intervall $-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{4}$ sicher mit einem Fehler, der kleiner als $4{,}8 \cdot 10^{-17}$ ist.

Da dieser Fehler noch weit unterhalb der geforderten Genauigkeit liegt, kann das Polynom (3.16) durch nochmalige Reduktion auf eine sechsgliedrige Reihe zurückgeführt werden. Dazu muß von beiden Seiten von (3.7) das Polynom $A \cdot T_{13}(\xi)$ subtrahiert werden, wobei

$$A = \frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \cdot \frac{15}{4} \tag{3.17}$$

ist. Der Maximalfehler $|R^{(13)}_{\sin x}|$, der diesem sechsgliedrigen Polynom anhaftet, kann sofort abgeschätzt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} R^{(13)}_{\sin x} &= R_{15} + \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} T_{15}(\xi) + \left[\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \cdot \frac{15}{4}\right] T_{13}(\xi) \\ &= R^{(15)}_{\sin x} + A \cdot T_{13}(\xi) \end{aligned} \tag{3.18}$$

und damit

$$|R^{(13)}_{\sin x}| \leqq |R^{(15)}_{\sin x}| + |A \cdot T_{13}(\xi)|. \tag{3.19}$$

Für die Abschätzung von A kann gesetzt werden

$$A < \frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} < 6{,}95 \cdot 10^{-12}, \tag{3.20}$$

während für $T_{13}(\xi)$ nach (3.11) gilt

$$T_{13}(\xi) < \frac{1}{2^{12}} < 2{,}45 \cdot 10^{-4}. \tag{3.21}$$

Damit wird unter Verwendung von (3.14) die Abschätzung

$$|R^{(13)}_{\sin x}| < 1{,}76 \cdot 10^{-15} \tag{3.22}$$

erhalten. Der Fehler des sechsgliedrigen Polynoms liegt also immer noch innerhalb der geforderten Genauigkeitsgrenze.

Zur Berechnung der Koeffizienten dieser Reihe wird zweckmäßig zunächst das Polynom $A \cdot T_{13}(\xi)$ für sich gesondert betrachtet. Es lautet:

$$\begin{aligned} A \cdot T_{13}(\xi) = \; & \xi \left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \frac{15}{4}\right\} \frac{13}{4096} - \xi^3 \left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \frac{15}{4}\right\} \frac{91}{1024} \\ & + \xi^5 \left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \frac{15}{4}\right\} \frac{91}{128} - \xi^7 \left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \frac{15}{4}\right\} \frac{39}{16} \\ & + \xi^9 \left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \frac{15}{4}\right\} \frac{65}{16} - \xi^{11} \left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \frac{15}{4}\right\} \frac{13}{4} \\ & + \xi^{13} \left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{13} - \frac{1}{15!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15} \frac{15}{4}\right\}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Vermittels (3.3) erfolgt auf der rechten Seite von (3.23) die Rückkehr zu x:

$$
\begin{aligned}
A\cdot T_{13}(\xi) = \; & x\left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{12}-\frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14}\frac{1}{4}\right\}\frac{13}{4096} - x^3\left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{10}-\frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{12}\frac{1}{4}\right\}\frac{91}{1024} \\
& + x^5\left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{8}-\frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{10}\frac{1}{4}\right\}\frac{91}{128} - x^7\left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{6}-\frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{8}\frac{1}{4}\right\}\frac{39}{16} \\
& + x^9\left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{4}-\frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{6}\frac{1}{4}\right\}\frac{65}{16} - x^{11}\left\{\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}-\frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{4}\frac{1}{4}\right\}\frac{13}{4} \\
& + x^{13}\left\{\frac{1}{13!}\qquad-\frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}\frac{1}{4}\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Die Koeffizienten in (3.24), die mit $p_1, p_3, \ldots, p_{11}$ bezeichnet werden, wurden mit einer Genauigkeit von etwa 10^{-18} berechnet. Sie lauten:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 0{,}27769\,70642\cdot 10^{-13} \\
p_3 &= 0{,}12605\,19466\cdot 10^{-11} \\
p_5 &= 0{,}16347\,81751\cdot 10^{-10} \\
p_7 &= 0{,}90864\,28641\cdot 10^{-10} \\
p_9 &= 0{,}24550\,60546\cdot 10^{-9} \\
p_{11} &= 0{,}31839\,95398\cdot 10^{-9}\,.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Die Subtraktion der Reihe

$$A\cdot T_{13}(\xi) = p_1 x - p_3 x^3 + p_5 x^5 - p_7 x^7 + p_9 x^9 - p_{11} x^{11} + p_{13} x^{13} \tag{3.26}$$

von (3.16) ergibt wegen $p_{13} = s_{13}$ das sechsgliedrige Polynom

$$\sin x = s_1' x - s_3' x^3 + s_5' x^5 - s_7' x^7 + s_9' x^9 - s_{11}' x^{11}, \tag{3.27}$$

wobei die Koeffizienten $s_1', s_3', \ldots, s_{11}'$, die ebenfalls eine Genauigkeit von etwa 10^{-18} besitzen, folgende Werte haben:

$$
\begin{aligned}
s_1' &= 0{,}99999\,99999\,99972\,206 \\
s_3' &= 0{,}16666\,66666\,65404\,706 \\
s_5' &= 0{,}83333\,33316\,960305\cdot 10^{-2} \\
s_7' &= 0{,}19841\,26073\,53790\cdot 10^{-3} \\
s_9' &= 0{,}27554\,85645\,099\cdot 10^{-5} \\
s_{11}' &= 0{,}24732\,07209\,5\cdot 10^{-7}.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Die Reihe (3.27) liefert innerhalb des Bereiches $-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{4}$ die Funktionswerte $\sin x$ infolge (3.22) mit einer Genauigkeit, die unterhalb $1{,}8\cdot 10^{-15}$ liegt.

Testberechnungen für $x = 30°$ und den ungünstigsten Fall $x = 45°$ brachten folgende Ergebnisse:

	sin 30°	sin 45°
Polynom (3.16)	0,50000 00000 00000 000	0,70710 67811 86547 477
Polynom (3.27)	103	5 800
Sollwerte	000	7 524

3.1.2 *Näherungspolynom für cos x*

Zur Annäherung von $\cos x$ im Intervall (3.1) wird von der Taylorentwicklung

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} + R_{14} \tag{3.29}$$

ausgegangen. Vermittels (3.3) wird wieder die Unbekannte ξ eingeführt, womit (3.29) übergeht in

$$\begin{aligned}\cos x = 1 &- \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \xi^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \xi^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^6 \xi^6 + \frac{1}{8!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^8 \xi^8 \\ &- \frac{1}{10!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{10} \xi^{10} + \frac{1}{12!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{12} \xi^{12} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} \xi^{14} + R_{14}.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Auf beiden Seiten von (3.30) wird das Polynom $\frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} T_{14}(\xi)$ addiert:

$$\begin{aligned}\cos x + \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} T_{14}(\xi) = \\ 1 &- \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} \cdot \frac{1}{8192} - \xi^2 \left\{\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} \cdot \frac{49}{4096}\right\} \\ &+ \xi^4 \left\{\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} \cdot \frac{49}{256}\right\} - \xi^6 \left\{\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^6 - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} \cdot \frac{147}{128}\right\} \\ &+ \xi^8 \left\{\frac{1}{8!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^8 - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} \cdot \frac{105}{35}\right\} - \xi^{10} \left\{\frac{1}{10!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{10} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} \cdot \frac{77}{16}\right\} \\ &+ \xi^{12} \left\{\frac{1}{12!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{12} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} \cdot \frac{7}{2}\right\} + R_{14}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Die Rückkehr zu x auf der rechten Seite von (3.31) vermittels (3.3), die wegen der sich dadurch ergebenden Vereinfachungen für die zahlenmäßige Berechnung der Reihenkoeffizienten bereits hier erfolgt, ergibt, wenn zugleich

$$R_{\cos x} = R_{14} + \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} T_{14}(\xi) \tag{3.32}$$

gesetzt wird

$$\begin{aligned}\cos x = \quad 1 &- x^2 \left\{\frac{1}{2!} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{12} \cdot \frac{49}{4096}\right\} \\ &+ x^4 \left\{\frac{1}{4!} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{10} \cdot \frac{49}{256}\right\} - x^6 \left\{\frac{1}{6!} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{8} \cdot \frac{147}{128}\right\} \\ &+ x^8 \left\{\frac{1}{8!} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{6} \cdot \frac{105}{32}\right\} - x^{10} \left\{\frac{1}{10!} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{4} \cdot \frac{77}{16}\right\} \\ &+ x^{12} \left\{\frac{1}{12!} - \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2} \cdot \frac{7}{2}\right\} + R_{\cos x}.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Die Abschätzung des Maximalfehlers $|R_{\cos x}|$ ergibt:

$$|R_{\cos x}| \leqq |R_{14}| + \left|\frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} T_{14}(\xi)\right|. \tag{3.34}$$

Dabei gilt

$$T_{14}(\xi) < \frac{1}{2^{13}} = 1{,}22 \cdot 10^{-4}. \tag{3.35}$$

Ferner liefert eine überschlagsmäßige Berechnung

$$|R_{14}| < 1{,}01 \cdot 10^{-15}, \quad \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{14} < 3{,}90 \cdot 10^{-13}. \tag{3.36}$$

Somit ist

$$|R_{\cos x}| < 1{,}06 \cdot 10^{-15}. \tag{3.37}$$

Die Berechnung der Koeffizienten in (3.33), die mit $c_0, c_2, c_4, \ldots, c_{12}$ bezeichnet werden, ergibt:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0{,}99999\,99999\,99999\,952 \\ c_2 &= 0{,}49999\,99999\,99992\,440 \\ c_4 &= 0{,}41666\,66666\,64705\,81 \cdot 10^{-1} \\ c_6 &= 0{,}13888\,88886\,98159\,3 \cdot 10^{-2} \\ c_8 &= 0{,}24801\,57846\,7326 \cdot 10^{-4} \\ c_{10} &= 0{,}27555\,21872\,77 \cdot 10^{-6} \\ c_{12} &= 0{,}20629\,10635 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \tag{3.38}$$

und damit das Polynom

$$\cos x = c_0 - c_2 x^2 + c_4 x^4 - c_6 x^6 + c_8 x^8 - c_{10} x^{10} + c_{12} x^{12}. \tag{3.39}$$

Da die Berechnung der Koeffizienten wieder mit einer Genauigkeit von etwa 10^{-18} durchgeführt wurde und diese somit als streng richtig gelten können, gibt das Polynom (3.39) die Funktion $\cos x$ im Bereich $-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{4}$ sicher mit einem Fehler, der, wie durch (3.37) nachgewiesen wurde, stets kleiner als $1{,}1 \cdot 10^{-15}$ ist. Testberechnungen für $x = 30°$ und den Extremfall $x = 45°$ ergaben:

	cos 30°	cos 45°
Polynom (3.39)	0,86602 54037 84438 678	0,70710 67811 86546 573
Sollwerte	646	7524

3.1.3 *Näherungspolynom für arcsin x*

Zur Annäherung von arcsin x im Intervall

$$0 \leqq x \leqq \sin\frac{\pi}{4} \tag{3.40}$$

wird von der Taylorentwicklung

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k\,(2k+1)} x^{2k+1} + R_{2k+1} \tag{3.41}$$

ausgegangen. Wegen der schlechten Konvergenz dieser Reihe wird das Intervall (3.40) in die beiden Intervalle

$$0 \leqq x \leqq \sin\frac{\pi}{8} \tag{3.42}$$

und

$$\sin\frac{\pi}{8} \leqq x \leqq \sin\frac{\pi}{4} \tag{3.43}$$

aufgeteilt und nur im Intervall (3.42) die Funktion $\arcsin x$ durch ein Näherungspolynom ersetzt. Näbauer gibt in [28] auch einen Weg an, wie Werte $\arcsin x$ mit x im Intervall (3.43) durch einen zum Intervall (3.42) gehörigen Funktionswert ausgedrückt werden können.

Zur Aufstellung des Näherungspolynoms wird zunächst mit der Abkürzung

$$\sin\frac{\pi}{8} = \beta \tag{3.44}$$

vermittels der Beziehung

$$x = \beta\xi \tag{3.45}$$

die Unbekannte ξ eingeführt, die jetzt im Intervall

$$0 \leqq \xi \leqq 1 \tag{3.46}$$

liegt. Mit (3.45) lautet die Reihe (3.41)

$$\arcsin x = A_1\xi + A_3\xi^3 + A_5\xi^5 + \cdots + A_{2k+1}\xi^{2k+1} + R_{2k+1}, \tag{3.47}$$

wobei

$$A_1 = \beta, \quad A_3 = \frac{1}{2\cdot 3}\beta^3, \quad A_5 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\beta^5 \tag{3.48}$$

und allgemein

$$A_{2i+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2i\,(2i+1)}\beta^{2i+1} \tag{3.49}$$

bedeuten.

Eine Abschätzung, wie viele Glieder in (3.47) notwendig sind, damit der Fehler kleiner als $5\cdot 10^{-13}$ bleibt, kann mit Hilfe der Beziehung ([28] S. 10)

$$R_{2k+1} < 1{,}17\cdot A_{2k+3} \tag{3.50}$$

vorgenommen werden. Eine Überschlagsrechnung ergibt

$$A_{25} = 2{,}40\cdot 10^{-13}. \tag{3.51}$$

Wird die Reihe (3.47) mit dem Glied $A_{23}\xi^{23}$ abgebrochen, so ist der damit begangene Fehler

$$R_{23} < 2{,}81\cdot 10^{-13}. \tag{3.52}$$

Es genügt deshalb, von der Taylorentwicklung

$$\begin{aligned}\arcsin x = {} & A_1\xi + A_3\xi^3 + A_5\xi^5 + A_7\xi^7 + A_9\xi^9 + A_{11}\xi^{11} + A_{13}\xi^{13} \\ & + A_{15}\xi^{15} + A_{17}\xi^{17} + A_{19}\xi^{19} + A_{21}\xi^{21} + A_{23}\xi^{23} + R_{23}\end{aligned} \tag{3.53}$$

auszugehen.

Durch Subtraktion des Polynoms $A_{23}\,T_{23}(\xi)$ von beiden Seiten von (3.53) wird erhalten:

$$\arcsin x - A_{23}T_{23} = B_1\xi + B_3\xi^3 + B_5\xi^5 + B_7\xi^7 + B_9\xi^9 + B_{11}\xi^{11} + B_{13}\xi^{13} + \\ + B_{15}\xi^{15} + B_{17}\xi^{17} + B_{19}\xi^{19} + B_{21}\xi^{21} + R_{23}. \tag{3.54}$$

Dabei werden die B_i unter Verwendung des Ausdrucks für T_{23} in (2.3) erhalten aus

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 + \frac{23}{4194304} A_{23} & B_3 &= A_3 - \frac{253}{524288} A_{23} \\
B_5 &= A_5 + \frac{3289}{262144} A_{23} & B_7 &= A_7 - \frac{9867}{65536} A_{23} \\
B_9 &= A_9 + \frac{16445}{16384} A_{23} & B_{11} &= A_{11} - \frac{2093}{512} A_{23} \\
B_{13} &= A_{13} + \frac{2737}{256} A_{23} & B_{15} &= A_{15} - \frac{1173}{64} A_{23} \\
B_{17} &= A_{17} + \frac{1311}{64} A_{23} & B_{19} &= A_{19} - \frac{115}{8} A_{23} \\
B_{21} &= A_{21} + \frac{23}{4} A_{23}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Aus (3.54) folgt durch eine zweite Reduktion

$$\begin{aligned}
&\arcsin x - A_{23}T_{23} - B_{21}T_{21} = \\
&= C_1\xi + C_3\xi^3 + C_5\xi^5 + C_7\xi^7 + C_9\xi^9 + C_{11}\xi^{11} + C_{13}\xi^{13} + C_{15}\xi^{15} + C_{17}\xi^{17} + \\
&+ C_{19}\xi^{19} + R_{23},
\end{aligned} \tag{3.56}$$

wobei

$$\begin{aligned}
C_1 &= B_1 - \frac{21}{1048576} B_{21} & C_3 &= B_3 + \frac{385}{262144} B_{21} \\
C_5 &= B_5 - \frac{2079}{65536} B_{21} & C_7 &= B_7 + \frac{1287}{4096} B_{21} \\
C_9 &= B_9 - \frac{7007}{4096} B_{21} & C_{11} &= B_{11} + \frac{5733}{1024} B_{21} \\
C_{13} &= B_{13} - \frac{735}{64} B_{21} & C_{15} &= B_{15} + \frac{119}{8} B_{21} \\
C_{17} &= B_{17} - \frac{189}{16} B_{21} & C_{19} &= B_{19} + \frac{21}{4} B_{21}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

bedeuten.

Durch eine weitere Reduktion ergibt sich aus (3.56)

$$\begin{aligned}
&\arcsin x - A_{23}T_{23} - B_{21}T_{21} - C_{19}T_{19} = \\
&= D_1\xi + D_3\xi^3 + D_5\xi^5 + D_7\xi^7 + D_9\xi^9 + D_{11}\xi^{11} + D_{13}\xi^{13} + D_{15}\xi^{15} + \\
&+ D_{17}\xi^{17} + R_{23}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

mit

$$
\begin{aligned}
D_1 &= C_1 + \frac{19}{262144} C_{19} & D_3 &= C_3 - \frac{285}{65536} C_{19} \\
D_5 &= C_5 + \frac{627}{8192} C_{19} & D_7 &= C_7 - \frac{627}{1024} C_{19} \\
D_9 &= C_9 + \frac{2717}{1024} C_{19} & D_{11} &= C_{11} - \frac{1729}{256} C_{19} \\
D_{13} &= C_{13} + \frac{665}{64} C_{19} & D_{15} &= C_{15} - \frac{19}{2} C_{19} \\
D_{17} &= C_{17} + \frac{19}{4} C_{19}.
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

Eine nochmalige Reduktion ergibt aus (3.58)

$$
\begin{aligned}
&\arcsin x - A_{23} T_{23} - B_{21} T_{21} - C_{19} T_{19} - D_{17} T_{17} = \\
&= E_1 \xi + E_3 \xi^3 + E_5 \xi^5 + E_7 \xi^7 + E_9 \xi^9 + E_{11} \xi^{11} + E_{13} \xi^{13} + E_{15} \xi^{15} + R_{23}
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
E_1 &= D_1 - \frac{17}{65536} D_{17} & E_3 &= D_3 + \frac{51}{4096} D_{17} \\
E_5 &= D_5 - \frac{357}{2048} D_{17} & E_7 &= D_7 + \frac{561}{512} D_{17} \\
E_9 &= D_9 - \frac{935}{256} D_{17} & E_{11} &= D_{11} + \frac{221}{32} D_{17} \\
E_{13} &= D_{13} - \frac{119}{16} D_{17} & E_{15} &= D_{15} + \frac{17}{4} D_{17}.
\end{aligned} \tag{3.61}
$$

Zur Untersuchung, ob für die Reihe

$$
\begin{aligned}
\arcsin x = {} & E_1 \xi + E_3 \xi^3 + E_5 \xi^5 + E_7 \xi^7 + E_9 \xi^9 + E_{11} \xi^{11} + E_{13} \xi^{13} + \\
& + E_{15} \xi^{15} + R_{\arcsin x}
\end{aligned} \tag{3.62}
$$

der Fehler $R_{\arcsin x}$ noch unterhalb der geforderten Genauigkeitsgrenze bleibt, wird gebildet

$$
|R_{\arcsin x}| \leqq |R_{23}| + |A_{23} T_{23}| + |B_{21} T_{21}| + |C_{19} T_{19}| + |D_{17} T_{17}|. \tag{3.63}
$$

Aus der Berechnung der A_i, B_i, C_i, D_i wird übernommen

$$
\begin{aligned}
A_{23} = 1{,}86 \cdot 10^{-12}, \quad B_{21} = 2{,}53 \cdot 10^{-11}, \quad C_{19} = 2{,}22 \cdot 10^{-10}, \\
D_{17} = 1{,}73 \cdot 10^{-9}.
\end{aligned} \tag{3.64}
$$

Außerdem ist nach (3.11)

(3.65)

$$
\begin{aligned}
|T_{23}| \leqq \frac{1}{2^{22}} = 2{,}39 \cdot 10^{-7}, \ |T_{21}| \leqq \frac{1}{2^{20}} = 9{,}54 \cdot 10^{-7}, \ |T_{19}| \leqq \frac{1}{2^{18}} = 3{,}82 \cdot 10^{-6}, \\
|T_{17}| \leqq \frac{1}{2^{16}} = 1{,}53 \cdot 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

Für den Maximalfehler, der durch Vernachlässigung von $R_{\arcsin x}$ begangen wird, gilt somit

$$(3.66)\qquad |R_{\arcsin x}| < |R_{23}| + |A_{23}T_{23}| + |B_{21}T_{21}| + |C_{19}T_{19}| + |D_{17}T_{17}| = \\ = 2{,}81\cdot 10^{-13} + 4{,}45\cdot 10^{-19} + 2{,}42\cdot 10^{-17} + 8{,}48\cdot 10^{-16} + 2{,}65\cdot 10^{-14}$$

bzw.

$$(3.67)\qquad |R_{\arcsin x}| < 3{,}09\cdot 10^{-13}.$$

Der Fehler der Reihe (3.62) bleibt also unterhalb der geforderten Genauigkeit.

Auf der rechten Seite von (3.62) muß jetzt noch vermittels (3.45) ξ durch x ersetzt werden. Dann ergibt sich das endgültige Näherungspolynom

$$(3.68)\qquad \arcsin x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + a_9 x^9 + a_{11} x^{11} + a_{13} x^{13} + a_{15} x^{15},$$

wobei die Koeffizienten a_i aus

$$(3.69)\qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{E_1}{\beta}, & a_3 &= \frac{E_3}{\beta^3}, & a_5 &= \frac{E_5}{\beta^5}, \\ a_7 &= \frac{E_7}{\beta^7}, & a_9 &= \frac{E_9}{\beta^9}, & a_{11} &= \frac{E_{11}}{\beta^{11}}, \\ a_{13} &= \frac{E_{13}}{\beta^{13}}, & a_{15} &= \frac{E_{15}}{\beta^{15}} \end{aligned}$$

erhalten werden.

Die numerische Berechnung der Koeffizienten a_i ergibt:

$$(3.70)\qquad \begin{aligned} a_1 &= 0{,}99999\,99999\,98869\,593 \\ a_3 &= 0{,}16666\,66670\,33954\,677 \\ a_5 &= 0{,}74999\,96527\,77190\,942\cdot 10^{-1} \\ a_7 &= 0{,}44644\,32558\,50250\,815\cdot 10^{-1} \\ a_9 &= 0{,}30349\,20167\,04595\,013\cdot 10^{-1} \\ a_{11} &= 0{,}22782\,15840\,02279\,788\cdot 10^{-1} \\ a_{13} &= 0{,}14487\,35730\,31350\,734\cdot 10^{-1} \\ a_{15} &= 0{,}24056\,10064\,49562\,471\cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten a_i und ebenso die Zwischenkoeffizienten A_i, B_i, C_i, D_i, E_i mit einer Genauigkeit von etwa 10^{-18} berechnet wurden, ist im Intervall $0 \leqq x \leqq \sin\frac{\pi}{8}$ der Fehler der mit (3.68) berechneten Funktionswerte gemäß (3.67) stets kleiner als $3{,}1\cdot 10^{-13}$.

Für Werte x im Intervall

$$(3.71)\qquad \sin\frac{\pi}{8} \leqq x \leqq \sin\frac{\pi}{4}$$

wird zunächst die Größe x', die zwischen Null und $\sin\frac{\pi}{8}$ liegt, vermittels der Beziehung

$$(3.72)\qquad x' = x\,\cos\frac{\pi}{8} - \sqrt{1-x^2}\,\sin\frac{\pi}{8}$$

berechnet, wofür die genauen Werte

$$(3.73)\qquad \sin\frac{\pi}{8} = 0{,}38268\,34323\,65089\,770, \qquad \cos\frac{\pi}{8} = 0{,}92387\,95325\,11286\,731$$

aus (3.16) bzw. (3.39) hergeleitet wurden. Das zu x' gehörige arcsin x' wird aus (3.68) erhalten und schließlich der endgültige Funktionswert aus

$$\arcsin x = \arcsin x' + \frac{\pi}{8}. \tag{3.74}$$

Da $\sin\frac{\pi}{8}$ und $\cos\frac{\pi}{8}$ nur mit einem Fehler behaftet sind, der kleiner als 10^{-15} ist, bleibt auch im Intervall (3.71) der Fehler von arcsin x kleiner als $3{,}1\cdot 10^{-13}$.

Für eine Anzahl von Winkeln zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ wurden zunächst vermittels des Polynoms (3.16) die zugehörigen Sinuswerte berechnet, die gemäß (3.14) eine Genauigkeit von $5\cdot 10^{-17}$ aufweisen. Daraus wurden mit Hilfe des Polynoms (3.68) die Arcussinuswerte abgeleitet und durch Multiplikation mit ϱ^0 die Ausgangswinkel zurückberechnet. Die Ergebnisse sind in nachstehender Tabelle angegeben:

WINKEL 1	SINUS 2	ARCUSSINUS 3	WINKEL 4
0°	0	0	0°
5	0,08715 57427 47658 172	0,08726 64625 99733 951	5,00000 00000 01001 09
10	0,17364 81776 66930 348	0,17453 29251 99407 299	9,99999 99999 98529 93
15	0,25881 90451 02520 762	0,26179 93877 99148 666	14,99999 99999 99955 9
20	0,34202 01433 25668 731	0,34906 58503 98851 902	19,99999 99999 99197 1
22,5	0,38268 34323 65089 769	0,39269 90816 98420 787	22,49999 99999 82618 3
25	0,42261 82617 40699 434	0,43633 23129 98558 497	24,99999 99999 98630 8
30	0,50000 00000 00000 000	0,52359 87755 98308 550	30,00000 00000 00554 5
35	0,57357 64363 51046 093	0,61086 52381 98033 374	35,00000 00000 01032 7
40	0,64278 76096 86539 319	0,69813 17007 97721 523	39,99999 99999 99409 5
45	0,70710 67811 86547 478	0,78539 81633 97144 860	44,99999 99999 82613 7

Da die Sinuswerte praktisch als fehlerfrei zu betrachten sind, stellen die Abweichungen der Werte in Spalte 4 von den Ausgangswerten den Fehler der Arcussinusreihe dar. Er ist erwartungsgemäß am größten für $\frac{\pi}{8}$ bzw. $\frac{\pi}{4}$, bleibt aber auch hier in Übereinstimmung mit (3.67) mit $\frac{1{,}74^\circ\cdot 10^{-11}}{\varrho^0} = 3{,}03\cdot 10^{-13}$ (im Bogenmaß) unterhalb der angegebenen Ganauigkeitsgrenze.

3.2 Kettenbruchentwicklung für arctg x

Die Berechnung des Arcustangens aus der Potenzreihe

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots \tag{3.75}$$

bereitet insofern Schwierigkeiten, als die Konvergenz der Reihe stark abnimmt, wenn das Argument $|x|$ gegen 1 wächst. Auch die Zurückführung des Tangens auf den eines kleine-

ren Winkels und Reduktion mit Hilfe Tschebyscheffscher Polynome wird hier unwirtschaftlich, zumal hierfür die Polynome (2.3) bei weitem nicht ausreichen.

Dagegen erweist sich, insbesondere in Anbetracht der geforderten hohen Genauigkeit, die Berechnung des Arcustangens aus dem Kettenbruch

$$\operatorname{arctg} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2/(2^2-1)}{1 + \cfrac{2^2 x^2/(4^2-1)}{1 + \cfrac{3^2 x^2/(6^2-1)}{1 + \cfrac{4^2 x^2/(8^2-1)}{1 + \cfrac{5^2 x^2/(10^2-1)}{1 + \cfrac{6^2 x^2/(12^2-1)}{1 + \cfrac{7^2 x^2/(14^2-1)}{1 + \dots}}}}}}}} \tag{3.76}$$

als zweckmäßig. Die Konvergenz dieser Kettenbruchentwicklung kann noch erheblich verbessert werden, wenn das Argument x auf den Bereich $-1 \leqq x \leqq +1$ beschränkt wird. Argumente $|x| > 1$ werden deshalb zunächst durch die Umformung

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \tag{3.77}$$

auf den Bereich $-1 \leqq x \leqq +1$ zurückgeführt.

Die Kettenbruchentwicklung (3.76) kann auch in der Form

$$\operatorname{arctg} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{t_1 x^2}{1 + \cfrac{t_2 x^2}{1 + \cfrac{t_3 x^2}{1 + \cfrac{t_4 x^2}{1 + \cfrac{t_5 x^2}{1 + \cfrac{t_6 x^2}{1 + \cfrac{t_7 x^2}{1 + \dots}}}}}}}} \tag{3.78}$$

geschrieben werden, wobei

$$t_1 = \frac{1}{2^2-1}, \quad t_2 = \frac{2^2}{4^2-1}, \quad t_3 = \frac{3^2}{6^2-1}, \quad \dots, \quad t_i = \frac{i^2}{(2\,i)^2-1} \tag{3.79}$$

bedeuten.

Der Rechenautomat vermag den Kettenbruch (3.78) sehr rasch aufzulösen, wenn die Werte t_i bereits vorberechnet als einfache Dezimalbrüche vorliegen. Durch eine Reihe von Testberechnungen mit einer wechselnden Anzahl von Gliedern wurde festgestellt, daß zur Berechnung von arctg x mit einer Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-13}$ innerhalb des Bereiches $-1 \leqq x \leqq +1$ insgesamt 15 Glieder des Kettenbruches, also die Werte t_1 bis t_{15} erforderlich sind.

Die Berechnung der Werte t_1 bis t_{15} wurde mit einer Genauigkeit von etwa 10^{-18} durchgeführt. Sie ergab:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= 0{,}33333\,33333\,33333\,333\\
t_2 &= 0{,}26666\,66666\,66666\,666\\
t_3 &= 0{,}25714\,28571\,42857\,142\\
t_4 &= 0{,}25396\,82539\,68253\,968\\
t_5 &= 0{,}25252\,52525\,25252\,525\\
t_6 &= 0{,}25174\,82517\,48251\,748\\
t_7 &= 0{,}25128\,20512\,82051\,282\\
t_8 &= 0{,}25098\,03921\,56862\,745\\
t_9 &= 0{,}25077\,39938\,08049\,535\\
t_{10} &= 0{,}25062\,65664\,16040\,100\\
t_{11} &= 0{,}25051\,75983\,43685\,300\\
t_{12} &= 0{,}25043\,47826\,08695\,652\\
t_{13} &= 0{,}25037\,03703\,70370\,370\\
t_{14} &= 0{,}25031\,92848\,02043\,422\\
t_{15} &= 0{,}25027\,80867\,63070\,077
\end{aligned}
$$

Auf eine Restfehlerabschätzung für den Kettenbruch wurde verzichtet. Statt dessen wurden für die Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ von Grad zu Grad, an den kritischen Stellen zwischen 40° und 50° in Abständen von je einem halben Grad, zunächst vermittels der Polynome (3.16) und (3.39) die Funktionswerte Sinus und Cosinus und aus deren Quotienten die Tangenswerte berechnet, die somit eine Genauigkeit von $1{,}1 \cdot 10^{-15}$ aufweisen. Mit Hilfe des Kettenbruches (3.78) wurden daraus die Winkelwerte zurückberechnet. Für den ungünstigsten Fall $\operatorname{tg} x = 1$ ergab sich dabei eine Abweichung von $7{,}3 \cdot 10^{-13}$ (im Bogenmaß), womit die angegebene Genauigkeitsgrenze geringfügig überschritten ist. Bei einem Winkel von 44,5° beträgt der Fehler jedoch nur $4{,}8 \cdot 10^{-13}$, so daß eine Überschreitung der Fehlergrenze nur innerhalb des sehr kleinen Bereiches von 44,5° bis 45,5° vorliegt, was im Hinblick auf die sehr weit gezogenen Genauigkeitsgrenzen in Kauf genommen werden kann.

Die Ergebnisse der Testberechnungen sind in nachstehender Tabelle auszugsweise angegeben:

WINKEL 1	TANGENS 2	ARCUSTANGENS 3	WINKEL 4
0°	0	0	0°
10	0,17632 69807 08464 964	0,17453 29251 99432 949	9,99999 99999 99999 54
20	0,36397 02342 66202 378	0,34906 58503 98846 697	19,99999 99999 98898 9
30	0,57735 02691 89625 743	0,52359 87755 98298 856	29,99999 99999 99999 1
40	0,83909 96311 77280 120	0,69813 17007 97721 725	39,99999 99999 99421 0
43	0,93251 50861 37662 319	0,75049 15783 57423 861	42,99999 99999 92101 5
45	1,00000 00000 00001 28	0,78539 81633 98174 896	45,00000 00000 41630 4
47	1,07236 87100 24681 81	0,82030 47484 37472 754	47,00000 00000 07898 4
50	1,19175 35925 94209 79	0,87266 46259 97174 890	50,00000 00000 00578 9
60	1,73205 08075 68877 34	1,04719 75511 96597 75	60,00000 00000 00000 8
70	2,74747 74194 54622 11	1,22173 04763 96049 91	70,00000 00000 01101 0
80	5,67128 18196 17709 66	1,39626 34015 95463 66	80,00000 00000 00000 4
90	$0{,}24064\,24012\,87691 \cdot 10^{18}$	1,57079 63267 94896 61	90,00000 00000 00000 0

4. HERSTELLUNG VON UNTERPROGRAMMEN

4.1 Unterprogramme für die Winkel- und Arcusfunktionen

Die oben hergeleiteten Näherungsfunktionen ermöglichen die Herstellung von Unterprogrammen zur genauen Berechnung der Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ und $\operatorname{arctg} x$. Für die Funktionen $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$, die sich in einfacher Weise aus $\sin x$ und $\cos x$ berechnen lassen, erübrigen sich eigene Unterprogramme, ebenso für $\operatorname{arcctg} x$, da mit

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \tag{4.1}$$

auf den Tangens übergegangen werden kann.

Die Herstellung der Unterprogramme erfolgt zunächst nur für die Rechenanlage ZUSE Z 23 zur Berechnung der Funktionswerte mit doppelter Zahlenlänge, sie können jedoch, insbesondere an Hand bei beigegebenen Flußdiagramme, leicht in jeden anderen Code übergeführt werden. Bei sämtlichen dieser Programme wird vorausgesetzt, daß das Unterprogramm „Doppelte Zahlenlänge" ab Trommelzelle 2000 gespeichert ist. Die Programmierung erfolgt mit festen Adressen, so daß jedes Unterprogramm stets mit dem gleichen Befehl aufzurufen ist; dadurch bleibt in Anbetracht der Vielzahl der bei der Berechnung langer geodätischer Linien benötigten Unterprogramme die Übersichtlichkeit besser gewahrt.

4.1.1 *Unterprogramm für sin x (UP. sin x)*

Zur Berechnung der Funktion $\sin x$ werden die Polynome (3.16) und (3.39) verwendet, wobei nach dem Hornerschen Schema vorgegangen wird:

$$\sin x = (((((x^2 \cdot s_{13} - s_{11})x^2 + s_9)x^2 - s_7)x^2 + s_5)x^2 - s_3)x^2 + s_1)x\,, \tag{4.2}$$

$$\cos x = (((((x^2 \cdot c_{12} - c_{10})x^2 + c_8)x^2 - c_6)x^2 + c_4)x^2 - c_2)x^2 + c_0\,. \tag{4.3}$$

Diese Polynome sind nur im Intervall

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} \tag{4.4}$$

anwendbar. Das Argument x kann jedoch im Bereich

$$-\infty \leqq x \leqq +\infty \tag{4.5}$$

liegen. Es ist deshalb unter Beachtung der Kriterien für das Vorzeichen des Funktionswertes auf das Intervall (4.4) zu reduzieren. Das Vorzeichen von $\sin x$ richtet sich sowohl nach dem Quadranten als auch nach dem Vorzeichen von x.

Nach Umspeicherung eines Faktors $F_1 = +1$ bzw. $F_1 = -1$ entsprechend dem Vorzeichen von x wird nur noch der Absolutwert $|x|$ verwendet. Durch fortwährende Subtraktion von 2π, bis $|x| < 2\pi$ ist, wird $|x|$ zunächst in das Intervall

$$0 \leqq |x| \leqq 2\pi \tag{4.6}$$

zurückgeführt. Durch Größenvergleich mit π wird festgestellt, ob $|x|$ im Intervall

$$0 \leqq |x| \leqq \pi \tag{4.7}$$

oder im Bereich

$$\pi \leqq |x| \leqq 2\pi \tag{4.8}$$

liegt. Im ersteren Fall wird ein Faktor $F_2 = +1$ umgespeichert, im letzteren ist $F_2 = -1$, außerdem muß $|x|$ mit

$$2\pi - |x| \Rightarrow |x| \tag{4.9}$$

in das Intervall (4.7) übergeführt werden. Falls $|x|$ jetzt im Bereich

$$\frac{\pi}{2} \leqq |x| \leqq \pi \tag{4.10}$$

liegt, erfolgt mit

$$\pi - |x| \Rightarrow |x| \tag{4.11}$$

eine weitere Reduktion auf das Intervall

$$0 \leqq |x| \leqq \frac{\pi}{2}\,. \tag{4.12}$$

Erst jetzt kann der Funktionswert $|\sin x|$ berechnet werden, und zwar im Bereich zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ mit Polynom (4.2) und im Intervall

$$\frac{\pi}{4} \leqq |x| \leqq \frac{\pi}{2} \tag{4.13}$$

mit Polynom (4.3), wofür jedoch das Argument mit

$$\frac{\pi}{2} - |x| \Rightarrow |x| \tag{4.14}$$

noch auf das Intervall (4.4) zu reduzieren ist. Der endgültige Funktionswert wird schließlich aus

$$|\sin x| \cdot F_1 \cdot F_2 \Rightarrow \sin x \tag{4.15}$$

erhalten.

Im einzelnen ist der Programmablauf aus dem Flußdiagramm Abb. 1a ersichtlich.

4.1.2 *Unterprogramm für cos x (UP. cos x)*

Zur Berechnung der Funktion $\cos x$ werden ebenfalls die Polynome (4.2) und (4.3) verwendet. Das Argument x kann wieder im Bereich $-\infty \leqq x \leqq +\infty$ liegen. Da das Vorzeichen der Funktion lediglich vom Quadranten von x abhängt, kann sofort auf den Absolutwert $|x|$ übergegangen werden. Durch fortlaufende Reduktion wird wie unter 4.1.1 das Argument $|x|$ unter Berücksichtigung der Kriterien für das Vorzeichen des Funktionswertes in das Intervall (4.12) übergeführt. Liegt nunmehr $|x|$ im Bereich (4.4), so erfolgt die

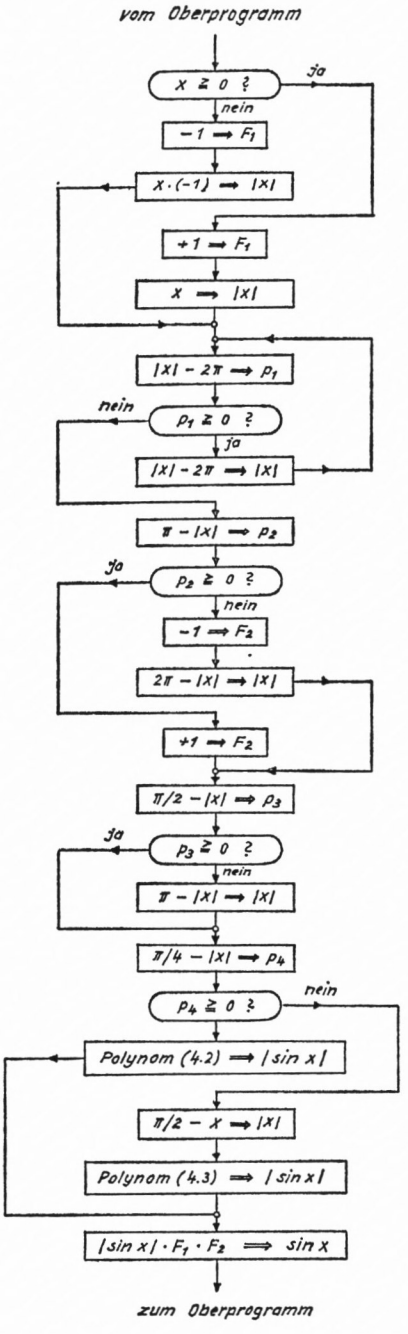

Abb. 1a: Flußdiagramm zum Unterprogramm sin x

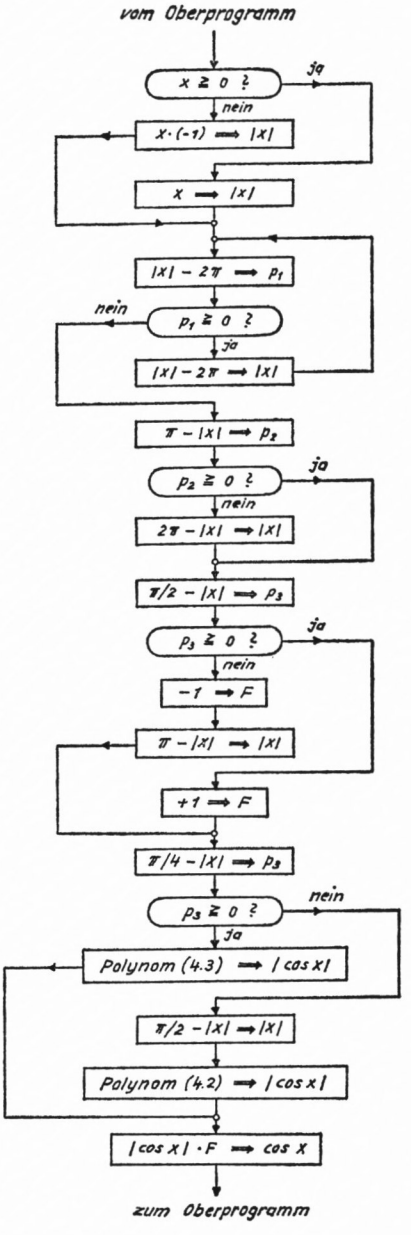

Abb. 1b: Flußdiagramm zum Unterprogramm cos x

Berechnung des Funktionswertes unmittelbar mit Hilfe des Polynoms (4.3); für Werte $|x|$ im Bereich (4.13) ist noch eine weitere Reduktion auf das Intervall (4.4) mit

$$\frac{\pi}{2} - |x| \Rightarrow |x| \tag{4.16}$$

erforderlich, bevor auch hier mit dem Polynom (4.2) der Funktionswert berechnet werden

Testberechnungen für das Unterprogramm sin x, cos x

WINKEL	SINUS	COSINUS
0	0	,999999999999999952/+00
30	,500000000000000000/+00	,866025403784438678/+00
45	,707106781186547478/+00	,707106781186546573/+00
60	,866025403784438676/+00	,500000000000000003/+00
90	,999999999999999952/+00	,415554363922959736/-17
120	,866025403784438680/+00	-,499999999999999996/+00
135	,707106781186546575/+00	-,707106781186547475/+00
150	,500000000000000007/+00	-,866025403784438674/+00
180	,831108727845919472/-17	-,999999999999999952/+00
210	-,499999999999999993/+00	-,866025403784438683/+00
225	-,707106781186547472/+00	-,707106781186546578/+00
240	-,866025403784438672/+00	-,500000000000000011/+00
270	-,999999999999999952/+00	-,124717131153723178/-16
300	-,866025403784438685/+00	,499999999999999989/+00
315	-,707106781186546581/+00	,707106781186547469/+00
330	-,500000000000000014/+00	,866025403784438670/+00
360	-,166221745569183894/-16	,999999999999999952/+00
390	,499999999999999985/+00	,866025403784438687/+00
405	,707106781186547466/+00	,707106781186546584/+00
420	,866025403784438668/+00	,500000000000000018/+00
450	,999999999999999952/+00	,207794122620424954/-16
480	,866025403784438689/+00	-,499999999999999982/+00
495	,707106781186546587/+00	-,707106781186547463/+00
510	,500000000000000021/+00	-,866025403784438666/+00
540	,249434262307446357/-16	-,999999999999999952/+00
570	-,499999999999999978/+00	-,866025403784438691/+00
585	-,707106781186547460/+00	-,707106781186546590/+00
600	-,866025403784438664/+00	-,500000000000000025/+00
630	-,999999999999999952/+00	-,290938876722907073/-16
660	-,866025403784438693/+00	,499999999999999975/+00
675	-,707106781186546593/+00	,707106781186547457/+00
690	-,500000000000000029/+00	,866025403784438662/+00
720	-,332443491138367789/-16	,999999999999999952/+00

WINKEL	SINUS	COSINUS
0	0	,999999999999999952/+00
-30	-,500000000000000000/+00	,866025403784438678/+00
-45	-,707106781186547478/+00	,707106781186546573/+00
-60	-,866025403784438676/+00	,500000000000000003/+00
-90	-,999999999999999952/+00	,415554363922959736/-17
-120	-,866025403784438680/+00	-,499999999999999996/+00
-135	-,707106781186546575/+00	-,707106781186547475/+00
-150	-,500000000000000007/+00	-,866025403784438674/+00
-180	-,831108727845919472/-17	-,999999999999999952/+00
-210	,499999999999999993/+00	-,866025403784438683/+00
-225	,707106781186547472/+00	-,707106781186546578/+00
-240	,866025403784438672/+00	-,500000000000000011/+00
-270	,999999999999999952/+00	-,124717131153723178/-16
-300	,866025403784438685/+00	,499999999999999989/+00
-315	,707106781186546581/+00	,707106781186547469/+00
-330	,500000000000000014/+00	,866025403784438670/+00
-360	,166221745569183894/-16	,999999999999999952/+00
-390	-,499999999999999985/+00	,866025403784438687/+00
-405	-,707106781186547466/+00	,707106781186546584/+00
-420	-,866025403784438668/+00	,500000000000000018/+00
-450	-,999999999999999952/+00	,207794122620424954/-16
-480	-,866025403784438689/+00	-,499999999999999982/+00
-495	-,707106781186546587/+00	-,707106781186547463/+00
-510	-,500000000000000021/+00	-,866025403784438666/+00
-540	-,249434262307446357/-16	-,999999999999999952/+00
-570	,499999999999999978/+00	-,866025403784438691/+00
-585	,707106781186547460/+00	-,707106781186546590/+00
-600	,866025403784438664/+00	-,500000000000000025/+00
-630	,999999999999999952/+00	-,290938876722907073/-16
-660	,866025403784438693/+00	,499999999999999975/+00
-675	,707106781186546593/+00	,707106781186547457/+00
-690	,500000000000000029/+00	,866025403784438662/+00
-720	,332443491138367789/-16	,999999999999999952/+00

kann. Das Vorzeichen wird wieder durch Multiplikation mit einem Faktor $F = +1$ bzw. $F = -1$ erhalten. Der Programmablauf ist in dem Flußdiagramm Abb. 1b dargestellt.

Die Unterprogramme $\sin x$ und $\cos x$ werden unmittelbar nacheinander in den Trommelzellen 1050—1364 gespeichert. Die Konstanten und die Koeffizienten für die Polynome werden nur einmal, und zwar unmittelbar vor den eigentlichen Programmen eingelesen. Der Aufruf der Unterprogramme erfolgt mit dem Befehl F 1100 für $\sin x$ bzw. F 1250 für $\cos x$. Dabei muß das Argument x bereits umgewandelt ins Bogenmaß im Akkumulator und in Schnellspeicherzelle 3 stehen (oberer Mantissenteil in a, unterer Mantissenteil und Exponent in 3). Der Funktionswert steht dann sowohl in a und SSp. 3 als auch in SSp. 6 und 16.

Die Rechenzeit ist für beide Unterprogramme etwa gleich und beträgt ca. 2,5 sec. Der Maximalfehler F_a ist gemäß (3.14) und (3.37) kleiner als etwa $1 \cdot 10^{-15}$.

Zur Überprüfung der Unterprogramme $\sin x$ und $\cos x$ wurden für eine Anzahl von Argumenten x die zugehörigen Funktionswerte $\sin x$ und $\cos x$ berechnet, die obenstehend angegeben wurden[1].

4.1.3 *Unterprogramm für arcsin x (UP. arcsin x)*

Die Berechnung der Funktion $\arcsin x$ erfolgt mit Hilfe des Polynoms (3.68), wobei wieder nach dem Hornerschen Schema vorgegangen wird:

$$\arcsin x = ((((((x^2 \cdot a_{15} + a_{13})x^2 + a_{11})x^2 + a_9)x^2 + a_7)x^2 + a_5)x^2 + a_3)x^2 + a_1)x. \tag{4.17}$$

Dieses Polynom ist jedoch nur im Intervall

$$0 \leqq x \leqq \sin \frac{\pi}{8} \tag{4.18}$$

anwendbar. Das Argument x kann jedoch im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ liegen. Für $x < 0$ ist auch der Funktionswert $\arcsin x < 0$. Im weiteren Programmablauf wird immer der Absolutwert $|x|$ verwendet.

Liegt $|x|$ im Intervall

$$\sin \frac{\pi}{4} \leqq |x| \leqq 1, \tag{4.19}$$

so ist zunächst vermittels

$$\sqrt{1 - |x|^2} \Rightarrow |x| \tag{4.20}$$

eine Reduktion auf den Bereich

$$0 \leqq |x| \leqq \sin \frac{\pi}{4} \tag{4.21}$$

erforderlich. Der Funktionswert ergibt sich dann durch Komplementbildung auf $\frac{\pi}{2}$.

Für Werte $|x|$, die jetzt im Intervall

$$\sin \frac{\pi}{8} \leqq |x| \leqq \sin \frac{\pi}{4} \tag{4.22}$$

liegen, ist noch eine Überführung in den Bereich (4.18) vermittels der Beziehung (3.72) notwendig. Nach Berechnung des Polynoms (4.17) ist hier der Wert $\frac{\pi}{8}$ zu addieren.

---

[1] Die Tabelle enthält die Originalwerte, wie sie von der Rechenanlage ausgedruckt wurden; die Abweichungen der Funktionswerte $\cos \frac{\pi}{2}$, $\sin \pi$ usw. vom genauen Wert Null haben ihre Ursache darin, daß in beiden Unterprogrammen die Konstanten $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π, 2π nur mit 17 bis 18 Dezimalstellen verwendet werden.

Das Unterprogramm liefert somit die Funktionswerte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$. Im einzelnen ist der Programmablauf aus dem Flußdiagramm Abb. 2a ersichtlich.

Das Unterprogramm wird in den Trommelzellen 1550 bis 1723 gespeichert. Der Aufruf erfolgt mit dem Befehl F 1600, wobei das Argument wieder in a und SSp. 3 stehen muß. Der Funktionswert steht dann sowohl in a und SSp. 3 als auch in SSp. 6 und 16. Er wird mit einer Genauigkeit von mindestens $5 \cdot 10^{-13}$ erhalten. Die Rechenzeit beträgt etwa 2,7 sec.

Zur Prüfung des Unterprogramms wurden für Sinuswerte zwischen -1 und $+1$ die zugehörigen Werte Arcussinus und daraus die Winkel berechnet. Die Ergebnisse sind in nachstehender Tabelle angegeben:

Testberechnungen für das Unterprogramm arcsin x

SINUS 1	ARCUSSINUS 2	WINKEL 3	SOLLWERT 4
0	0	0	0
,1736481776669303/+00	,1745329251994072/+00	,9999999999998527/+01	10
,3420201433256687/+00	,3490658503988518/+00	,1999999999999919/+02	20
,5000000000000000/+00	,5235987755983085/+00	,3000000000000055/+02	30
,6427876096865393/+00	,6981317007977214/+00	,3999999999999940/+02	40
,7660444431189779/+00	,8726646259971748/+00	,5000000000000057/+02	50
,8660254037844386/+00	,1047197551196587/+01	,5999999999999943/+02	60
,9396926207859083/+00	,1221730476396044/+01	,7000000000000078/+02	70
,9848077530122081/+00	,1396263401595489/+01	,8000000000000148/+02	80
,1000000000000000/+01	,1570796326794896/+01	,8999999999999999/+02	90
-,1736481776669303/+00	-,1745329251994072/+00	-,9999999999998527/+01	-10
-,3420201433256687/+00	-,3490658503988518/+00	-,1999999999999919/+02	-20
-,5000000000000000/+00	-,5235987755983085/+00	-,3000000000000055/+02	-30
-,6427876096865393/+00	-,6981317007977214/+00	-,3999999999999940/+02	-40
-,7660444431189779/+00	-,8726646259971748/+00	-,5000000000000057/+02	-50
-,8660254037844386/+00	-,1047197551196587/+01	-,5999999999999943/+02	-60
-,9396926207859083/+00	-,1221730476396044/+01	-,7000000000000078/+02	-70
-,9848077530122081/+00	-,1396263401595489/+01	-,8000000000000148/+02	-80
-,1000000000000000/+01	-,1570796326794896/+01	-,8999999999999999/+02	-90

4.1.4 *Unterprogramm für arccos x (UP. arccos x)*

Dem Unterprogramm arccos x liegt ebenfalls das Polynom (4.17) zugrunde. Einem Argument x im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ entspricht hier ein Funktionswert zwischen 0 und π. Das Argument x bzw. $|x|$ wird wieder durch fortlaufende Reduktion in den Bereich (4.18) übergeführt, für den das Polynom (4.17) anwendbar ist. Der Programmablauf entspricht

etwa dem bei UP. arcsin x. Der Übergang auf einen Funktionswert zwischen 0 und π wird durch Addition von $\frac{\pi}{2}$ erreicht. Eine genaue Darstellung des Programmablaufs enthält das Flußdiagramm Abb. 2b.

Die Speicherung erfolgt von Trommelzelle 1550 bis 1581 für die Konstanten und Koeffizienten, die mit denen des UP. arcsin x übereinstimmen, und von 1750 bis 1877 für das eigentliche Programm. Aufzurufen ist das Unterprogramm mit dem Befehl F 1750, wobei das Argument wieder in a und SSp. 3 stehen muß. Der Funktionswert steht dann sowohl in a und SSp. 3 als auch in SSp. 6 und 16 zur Verfügung. Die Genauigkeit beträgt wieder mindestens $5 \cdot 10^{-13}$, die Rechenzeit ca. 2,7 sec.

Testberechnungen für das Unterprogramm arccos x

COSINUS	ARCUSCOSINUS	WINKEL	SOLLWERT
1	2	3	4
,1000000000000000/+01	0	0	0
,9848077530122081/+00	,1745329251994070/+00	,9999999999998516/+01	10
,9396926207859083/+00	,3490658503988521/+00	,1999999999999921/+02	20
,8660254037844386/+00	,5235987755983086/+00	,3000000000000055/+02	30
,7660444431189779/+00	,6981317007977217/+00	,3999999999999942/+02	40
,6427876096865393/+00	,8726646259971751/+00	,5000000000000059/+02	50
,5000000000000000/+00	,1047197551196588/+01	,5999999999999944/+02	60
,3420201433256687/+00	,1221730476396044/+01	,7000000000000080/+02	70
,1736481776669303/+00	,1396263401595489/+01	,8000000000000147/+02	80
0	,1570796326794896/+01	,8999999999999999/+02	90
-,1736481776669303/+00	,1745329251994303/+01	,9999999999999852/+02	100
-,3420201433256687/+00	,1919862177193748/+01	,1099999999999991/+03	110
-,5000000000000000/+00	,2094395102393205/+01	,1200000000000005/+03	120
-,6427876096865393/+00	,2268928027592618/+01	,1299999999999994/+03	130
-,7660444431189779/+00	,2443460952792071/+01	,1400000000000005/+03	140
-,8660254037844386/+00	,2617993877991484/+01	,1499999999999994/+03	150
-,9396926207859083/+00	,2792526803190941/+01	,1600000000000007/+03	160
-,9848077530122081/+00	,2967059728390386/+01	,1700000000000014/+03	170
-,1000000000000000/+01	,3141592653589793/+01	,1799999999999999/+03	180

Das UP. arccos x wurde ebenfalls durch eine Reihe von Kontrollberechnungen für Cosinuswerte zwischen -1 und $+1$ überprüft; die Ergebnisse sind aus vorstehender Tabelle zu ersehen.

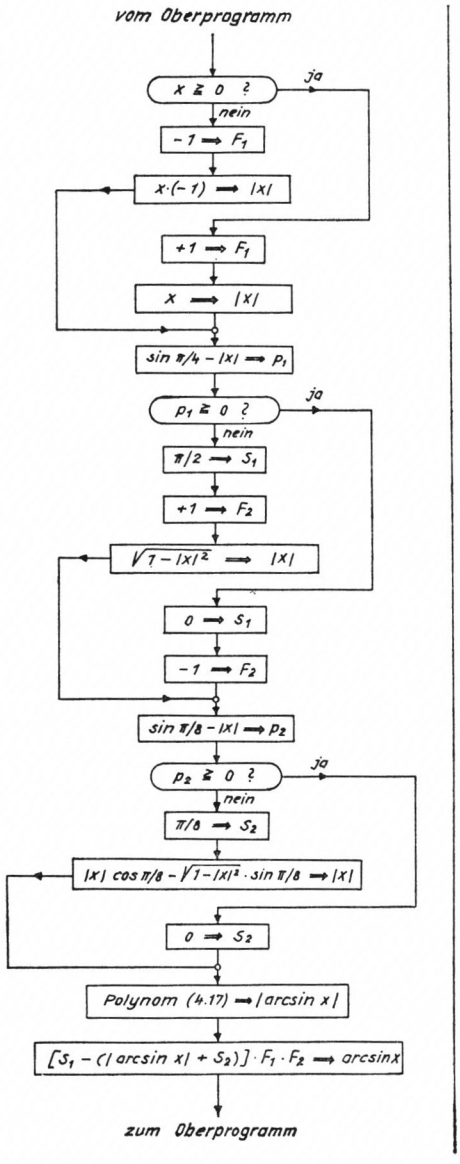

Abb. 2a: Flußdiagramm zum Unterprogramm arcsin x

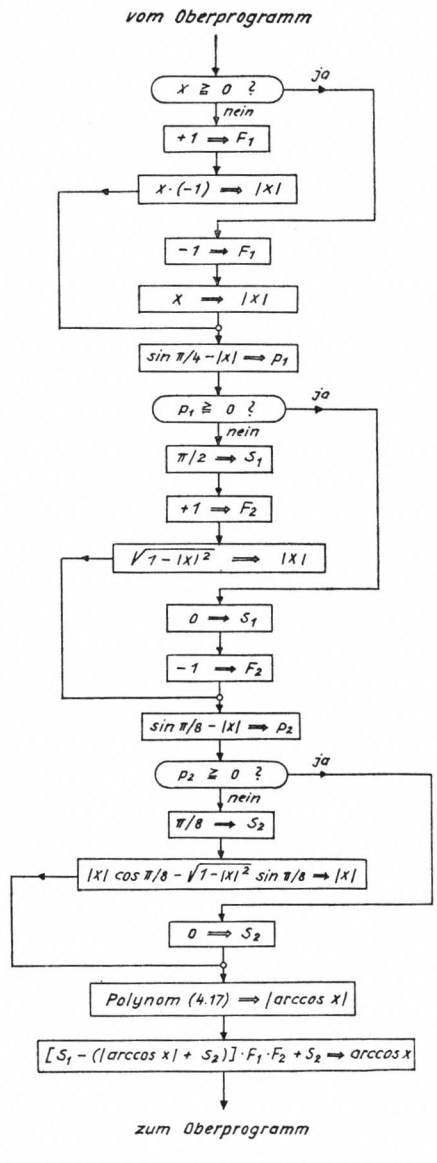

Abb. 2b: Flußdiagramm zum Unterprogramm arccos x

4.1.5 *Unterprogramm für arctg x (UP. arctg x)*

Dem Unterprogramm zur Berechnung der Funktion Arcustangens wird die Kettenbruchentwicklung (3.76) zugrunde gelegt, die in der Form (3.78) unmittelbar für die Automatenrechnung geeignet ist. Das Argument x kann zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen. Dies

entspricht einem Funktionswert im Bereich zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Liegt der Absolutwert $|x|$ im Intervall $+1 \leqq |x| \leqq +\infty$, so wird das Argument vermittels (3.77) zunächst auf den Bereich $0 \leqq |x| \leqq 1$ zurückgeführt, in dem der Kettenbruch (3.78) anwendbar ist.

Einen Überblick über den Programmablauf gibt das untenstehende Flußdiagramm Abb. 3.

Bei der Auflösung des Kettenbruches, die linear oder zyklisch programmiert werden kann, wurde wegen genauerer Ergebnisse die lineare Anordnung vorgezogen.

Das UP. arctg x belegt die Speicherzellen 2700–2899. Der Aufruf erfolgt mit dem Befehl F 2700. Das Argument muß dabei wieder in a und SSp. 3 stehen; der Funktionswert steht dann in a und SSp. 3 und in SSp. 6 und 16. Der Maximalfehler beträgt ca. $7 \cdot 10^{-13}$, die Rechenzeit ca. 6,5 sec.

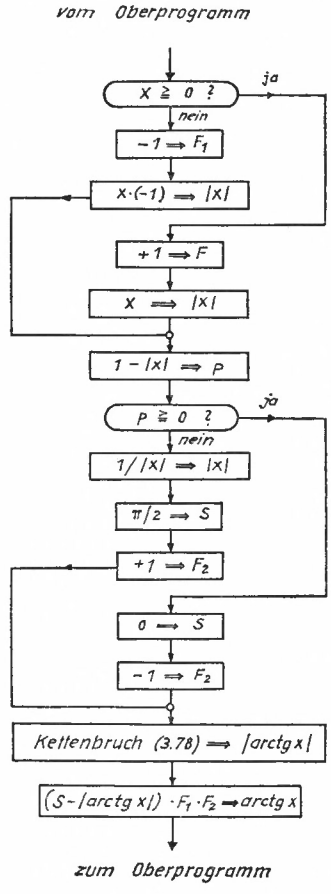

Abb. 3: Flußdiagramm zum Unterprogramm arctg x

Zur Prüfung des UP. arctg x wurden für eine Reihe von Tangenswerten zwischen $-\infty$ und $+\infty$ bzw. -10^{38} und $+10^{38}$ die zugehörigen Werte für Arcustangens und daraus die Winkel berechnet. Nachstehende Tabelle zeigt die Ergebnisse:

Testberechnungen für das Unterprogramm arctg x

TANGENS	ARCUSTANGENS	WINKEL	SOLLWERT
1	2	3	4
0	0	0	0
,17632698070846 49/+00	,1745329251994329/+00	,9999999999999999/+01	10
,36397023426620 23/+00	,3490658503988466/+00	,1999999999999889/+02	20
,57735026918962 57/+00	,5235987755982988/+00	,2999999999999999/+02	30
,83909963117728 01/+00	,6981317007977217/+00	,3999999999999942/+02	40
,11917535925942 09/+01	,8726646259971748/+00	,5000000000000057/+02	50
,17320508075688 77/+01	,1047197551196597/+01	,6000000000000000/+02	60
,27474774194546 22/+01	,1221730476396049/+01	,7000000000000110/+02	70
,56712818196177 09/+01	,1396263401595463/+01	,8000000000000000/+02	80
,24064240128769 08/+18	,1570796326794896/+01	,9000000000000000/+02	90
-,17632698070846 49/+00	-,1745329251994329/+00	-,9999999999999999/+01	-10
-,36397023426620 23/+00	-,3490658503988466/+00	-,1999999999999889/+02	-20
-,57735026918962 57/+00	-,5235987755982988/+00	-,2999999999999999/+02	-30
-,83909963117728 01/+00	-,6981317007977217/+00	-,3999999999999942/+02	-40
-,11917535925942 09/+01	-,8726646259971748/+00	-,5000000000000057/+02	-50
-,17320508075688 77/+01	-,1047197551196597/+01	-,6000000000000000/+02	-60
-,27474774194546 22/+01	-,1221730476396049/+01	-,7000000000000110/+02	-70
-,56712818196177 09/+01	-,1396263401595463/+01	-,8000000000000000/+02	-80
-,24064240128769 08/+18	-,1570796326794896/+01	-,9000000000000000/+02	-90

4.2 Unterprogramme zur Winkelumwandlung

Bei geodätischen Berechnungen auf dem Rotationsellipsoid erfolgt die Zählung der Winkel wegen der engen Beziehungen zu astronomischen Werten im allgemeinen in Altgrad (Grad, Minuten, Sekunden). In elektronischen Rechenanlagen werden die Winkelwerte jedoch zweckmäßig im analytischen Maß verwendet. Die Unterprogramme für sin x und

cos x setzen voraus, daß der Winkel jeweils bereits im Bogenmaß vorliegt; die Arcusprogramme liefern den Winkelwert stets im Bogenmaß. Es sind also häufig Winkelumwandlungen von Altgrad ins Bogenmaß und umgekehrt vom Bogenmaß zurück in Altgrad erforderlich. Hierfür werden deshalb zweckmäßig eigene Unterprogramme, ebenfalls für doppelte Zahlenlänge, erstellt.

4.2.1 *Unterprogramm zur Winkelumwandlung von Altgrad ins Bogenmaß (UP. Umw. Altgrad – Bogenmaß)*

Der Winkel ist hier gegeben in Grad (G), Minuten (M), Sekunden (S), wobei G, M und S vom Automaten als selbständige Zahlengrößen aufgefaßt werden. Im Bogenmaß ergibt sich der Winkelwert mit dem Algorithmus

$$(G + M/60 + S/3600) / \varrho^\circ \Rightarrow WB. \tag{4.23}$$

Das Unterprogramm, das die Speicherzellen 1390–1449 belegt, ist aufzurufen mit dem Befehl F 1400. Dabei muß G in den Trommelzellen 1440 und 1441 (oberer Mantissenteil in 1440, unterer Mantissenteil und Exponent in 1441), M in 1442 und 1443 sowie S in 1444 und 1445 stehen. Die Genauigkeit beträgt etwa 10^{-17}, die Rechenzeit ca. 0,8 sec.

4.2.2 *Unterprogramm zur Winkelumwandlung vom Bogenmaß in Altgrad mit Druckanweisung (UP. Umw. Bogenmaß – Altgrad)*

Da bei Berechnungen mit doppelter Zahlenlänge die Abspaltung des ganzzahligen Bestandteiles einer Zahl auf Schwierigkeiten stößt, wird hier mit fortlaufender Subtraktion gearbeitet. Gradzahl und Minuten werden als Strichzahlen ausgedruckt und die Sekunden als Gleitkommazahl, da das UP. „Doppelte Zahlenlänge" eine Ausgabe in Normalform nicht erlaubt.

Das Unterprogramm belegt die Speicherzellen 1450–1515. Es ist aufzurufen unter dem Befehl F 1450, wobei WB in a und SSp. 3 stehen muß. Die Rechenzeit hängt hier allerdings ab von der Größe des Winkels. Da jedoch die Ausgabe der Ergebnisse bei den genannten Berechnungen im allgemeinen nur einmal am Ende des Rechenganges erfolgt, kann die etwas größere Rechendauer in Kauf genommen werden.

Zur Prüfung der beiden Unterprogramme zur Winkelumwandlung wurden einige Winkelwerte zuerst ins Bogenmaß übergeführt und dann wieder in Altgrad umgerechnet. Nachstehende Tabelle zeigt die Ergebnisse:

WINKEL			BOGENMASS	WINKEL		
°	'	"		°	'	"
17	35	43	,307095530025213/+00	17'	35'	,429999999999999/+02
96	12	46,1234	,167923035297193/+01	96'	12'	,461233999999999/+02
157	08	49,4500	,274273377166573/+01	157'	8'	,494499999999999/+02
319	18	32,5678	,557299419476793/+01	319'	18'	,325677999999999/+02

5. ZUSAMMENFASSUNG VON TEIL A

Zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen mit hoher Genauigkeit wurden zunächst für die Automatenrechnung geeignete Näherungsfunktionen hergeleitet. Auf Grund dieser Näherungsfunktionen wurden Unterprogramme zur Berechnung der Funktionswerte mit doppelter Zahlenlänge für die ZUSE Z 23 erstellt und an Hand von Zahlenbeispielen geprüft.

Die Unterprogramme ermöglichen die Durchführung geodätischer Berechnungen mit höchster Genauigkeit. Da derartige Berechnungen im allgemeinen nicht als Massenberechnungen anfallen, kann die Rechendauer von durchschnittlich einigen Sekunden ohne weiteres in Kauf genommen werden.

An Speicherraum benötigen die Unterprogramme zusammen mit dem Unterprogramm „Doppelte Zahlenlänge" die Trommelzellen 1050 bis 2900. Sie sind zur praktischen Verwendung bei der Berechnung langer geodätischer Linien auf einem einzigen Lochband zusammengefaßt, für dessen Einlesen ca. 1,7 Minuten erforderlich sind.

Zusammenstellung der Unterprogramme:

Unterprogramm	Speicherbedarf	Aufruf	Maximalfehler	Bemerkungen
$\sin x$	1050–1364	F 1100	$1 \cdot 10^{-15}$	
$\cos x$		F 1250	$1 \cdot 10^{-15}$	
$\arcsin x$	1550–1723	F 1600	$5 \cdot 10^{-13}$	
$\arccos x$	1550–1594 1750–1877	F 1750	$5 \cdot 10^{-13}$	
$\operatorname{arctg} x$	2700–2899	F 2700	$7 \cdot 10^{-13}$	
Umw. Altgrad – Bogenmaß	1390–1449	F 1400	$< 10^{-17}$	G in 1440–1441 M in 1442–1443 S in 1444–1445
Umw. Bogenmaß – Altgrad	1450–1515	F 1450	$< 10^{-17}$	

Das Unterprogramm „Doppelte Zahlenlänge" muß dabei jeweils ab Trommelzelle 2000 (2000–2699) gespeichert sein.

TEIL B. BERECHNUNG LANGER GEODÄTISCHER LINIEN

1. EINLEITUNG

Zur Lösung der geodätischen Hauptaufgaben für rein geodätische Zwecke kommen im wesentlichen zwei Lösungsprinzipien in Betracht: die als Legendresche Reihen bezeichneten Potenzreihenentwicklungen nach der Entfernung Δs und die Besselsche Grundlösung.

Da bei den Legendreschen Reihen die Konvergenz nur innerhalb eines beschränkten Bereiches gesichert ist, können die darauf aufbauenden Lösungsverfahren bei der herkömmlichen Berechnungsweise nur für geodätische Linien bis höchstens 200 km Länge angewandt werden. Mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen ist es jedoch möglich, den Anwendungsbereich auch auf lange Entfernungen auszudehnen (vgl. [25], [32], [33]). Über die sich damit ergebende neue Lösungsmöglichkeit für lange geodätische Linien, die allerdings auch einige entscheidende Mängel aufweist, sollen nähere Einzelheiten und Untersuchungsergebnisse in einer gesonderten Veröffentlichung mitgeteilt werden.

Die auf dem Besselschen Prinzip beruhenden Lösungsverfahren sind zwar speziell für lange Entfernungen bestimmt; bei der praktischen Anwendung erfordern sie jedoch, wie bereits festgestellt wurde, erheblichen Rechenaufwand. Da hier durch den Einsatz elektronischer Rechenanlagen neben einer Lösung des Wirtschaftlichkeitsproblems auch befriedigende Berechnungsergebnisse zu erwarten sind, sollen im folgenden die wichtigsten dieser Verfahren auf die Lösung mit programmgesteuerten Rechenautomaten umgestellt werden, so daß anschließend die entsprechenden Rechenprogramme hergestellt werden können.

Voraussetzung hierfür ist jedoch eine genaue Kenntnis der betreffenden Verfahren selbst. Deshalb ist es zunächst erforderlich, die wichtigsten mathematischen Grundlagen dieser Lösungen kurz aufzuzeigen.

2. MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

2.1 Grundbegriffe und Grundformeln

2.1.1 *Grundbegriffe für das Rotationsellipsoid*

Die im folgenden verwendeten Grundbegriffe für das Rotationsellipsoid werden nach [20] S. 922 zusammengestellt. Dabei wird der Übersichtlichkeit wegen eine Beschränkung auf möglichst wenige Grundbegriffe angestrebt.

Als Parameter werden benutzt:

B, die geographische Breite,
L, die geographische Länge,
β, die reduzierte Breite, definiert durch

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{1-e^2}\cdot\operatorname{tg}B = \frac{\operatorname{tg}B}{\sqrt{1+e'^2}} \quad \text{oder} \tag{2.1}$$

$$\sin\beta = \frac{\sin B}{V}, \quad \cos\beta = \frac{\cos B}{V\sqrt{1-e^2}}. \tag{2.2}$$

Zur Definition der Meridianellipse werden verwendet:

a, die große Halbachse,
b, die kleine Halbachse,

$$\alpha = \frac{a-b}{a}, \text{ die Abplattung,} \tag{2.3}$$

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}, \text{ das Quadrat der ersten Exzentrizität,} \tag{2.4}$$

$$e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}, \text{ das Quadrat der zweiten Exzentrizität,} \tag{2.5}$$

$$n = \frac{a-b}{a+b}, \text{ 3. Abplattung,} \tag{2.6}$$

$$V = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}}, \text{ Hilfsfunktion,} \tag{2.7}$$

$$p = a\cdot\cos\beta, \text{ Parallelkreishalbmesser.} \tag{2.8}$$

Die Bogenlänge der geodätischen Linie wird mit s und die Azimute werden mit A bezeichnet.

2.1.2 *Der Satz von Clairaut*

Der Satz von Clairaut, der für die nachstehenden Lösungen von grundlegender Bedeutung ist, lautet für das Rotationsellipsoid

$$a\cdot\sin A_0 = p\cdot\sin A = p_m = \text{const.} \tag{2.9}$$

und bei Verwendung von reduzierten Breiten

$$\sin A_0 = \cos\beta\sin A = \cos\beta_m = \text{const.} \tag{2.10}$$

A ist das Azimut der geodätischen Linie,
A_0 ist das Äquatorazimut,

B_m ist die geographische Breite des Maximums der geodätischen Linie,

β_m ist die reduzierte Breite des Maximums der geodätischen Linie,

p_m ist der zu B_m gehörige Parallelkreishalbmesser.

2.1.3 *Die Besselschen Hilfsdreiecke*

2.1.3.1 Das Besselsche Lösungsprinzip

Der Satz von Clairaut lautet für eine Kugel mit den Breiten β und den Großkreisazimuten α

$$\sin \alpha_0 = \cos \beta \sin \alpha = \cos \beta_m \tag{2.11}$$

und hat somit die gleiche Form wie (2.10). Durch Vergleich erhält man

$$\alpha = A .$$

Das bedeutet, daß einer geodätischen Linie punktweise ein bestimmter Kugelgroßkreis mit den reduzierten Breiten β anstelle der geographischen Breiten B zugeordnet werden kann, wobei geodätische Linie und Großkreis in sich entsprechenden Punkten das gleiche Azimut aufweisen. Einem sphäroidischen Dreieck entspricht also ein Hilfsdreieck auf einer Kugel. Die geodätischen Hauptaufgaben lassen sich somit auf die Auflösung sphärischer Dreiecke zurückführen (Bessel 1826 [3]). Abb. 4 zeigt die sphäroidischen und die zugeordneten sphärischen Dreiecke.

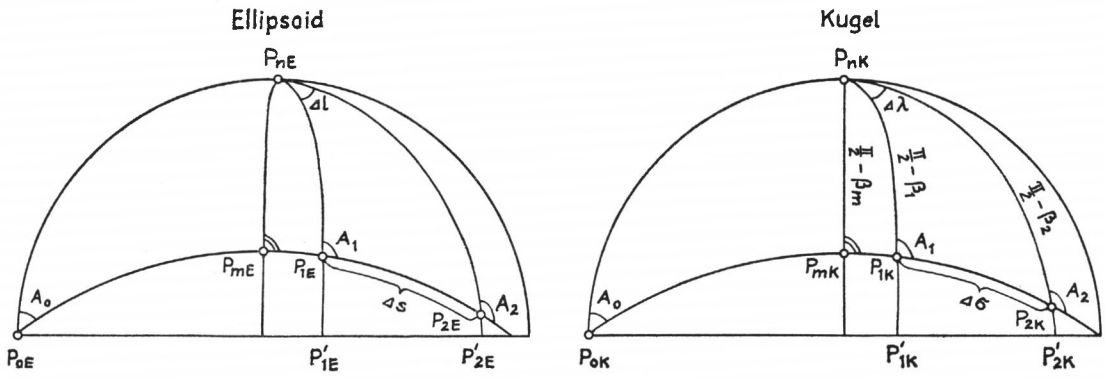

Abb. 4

2.1.3.2 Die wichtigsten Beziehungen in den sphärischen Hilfsdreiecken

In den in Abb. 5 dargestellten sphärischen Hilfsdreiecken werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$\sigma, \Delta\sigma, \omega, \Delta\omega$ Bogenlängen des Großkreises,

$\lambda, \bar{\lambda}, \Delta\lambda$ sphärische Längen.

Im rechtwinklig sphärischen Dreieck $P_{mK} P_{nK} P_K$ gelten entsprechend [20] S. 931 die nachstehenden allerdings nicht unabhängigen Gleichungen:

$$
(2.12)\quad
\begin{aligned}
&\text{a) } \cos A &&= -\operatorname{tg}\sigma \operatorname{tg}\beta\\
&\text{b) } \cos\lambda &&= \cos\sigma \sin A\\
&\text{c) } \sin\sigma &&= -\operatorname{ctg}\beta_m \operatorname{ctg} A\\
&\text{d) } \sin\sigma &&= \sin\lambda \cos\beta\\
&\text{e) } \sin\beta &&= \sin\beta_m \cos\sigma\\
&\text{f) } \cos\beta_m &&= \operatorname{ctg}\lambda \operatorname{tg}\sigma\\
&\text{g) } \sin\beta &&= -\operatorname{ctg}\lambda \operatorname{ctg} A\\
&\text{h) } \cos\beta_m &&= \cos\beta \sin A\\
&\text{i) } \cos A &&= -\sin\lambda \sin\beta_m\\
&\text{k) } \cos\lambda &&= \operatorname{ctg}\beta_m \operatorname{tg}\beta.
\end{aligned}
$$

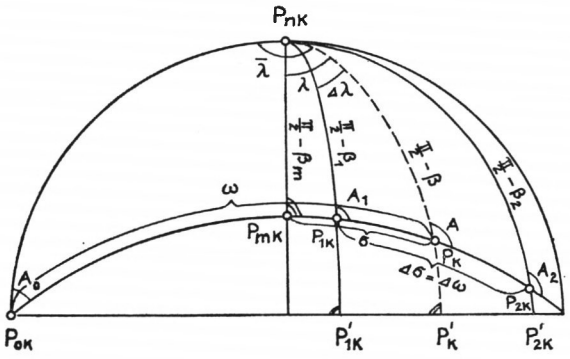

Abb. 5

Aus den Beziehungen (2.12) d) und (2.12) i) kann die Gleichung

$$(2.13)\qquad \cos\beta \cos A = -\sin\beta_m \sin\sigma$$

und aus (2.12) k) und (2.12) e) die Gleichung

$$(2.14)\qquad \cos\beta \cos\lambda = \cos\beta_m \cos\sigma$$

abgeleitet werden.

Dem rechtwinklig sphärischen Dreieck $P_{0K} P_K P'_K$ können unter Berücksichtigung von

$$(2.15)\qquad \omega = \frac{\pi}{2} + \sigma \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \lambda$$

folgende den Gleichungen (2.12) entsprechende Beziehungen entnommen werden:

$$
(2.16)\quad
\begin{aligned}
&\text{a) } \cos A &&= \operatorname{ctg}\omega \operatorname{tg}\beta &\qquad &\text{f) } \sin A_0 &&= \operatorname{tg}\bar{\lambda} \operatorname{ctg}\omega\\
&\text{b) } \sin\bar{\lambda} &&= \sin\omega \sin A &&\text{g) } \sin\beta &&= \operatorname{tg}\bar{\lambda} \operatorname{ctg} A\\
&\text{c) } \cos\omega &&= \operatorname{tg} A_0 \operatorname{ctg} A &&\text{h) } \sin A_0 &&= \cos\beta \sin A\\
&\text{d) } \cos\omega &&= \cos\bar{\lambda} \cos\beta &&\text{i) } \cos A &&= \cos\bar{\lambda} \cos A_0\\
&\text{e) } \sin\beta &&= \cos A_0 \sin\omega &&\text{k) } \sin\bar{\lambda} &&= \operatorname{tg} A_0 \operatorname{tg}\beta.
\end{aligned}
$$

Für das schiefwinklige sphärische Dreieck $P_{1K} P_{nK} P_{2K}$ gelten die Formeln der sphärischen Trigonometrie. Der Sinussatz ergibt z. B.

$$(2.17)\qquad \frac{\sin\Delta\sigma}{\sin\Delta\lambda} = \frac{\cos\beta_2}{\sin A_1} = \frac{\cos\beta_1}{\sin A_2}$$

und der Kosinussatz

$$(2.18)\qquad \cos\Delta\sigma = \sin\beta_1 \sin\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos\Delta\lambda.$$

Durch Einsetzen der für den Punkt P_2 aufgestellten Beziehung (2.12) h) in (2.17) folgt

$$(2.19)\qquad \sin\Delta\sigma \cos\beta_m = \cos\beta_1 \cos\beta_2 \sin\Delta\lambda.$$

Die Gaußschen Gleichungen lauten

$$
(2.20)\qquad
\begin{aligned}
\sin\frac{A_2+A_1}{2}\,\sin\frac{\Delta\sigma}{2} &= \cos\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\,\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\\
\cos\frac{A_2+A_1}{2}\,\sin\frac{\Delta\sigma}{2} &= \sin\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\,\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\\
\sin\frac{A_2-A_1}{2}\,\cos\frac{\Delta\sigma}{2} &= \sin\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\,\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\\
\cos\frac{A_2-A_1}{2}\,\cos\frac{\Delta\sigma}{2} &= \cos\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\,\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\,.
\end{aligned}
$$

2.2. Lösungsverfahren für große Entfernungen

Der Besselsche Grundgedanke der Übertragung von ellipsoidischen Stücken in eine sphärische Hilfsfigur ermöglicht eine verhältnismäßig einfache Lösung der geodätischen Hauptaufgaben bei beliebig großen Entfernungen. Allerdings sind in den sphärischen Hilfsdreiecken die Längen λ und die Bogenlängen σ nicht identisch mit den ellipsoidischen Werten l und s; es bestehen vielmehr komplizierte Zusammenhänge zwischen den sphärischen und den sphäroidischen Größen.

Aus Differentialbeziehungen für die geodätische Linie und den Großkreis lassen sich zunächst die wichtigen Differentialgleichungen

$$(2.21)\qquad ds = \frac{a}{V}\,d\sigma\,,$$

$$(2.22)\qquad dl = \frac{1}{V}\,d\lambda$$

herleiten, die mit (2.7) in die Form

$$(2.23)\qquad ds = a\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}\;d\sigma\,,$$

$$(2.24)\qquad dl = \sqrt{1-e^2\cos^2\beta}\;d\lambda$$

gebracht werden können. Die Integration der Beziehungen (2.23) und (2.24) führt zur gesuchten Lösung. Dabei treten elliptische Integrale auf, die elementar nicht lösbar sind. Deshalb werden im allgemeinen für die Integranden Reihenentwicklungen angewandt und die Integration gliedweise ausgeführt.

In den folgenden Abschnitten werden zunächst in den Grundzügen die Wege dargelegt, auf denen bei den wichtigsten auf dem Besselschen Prinzip beruhenden Lösungsverfahren durch Herleitung der Grundgleichungen die Zusammenhänge zwischen den ellipsoidischen und den sphärischen Stücken hergestellt werden. Dabei werden gleichzeitig die Grundformeln für die spätere Erstellung von Rechenprogrammen angegeben und außerdem die von den einzelnen Verfassern vorgeschlagenen Lösungswege kurz aufgezeigt.

2.2.1 *Die Besselsche Lösung*

Bessel [3] verwendet die Hilfsgrößen M und m, wobei M die vom Äquatorschnittpunkt an gezählte Länge des Großkreisbogens und

$$(2.25)\qquad m = \frac{\pi}{2} - \beta_m$$

ist (siehe Abb. 6). Im folgenden wird jedoch der in [17] S. 104 angegebene gegenüber der ursprünglichen Besselschen Darstellung wesentlich übersichtlichere Weg zur Herleitung der Besselschen Grundgleichungen kurz aufgezeigt:

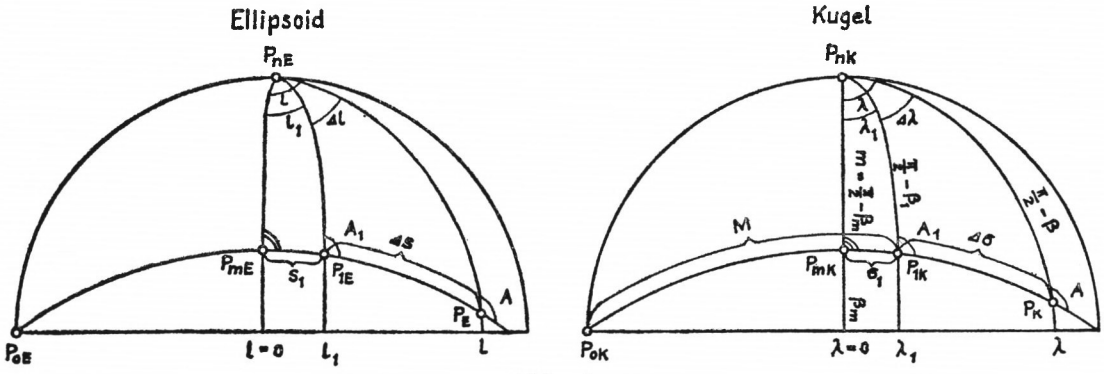

Abb. 6

Dem rechtwinklig sphärischen Dreieck $P_{mK} P_{nK} P_K$ in Abb. 6 kann zunächst die (2.12) e) entsprechende Beziehung

$$\sin\beta = \cos m \sin(M + \Delta\sigma) \tag{2.26}$$

entnommen werden. Damit ist

$$\cos^2\beta = 1 - \cos^2 m \sin^2(M + \Delta\sigma). \tag{2.27}$$

Mit (2.27) ergibt sich aus der Differentialgleichung (2.23), wenn noch mit

$$e^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot e'^2 \quad \text{und} \quad 1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2} \tag{2.28}$$

e^2 durch e'^2 ersetzt wird, folgende Beziehung für die sphäroidische Bogenlänge

$$s = b \int \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 m \sin^2(M + \Delta\sigma)}\, d\sigma. \tag{2.29}$$

Hier führt man den Parameter

$$k = e' \cos m \tag{2.30}$$

ein, entwickelt die Wurzel nach der binomischen Reihe und ersetzt die dabei auftretenden Potenzen von $\sin(M + \Delta\sigma)$ mit Hilfe der bekannten Formeln durch trigonometrische Funktionen von Vielfachen des Winkels. Die Integration zwischen den Grenzen M und $(M + \Delta\sigma)$ führt dann zu dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \Delta s = b\{A \cdot \Delta\sigma - B \sin\Delta\sigma \cos(2M + \Delta\sigma) - C \sin 2\Delta\sigma \cos 2(2M + \Delta\sigma) - \\ - D \sin 3\Delta\sigma \cos 3(2M + \Delta\sigma) - \ldots\} \end{aligned} \tag{2.31}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6 - \frac{175}{16384}k^8 + \ldots\right) \\ B &= \left(\frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16} + \frac{15}{512}k^6 - \frac{35}{2048}k^8 + \ldots\right) \\ C &= \left(\frac{k^4}{128} - \frac{3}{512}k^6 + \frac{35}{8192}k^8 - \ldots\right) \\ D &= \left(\frac{k^6}{1536} - \frac{5}{6144}k^8 + \ldots\right) \\ E &= \left(\frac{5}{65536}k^8 - \ldots\right). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Die Umkehrung von (2.31) gibt

$$\Delta\sigma = \alpha\frac{\Delta s}{b} + \beta \sin\Delta\sigma \cos(2M + \Delta\sigma) + \gamma \sin 2\Delta\sigma \cos 2(2M + \Delta\sigma) + \\ + \delta \sin 3\Delta\sigma \cos 3(2M + \Delta\sigma) + \varepsilon \sin 4\Delta\sigma \cos 4(2M + \Delta\sigma) + \ldots, \tag{2.33}$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{A} \\ \beta &= \frac{B}{A} \\ \gamma &= \frac{C}{A} \\ \delta &= \frac{D}{A} \\ \varepsilon &= \frac{E}{A} \end{aligned} \tag{2.34}$$

bedeuten.

Für die Umkehrung ist also eine Iteration erforderlich, die zweckmäßig mit dem Näherungswert $\Delta\sigma \doteq \alpha\frac{\Delta s}{b}$ begonnen wird.

Aus der Differentialgleichung (2.24) für den Längenunterschied wird zunächst durch Reihenentwicklung der Wurzel erhalten

$$dl = \left(1 - \frac{e^2}{2}\cos^2\beta - \frac{e^4}{8}\cos^4\beta - \frac{e^6}{16}\cos^6\beta - \ldots\right) d\lambda. \tag{2.35}$$

Mit Hilfe der sphärischen Beziehungen

$$d\lambda \cos\beta = d\sigma \sin A \tag{2.36}$$

und

$$\sin A = \frac{\sin m}{\cos\beta}, \tag{2.37}$$

also

$$d\lambda = \frac{\sin m}{\cos^2\beta}\, d\sigma \tag{2.38}$$

ergibt sich daraus

$$\Delta l = \Delta\lambda - e^2 \sin m \int \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8}\cos^2\beta + \frac{e^4}{16}\cos^4\beta + \frac{5}{128}e^6\cos^6\beta + \ldots\right) d\sigma. \tag{2.39}$$

Wird noch mit (2.27) β durch m und $(M + \Delta\sigma)$ ersetzt, so liefert, wieder nach einigen trigonometrischen Umformungen, die Integration zwischen den Grenzen M und $(M + \Delta\sigma)$

(2.40)

$$\Delta l = \Delta\lambda - \sin m \{\alpha'\Delta\sigma + \beta' \sin\Delta\sigma \cos(2M + \Delta\sigma) + \gamma' \sin 2\Delta\sigma \cos 2(2M + \Delta\sigma) + \\ + \delta' \sin 3\Delta\sigma \cos 3(2M + \Delta\sigma) + \ldots\}.$$

Darin bedeuten

$$\alpha' = \frac{e^2}{2}\left(1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5}{64}e^6\right) - \frac{e^4\cos^2 m}{16}\left(1 + e^2 + \frac{15}{16}e^4\right) \\ + \frac{3}{128}e^6\cos^4 m\left(1 + \frac{15}{8}e^2\right) - \frac{25}{2048}e^8\cos^6 m \tag{2.41}$$

$$\beta' = \frac{e^4}{16}\cos^2 m\left(1 + e^2 + \frac{15}{16}e^4\right) - \frac{e^6}{32}\cos^4 m\left(1 + \frac{15}{8}e^2\right) + \frac{75}{4096}e^8\cos^6 m$$

$$\gamma' = \frac{e^6}{256} \cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8} e^2\right) - \frac{15}{4096} e^8 \cos^6 m$$

$$\delta' = \frac{5}{12288} e^8 \cos^6 m .$$

Die Koeffizienten α', β', γ', δ' sind nicht identisch mit den ursprünglichen Besselschen, sondern zu diesen proportional. Entsprechend wäre in (2.40) $\sin m$ zu ersetzen durch $\frac{e^2 \sin m}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{4} e^2}}$.

Zur Lösung der 1. Hauptaufgabe werden nach Berechnung von β_1 zunächst aus den Hilfsdreiecken in Abb. 6 die Größen m und M berechnet. Auf dem Wege der allmählichen Annäherung wird mit (2.33), ausgehend von dem Näherungswert $\Delta\sigma \doteq \alpha \frac{\Delta s}{b}$, die Δs entsprechende sphärische Bogenlänge $\Delta\sigma$ erhalten. Damit können β_2 und A_2 im rechtwinkligen Dreieck $P_{mK} P_{nK} P_K$ und $\Delta\lambda$ im Dreieck $P_{1K} P_{nK} P_K$ berechnet werden. Mit (2.40) ergibt sich schließlich Δl.

Einen Lösungsweg für die 2. Hauptaufgabe unter Verwendung der Besselschen Formeln, der auf der Berechnung von $\Delta\lambda$ durch sukzessive Approximation beruht, gibt Albrecht in [1] an. Er erhält dabei einen ersten Näherungswert für $\Delta\lambda$ nach der Formel von Jordan ([20] S. 1038)

$$\Delta\lambda = V \cdot \Delta l \left\{1 - \frac{\eta^2}{24} \left[\frac{\Delta B^2}{V^4} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 B' + \eta^2 + 6 \eta^2 \operatorname{tg}^2 B') + 2 \Delta l^2 \sin^2 B'\right]\right\}, \tag{2.42}$$

wobei $B' = \frac{B_1 + B_2}{2}$ und $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B'$ ist.

Mit dem aus (2.42) erhaltenen Wert für $\Delta\lambda$ werden erste Näherungswerte für $\Delta\sigma$, m und M berechnet, mit denen dann nach (2.40) ein weitaus genauerer Wert für $\Delta\lambda$ gefunden wird. Spätestens nach einigen Iterationsschritten ändert sich $\Delta\lambda$ nicht mehr. Damit sind auch $\Delta\sigma$, m und M bekannt. Aus dem Dreieck $P_{1K} P_{nK} P_K$ ergeben sich die Azimute A_1 und A. Die Entfernung Δs kann nach (2.31) berechnet werden.

2.2.2 *Die Helmertsche Lösung mit Modifikationen nach Bodemüller*

Helmert verwendet in seinem in [15] veröffentlichten Verfahren als Parameter die reduzierte Maximalbreite β_m und als Variable die vom positiven Maximum aus gezählte sphärische Bogenlänge σ (siehe Abb. 7).

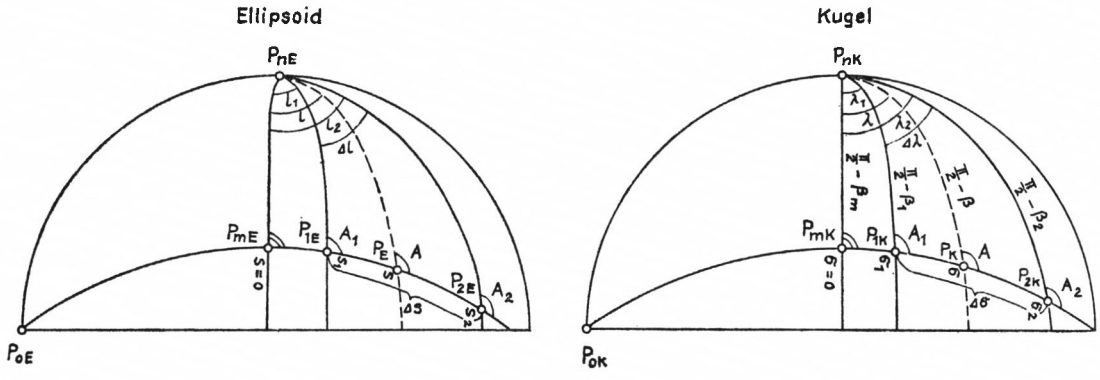

Abb. 7

Die Grundgleichung (2.23) wird zunächst mit

$$\sin\beta = \sin\beta_m \cos\sigma \tag{2.43}$$

in die Form

$$ds = a\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_m}\sqrt{1-\frac{e^2\sin^2\beta_m}{1-e^2\cos^2\beta_m}\sin^2\sigma}\,d\sigma \tag{2.44}$$

übergeführt. Mit dem Parameter

$$k' = e\sin B_m = \frac{e\sin\beta_m}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_m}} \tag{2.45}$$

geht (2.44) über in

$$ds = a\sqrt{\frac{1-e^2}{1-k'^2}}\sqrt{1-k'^2\sin^2\sigma}\,d\sigma\,. \tag{2.46}$$

Anstelle von k' führt Helmert nun den Parameter

$$k_1 = \frac{1-\sqrt{1-k'^2}}{1+\sqrt{1-k'^2}} \tag{2.47}$$

ein und erhält unter Berücksichtigung von

$$b = a\sqrt{1-e^2} \tag{2.48}$$

für die Bogenlänge die Beziehung

$$s = \frac{b}{1-k_1}\int\sqrt{1+k_1^2+2k_1\cos 2\sigma}\,d\sigma\,. \tag{2.49}$$

Nach Anwendung der binomischen Reihenentwicklung für den Integranden und Integration zwischen den Grenzen 0 und σ wird daraus

$$s = b\,\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{\sigma+\left(\frac{1}{2}k_1-\frac{3}{16}k_1^3\right)\sin 2\sigma-\frac{1}{16}k_1^2\sin 4\sigma+\frac{1}{48}k_1^3\sin 6\sigma-\ldots\right\} \tag{2.50}$$

erhalten. Angewandt auf das zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 liegende Bogenstück Δs lautet (2.50)

$$\begin{aligned}\Delta s = s_2 - s_1 = b\,\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\Big\{&(\sigma_2-\sigma_1)+\left(\frac{1}{2}k_1-\frac{3}{16}k_1^3\right)(\sin 2\sigma_2-\sin 2\sigma_1)-\\ &-\frac{1}{16}k_1^2(\sin 4\sigma_2-\sin 4\sigma_1)+\frac{1}{48}k_1^3(\sin 6\sigma_2-\sin 6\sigma_1)-\ldots\Big\}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Durch Umkehrung der Gleichung (2.50) gelingt Helmert die direkte Lösung der 1. Hauptaufgabe. Mit der Abkürzung

$$s' = \frac{s(1-k_1)}{b(1+\frac{1}{4}k_1^2)} \tag{2.52}$$

erhält er

$$\sigma = s'-\left(\frac{1}{2}k_1-\frac{9}{32}k_1^3\right)\sin 2s'+\frac{5}{16}k_1^2\sin 4s'-\frac{29}{96}k_1^3\sin 6s'+\ldots, \tag{2.53}$$

womit σ als Funktion von s ausgedrückt ist. Angewandt auf zwei Punkte P_1 und P_2 wird zur unmittelbaren Berechnung von $\Delta\sigma$ die Gleichung (2.53) für σ_2 und σ_1 angesetzt. Durch Subtraktion ergibt sich

$$\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 = \Delta s' - \left(k_1 - \frac{9}{16} k_1^3\right) \cos 2\bar{s}' \sin \Delta s' + \frac{5}{8} k_1^2 \cos 4\bar{s}' \sin 2\Delta s' - \\ - \frac{29}{48} k_1^3 \cos 6\bar{s}' \sin 3\Delta s' + \ldots \tag{2.54}$$

mit

$$\Delta s' = s_2' - s_1' = \frac{1 - k_1}{b \cdot (1 + \frac{1}{4} k_1^2)} \Delta s \tag{2.55}$$

und

$$2\bar{s}' = s_1' + s_2' = 2 s_1' + \Delta s'. \tag{2.56}$$

Dabei kann $2 s_1'$ mit ausreichender Genauigkeit aus der abgekürzten aus (2.50) gefundenen Beziehung

$$2 s_1' = 2\sigma_1 + k_1 \sin 2\sigma_1 - \frac{1}{8} k_1^2 \sin 4\sigma_1 \tag{2.57}$$

erhalten werden.

Zur Lösung der Grundgleichung (2.24) behält Helmert den Parameter k_1 bei, führt aber noch das Längenverhältnis n ein und erhält zunächst

$$l = \lambda - \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \beta_m \int \left\{ \left(1 + n - \frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{4} k_1^2 + \ldots\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} k_1 \cos 2\sigma + \frac{1}{2} k_1^2 \cos 4\sigma + \ldots \right\} d\sigma \tag{2.58}$$

und nach Ausführung der Integration zwischen den Grenzen l_1 und l_2

$$\Delta l = \Delta\lambda - \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \beta_m \left\{ \left(1 + n - \frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{4} k_1^2 + \ldots\right) \Delta\sigma - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} k_1 (\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1) + \frac{1}{16} k_1^2 (\sin 4\sigma_2 - \sin 4\sigma_1) + \ldots \right\} \tag{2.59}$$

bzw.

$$\Delta l = \Delta\lambda - \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \beta_m \left\{ \left(1 + n - \frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{4} k_1^2 + \ldots\right) \Delta\sigma - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} k_1 \cos 2\sigma \sin \Delta\sigma + \frac{1}{8} k_1^2 \cos 4\sigma \sin 2\Delta\sigma + \ldots \right\}. \tag{2.60}$$

Dabei ist

$$\Delta l = l_2 - l_1 \qquad \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 \\ \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \qquad \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1). \tag{2.61}$$

Zur Lösung der 1. Hauptaufgabe werden nach Berechnung von β_1 zunächst aus den Hilfsdreiecken $P_m P_{nK} P_{1K}$ und $P_{mK} P_{nK} P_{2K}$ die Größen β_m, σ_1 und λ_1 ermittelt. Mit den Beziehungen (2.54) bis (2.57) ergibt sich direkt die Δs entsprechende sphärische Bogenlänge $\Delta\sigma$ und daraus

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma.$$

Aus den oben bezeichneten Dreiecken werden dann die Stücke β_2, λ_2 und A_2 erhalten. Der Längenunterschied Δl wird schließlich aus (2.59) berechnet.

Die Lösung der 2. Hauptaufgabe erfordert nach Berechnung von β_1 und β_2 die Ermittlung von $\Delta\lambda$ durch allmähliche Annäherung. Helmert bedient sich dabei der Gaußschen Gleichungen (2.20). Sobald $\Delta\lambda$ endgültig feststeht, sind auch die Azimute A_1, A_2 und die Bogenlänge $\Delta\sigma$ bekannt. Die zur Ermittlung von Δs erforderlichen Größen β_m, σ_1 und σ_2 werden aus den Dreiecken $P_{mK}P_{nK}P_{1K}$ und $P_{mK}P_{nK}P_{2K}$ erhalten. Δs ergibt sich damit nach (2.51).

Einen für die Zahlenrechnung günstigeren Weg zur Lösung der 2. Hauptaufgabe, bei dem auf die Verwendung der Gaußschen Gleichungen verzichtet wird, gibt Bodemüller in [9] an. Dabei werden ausgehend von einer groben Näherung $\Delta\lambda^{(i)}$ zunächst mit dem sphärischen Kosinussatz ein Näherungswert für $\Delta\sigma$ und daraus Näherungswerte für β_m, σ_1 und σ_2 berechnet. Mit (2.59) wird nun ein verbesserter Wert $\Delta\lambda^{(i+1)}$ erhalten, mit dem die Iteration fortgesetzt wird. Stehen $\Delta\lambda$ und damit die Größen β_m, σ_1 und σ_2 endgültig fest, dann können die Entfernung Δs nach Gleichung (2.51) und die Azimute A_1, A_2 z. B. mit Hilfe des Satzes von Clairaut gefunden werden.

Das Einschwenkverfahren von Bodemüller

Auf der Grundlage der Helmertschen Formeln entwickelt Bodemüller in [9] ein Verfahren zur direkten Lösung der 2. Hauptaufgabe. Der Grundgedanke ist folgender:

Werden in den sphärischen Hilfsdreiecken $P_{nK}P_{mK}P_{1K}$ und $P_{nK}P_{1K}P_{2K}$ in Abb. 8 die Stücke $\Delta\sigma$, A_1, A_2, σ_1 und β_m nicht mit $\Delta\lambda$, sondern mit einem Näherungswert $\Delta\lambda'$ berechnet, so werden an ihrer Stelle die Werte $\Delta\sigma'$, A_1', A_2', σ_1' und β_m' als Stücke der gegenüber der Sollage um P_{1K} verschwenkten sphärischen Hilfsdreiecke $P_{nK}P_{mK}'P_{1K}$ und $P_{nK}P_{1K}P_{2K}'$ erhalten. Dabei liegt P_{2K}' auf dem Parallelkreis von P_{2K}. Mit den Helmert-

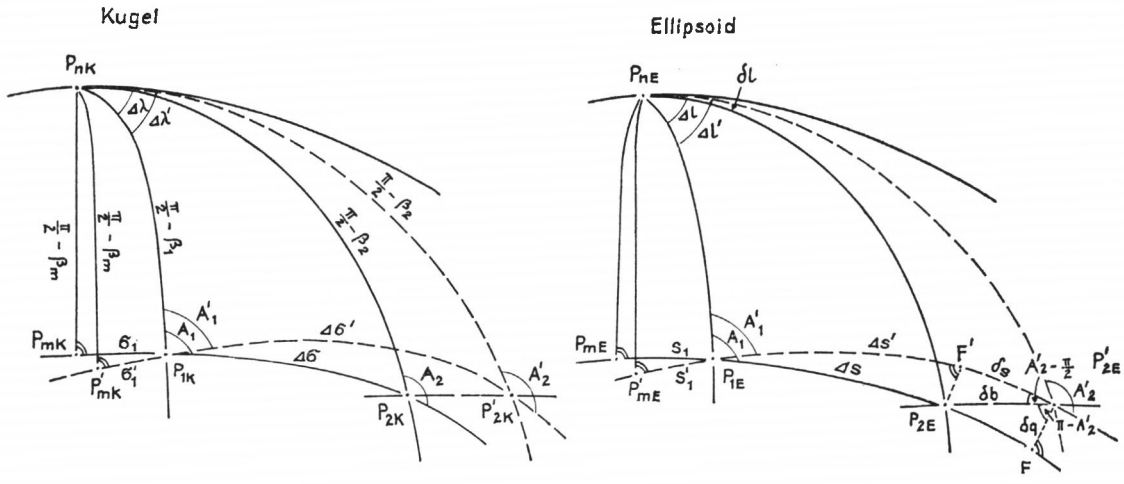

Abb. 8

schen Grundgleichungen (2.59) und (2.51) lassen sich die zugeordneten Stücke $\Delta l'$ und $\Delta s'$ berechnen. Aus dem Vergleich von $\Delta l'$ mit dem gegebenen Längenunterschied Δl ergibt sich mit

$$\delta l = \Delta l - \Delta l' \tag{2.62}$$

der Parallelkreisbogen

$$\delta b = a \cdot \cos\beta_2\, \delta l, \tag{2.63}$$

um den P_{2E}' gegenüber P_{2E} verschoben ist.

Wenn $\Delta\lambda'$ nicht sehr stark von $\Delta\lambda$ abweicht, können die kleinen Dreiecke $P_{2E}\,P'_{2E}\,F$ und $P_{2E}\,P'_{2E}\,F'$ als eben aufgefaßt und daraus

$$\delta s = a\cdot\cos\beta_2\,\delta l\,\sin A'_2 = a\cdot\cos\beta'_m\,\delta l \tag{2.64}$$

und die Querverschiebung

$$dq = +a\cos\beta_2\,\delta l\,\cos A'_2 = +\delta s\cdot\operatorname{ctg} A'_2 \tag{2.65}$$

berechnet werden.

Die gesuchte Länge der geodätischen Linie ist dann

$$\Delta s = \Delta s' + \delta s. \tag{2.66}$$

Das Azimut A_1 wird durch „Einschwenken" der geodätischen Linie um

$$\delta A_1 = \frac{\delta q}{\mathfrak{m}} \tag{2.67}$$

erhalten und ist

$$A_1 = A'_1 + \delta A_1. \tag{2.68}$$

In (2.67) bedeutet $\mathfrak{m}$ die reduzierte Länge der geodätischen Linie, für die Bodemüller in [9] S. 24 die Beziehung

$$\begin{aligned}\mathfrak{m} = {} & T_1\sin\Delta\sigma' - T_2\Delta\sigma'\sin\sigma'_1\sin\sigma'_2 + \\ & T_3\sin\sigma'_1\sin\sigma'_2(\sin 2\sigma'_2 - \sin 2\sigma'_1)\end{aligned} \tag{2.69}$$

entwickelt, worin

$$\begin{aligned} T_1 &= b(1 + 2k_1 + 2k_1^2 + \ldots.) \\ T_2 &= b(2k_1 + k_1^2 + \ldots.) \\ T_3 &= b\frac{k_1^2}{2}\end{aligned} \tag{2.70}$$

bedeuten.

Mit A_1 kann schließlich im Dreieck $P_{nK}P_{1K}P_{2K}$ das Azimut A_2 berechnet werden.

2.2.3 *Die Lösung nach Levallois und Dupuy*

Levallois und Dupuy [24] benützen als Parameter das Äquatorazimut A_0 und als Variable die vom Äquator an gezählte Bogenlänge ω (siehe Abb. 9).

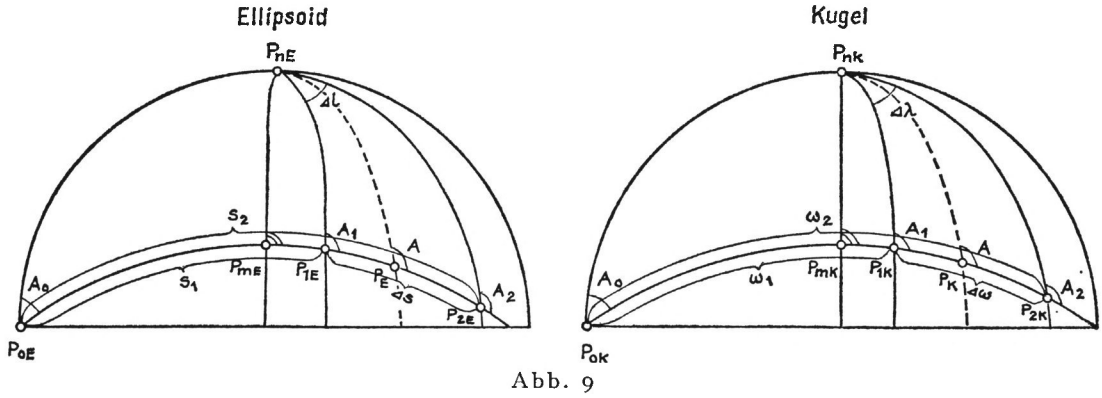

Abb. 9

Aus der Differentialgleichung (2.23) wird durch Einführung von e' anstelle von e und mit Hilfe der wegen $\cos\sigma = \sin\omega$ im sphärischen Dreieck $P_{mK}P_{nK}P_K$ geltenden Beziehung

(2.16) e) $$\sin\beta = \sin\beta_m \sin\omega = \cos A_0 \sin\omega$$

die Gleichung

(2.71) $$\Delta s = b \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 A_0 \sin^2\omega}\, d\omega$$

erhalten. Nach Anwendung der Reihenentwicklung für die Wurzel des Integranden geht (2.71) über in

(2.72)
$$\Delta s = b \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(1 + \frac{1}{2} e'^2 \cos^2 A_0 \sin^2\omega - \frac{1}{8} e'^4 \cos^4 A_0 \sin^4\omega + \frac{1}{16} e'^6 \cos^6 A_0 \sin^6\omega + \ldots\right) d\omega.$$

Die Glieder von (2.72) enthalten Potenzen von $\sin\omega$ und haben unter Verwendung des Parameters

(2.30) $$k = e' \sin\beta_m = e' \cos A_0$$

die Form

(2.73) $$A_{2p} k^{2p} \sin^{2p}\omega.$$

Es treten somit Wallissche Integrale von der Form

(2.74) $$W_{2p} = \int_0^{\omega} \sin^{2p}\omega\, d\omega$$

auf. Ihre Lösung erfolgt mit Hilfe der Rekursionsformel

(2.75) $$W_{2p} = \int_0^{\omega} \sin^{2p}\omega\, d\omega = -\frac{\cos\omega \sin^{2p-1}\omega}{2p} + \frac{2p-1}{2p} \int_0^{\omega} \sin^{2p-2}\omega\, d\omega.$$

Für die ersten vier Glieder ergibt sich

(2.76)
$$\begin{aligned}
W_0 &= \omega \\
W_2 &= \frac{1}{2}(\omega - \sin\omega \cos\omega) \\
W_4 &= \frac{3}{8}(\omega - \sin\omega \cos\omega) - \frac{1}{4}\cos\omega \sin^3\omega \\
W_6 &= \frac{15}{48}(\omega - \sin\omega \cos\omega) - \frac{5}{24}\cos\omega \sin^3\omega - \frac{1}{6}\cos\omega \sin^5\omega.
\end{aligned}$$

Damit lautet die Gleichung für die Bogenlänge

(2.77) $$\Delta s = b\left[\omega + \frac{1}{2} k^2 W_2(\omega) - \frac{1}{8} k^4 W_4(\omega) + \frac{1}{16} k^6 W_6(\omega) - \ldots\right]_{\omega_1}^{\omega_2}.$$

Zur direkten Lösung der 1. Hauptaufgabe wird Gleichung (2.77) von Levallois und Dupuy numerisch umgekehrt. Da diese Umkehrung auf Grund von Tafeldifferenzen erfolgt, kommt sie für die Berechnung in elektronischen Rechenanlagen nicht in Betracht. Der Umkehrungsvorgang wird deshalb nicht weiter verfolgt.

Aus der Grundgleichung (2.24) wird zunächst nach einigen Umformungen

$$\Delta l = \sin A_0 \sqrt{1-e^2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\sqrt{1+k^2 \sin^2 \omega}}{1-\cos^2 A_0 \sin^2 \omega}\, d\omega \tag{2.78}$$

und nach Anwendung der Binomialentwicklung

$$\Delta l = \sin A_0 \sqrt{1-e^2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1+\frac{1}{2}k^2 \sin^2 \omega - \frac{1}{8}k^4 \sin^4 \omega + \frac{1}{16}k^6 \sin^6 \omega - \ldots}{1-\cos^2 A_0 \sin^2 \omega}\, d\omega \tag{2.79}$$

erhalten. Hierbei treten Integrale der Form

$$I_0 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{1-\cos^2 A_0 \sin^2 \omega} \tag{2.80}$$

und

$$I_{2p} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\sin^{2p} \omega\, d\omega}{1-\cos^2 A_0 \sin^2 \omega} \tag{2.81}$$

auf. Die Auswertung des Integrals I_0 lautet

$$I_0 = \frac{\Delta \lambda}{\sin A_0}. \tag{2.82}$$

Die Integrale I lassen sich auf die Wallisschen Integrale W und auf I_0 zurückführen. Gleichung (2.79) erhält damit die Form

(2.83)

$$\Delta l = \Delta \lambda + \sin A_0 [B_0 W_0 + \cos^2 A_0 B_2 W_2 + \cos^4 A_0 B_4 W_4 + \cos^6 A_0 B_6 W_6 + \ldots]_{\omega_1}^{\omega_2},$$

wobei die Koeffizienten B_0, B_2, B_4, B_6 die Bedeutung

$$\begin{aligned}
B_0 &= -\mathfrak{a} \\
B_2 &= \sqrt{1-e^2}\left(\frac{e'^4}{8} - \frac{e'^6}{16} + \frac{5}{128} e'^8 - \ldots\right) = B_4 + \sqrt{1-e^2}\,\frac{e'^4}{8} \\
B_4 &= \sqrt{1-e^2}\left(-\frac{e'^6}{16} + \frac{5}{128} e'^8 - \ldots\right) = B_6 - \sqrt{1-e^2}\,\frac{e'^6}{16} \\
B_6 &= \sqrt{1-e^2}\left(\frac{5}{128} e'^8 + \ldots\right)
\end{aligned} \tag{2.84}$$

haben.

Zur Lösung der 1. Hauptaufgabe wird nach Berechnung der reduzierten Breite β_1 und des Parameters β_m zunächst die Größe ω_1 ermittelt. Die Berechnung der Bogenlänge $\Delta \omega$, die der Entfernung Δs entspricht, ist nur auf dem Wege der allmählichen Annäherung mit Hilfe der Beziehung (2.77) möglich, da die Anwendung einer besonderen Umkehrformel die Benützung von Tafelwerken verlangt. Ist $\Delta \omega$ bekannt, dann ergibt sich mit

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta \omega$$

die Größe β_2 und damit das Azimut A_2. Im sphärischen Dreieck $P_{1K} P_{nK} P_{2K}$ wird nun die Größe $\Delta\lambda$ erhalten und mit (2.83) schließlich der ellipsoidische Längenunterschied Δl.

Zur Lösung der 2. Hauptaufgabe ist ebenfalls eine Iteration erforderlich. Nach Berechnung der reduzierten Breiten β_1 und β_2 wird mit der Näherung Δl anstelle von $\Delta\lambda$ durch Anwendung des sphärischen Kosinussatzes auf Dreieck $P_{1K} P_{nK} P_{2K}$ ein erster Näherungswert für $\Delta\omega$ erhalten. Damit ergeben sich dann Näherungswerte für A_0 und ω_1 nach den Beziehungen (2.19) und (2.16e) sowie für ω_2 aus

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega .$$

Mit Gleichung (2.83) wird nun ein bereits wesentlich genauerer Wert für $\Delta\lambda$ gewonnen, mit dem die Iteration fortgesetzt wird. Sobald sich $\Delta\lambda$ nicht mehr ändert, sind damit auch die Größen $\Delta\omega$, A_0, ω_1 und ω_2 bekannt. Die Azimute A_1 und A_2 ergeben sich aus den sphärischen Dreiecken $P_{mK} P_{nK} P_{1K}$ und $P_{mK} P_{nK} P_{2K}$, die Entfernung Δs wird mit Hilfe der Beziehung (2.77) berechnet.

2.2.4 *Die Lösung von Hubeny*

Hubeny verwendet bei seiner in [16] angegebenen Lösung ebenfalls als Parameter das Äquatorazimut A_0 und als Variable die vom Äquator an gezählte Bogenlänge ω (siehe Abb. 10).

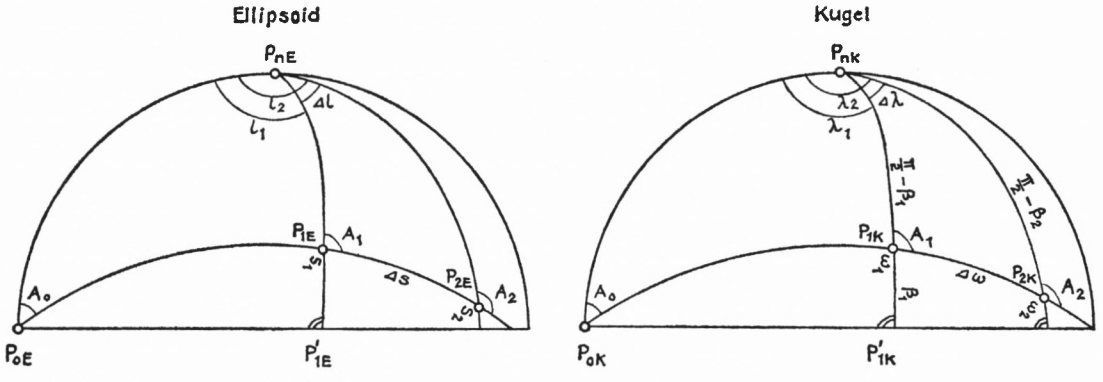

Abb. 10

Er entwickelt zunächst die Differentialgleichung (2.23) nach der Binomialreihe und erhält

(2.85)

$$ds = \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2\beta - \frac{1}{8} e^4 \cos^4\beta - \frac{1}{16} e^6 \cos^6\beta - \frac{5}{128} e^8 \cos^8\beta - \frac{7}{256} e^{10} \cos^{10}\beta - \ldots\right) d\omega .$$

Nach Elimination von β mit Hilfe der Beziehung

(2.16e) $\qquad \sin\beta = \sin\omega \cos A_0 \qquad$ bzw.

(2.86) $\qquad \cos^2\beta = 1 - \sin^2\omega \cos^2 A_0$

und allgemein

$$\cos^{2n}\beta = (1 - \sin^2\omega\ \cos^2 A_0)^n$$

ergibt sich für die Bogenlänge der geodätischen Linie

$$(2.87)\quad s = \int_0^\omega (A_s + B_s \cos^2 A_0 \sin^2\omega + C_s \cos^4 A_0 \sin^4\omega + D_s \cos^6 A_0 \sin^6\omega + \\ + E_s \cos^8 A_0 \sin^8\omega + F_s \cos^{10} A_0 \sin^{10}\omega + \ldots)\, d\omega,$$

worin

$$(2.88)\quad \begin{aligned}
A_s &= a\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{8}e^4 - \tfrac{1}{16}e^6 - \tfrac{5}{128}e^8 - \tfrac{7}{256}e^{10} - \ldots\right) = b \\
B_s &= a\left(\tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{2}{8}e^4 + \tfrac{3}{16}e^6 + \tfrac{20}{128}e^8 + \tfrac{35}{256}e^{10} + \ldots\right) \\
C_s &= a\left(-\tfrac{1}{8}e^4 - \tfrac{3}{16}e^6 - \tfrac{30}{128}e^8 - \tfrac{70}{256}e^{10} - \ldots\right) \\
D_s &= a\left(\tfrac{1}{16}e^6 + \tfrac{20}{128}e^8 + \tfrac{70}{256}e^{10} + \ldots\right) \\
E_s &= a\left(-\tfrac{5}{128}e^8 - \tfrac{35}{256}e^{10} - \ldots\right) \\
F_s &= a\left(+\tfrac{7}{256}e^{10} + \ldots\right)
\end{aligned}$$

für ein bestimmtes Ellipsoid feste Zahlenwerte sind. Da auch A_0 als Parameter der geodätischen Linie als Konstante aufgefaßt werden kann, liegen somit wieder Wallissche Integrale von der Form (2.74) vor, deren Lösung aus der Rekursionsformel (2.75) gegeben ist. Hubeny erhält durch gliedweise Integration

(2.89)

$$s = [A_s]\,\omega + [B_s]\cos\omega\sin\omega + [C_s]\cos\omega\sin^3\omega + [D_s]\cos\omega\sin^5\omega + [E_s]\cos\omega\sin^7\omega,$$

wobei

$$(2.90)\quad \begin{aligned}
[A_s] &= A_s + \tfrac{1}{2}B_s\cos^2 A_0 + \tfrac{3}{8}C_s\cos^4 A_0 + \tfrac{5}{16}D_s\cos^6 A_0 + \tfrac{35}{128}E_s\cos^8 A_0 \\
[B_s] &= -\tfrac{1}{2}B_s\cos^2 A_0 - \tfrac{3}{8}C_s\cos^4 A_0 - \tfrac{5}{16}D_s\cos^6 A_0 - \tfrac{35}{128}E_s\cos^8 A_0 \\
[C_s] &= -\tfrac{1}{4}C_s\cos^4 A_0 - \tfrac{5}{24}D_s\cos^6 A_0 - \tfrac{35}{192}E_s\cos^8 A_0 \\
[D_s] &= -\tfrac{1}{6}D_s\cos^6 A_0 - \tfrac{7}{48}E_s\cos^8 A_0 \\
[E_s] &= -\tfrac{1}{8}E_s\cos^8 A_0
\end{aligned}$$

bedeuten.

In der Differentialgleichung (2.24) entwickelt Hubeny ebenfalls den Klammmerausdruck nach der Binomialreihe und erhält

$$(2.91)\qquad dl = d\lambda + \left(-\tfrac{1}{2}e^2\cos^2\beta - \tfrac{1}{8}e^4\cos^4\beta - \ldots\right) d\lambda.$$

Nach Substitution von $d\lambda$ im zweiten Teil von (2.91) folgt

$$dl = d\lambda + \sin A_0 \left(-\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 \cos^2\beta - \frac{1}{16}e^6 \cos^4\beta - \ldots\right) d\omega \tag{2.92}$$

und nach Elimination von β

(2.93)

$$l = \lambda + \int_0^\omega (A_l \sin A_0 + B_l \sin A_0 \cos^2 A_0 \sin^2\omega + C_l \sin A_0 \cos^4 A_0 \sin^4\omega + \\ + D_l \sin A_0 \cos^6 A_0 \sin^6\omega + E_l \sin A_0 \cos^8 A_0 \sin^8\omega + \ldots) d\omega,$$

wobei

$$\begin{aligned}
A_l &= -\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 - \frac{7}{256}e^{10} - \ldots = \sqrt{1-e^2} - 1 \\
B_l &= \frac{1}{8}e^4 + \frac{2}{16}e^6 + \frac{15}{128}e^8 + \frac{28}{256}e^{10} + \ldots \\
C_l &= -\frac{1}{16}e^6 - \frac{15}{128}e^8 - \frac{42}{256}e^{10} - \ldots \\
D_l &= \frac{5}{128}e^8 + \frac{28}{256}e^{10} + \ldots \\
E_l &= -\frac{7}{256}e^{10} - \ldots
\end{aligned} \tag{2.94}$$

ist.

Die in (2.93) wiederum auftretenden Wallisschen Integrale werden durch gliedweise Integration unter Verwendung der Rekursionsformel (2.75) gelöst. Hubeny erhält

$$l = \lambda + [A_l]\omega + [B_l] \cos\omega \sin\omega + [C_l] \cos\omega \sin^3\omega + [D_l] \cos\omega \sin^5\omega \tag{2.95}$$

mit

$$\begin{aligned}
[A_l] &= \left(A_l + \frac{1}{2}B_l \cos^2 A_0 + \frac{3}{8}C_l \cos^4 A_0 + \frac{5}{16}D_l \cos^6 A_0\right) \sin A_0 \\
[B_l] &= \left(-\frac{1}{2}B_l - \frac{3}{8}C_l \cos^2 A_0 - \frac{5}{16}D_l \cos^4 A_0\right) \sin A_0 \cos^2 A_0 \\
[C_l] &= \left(-\frac{1}{4}C_l - \frac{5}{24}D_l \cos^2 A_0\right) \sin A_0 \cos^4 A_0 \\
[D_l] &= \left(-\frac{1}{6}D_l\right) \sin A_0 \cos^6 A_0.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Mit den Beziehungen (2.89) und (2.95) sind die Zusammenhänge zwischen ω und s bzw. λ und l hergestellt.

Zur Lösung der 1. Hauptaufgabe werden zunächst die reduzierte Breite β_1 und damit im sphärischen Hilfsdreieck $P_{0K} P_{1K} P'_{1K}$ in Abb. 10 der Parameter A_0 und die Größen λ_1 und ω_1 berechnet. Für A_0 werden die Koeffizienten $[A_s]$, $[B_s]$, $[C_s]$, $[D_s]$ und $[A_l]$, $[B_l]$, $[C_l]$, $[D_l]$ nach (2.90) bzw. (2.96) ermittelt. Dann ergibt sich mit ω_1 aus (2.89) die sphäroidische Bogenlänge s_1 und mit

$$s_2 = s_1 + \Delta s$$

die Bogenlänge s_2. Den zugeordneten Großkreisbogen ω_2 findet Hubeny auf indirektem Wege aus (2.89). Ein erster Näherungswert für ω_2 wird mit Hilfe der auf das erste Glied

abgekürzten Formel (2.89)

$$\omega_{(2)} = \frac{s_2}{[A_s]}$$

erhalten und damit eine weitaus bessere Näherung, wenn zusätzlich auch der zweite Term von (2.89) verwendet wird, aus

$$\omega_{2,0} = \frac{1}{[A_s]} \left(s_2 - [B_s] \cos \omega_{(2)} \sin \omega_{(2)}\right). \tag{2.97}$$

Um den endgültigen Wert ω_2 zu erhalten, gibt Hubeny zwei Wege an. Der erste besteht darin, für zwei den Wert $\omega_{2,0}$ einschließende runde Näherungswerte $\omega_{2,1}$, $\omega_{2,2}$ die Gleichung (2.89) durchzurechnen, um mit Hilfe der erhaltenen ellipsoidischen Bogenlängen $s_{1,2}$ und $s_{2,2}$ die Größe ω_2 durch lineare Interpolation aus

$$\omega_2 = \omega_{2,1} + \frac{\omega_{2,2} - \omega_{2,1}}{s_{2,2} - s_{2,1}} (s_2 - s_{2,1}) \tag{2.98}$$

zu ermitteln. Sollte der mit (2.89) errechnete Istwert s_2' noch nicht genügend genau mit dem Sollbetrag von s_2 übereinstimmen, so wäre ω_2 um den Betrag

$$d\omega = \frac{s_2 - s_2'}{[A_s]} \tag{2.99}$$

zu verbessern.

Bei der zweiten Möglichkeit wird an den Wert $\omega_{2,0}$ ein kleiner Zuschlag angebracht, der sich aus

$$d\omega_2 = \frac{s_2 - s_{2,0}}{[A_s] + [B_s] \cos 2\omega_{2,0}} \tag{2.100}$$

ergibt, worin $s_{2,0}$ der mit $\omega_{2,0}$ aus (2.89) hervorgegangene Wert für s_2 ist. Wird nach nochmaliger Durchrechnung von (2.89) mit

$$\omega_2 = \omega_{2,0} + d\omega_2 \tag{2.101}$$

der vorgegebene Wert für s_2 nicht genügend genau erhalten, so muß der Vorgang wiederholt werden.

Mit dem endgültigen Wert für ω_2 lassen sich in den Besselschen Hilfsdreiecken die Stücke β_2, λ_2 und A_2 berechnen. Mit (2.95) wird schließlich der ellipsoidische Längenunterschied erhalten.

Das eigentliche Problem bei der Lösung der 2. Hauptaufgabe bildet die Bestimmung des Parameters A_0. Hubeny erhält einen ersten Näherungswert für A_0 mit Hilfe der Gaußschen Gleichungen (2.20), indem er Δl anstelle von $\Delta\lambda$ verwendet, und berechnet damit in den Besselschen Hilfsdreiecken Näherungswerte für ω_1 und ω_2. Mit der auf den Längenunterschied Δl umgestellten und auf das erste Glied reduzierten Gleichung (2.95)

$$\Delta\lambda = \Delta l - [A_l] (\omega_2 - \omega_1) \tag{2.102}$$

erhält er einen Näherungswert $\Delta\lambda$, womit sich aus den Gaußschen Gleichungen eine verbesserte Näherung für A_0 ergibt. Für die weitere Lösung gibt Hubeny drei Wege an:

1. Durch Fortsetzung der allmählichen Annäherung unter jeweiliger Erweiterung der auf Δl umgestellten Gleichung (2.95) um einen weiteren Term wird schließlich $\Delta\lambda$ und damit A_0 erhalten, womit die fehlenden Stücke dann leicht berechnet werden können.

2. Aus einem Paar von Näherungswerten $A_{0,1}$, $A_{0,2}$ für den Parameter A_0 können mit Hilfe von (2.89) und (2.95) ein Paar von ellipsoidischen Längenunterschieden Δl_1, Δl_2 und Strecken Δs_1, Δs_2 abgeleitet und die Sollwerte durch Interpolation zwischen diesen Werten aus

$$A_0 = A_{0,1} + \frac{\Delta l - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1}(A_{0,2} - A_{0,1}) \quad \text{und} \tag{2.103}$$

$$\Delta s = \Delta s_1 + \frac{\Delta l - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1}(\Delta s_2 - \Delta s_1) \tag{2.104}$$

ermittelt werden. Die Azimute A_1 und A_2 ergeben sich dann aus den sphärischen Hilfsdreiecken.

3. Ausgehend von einem Näherungswert für A_0 wird die so definierte geodätische Linie so lange um P_0 gedreht, bis der Längenunterschied zwischen ihren Schnittpunkten mit den vorgegebenen Parallelkreisen B_1 und B_2 gleich ist dem Sollwert von Δl. Zur Berechnung der differentiellen Zuschläge dA_0 und ds gibt Hubeny die Beziehungen

$$dA_0 = \frac{\cos A_{0,0}}{(\operatorname{tg}\omega_{2,0} - \operatorname{tg}\omega_{1,0})\left(1 - \frac{1}{2}e^2 \sin^2 A_{0,0}\right) - (\omega_{2,0} - \omega_{2,1})\frac{1}{2}e^2 \cos^2 A_{0,0}}\, dl \tag{2.105}$$

und

$$ds = a \cdot \sin A_{0,0}\, dl \tag{2.106}$$

an. Dabei sind $\omega_{1,0}$, $\omega_{2,0}$ die der Näherung $A_{0,0}$ entsprechenden Bogenlängen. Mit $\omega_{1,0}$, $\omega_{2,0}$ und einem entsprechenden Wert $\Delta\lambda_0$ werden mit Hilfe von (2.95) und (2.89) die vorläufigen Werte Δl_0 und Δs_0 berechnet. Damit ergibt sich dl zu

$$dl = \Delta l - \Delta l_0, \tag{2.107}$$

so daß nun aus (2.105) und (2.106) die Zuschläge dA_0 bzw. ds hergeleitet werden können. Das Äquatorazimut ist somit

$$A_0 = A_{0,0} + dA_0 \tag{2.108}$$

und die Entfernung

$$\Delta s = \Delta s_0 + ds. \tag{2.109}$$

Die Azimute A_1 und A_2 werden schließlich aus den sphärischen Hilfsdreiecken erhalten.

2.2.5 *Die Lösungen von Sodano*

Sodano gelang im Jahre 1950 [39] erstmals eine nicht iterative Lösung der 2. Hauptaufgabe. Das Verfahren beruht auf einer Potenzreihenentwicklung der Größe $x = \Delta\lambda - \Delta l$, wobei Sodano von der Helmertschen Gleichung (2.61) für den Längenunterschied ausgeht, die unbekannten Größen β_m, $\Delta\sigma$, σ_1 und σ_2 durch die gegebenen Größen β_1, β_2, Δl und durch Potenzen von x ausdrückt und daraus schließlich einen sehr genauen 23-gliedrigen Ausdruck für x ableitet, der zwar eine direkte Berechnung von $\Delta\lambda$ ermöglicht, dessen rechnerische Auswertung bisher allerdings erheblichen Aufwand erforderte.

Im Bestreben nach einer Vereinfachung bringt Sodano in [40] sein Verfahren in eine wesentlich übersichtlichere Form. Er berechnet zunächst die Größe $\Delta\sigma'$ durch Anwendung des sphärischen Kosinussatzes auf gegebene Größen aus

(2.110) $$\cos \Delta\sigma' = a' + b' \cdot \cos \Delta l$$

mit

(2.111) $$a' = \sin \beta_1 \sin \beta_2$$

und

(2.112) $$b' = \cos \beta_1 \cos \beta_2$$

oder aus

(2.113) $$\sin \Delta\sigma' = \sqrt{(\sin \Delta l \cdot \cos \beta_2)^2 + (\sin \beta_2 \cos \beta_1 - \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \Delta l)^2},$$

wobei also $\Delta\sigma'$ den einem Längenunterschied Δl anstelle von $\Delta\lambda$ entsprechenden Großkreisbogen darstellt. Weiter werden die Abkürzungen

(2.114) $$c' = \frac{b' \sin \Delta l}{\sin \Delta\sigma'}$$

und

(2.115) $$m' = 1 - c'^2$$

verwendet.

Ohne auf die mathematischen Zusammenhänge einzugehen, gibt Sodano für die direkte Berechnung von Δs die Beziehung

(2.116)
$$\begin{aligned}
\frac{\Delta s}{b} = \; & [(1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2)\, \Delta\sigma'] \\
& + a' \left[\left(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2\right) \sin \Delta\sigma' - \frac{\mathfrak{a}^2}{2} \Delta\sigma'^2 \csc \Delta\sigma' \right] \\
& + m' \left[-\left(\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2}{2}\right) \Delta\sigma' - \left(\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2}{2}\right) \sin \Delta\sigma' \cos \Delta\sigma' + \frac{\mathfrak{a}^2}{2} \Delta\sigma'^2 \operatorname{ctg} \Delta\sigma' \right] \\
& + a'^2 \left[-\frac{\mathfrak{a}^2}{2} \sin \Delta\sigma' \cos \Delta\sigma' \right] \\
& + m'^2 \left[\frac{\mathfrak{a}^2}{16} \Delta\sigma' + \frac{\mathfrak{a}^2}{16} \sin \Delta\sigma' \cos \Delta\sigma' - \frac{\mathfrak{a}^2}{2} \Delta\sigma'^2 \operatorname{ctg} \Delta\sigma' - \frac{\mathfrak{a}^2}{8} \sin \Delta\sigma' \cos^3 \Delta\sigma' \right] \\
& + a' m' \left[\frac{\mathfrak{a}^2}{2} \Delta\sigma'^2 \csc \Delta\sigma' + \frac{\mathfrak{a}^2}{2} \sin \Delta\sigma' \cos^2 \Delta\sigma' \right]
\end{aligned}$$

und zur direkten Berechnung von $\Delta\lambda$ den Ausdruck

(2.117)
$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\lambda - \Delta l}{c'} = \; & \left[\left(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2\right) \Delta\sigma' \right] \\
& + a' \left[-\frac{\mathfrak{a}^2}{2} \sin \Delta\sigma' - \mathfrak{a}^2 \Delta\sigma'^2 \csc \Delta\sigma' \right] \\
& + m' \left[-\frac{5}{4} \mathfrak{a}^2 \Delta\sigma' + \frac{\mathfrak{a}^2}{4} \sin \Delta\sigma' \cos \Delta\sigma' + \mathfrak{a}^2 \Delta\sigma' \operatorname{ctg} \Delta\sigma' \right]
\end{aligned}$$

an. Damit sind die gesuchten Größen Δs und $\Delta\lambda$ durch gegebene Stücke ausgedrückt. Die Azimute berechnet Sodano aus

(2.118)
$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} A_1 &= \frac{\sin \beta_2 \cos \beta_1 - \cos \Delta\lambda \sin \beta_1 \cos \beta_2}{\sin \Delta\lambda \cos \beta_2} \\
\operatorname{ctg} A_2 &= \frac{\sin \beta_2 \cos \beta_1 \cos \Delta\lambda - \sin \beta_1 \cos \beta_2}{\sin \Delta\lambda \cos \beta_1} .
\end{aligned}$$

Die Beziehungen (2.116) und (2.117) enthalten innerhalb der Klammern nur Funktionen der einzigen Variablen $\Delta\sigma'$ und Potenzen der Abplattung $\mathfrak{a}$, während die äußeren Koeffizienten durch die Hilfsgrößen a' und m' gebildet werden. Beide Formeln reichen aber nur bis zu den Gliedern mit $\mathfrak{a}^2$.

Für genauere Berechnungen gibt Sodano zur Ermittlung von $\Delta\lambda$ den wesentlich umfangreicheren Ausdruck

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta\lambda-\Delta l}{c'} = \quad & (\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2+\mathfrak{a}^3)\,\Delta\sigma' \\
& + a' \left[-\left(\frac{\mathfrak{a}^2}{2}+\mathfrak{a}^3\right)\sin\Delta\sigma' - (\mathfrak{a}^2+4\,\mathfrak{a}^3)\Delta\sigma'^2\csc\Delta\sigma' + \frac{3}{2}\,\mathfrak{a}^2\Delta\sigma'^3\csc\Delta\sigma'\operatorname{ctg}\Delta\sigma'\right] \\
& + m' \left[-\left(\frac{5}{4}\,\mathfrak{a}^2+3\,\mathfrak{a}^3\right)\Delta\sigma' + \left(\frac{\mathfrak{a}^2}{4}+\frac{\mathfrak{a}^3}{2}\right)\sin\Delta\sigma'\cos\Delta\sigma'\right. \\
& \qquad \left. + (\mathfrak{a}^2+4\,\mathfrak{a}^3)\Delta\sigma'^2\operatorname{ctg}\Delta\sigma' - \frac{\mathfrak{a}^3}{2}\Delta\sigma'^3\csc^2\Delta\sigma' - \mathfrak{a}^3\Delta\sigma'^3\operatorname{ctg}^2\Delta\sigma'\right] \\
& + a'^2 \left[\mathfrak{a}^3\Delta\sigma' + \frac{\mathfrak{a}^3}{2}\sin\Delta\sigma'\cos\Delta\sigma' + \mathfrak{a}^3\Delta\sigma'^3\csc^2\Delta\sigma'\right] \\
& + m'^2 \left[\frac{31}{16}\,\mathfrak{a}^3\Delta\sigma' - \frac{9}{16}\,\mathfrak{a}^3\sin\Delta\sigma'\cos\Delta\sigma' + \frac{\mathfrak{a}^3}{2}\Delta\sigma'\cos^2\Delta\sigma'\right. \\
& \qquad - \frac{9}{2}\,\mathfrak{a}^3\Delta\sigma'^2\operatorname{ctg}\Delta\sigma' + \frac{\mathfrak{a}^3}{8}\sin\Delta\sigma'\cos^3\Delta\sigma' \\
& \qquad \left. + \frac{\mathfrak{a}^3}{2}\Delta\sigma'^3\csc^2\Delta\sigma' + 2\,\mathfrak{a}^3\Delta\sigma'^3\operatorname{ctg}^2\Delta\sigma'\right] \\
& + a'm' \left[\mathfrak{a}^3\sin\Delta\sigma' - \frac{3}{2}\,\mathfrak{a}^3\Delta\sigma'\cos\Delta\sigma' + \frac{9}{2}\,\mathfrak{a}^3\Delta\sigma'^2\csc\Delta\sigma'\right. \\
& \qquad \left. - \frac{\mathfrak{a}^3}{2}\sin\Delta\sigma'\cos^2\Delta\sigma' - \frac{7}{2}\,\mathfrak{a}^3\Delta\sigma'^3\csc\Delta\sigma'\operatorname{ctg}\Delta\sigma'\right]
\end{aligned}
\tag{2.119}
$$

an. Die Länge Δs der geodätischen Linie wird dann nach Berechnung von $\Delta\sigma$ mit Hilfe des sphärischen Kosinussatzes aus

$$\cos\Delta\sigma = a' + b'\cos\Delta\lambda \tag{2.120}$$

und von β_m aus

$$\cos\beta_m = \frac{b'\sin\Delta\lambda}{\sin\Delta\sigma} \tag{2.121}$$

mit Hilfe der Beziehung

$$
\begin{aligned}
\Delta s = b\,(A_0\,\Delta\sigma + B_0\sin\Delta\sigma\cos 2\sigma - C_0\sin 2\,\Delta\sigma\cos 4\sigma \\
+ D_0\sin 3\Delta\sigma\cos 6\sigma)
\end{aligned}
\tag{2.122}
$$

erhalten, wobei σ die Bedeutung

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)$$

hat ($\cos 2\sigma$ ergibt sich direkt aus (3.80)) und

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 1 + \frac{e'^2}{4}\sin^2\beta_m - \frac{3}{64}e'^4\sin^4\beta_m + \frac{5}{256}e'^6\sin^6\beta_m \\
B_0 &= \frac{e'^2}{4}\sin^2\beta_m - \frac{e'^4}{16}\sin^4\beta_m + \frac{15}{512}e'^6\sin^6\beta_m \\
C_0 &= \frac{e'^4}{128}\sin^4\beta_m - \frac{3}{512}e'^6\sin^6\beta_m \qquad (2.123)\\
D_0 &= \frac{e'^6}{1536}\sin^6\beta_m
\end{aligned}
$$

ist.

Auch für eine nicht iterative Lösung der 1. Hauptaufgabe gibt Sodano in [40] Rechenformeln an, wobei er den Großkreisbogen $\Delta\sigma$ und den Längenunterschied Δl aus Beziehungen berechnet, die den Ausdrücken (2.116) und (2.117) für Δs bzw. $\Delta\lambda$ bei der 2. Hauptaufgabe entsprechen, jedoch anstelle der „Grundgrößen" $\Delta\sigma'$, a', m' die Größen $\Delta\sigma_s$, a_1 und m_1 enthalten.

Mit

$$\cos\beta_m = \cos\beta_1 \sin A_1 \qquad (2.124)$$

und

$$g = \cos\beta_1 \cos A_1 \qquad (2.125)$$

werden zunächst

$$\Delta\sigma_s = \frac{\Delta s}{b}, \qquad (2.126)$$

$$m_1 = \left(1 + \frac{e'^2}{2}\sin^2\beta_1\right)\left(1 - \cos^2\beta_m\right) \qquad (2.127)$$

und

$$a_1 = \left(1 + \frac{e'^2}{2}\sin^2\beta_1\right)\left(\sin^2\beta_1\cos\Delta\sigma_s + g\sin\beta_1\sin\Delta\sigma_s\right) \qquad (2.128)$$

erhalten und damit der Großkreisbogen $\Delta\sigma$ aus

$$
\begin{aligned}
\Delta\sigma = \quad & \Delta\sigma_s \qquad (2.129)\\
& + a_1 \left(-\frac{e'^2}{2}\sin\Delta\sigma_s\right)\\
& + m_1 \left(-\frac{e'^2}{4}\Delta\sigma_s + \frac{e'^2}{4}\sin\Delta\sigma_s\cos\Delta\sigma_s\right)\\
& + a_1^2 \left(\frac{5}{8}e'^4\sin\Delta\sigma_s\cos\Delta\sigma_s\right)\\
& + m_1^2 \left(\frac{11}{64}e'^4\Delta\sigma_s - \frac{13}{64}e'^4\sin\Delta\sigma_s\cos\Delta\sigma_s - \frac{e'^4}{8}\Delta\sigma_s\cos^2\Delta\sigma_s + \frac{5}{32}e'^4\sin\Delta\sigma_s\cos^3\Delta\sigma_s\right)\\
& + a_1 m_1\left(\frac{3}{8}e'^4\sin\Delta\sigma_s + \frac{e'^4}{4}\Delta\sigma_s\cos\Delta\sigma_s - \frac{5}{8}e'^4\sin\Delta\sigma_s\cos^2\Delta\sigma_s\right).
\end{aligned}
$$

Die Größen β_2, A_2 und $\Delta\lambda$ ergeben sich aus dem Besselschen Hilfsdreieck $P_{nK}P_{1K}P_{2K}$ (Abb. 4) mit den Formeln

$$\sin\beta_2 = \sin\beta_1\cos\Delta\sigma + g\cdot\sin\Delta\sigma \qquad (2.130)$$

oder

$$\cos\beta_2 = \sqrt{\cos^2\beta_m + (g\cdot\cos\Delta\sigma - \sin\beta_1\sin\Delta\sigma)^2}, \tag{2.131}$$

$$\operatorname{ctg} A_2 = \frac{g\cdot\cos\Delta\sigma - \sin\beta_1\sin\Delta\sigma}{\cos\beta_m}, \tag{2.132}$$

$$\operatorname{ctg}\Delta\lambda = \frac{\cos\beta_1\cos\Delta\sigma - \sin\beta_1\sin\Delta\sigma\cos A_1}{\sin\Delta\sigma\sin A_1}. \tag{2.133}$$

Den Zusammenhang zwischen $\Delta\lambda$ und Δl stellt Sodano schließlich durch die Beziehung

$$\begin{aligned}\frac{\Delta l - \Delta\lambda}{\cos\beta_m} &= -\mathfrak{a}\,\Delta\sigma_s \\ &+ a_1\left(\frac{3}{2}\,\mathfrak{a}^2\sin\Delta\sigma_s\right) \\ &+ m_1\left(\frac{3}{4}\,\mathfrak{a}^2\Delta\sigma_s - \frac{3}{4}\,\mathfrak{a}^2\sin\Delta\sigma_s\cos\Delta\sigma\right)\end{aligned} \tag{2.134}$$

her.

Die Ausdrücke (2.129) und (2.134) enthalten jedoch auch hier nur die Glieder mit $\mathfrak{a}^2$ bzw. e'^4.

3. UMSTELLUNG DER LÖSUNGEN FÜR ELEKTRONISCHE RECHENANLAGEN UND ENTWICKLUNG VON RECHENPROGRAMMEN

3.1 Allgemeines

Die oben beschriebenen Verfahren sind im allgemeinen nicht unmittelbar zur Lösung auf programmgesteuerten Rechenanlagen geeignet. Es sind vielmehr bei den einzelnen Verfahren eine Reihe von Abänderungen und Ergänzungen erforderlich, die nicht nur dadurch bedingt sind, daß sich die Lösungen in der Regel auf die Verwendung von Tafelwerken und teilweise auch von graphischen Hilfsmitteln stützen, sondern vor allem deshalb notwendig werden, weil die Automatenrechnung an sich wesentlich detailliertere Rechenvorschriften erfordert.

Dies trifft in erster Linie für die Kriterien zur Quadranten- und Vorzeichenbestimmung zu. Hier muß dem Automaten in eindeutigen Anweisungen, die sämtliche möglichen Fälle berücksichtigen, angegeben werden, welcher Quadrant für die betreffende Größe gültig ist bzw. mit welchen Vorzeichen diese zu versehen ist. Bei der herkömmlichen Berechnungsweise kommt diesen Kriterien nicht dieselbe entscheidende Bedeutung zu; denn in vielen Fällen kann der Rechner auf Grund einfacher Überlegungen, teilweise unter Verwendung entsprechender graphischer Hilfsmittel, die Quadranten- bzw. Vorzeichenfrage ohne weiteres klären. Nur für schwierige Fälle sind besondere Kriterien, und zwar in der Regel für jedes Verfahren gesondert, herzuleiten. Bisher wurden solche Kriterien allerdings nur von Bodenmüller in [6], [7] für das Helmertsche Verfahren, wobei für die 2. Hauptaufgabe jedoch graphische Hilfsmittel verwendet werden, sowie von Sodano in [40] angegeben.

Bei der Automatenrechnung sind dagegen infolge der Vieldeutigkeit der Arcusfunktionen Quadranten- und Vorzeichenkriterien in allen den Fällen notwendig, wo der Quadrant bzw. das Vorzeichen nicht bereits durch das betreffende Arcus-Programm geregelt

ist; ihre Herleitung ist somit eine der wichtigsten Voraussetzungen für die Durchrechnung obiger Lösungsverfahren mit elektronischen Rechenautomaten. Wesentlich ist dabei, daß diese Kriterien möglichst einfach und übersichtlich sind. Als zweckmäßig erweist sich die unmittelbare Verwendung von Winkelfunktionen bzw. deren Vorzeichen, wobei oft ein bereits an früherer Stelle im Programm berechneter Wert verwendet werden kann, so daß nur in wenigen Fällen die Berechnung von Funktionswerten lediglich zum Zwecke der Quadrantenbestimmung erforderlich ist.

Da die Verwendung von Tafelwerken und graphischen Hilfsmitteln einen vollautomatischen Programmablauf nicht zulassen würde, kommt ihre Anwendung für die Lösung der vorliegenden Aufgaben mit elektronischen Rechenautomaten nicht in Betracht. Dies erfordert aber eine Abänderung der Verfahren in der Weise, daß der Automat nun sämtliche ursprünglich aus diesen Tafeln und graphischen Darstellungen zu entnehmenden Werte selbst berechnen muß.

Die vollautomatische Lösung setzt auch voraus, daß der Rechenautomat die während des Rechenprozesses anfallenden Entscheidungen über den weiteren Lösungsablauf selbst zu treffen vermag. Dies ist insbesondere bei den indirekten Lösungen von Bedeutung, wo der Automat zu entscheiden hat, wann die Iteration abgebrochen werden kann. Auch hier sind die Verfahren durch Angabe entsprechender Kriterien zu ergänzen.

Da die Rechenprogramme möglichst genaue Ergebnisse gewährleisten sollen und die rechentechnischen Voraussetzungen hierfür infolge Ausführung der arithmetischen Operationen mit doppelter Zahlenlänge und Verwendung sehr genauer Unterprogramme für die Winkel- und Arcusfunktionen ohnehin gegeben sind, werden für die zu erstellenden Programme die Grundgleichungen der einzelnen Verfahren stets in der in Kapitel 2 angegebenen ausführlichen Form, d. h. mit sämtlichen dort enthaltenen Reihengliedern verwendet; denn die Genauigkeit der einzelnen Verfahren bzw. Rechenprogramme hängt im wesentlichen von der Genauigkeit dieser Grundgleichungen ab, die die Zusammenhänge zwischen den sphärischen und den sphäroidischen Stücken herstellen.

Zu prüfen ist in diesem Zusammenhang auch, ob für die Auflösung der sphärischen Hilfsdreiecke ein dynamisches Formelsystem, das eine Verwendung der trigonometrischen Funktionen an ihren unempfindlichen Stellen nach Möglichkeit vermeidet, oder ein starres System von Gleichungen zu bevorzugen ist. Ein dynamisches Formelsystem, wie es Schrader in [34] vorschlägt, würde zwar auch hier zu einem Optimum an Genauigkeit führen. Allerdings hätte es wesentlich umfangreichere und zugleich unübersichtlichere Rechenprogramme zur Folge, die nicht nur größeren Programmierungsaufwand, sondern auch erhöhten Speicherbedarf erfordern würden. Da die in Teil A erstellten Unterprogramme ohnehin eine wesentlich höhere als die verlangte Genauigkeit für Winkel- und Bogenfunktionen garantieren, kann hier auf ein dynamisches Formelsystem verzichtet werden, ohne daß ein unzulässiger Genauigkeitsabfall zu befürchten wäre. Zweckmäßig ist allerdings auch hier eine geeignete Reihenfolge der Berechnungen in der Weise, daß die gesuchten Größen möglichst aus den gegebenen allein berechnet werden, um die Fortpflanzung von Rechenungenauigkeiten zu vermeiden.

Außerdem ist eine Abfassung der Rechenprogramme in der Weise anzustreben, daß sie nicht nur für ein bestimmtes, sondern für jedes beliebige Rotationsellipsoid verwendet werden können. Dies ist am einfachsten dadurch zu erreichen, daß die zur Lösung erforderlichen geometrischen Konstanten des Rotationsellipsoides jeweils zu Beginn der Berechnung zusammen mit den Ausgangsdaten dem Automaten eingegeben werden.

Diese einleitenden Arbeitsgänge werden zweckmäßig in einem eigenen Programmabschnitt, einem sog. Vorprogramm, zusammengefaßt. Da die dabei auszuführenden Schritte

bei jedem der oben angegebenen Lösungsverfahren praktisch die gleichen sind, genügt eine einmalige Programmierung; das gleiche Vorprogramm kann dann sämtlichen zu entwickelnden Rechenprogrammen vorangestellt werden, was im vorliegenden Fall gleichzeitig eine erhebliche Einsparung an Programmierungsarbeit bedeutet. Da jedoch diese einleitenden Arbeitsgänge bei der 1. und 2. Hauptaufgabe jeweils verschieden sind, hat die Erstellung von zwei gesonderten Vorprogrammen zu erfolgen.

In den folgenden Abschnitten werden nun zunächst diese Vorprogramme entwickelt und erst anschließend nach entsprechender Aufbereitung der Lösungsverfahren die eigentlichen Rechenprogramme hergestellt.

3.2 Vorprogramme

Bei beiden Hauptaufgaben müssen zunächst die zur Lösung erforderlichen geometrischen Konstanten des Rotationsellipsoides eingelesen werden. Da jedoch die Meridianellipse durch zwei Parameter vollständig definiert ist, genügt die Angabe von nur zwei Konstanten. Dazu eignen sich die allgemein zur Definition eines Rotationsellipsoides benützten Größen, die große Halbachse a und die Abplattung $\mathfrak{a}$. Die übrigen erforderlichen Konstanten b, e^2 und e'^2 leiten sich daraus direkt nach folgenden Beziehungen ab:

$$b = a\,(1 - \mathfrak{a}), \tag{3.1}$$

$$e^2 = 2\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}(1 - \mathfrak{a}), \tag{3.2}$$

$$e'^2 = \frac{2\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2}{(1-\mathfrak{a})^2} = \frac{e^2}{(1-\mathfrak{a})^2}\,. \tag{3.3}$$

Die Größen a und $\mathfrak{a}$ sind zumindest bei den neueren Rotationsellipsoiden Zahlenwerte mit verhältnismäßig wenig Ziffern; sie können somit dem Rechenautomaten praktisch mit voller Genauigkeit eingegeben werden. Damit stehen auch die Werte b, e^2 und e'^2 für den weiteren Rechenablauf mit hoher Genauigkeit zur Verfügung.

Die Vorprogramme werden außerdem so abgefaßt, daß zur Berechnung mehrerer Aufgaben auf demselben Ellipsoid die Eingabe von a und $\mathfrak{a}$ und damit die Bestimmung von b, e^2 und e'^2 nur einmal zu erfolgen braucht.

3.2.1 *Vorprogramm für die 1. Hauptaufgabe (Vorprogramm I)*

Das Vorprogramm für die 1. Hauptaufgabe hat somit folgende Einzelschritte auszuführen:

1. Einlesen, Speichern und Drucken der Ellipsoidparameter a und $\mathfrak{a}$; aus programmierungstechnischen Gründen wird nicht der Wert $\mathfrak{a}$ selbst, sondern der reziproke Wert $1/\mathfrak{a}$ eingelesen, also z. B. anstatt 1:297 nur der Wert 297.
2. Berechnung der weiteren im Hauptprogramm benötigten Konstanten b, e^2, e'^2 vermittels der Beziehungen (3.1), (3.2), (3.3).
3. Einlesen und Drucken der geographischen Koordinaten B_1, L_1 und des Azimutes A_1. Diese Werte werden jeweils mit dem Unterprogramm „Umw. Altgrad – Bogenmaß“

sofort ins Bogenmaß umgerechnet und gespeichert. Der Einlese- und Umwandlungsvorgang wird zyklisch programmiert.

4. Einlesen, Drucken und Speichern der Entfernung Δs.

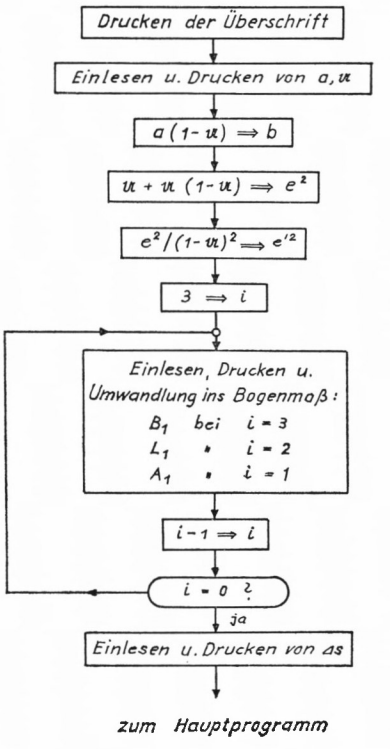

Abb. 11: Flußdiagramm zum Vorprogramm I

Die Zahlenwerte für a, α, B_1, L_1, A_1, Δs werden in Verbindung mit einem erläuternden Klartext ausgedruckt, so daß zusammen mit den späteren Ergebnissen ein übersichtliches Protokoll entsteht.

3.2.2 *Vorprogramm für die 2. Hauptaufgabe (Vorprogramm II)*

Das Vorprogramm für die 2. Hauptaufgabe ist wesentlich umfangreicher, da hier einige Besonderheiten auftreten.

Der erste Teil, der etwa dem Vorprogramm I entspricht, besorgt wieder das Einlesen bzw. Berechnen der Ellipsoidkonstanten sowie das Einlesen und Speichern der Ausgangsdaten. Im zweiten Teil ist zunächst zu berücksichtigen, daß es auf dem Ellipsoid im allgemeinen zwei Verbindungsmöglichkeiten zweier Punkte durch geodätische Linien gibt, von denen jedoch nur eine zugleich die absolut kürzeste Verbindungslinie ist. Dem menschlichen Rechner bereitet das Aufsuchen dieser kürzesten Verbindungslinie zwar keine besonderen Schwierigkeiten; bei der Automatenrechnung sind hierfür jedoch eindeutige Kriterien erforderlich.

Für die kürzeste Verbindungslinie bestehen die zwei notwendigen Bedingungen

$$0 \leqq |\Delta l| \leqq \pi \quad \text{und} \tag{3.4}$$

$$\Delta \sigma \leqq \pi . \tag{3.5}$$

Von den beiden möglichen Längenunterschieden

$$\Delta L_1 = L_2 - L_1 \quad \text{und}$$

$$\Delta L_2 = L_1 - L_2$$

genügt stets einer der Bedingung (3.4). Der Absolutwert $|\Delta l_{min}|$ dieses der kürzesten Verbindungslinie entsprechenden Längenunterschiedes ist vom Rechenautomaten zunächst zu ermitteln. Hierfür müssen die Werte L_1, L_2 im Zählsystem $0 \leqq L \leqq 2\pi$ vorliegen. Negative Werte L sind zuvor in dieses Zählsystem überzuführen.

Da im Hauptprogramm nicht nur $|\Delta l_{min}|$ sondern auch Δl (mit dem richtigen Vorzeichen) benötigt wird, hat zugleich mit der Ermittlung von $|\Delta l_{min}|$ eine Vorzeichenbestimmung zu erfolgen. Hierfür wird zweckmäßig ein Faktor $F_l = +1$ bzw. $F_l = -1$ umgespeichert, mit dem dann $|\Delta l_{min}|$ zu multiplizieren ist. Die Ermittlung von $|\Delta l_{min}|$ bzw. Δl kann entsprechend nachstehender schematischer Darstellung erfolgen:

1. Schritt	$L_2 - L_1 \Rightarrow \Delta L'$			
2. Schritt	$\Delta L' \geqq 0\ (L_2 \geqq L_1)$		$\Delta L' < 0\ (L_2 < L_1)$	
	$L_2 - L_1 \Rightarrow \Delta L$		$L_1 - L_2 \Rightarrow \Delta L$	
3. Schritt	$\Delta L \leqq \pi$	$\Delta L > \pi$	$\Delta L > \pi$	$\Delta L \leqq \pi$
	$\Delta L \Rightarrow \lvert\Delta l_{min}\rvert$	$2\pi - \Delta L \Rightarrow \lvert\Delta l_{min}\rvert$	$2\pi - \Delta L \Rightarrow \lvert\Delta l_{min}\rvert$	$\Delta L \Rightarrow \lvert\Delta l_{min}\rvert$
4. Schritt	$\Delta l \geqq 0$	$\Delta l < 0$	$\Delta l \geqq 0$	$\Delta l < 0$
	$+1 \Rightarrow F_l$	$-1 \Rightarrow F_l$	$+1 \Rightarrow F_l$	$-1 \Rightarrow F_l$
5. Schritt	$\lvert\Delta l_{min}\rvert \cdot F_l \Rightarrow \Delta l$			

Im folgenden wird anstatt $|\Delta l_{min}|$ stets abgekürzt $|\Delta l|$ geschrieben. Wegen der für die Halbperiode ω der geodätischen Linie geltenden Beziehung

$$\pi (1 - \mathfrak{a}) \leqq \omega \leqq \pi , \tag{3.6}$$

wobei ω dem halben Großkreisbogen entspricht, kann trotz erfüllter Bedingung (3.4) $\Delta \sigma > \pi$ sein. Dies ist jedoch nur bei nahezu diametralen Punkten möglich, wobei ohnehin eine besondere Überprüfung der Eindeutigkeit erforderlich ist.

Die 2. Hauptaufgabe ist zwar, abgesehen von dem Fall, daß zufällig zwei gleichlange Verbindungslinien der Punkte P_1 und P_2 bestehen, stets eindeutig lösbar. Liegt jedoch bei nahezu diametralen Punkten P_2 innerhalb oder auf dem Rand der Enveloppe der Schar der geodätischen Linien, die durch den Zentralpunkt P_1 verläuft, so ist eine genauere Untersuchung hinsichtlich des zu verwendenden Azimutes der kürzesten Verbindungslinie erforderlich. Da aber die großen Halbachsen der maximalen Enveloppe nur $\mathfrak{a} \cdot \pi \cdot \varrho' = 36{,}4'$ betragen, kann dies nur eintreten, wenn

(3.7) $$\pi - |\Delta l| < 36{,}4'$$

und gleichzeitig

(3.8) $$|B_1 + B_2| < 36{,}4'$$

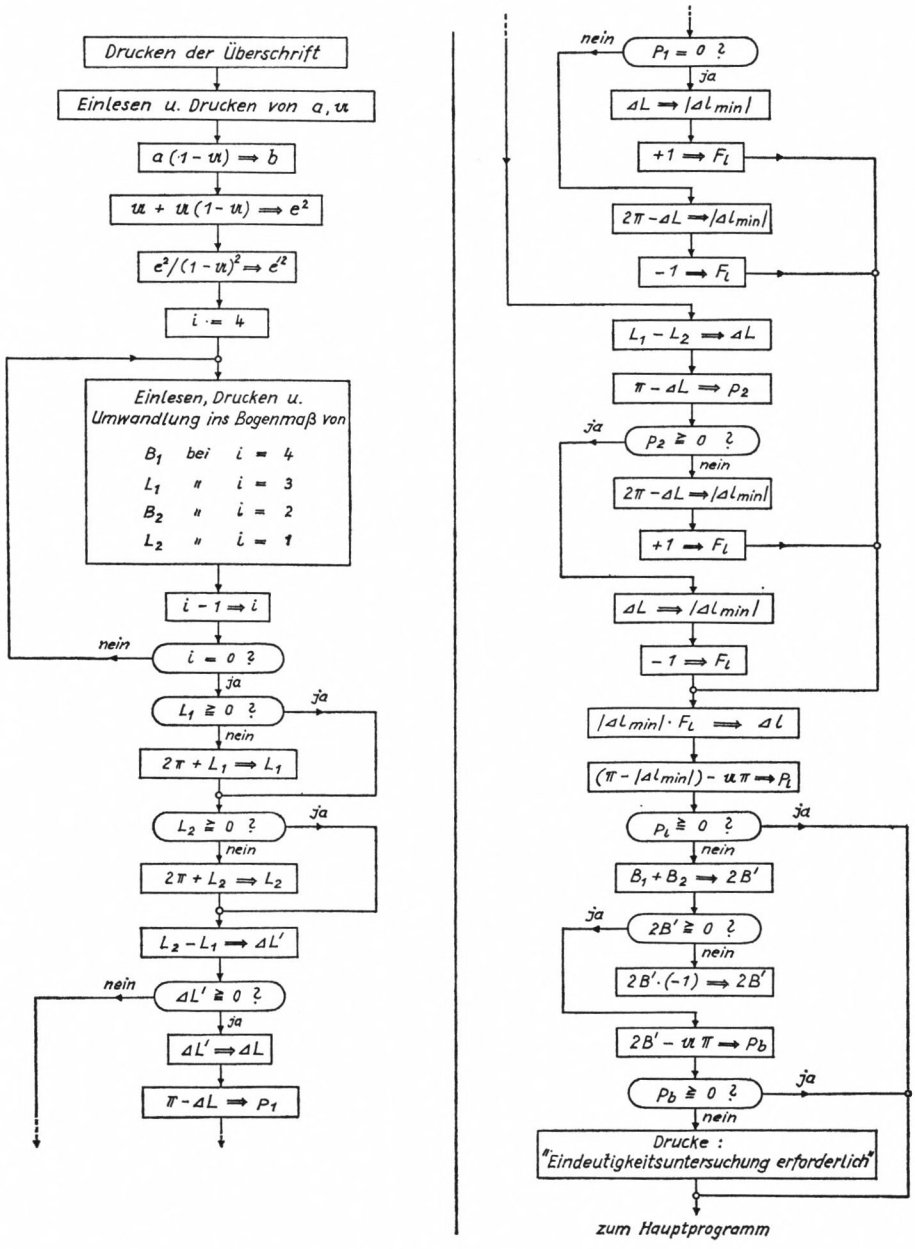

Abb. 12: Flußdiagramm zum Vorprogramm II

ist. Zur Sicherung gegen unrichtige Ergebnisse werden diese Fälle vom Automaten durch entsprechende Abfragen festgestellt und ausgeschieden bzw. durch Ausdrucken der Bemerkung „Eindeutigkeitsuntersuchung erforderlich" kenntlich gemacht. Diese Maßnahme bedeutet keine wesentliche Einschränkung des Anwendungsbereiches der Rechenprogramme, da solche Fälle nur äußerst selten auftreten. Gleichzeitig wird damit erreicht, daß der oben ermittelte Längenunterschied Δl tatsächlich stets der kürzesten Verbindungslinie entspricht.

Das Vorprogramm II führt somit folgende Schritte aus:

1. Einlesen der Ellipsoidparameter a und $\mathfrak{a}$.
2. Berechnung der geometrischen Konstanten b, e^2, e'^2 vermittels der Beziehungen (3.1), (3,2), (3.3).
3. Einlesen der Ausgangsdaten in der Reihenfolge B_1, L_1, B_2, L_2 und jeweils sofortige Umwandlung ins Bogenmaß. Zur Einsparung von Programmierungsarbeit werden diese Arbeitsgänge wieder zyklisch angeordnet.
4. Ermittlung des der kürzesten Verbindungslinie entsprechenden Längenunterschiedes Δl.
5. Ausscheiden der Fälle, für die eine besondere Eindeutigkeitsuntersuchung erforderlich ist.

Auch beim Vorprogramm II werden die Zahlenwerte a, $\mathfrak{a}$, B_1, L_1, B_2, L_2 in Verbindung mit einem erläuternden Klartext ausgedruckt.

Im einzelnen ist der Programmablauf aus dem Flußdiagramm Abb. 12 ersichtlich.

3.3 Rechenprogramme für die geodätischen Hauptaufgaben

Im folgenden werden nun zunächst die einzelnen Verfahren in eine zur Lösung mit programmgesteuerten Rechenautomaten geeignete Form gebracht. Dazu werden die Verfahren jeweils in eine Folge von Einzelschritten aufgegliedert, die vom Automaten nacheinander auszuführen sind. Zur Wahrung des Zusammenhanges mit Kapitel 2 wird dabei auf eine algorithmische Schreibweise weitgehend verzichtet. Soweit Abänderungen der Verfahren notwendig sind, werden diese gleichzeitig ausgeführt. Bei allen Verfahren mit Ausnahme der Lösungen von Sodano werden für Rechenautomaten geeignete Quadranten- und Vorzeichenkriterien entwickelt. Außerdem werden jeweils ausführliche Flußdiagramme hergestellt, in denen die einzelnen Abschnitte des Rechenablaufes in übersichtlicher Weise und in der erforderlichen Reihenfolge aufgezeichnet werden. Diese Flußdiagramme dienen als Grundlage zur Erstellung der eigentlichen Rechenprogramme bzw. Aufstellung der jeweiligen Befehlsfolge. Die wichtigsten technischen Daten der einzelnen Programme wie Speicherbedarf, Startadresse usw. werden in einer kurzen Programmbeschreibung angegeben. Schließlich werden die Programme jeweils an Hand eines Zahlenbeispiels erprobt.

Bei sämtlichen Programmen wird die Speicherung des Unterprogrammes „Doppelte Zahlenlänge" (siehe S. 10) ab Trommelzelle 2000 vorausgesetzt. Außerdem werden die in Teil A erstellten Unterprogramme zur Berechnung der Winkel- und Arcusfunktionen sowie zur Winkelumwandlung verwendet.

Es sollen hier nochmals die Bereiche angegeben werden, in denen die einzelnen Arcusprogramme jeweils die Winkelwerte liefern:

Unterprogramm	im Bereich zwischen
arcsin x	$-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$
arccos x	0 und π
arctg x	$-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$.

3.3.1 *Rechenprogramme nach dem Besselschen Verfahren*

Zur Festlegung der Quadranten und Vorzeichen für die Variablen wird vereinbart, daß die Hilfsgröße m stets positiv sein soll. Außerdem soll die Zählung der Hilfsgröße M bei dem in der Rechenrichtung gesehen hinter P_1 liegenden Äquatorschnittpunkt P_0 der geodätischen Linie beginnen, auf den zunächst ein positives Maximum folgt. Die Rechenrichtung geht dabei immer von P_1 nach P_2, die Größen Δs und $\Delta\sigma$ werden stets positiv gezählt.

Als Hilfsfigur zur Herleitung der Kriterien für die Quadranten- und Vorzeichenermittlung dient nachstehende Abbildung 13. Sie zeigt zweifach skizziert einen vollen Umlauf der geodätischen Linie um das Rotationsellipsoid.

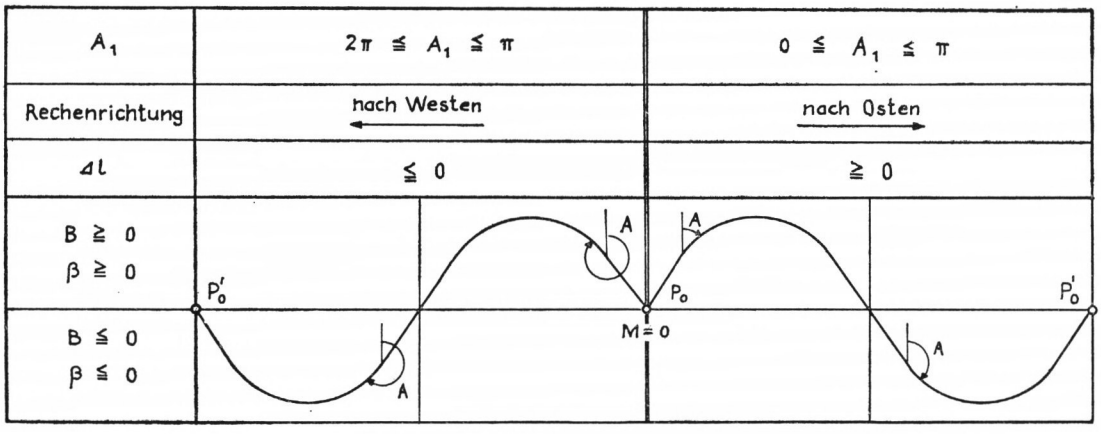

Abb. 13

a) Erste Hauptaufgabe

Die erste Hauptaufgabe erfordert die Ermittlung der Größe $\Delta\sigma$ durch indirekte Auflösung der Gleichung (2.33). Im Gegensatz zur Berechnung von Hand, wo ausgehend vom ersten Glied bei jedem der folgenden Näherungsschritte ein weiteres Glied von (2.33) verwendet wird, ist bei der Lösung mit Rechenautomaten die gleichzeitige Verwendung sämtlicher Glieder zweckmäßig, da auf diese Weise die Berechnung von $\Delta\sigma$ in der Form einer Iterationsschleife angeordnet werden kann.

Berechnungsfolge:

Nachstehend werden die einzelnen zur Lösung der 1. Hauptaufgabe erforderlichen Rechenabschnitte einschließlich der Kriterien für die Quadranten- und Vorzeichenermittlung angegeben:

1. Vorprogramm I mit den unter 3.2.1 angegebenen Einzelschritten.
2. Übergang zur reduzierten Breite β_1 von P_1. Für den Lösungsablauf werden lediglich die Funktionswerte $\sin\beta_1$ und $\cos\beta_1$ benötigt; nicht erforderlich ist der Winkelwert β_1 selbst. Es erfolgt deshalb zweckmäßig, um einen Genauigkeitsverlust durch die weniger genauen Arcus-Programme zu vermeiden, die direkte Berechnung von $\sin\beta_1$ und $\cos\beta_1$ vermittels der Beziehungen

$$\sin\beta_1 = \frac{\sin B_1}{V} = \frac{\sin B_1}{\sqrt{1+e'^2\cos^2 B_1}}\,, \tag{2.2}$$
$$\cos\beta_1 = \frac{\cos B_1}{V\sqrt{1-e^2}} = \frac{\cos B_1}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2 B_1)\,(1-e^2)}}\,.$$

3. Die Hilfsgröße m wird aus dem rechtwinkligen Dreieck $P_{mK}P_{nK}P_{1K}$ in Abb. 6 entsprechend (2.12h) erhalten:

$$\sin m = \cos\beta_1 \cdot |\sin A_1|\,. \tag{3.9}$$

Dabei ist der Absolutwert von $\sin A_1$ zu verwenden.

4. Die Hilfsgröße M wird durch Anwendung von (2.12a) auf Dreieck $P_{mK}P_{nK}P_{1K}$ aus

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\cos A_1} \tag{3.10}$$

berechnet. Der Quadrant von M läßt sich aus den Vorzeichen von B_1 und $\operatorname{tg} M$ ermitteln. Mit Hilfe von Abb. 13 können nachstehende Kriterien hergeleitet werden:

M Quadrant	I	II	III	IV
B_1	$\geqq 0$		< 0	
$\operatorname{tg} M$	$\geqq 0$	< 0	$\geqq 0$	< 0

5. Berechnung der Koeffizienten α, β, γ, δ, ε mit (2.32) und (2.34).
6. Die sphärische Bogenlänge $\Delta\sigma$ wird durch indirekte Auflösung von (2.33) erhalten. Die Berechnung erfolgt in einer Iterationsschleife:

a) Ein erster Näherungswert $\Delta\sigma^{(i)}$ ergibt sich aus

$$\Delta\sigma^{(i)} \doteq \alpha\frac{\Delta s}{b}\,. \tag{3.11}$$

b) Die Durchrechnung von (2.33) mit $\Delta\sigma^{(i)}$ ergibt einen verbesserten Wert $\Delta\sigma^{(i+1)}$.

c) Die Differenz der Näherungswerte ist

$$d = \Delta\sigma^{(i)} - \Delta\sigma^{(i+1)}.$$

d) Bildung der Prüfgröße

$$p = |d| - \varepsilon.$$

Dabei ist ε eine vorzugebende Genauigkeitsschranke.

e) Wenn $p \geqq 0$, dann $\Delta\sigma^{(i+1)} \Rightarrow \Delta\sigma^{(i)}$ und Fortsetzung der Iteration;
wenn $p < 0$, dann $\Delta\sigma^{(i+1)} \Rightarrow \Delta\sigma$ und Beendigung der Iteration.

7. Die reduzierte Breite β_2 wird mit richtigem Vorzeichen erhalten aus

$$\sin \beta_2 = \cos m \sin (M + \Delta \sigma). \tag{3.12}$$

8. Das Azimut A_2 ergibt sich aus (vgl. (2.13))

$$\cos A_2 = \frac{\cos m}{\cos \beta_2} \cos (M + \Delta \sigma). \tag{3.13}$$

Der Quadrant von A_2 läßt sich mit Hilfe von A_1 und dem Vorzeichen von $\cos A_2$ bestimmen. Es gelten nachstehende Kriterien:

A_2 Quadrant	I	II	III	IV
A_1	$0 \leqq A_1 \leqq \pi$		$\pi < A_1 < 2\pi$	
$\sin A_1$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos A_2$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

9. Berechnung des sphärischen Längenunterschiedes $\Delta\lambda$ aus

$$\sin \Delta\lambda = \frac{\sin \Delta\sigma \, |\sin A_1|}{\cos \beta_2}. \tag{3.14}$$

Dabei wird der Absolutwert von $\sin A_1$ verwendet, so daß $\Delta\lambda$ immer positiv erhalten wird. Zur Quadrantenbestimmung wird außerdem berechnet (vgl. (2.18)):

$$\cos \Delta\lambda = \frac{\cos \Delta\sigma - \sin \beta_1 \sin \beta_2}{\cos \beta_1 \cos \beta_2}. \tag{3.15}$$

Für den Quadranten von $\Delta\lambda$ gelten dann folgende Kriterien:

$\Delta\lambda$ Quadrant	I	II	III	IV
$\sin \Delta\lambda$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos \Delta\lambda$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

10. Berechnung der Koeffizienten α', β', γ', δ' nach (2.41).

11. Berechnung des ellipsoidischen Längenunterschiedes Δl aus (2.40). Dabei wird Δl zunächst stets mit positivem Vorzeichen erhalten, so daß eine gesonderte Vorzeichenbestimmung erforderlich ist. Für das Vorzeichen von Δl gilt:

wenn $0 \leqq A_1 \leqq \pi$ ($\sin A_1 \geqq 0$), dann $\Delta l \geqq 0$;
wenn $\pi < A_1 < 2\pi$ ($\sin A_1 < 0$), dann $\Delta l < 0$.

12. Die geographische Länge L_2 ergibt sich zu

$$L_2 = L_1 + \Delta l.$$

13. Übergang von der reduzierten Breite β_2 auf die geographische Breite B_2 mit

$$\operatorname{tg} B_2 = \sqrt{1 + e'^2}\, \operatorname{tg} \beta_2. \tag{2.1}$$

14. Umwandlung in Altgrad und Drucken von B_2, L_2, A_2.

Die einzelnen Abschnitte des Rechenablaufes sind in dem Flußdiagramm Abb. 14 aufgezeichnet.

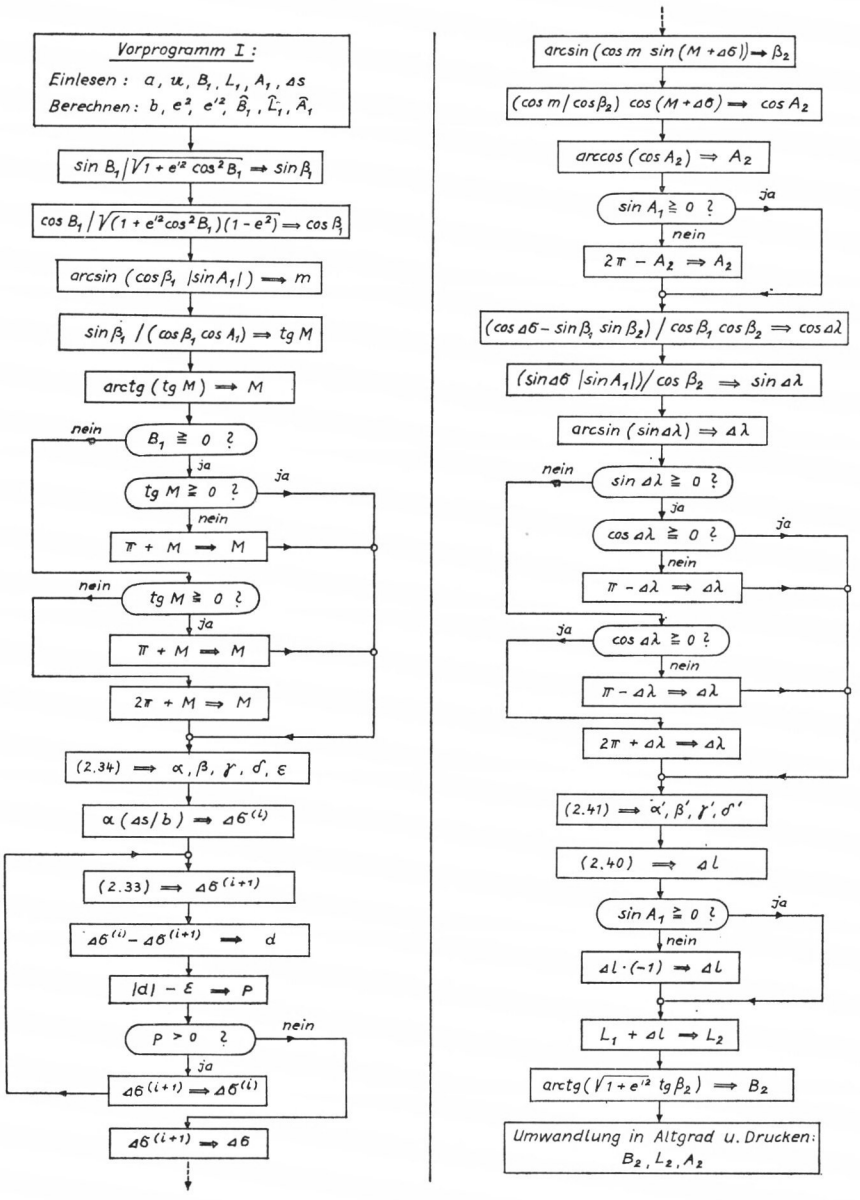

Abb. 14: Flußdiagramm zur Lösung der 1. Hauptaufgabe nach Bessel

Programmbeschreibung:

Das Programm belegt die Trommelzellen 3000–4281; die eigentliche Befehlsfolge umfaßt 781 Worte. Die Startadresse ist 3500; sind die Ellipsoidparameter a und α bereits gespeichert, so ist das Programm mit der Adresse 3547 zu starten. Die Genauigkeitsschranke wurde mit $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-13}$ festgelegt.

Rechenbeispiel:

Mit dem erstellten Rechenprogramm wird das in [20] S. 1012 angegebene Zahlenbeispiel berechnet:

Gegeben sind auf dem Internationalen Ellipsoid ($a = 6378388$ m, $\mathfrak{a} = 1:297$):

$$\begin{aligned} B_1 &= 50^\circ \\ L_1 &= 10^\circ \\ A_1 &= 140^\circ \\ \Delta s &= 15000000 \text{ m}. \end{aligned}$$

Die Ausgangsdaten sind in der nachstehenden auch für alle folgenden Rechenprogramme für die 1. Hauptaufgabe gültigen Reihenfolge zu vercoden:

1. Große Halbachse a des Rotationsellipsoides in Meter;
2. reziproker Wert der Abplattung $\frac{1}{\mathfrak{a}}$;
3. geogr. Breite B_1 in Altgrad, -minuten, -sekunden;
4. geogr. Länge L_1 in Altgrad, -minuten, -sekunden;
5. Azimut A_1 in Altgrad, -minuten, -sekunden;
6. Entfernung Δs in Meter.

Der Datenstreifen enthält also folgende Zahlenwerte:

6378388
297
50 0 0
10 0 0
140 0 0
15000000.

Nach Einlegen des Datenstreifens und Betätigung der „Start"-Taste erfolgt der Programmablauf auf vollautomatischem Wege.

Vom Rechenautomaten wird zunächst ein Protokoll ausgedruckt, das sämtliche Eingabedaten enthält, so daß deren Richtigkeit nochmals überprüft werden kann. Die Übersichtlichkeit wird allerdings dadurch etwas gestört, daß das Unterprogramm „Doppelte Zahlenlänge" die Ausgabe der Zahlenwerte nur in Gleitkommaform ermöglicht.

Die Ergebnisse werden in der nachstehenden Reihenfolge ausgedruckt:

1. geogr. Breite B_2 in Altgrad, -minuten, -sekunden;
2. geogr. Länge L_2 in Altgrad, -minuten, -sekunden;
3. Azimut A_2 in Altgrad, -minuten, -sekunden.

Gradzahl und Minuten erscheinen dabei als Strichzahlen, die Sekunden als Gleitkommazahl mit insgesamt 10 Stellen. Das Protokoll mit sämtlichen Ergebnissen ist in der vom Automaten ausgedruckten Form auf Seite 74 angegeben. Die reine Rechenzeit betrug 2,8 Minuten, mit Einlesen und Ausdrucken von Protokoll und Ergebnissen wurden vom Automaten insgesamt 5,2 Minuten benötigt.

Ausgehend von den für den Endpunkt der geodätischen Linie erhaltenen geographischen Koordinaten werden unter Verwendung des Gegenazimutes die Koordinaten des Ausgangspunktes zurückberechnet. Die Ellipsoidkonstanten a und $\mathfrak{a}$ brauchen dazu nicht

mehr eingelesen zu werden. Auf dem Datenstreifen sind also folgende Zahlenwerte anzugeben:

—62 57 3,20386708
105 5 38,29966435
294 46 41,48390343
15000000.

Die Abweichungen der Ergebnisse gegenüber den Ausgangswerten betragen:

B_1 $2{,}5'' \cdot 10^{-10}$
L_1 $5{,}7'' \cdot 10^{-8}$
A_1 $6{,}6'' \cdot 10^{-9}$.

Rechenbeispiel:

```
LOESUNG DER 1. GEODAET. HAUPTAUFGABE  (BESSEL)


ELLIPSOIDKONSTANTEN:  GR. HALBACHSE (IN METER)    ,6378388000/+07
                      ABPLATTUNG = 1 :  ,2970000000/+03


GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGSPUNKTES:
      G            M            S

B1 =  ,500/+02     0            0

L1 =  ,100/+02     0            0

A1 =  ,140/+03     0            0

ENTFERNUNG (IN METER)   ,15000000000/+08

GEOGR. KOORDINATEN DES ENDPUNKTES:
            G        M        S

B2 =    -   62'      57'      ,3203867076/+01

L2 =        105'      5'      ,3829966435/+02

A2 =        114'     46'      ,4148390343/+02
```

Rückrechnung mit Gegenazimut:

```
GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGSPUNKTES:
      G            M            S

B1 = -,620/+02     ,570/+02     ,32038670800 0/+01 .

L1 =  ,105/+03     ,500/+01     ,382996643500/+02

A1 =  ,294/+03     ,460/+02     ,41483903430 0/+02

ENTFERNUNG (IN METER)   ,15000000000/+08
```

```
GEOGR. KOORDINATEN DES ENDPUNKTES:
          G        M        S

B2 =      50°      0        ,2511434419/-09

L2 =      10°      0        ,5680345017/-07

A2 =      320°     0        ,6594910555/-08
```

b) Zweite Hauptaufgabe

Die Lösung der 2. Hauptaufgabe mit den Besselschen Grundformeln entsprechend dem Vorschlag von Albrecht erfordert eine gemeinschaftliche Bestimmung der Größen $\Delta\lambda$, $\Delta\sigma$, m und M durch allmähliche Annäherung. Ein Ausgangswert für die Iteration wird mit der Jordanschen Formel (2.42) gewonnen. Im Rechenprogramm wird außerdem die Möglichkeit der unmittelbaren Verwendung des ellipsoidischen Längenunterschiedes $|\Delta l|$ als ersten Näherungswert für $\Delta\lambda$ vorgesehen.

Berechnungsfolge:

Zur Lösung der 2. Hauptaufgabe sind die nachstehenden Berechnungsschritte sowie Quadranten- und Vorzeichenkriterien erforderlich:

1. Vorprogramm II mit den unter 3.2.2 angegebenen Einzelschritten.
2. Übergang zu den reduzierten Breiten β_1 und β_2. Es werden lediglich die Funktionswerte $\sin\beta_1$, $\cos\beta_1$, $\sin\beta_2$, $\cos\beta_2$ benötigt, die wieder direkt und deshalb mit höherer Genauigkeit erhalten werden mit den Beziehungen

$$\sin\beta = \frac{\sin B}{\sqrt{1 + e'^2\cos^2 B}}\,, \quad \cos\beta = \frac{\cos B}{\sqrt{(1 + e'^2\cos^2 B)(1 - e^2)}}\,. \tag{2.2}$$

3. Berechnung eines Näherungswertes $\Delta\lambda^{(i)}$ mit der Jordanschen Formel (2.42); durch Verwendung von $|\Delta l|$ wird $\Delta\lambda^{(i)}$ stets positiv erhalten.

   Oder: Verwendung von $|\Delta l|$ als erste Näherung für $\Delta\lambda$.

4. Gemeinschaftliche Bestimmung von $\Delta\lambda$, $\Delta\sigma$, m und M durch allmähliche Annäherung:

   a) Vor dem Eintritt in die Iteration werden die konstant bleibenden Teile von (2.41), die nur von e abhängen, berechnet.

   b) Mit dem unter 3. ermittelten Näherungswert $\Delta\lambda^{(i)}$ ergibt sich durch Anwendung des sphärischen Kosinussatzes auf das Dreieck $P_{1K}P_{nK}P_{2K}$ in Abb. 6 ein Näherungswert $\Delta\sigma^{(i)}$:

$$\cos\Delta\sigma^{(i)} = \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos\Delta\lambda^{(i)}. \tag{3.16}$$

   c) Ein Näherungswert für die Hilfsgröße m berechnet sich aus

$$\sin m^{(i)} = \cos\beta_1\cos\beta_2\,\frac{\sin\Delta\lambda^{(i)}}{\sin\Delta\sigma^{(i)}}\,. \tag{3.17}$$

   d) Mit $m^{(i)}$ wird ein Näherungswert für M aus

$$\sin M^{(i)} = \frac{\sin\beta_1}{\cos m^{(i)}} \tag{3.18}$$

erhalten. Zur Quadrantenbestimmung für $M^{(i)}$ wird aus

$$\sin\left(M^{(i)} + \Delta\sigma^{(i)}\right) = \frac{\sin\beta_2}{\cos m^{(i)}} \tag{3.19}$$

und (3.18) die Beziehung

$$\cos M^{(i)} = \frac{\sin\beta_2 - \sin\beta_1 \cos\Delta\sigma^{(i)}}{\cos m^{(i)} \sin\Delta\sigma^{(i)}} \tag{3.20}$$

hergeleitet. Für den Quadranten von $M^{(i)}$ werden dann folgende Kriterien erhalten:

$M^{(i)}$ Quadrant	I	II	III	IV
$\sin M^{(i)}$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos M^{(i)}$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

e) Gleichung (2.40) ergibt mit $\Delta\sigma^{(i)}$, $m^{(i)}$ und $M^{(i)}$ einen zweiten Näherungswert $\Delta\lambda^{(i+1)}$.

f) Die Differenz der Näherungswerte ist

$$d = \Delta\lambda^{(i)} - \Delta\lambda^{(i+1)}.$$

g) Bildung der Prüfgröße

$$p = |d| - \varepsilon,$$

wobei ε die vorgegebene Genauigkeitsschranke ist.

h) Wenn $p \geqq 0$, dann $\Delta\lambda^{(i+1)} \Rightarrow \Delta\lambda^{(i)}$ und Fortsetzung der Iteration;
wenn $p < 0$, dann $\Delta\lambda^{(i+1)} \Rightarrow \Delta\lambda$ und Beendigung der Iteration.

Mit Beendigung der Iteration sind auch $\Delta\sigma$, m und M bekannt:

$$\Delta\sigma^{(i)} \Rightarrow \Delta\sigma, \qquad m^{(i)} \Rightarrow m, \qquad M^{(i)} \Rightarrow M.$$

i) Da $\Delta\lambda$ aus der Iteration stets mit positivem Vorzeichen hervorgeht, ist für diese Größe noch eine Vorzeichenbestimmung erforderlich. Das Vorzeichen von $\Delta\lambda$ hat dem von Δl zu entsprechen; daher gilt:

$$\text{wenn } \Delta l \geqq 0, \text{ dann } \Delta\lambda \geqq 0;$$
$$\text{wenn } \Delta l < 0, \text{ dann } \Delta\lambda < 0.$$

5. Das Azimut A_1 wird erhalten aus

$$\sin A_1 = \frac{\cos\beta_2 \sin\Delta\lambda}{\sin\Delta\sigma}. \tag{3.21}$$

Die Quadrantenbestimmung für A_1 kann unter Verwendung der Hilfsgröße M erfolgen. Mit Hilfe von Abb. 13 lassen sich nachstehende Kriterien angeben:

A_1 Quadrant	I	II	III	IV
$\sin A_1$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos M$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

6. Das Azimut A_2 ergibt sich aus

$$\sin A_2 = \frac{\cos\beta_1 \sin\Delta\lambda}{\sin\Delta\sigma}. \tag{3.22}$$

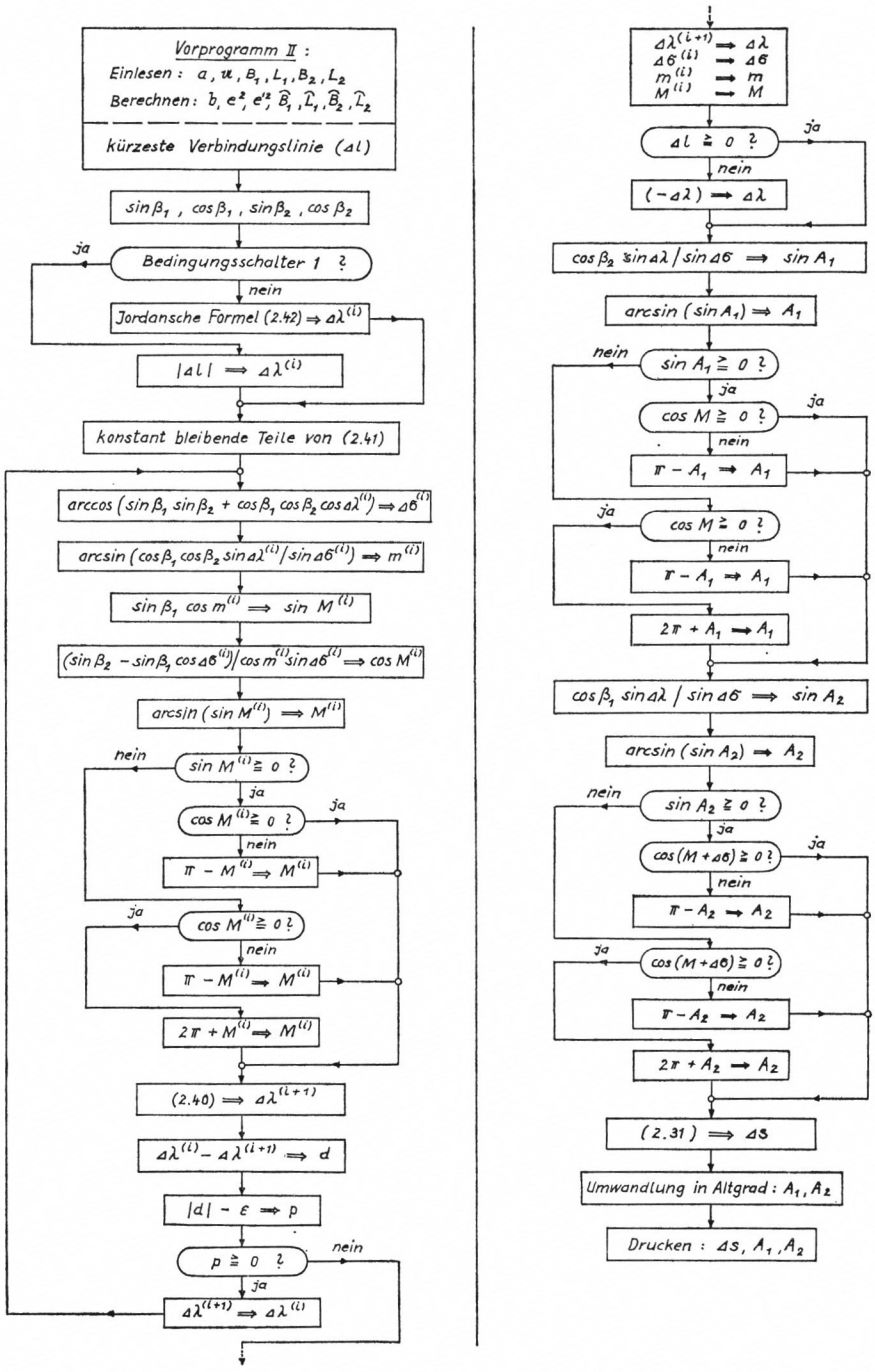

Abb. 15. Flußdiagramm zur Lösung der 2. Hauptaufgabe nach Bessel-Albrecht

Zur Quadrantenermittlung von A_2 wird entsprechend 5. das Vorzeichen von $\cos(M+\Delta\sigma)$ verwendet. Es gelten folgende Kriterien:

A_2 Quadrant	I	II	III	IV
$\sin A_2$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos(M+\Delta\sigma)$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

7. Die Länge Δs der geodätischen Linie ergibt sich nach (2.31).
8. Umwandlung von A_1 und A_2 in Altgrad sowie Drucken von Δs, A_1 und A_2.

Der genaue Rechenablauf ist in dem Flußdiagramm Abb. 15 dargestellt.

Programmbeschreibung:

Das Rechenprogramm belegt die Speicherplätze 5000–6509. Die Befehlsfolge umfaßt 1009 Worte. Die Startadresse ist 5500 bzw. 5547, wenn die Ellipsoidparameter a, $\mathfrak{a}$ bereits gespeichert sind. Bei Betätigung des Bedingungsschalters 1 wird $|\Delta l|$ als Ausgangswert für die Iteration verwendet, andernfalls erfolgt die Berechnung von $\Delta\lambda^{(i)}$ aus der Jordanschen Formel. Die Genauigkeitsschranke ε wurde auch hier mit $1 \cdot 10^{-13}$ festgelegt.

Rechenbeispiel:

Mit dem Rechenprogramm wird das auf Seite 73 angegebene Zahlenbeispiel berechnet. Ausgangsdaten sind hier die vorgegebenen Werte B_1, L_1 sowie die mit dem Programm für die 1. Hauptaufgabe ermittelten geographischen Koordinaten B_2, L_2:

$$\begin{aligned} B_1 &= 50^\circ \\ L_1 &= 10^\circ \\ B_2 &= -62^\circ\,57'\,03{,}''20386708 \\ L_2 &= 105^\circ\,05'\,38{,}''29966435\,. \end{aligned}$$

Die Ausgangsdaten werden in der nachstehenden Reihenfolge vercodet, die auch für alle folgenden Rechenprogramme für die 2. Hauptaufgabe gilt:

1. Große Halbachse a des Rotationsellipsoides in Meter;
2. reziproker Wert der Abplattung $\frac{1}{\mathfrak{a}}$;
3. geogr. Breite B_1 in Altgrad, -minuten, -sekunden;
4. geogr. Länge L_1 in Altgrad, -minuten, -sekunden;
5. geogr. Breite B_2 in Altgrad, -minuten, -sekunden;
6. geogr. Länge L_2 in Altgrad, -minuten, -sekunden.

Der Datenstreifen enthält also folgende Werte:

6378388
297
50 0 0
10 0 0
—62 57 3,20386708
105 5 38,29966435.

Nach Einlegen des Datenstreifens und Betätigung der „Start"-Taste erfolgt der Programmablauf auf vollautomatischem Wege.

Vom Rechenautomaten wird ebenfalls zunächst ein Protokoll mit sämtlichen Eingabedaten ausgedruckt. Die Ergebnisse erscheinen in nachstehender Reihenfolge:

1. Entfernung Δs in Meter als Gleitkommazahl mit 15 Stellen;
2. Azimut A_1 in Altgrad, -minuten, -sekunden;
3. Azimut A_2 in Altgrad, -minuten, -sekunden.

Gradzahl und Minuten werden wieder als Strichzahlen, die Sekunden als Gleitkommazahl mit 10 Stellen ausgegeben.

Die Berechnung des vorliegenden Zahlenbeispiels erfolgte ohne Betätigung des Bedingungsschalters, also unter Verwendung der Jordanschen Formel. Die Ergebnisse zeigen gegenüber den Werten der 1. Hauptaufgabe folgende Abweichungen:

$$\begin{array}{ll} \Delta s & 0{,}001 \text{ mm} \\ A_1 & 2'' \cdot 10^{-8} \\ A_2 & 3'' \cdot 10^{-8}. \end{array}$$

Die reine Rechenzeit betrug 3,7 Minuten, mit Einlesen und Ausdrucken von Protokoll und Ergebnissen 6,0 Minuten.

Protokoll und Ergebnisse werden nachstehend angegeben:

```
LOESUNG DER 2. GEODAET. HAUPTAUFGABE (BESSEL-ALBRECHT)


ELLIPSOIDKONSTANTEN:  GR. HALBACHSE (IN METER)   ,6378388000/+07
                      ABPLATTUNG = 1 :  ,297000000/+03


GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGS- U. ENDPUNKTES:
       G            M            S

B1 =  ,500/+02     0            0

L1 =  ,100/+02     0            0

B2 = -,620/+02     ,570/+02     ,32038670800 0/+01

L2 =  ,105/+03     ,500/+01     ,38299664260 0/+02

ENTFERNUNG (IN METER)   ,150000000000011/+08


AZIMUTE:
       G        M        S

A1 =   140'     0        ,1523961659/-07

A2 =   114'     46'      ,4148390346/+02
```

3.3.2 *Rechenprogramme für die Lösungen nach Helmert und Bodemüller*

Zur Festlegung der Quadranten und Vorzeichen wird vereinbart, daß

1. β_m stets positiv sein soll und
2. die Zählung der Bogenlänge s und damit auch von σ und λ bei einem positiven Maximum P_m der geodätischen Linie beginnen soll. Hierfür ist stets das Maximum zu verwenden, auf das in der Rechenrichtung gesehen der Punkt P_1 unmittelbar folgt.

Zur Herleitung der erforderlichen Quadranten- und Vorzeichenkriterien dient nachstehende Hilfsfigur Abb. 16.

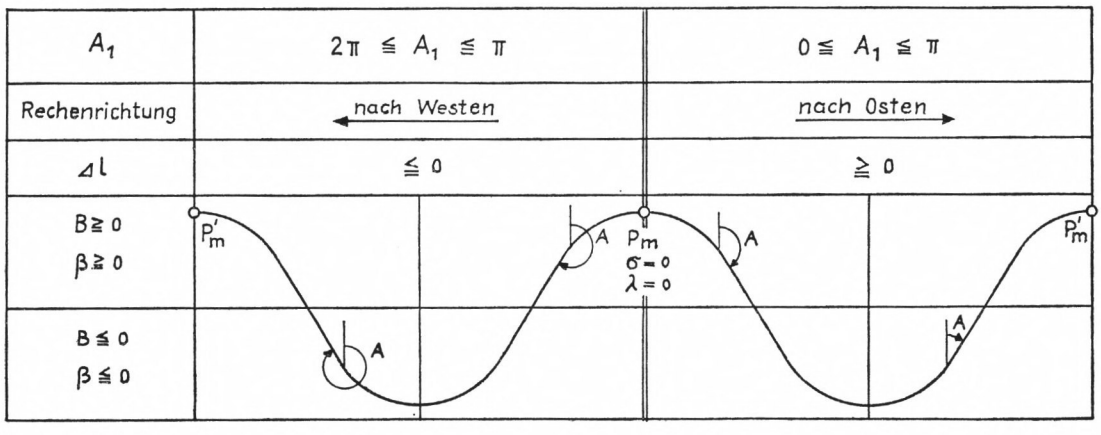

Abb. 16

a) Erste Hauptaufgabe nach Helmert

Infolge der Helmertschen Umkehrgleichung (2.54) für die sphärische Bogenlänge $\Delta\sigma$ ist die Lösung der 1. Hauptaufgabe auf direktem Wege möglich. Es ergibt sich also ein vollständig linearer Lösungsablauf.

Berechnungsfolge:

Im einzelnen sind nachstehende Berechnungsabschnitte erforderlich:

1. Vorprogramm I mit den unter 3.2.1 angegebenen Einzelschritten und zusätzlicher Berechnung der Hilfsgröße n aus

$$n = \frac{\mathfrak{a}}{2 - \mathfrak{a}}. \tag{3.23}$$

2. Übergang zur reduzierten Breite β_1 von P_1 durch direkte Berechnung von $\sin\beta_1$ und $\cos\beta_1$ mit (2.2). β_1 selbst wird nicht benötigt.
3. Nach dem Satz von Clairaut ergibt sich β_m aus

$$\cos\beta_m = \cos\beta_1 \,|\sin A_1|. \tag{3.24}$$

Dabei ist der Absolutwert von $\sin A_1$ zu verwenden.

4. Die Bogenlänge σ_1 wird entsprechend (2.12a) aus

$$\operatorname{tg} \sigma_1 = -\frac{\cos A_1}{\operatorname{tg} \beta_1} \tag{3.25}$$

erhalten. Der Quadrant von σ_1 läßt sich mit Hilfe der Vorzeichen von tg σ_1 und B_1 ermitteln. Es gelten nachstehende Kriterien:

σ_1 Quadrant	I	II	III	IV
tg σ_1	$\geqq 0$	< 0	$\geqq 0$	< 0
B_1	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

5. Die Größe λ_1 wird entsprechend (2.12f) aus

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \frac{\operatorname{tg} \sigma_1}{\cos \beta_m} \tag{3.26}$$

berechnet. Die Quadrantenbestimmung erfolgt mit Hilfe der Vorzeichen von tg λ_1 und von B_1 nach folgenden Kriterien:

λ_1 Quadrant	I	II	III	IV
tg λ_1	$\geqq 0$	< 0	$\geqq 0$	< 0
B_1	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

6. Berechnung der Hilfsgröße k_1 aus der Beziehung (2.47), die zuvor umgeformt wird in

$$k_1 = \frac{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \beta_m} - 1}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \beta_m} + 1}. \tag{3.27}$$

7. Berechnung von $\Delta\sigma$ mit dem nachstehenden Formelsystem:

$$2 s_1' = 2\sigma_1 + k_1 \sin 2\sigma_1 - \frac{1}{8} k_1^2 \sin 4\sigma_1 \tag{2.57}$$

$$\Delta s' = \frac{1 - k_1}{b\left(1 + \frac{k_1^2}{4}\right)} \Delta s \tag{2.55}$$

$$2\bar{s}' = 2 s_1' + \Delta s' \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma = \Delta s' &- \left(k_1 - \frac{9}{16} k_1^3\right) \cos 2\bar{s}' \sin \Delta s' + \\ &+ \frac{5}{8} k_1^2 \cos 4\bar{s}' \sin 2\Delta s' - \\ &- \frac{29}{48} k_1^3 \cos 6\bar{s}' \sin 3\Delta s' + \ldots . \end{aligned} \tag{2.54}$$

8. Mit $\Delta\sigma$ wird die Größe σ_2 erhalten:

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma.$$

9. β_2 ergibt sich sofort mit richtigem Vorzeichen aus

$$\sin \beta_2 = \sin \beta_m \cos \sigma_2. \tag{3.28}$$

10. λ_2 wird wieder entsprechend (2.12 f) aus

$$\operatorname{tg} \lambda_2 = \frac{\operatorname{tg} \sigma_2}{\cos \beta_m} \tag{3.29}$$

berechnet. Zur Quadrantenbestimmung kann, wie aus Abb. 16 zu entnehmen ist, das Vorzeichen von β_2 verwendet werden. Es gelten nachstehende Kriterien:

λ_2 Quadrant	I	II	III	IV
$\operatorname{tg} \lambda_2$	$\geqq 0$	< 0	$\geqq 0$	< 0
β_2	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

11. Das Azimut A_2 ergibt sich unter Verwendung von (2.12 a) aus

$$\cos A_2 = -\operatorname{tg} \sigma_2 \operatorname{tg} \beta_2. \tag{3.30}$$

Der Quadrant von A_2 läßt sich mit Hilfe des Azimuts A_1 bzw. des Vorzeichens von $\sin A_1$ nach folgenden Kriterien bestimmen:

A_2 Qaudrant	I	II	III	IV
A_1	$0 \leqq A_1 \leqq \pi$		$\pi < A_1 < 2\pi$	
$\sin A_1$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos A_2$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

12. Der sphärische Längenunterschied $\Delta\lambda$ ist

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1.$$

13. Der ellipsoidische Längenunterschied Δl ergibt sich nun nach (2.59). Da Δl dabei stets positiv erhalten wird, ist eine Vorzeichenbestimmung erforderlich:

wenn $0 \leqq A_1 \leqq \pi$ $(\sin A_1 \geqq 0)$, dann $\Delta l \geqq 0$;

wenn $\pi < A_1 < 2\pi$ $(\sin A_1 < 0)$, dann $\Delta l < 0$.

14. Die geographische Länge L_2 ergibt sich zu

$$L_2 = L_1 + \Delta l.$$

15. Berechnung der geographischen Breite B_2 aus

$$\operatorname{tg} B_2 = \sqrt{1 + e'^2} \operatorname{tg} \beta_2. \tag{2.1}$$

16. Umwandlung von B_2, L_2, A_2 in Altgrad und Drucken.

Die genaue Berechnungsfolge ist in dem Flußdiagramm Abb. 17 aufgezeichnet.

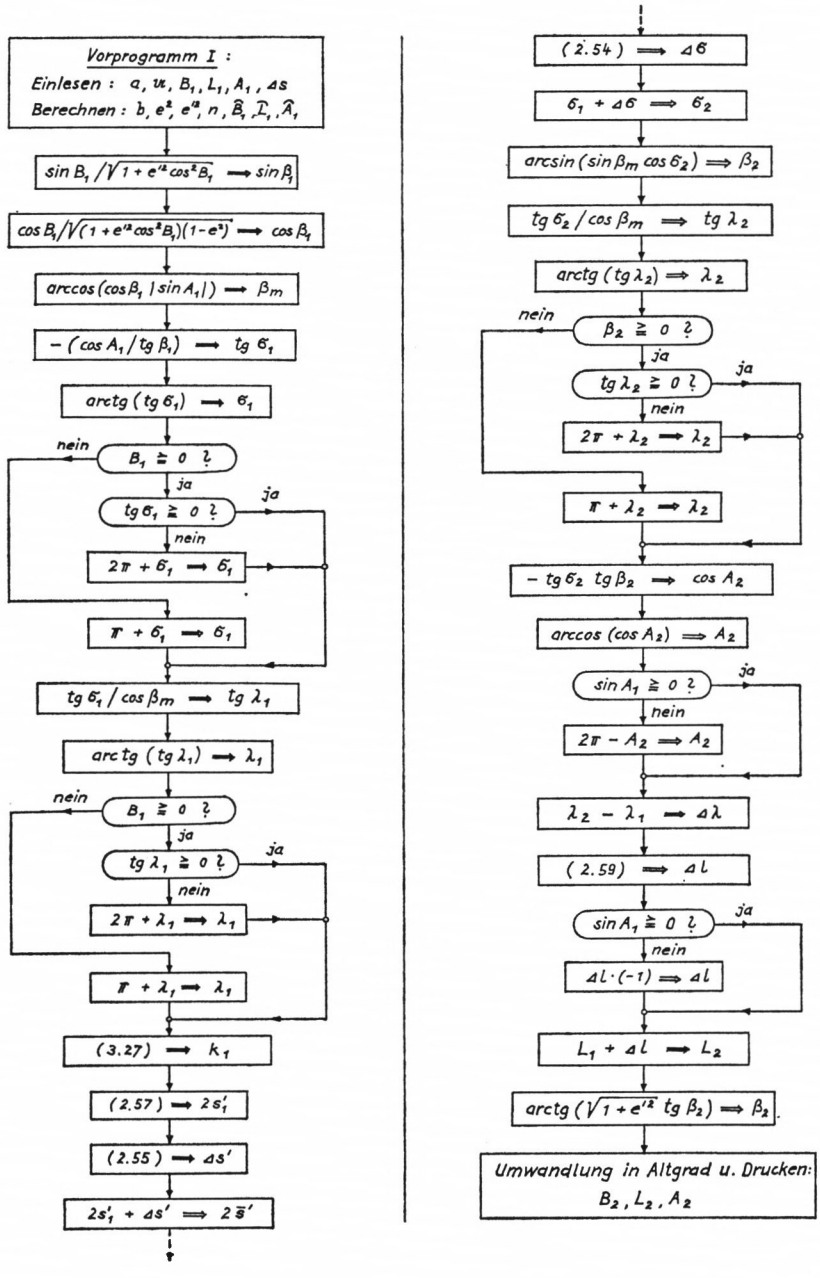

Abb. 17: Flußdiagramm zur Lösung der 1. Hauptaufgabe nach Helmert

Programmbeschreibung:

Das Rechenprogramm für die Zuse Z 23 belegt die Trommelzellen 3000–4073. Für die eigentliche Befehlsfolge sind 573 Worte erforderlich. Die Startadresse ist 3500 (3547). Die Eingabe der Ausgangsdaten hat in der auf Seite 73 aufgezeigten Weise zu erfolgen.

Rechenbeispiel:

Mit dem Rechenprogramm wurde wieder das auf Seite 73 angegebene Zahlenbeispiel berechnet. Die Rechenzeit betrug hier 1,5 Minuten, mit Einlesen und Ausdrucken 3,9 Minuten.

Bei der Rückrechnung unter Verwendung des Gegenazimutes ergaben sich folgende Abweichungen gegenüber den Ausgangswerten:

$$B_1 \quad 7'' \cdot 10^{-8}$$

$$L_1 \quad 1{,}0'' \cdot 10^{-7}$$

$$A_1 \quad 7'' \cdot 10^{-8}$$

Protokoll und Ergebnisse sind nachstehend angegeben:

```
LOESUNG DER 1. GEODAET. HAUPTAUFGABE  (HELMERT)


ELLIPSOIDKONSTANTEN:  GR. HALBACHSE (IN METER)   ,6378388000/+07
                      ABPLATTUNG = 1 :  ,297000000/+03

GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGSPUNKTES:
      G            M            S

B1 =  ,500/+02     0            0

L1 =  ,100/+02     0            0

A1 =  ,140/+03     0            0

ENTFERNUNG (IN METER)   ,150000000000/+08

GEOGR. KOORDINATEN DES ENDPUNKTES:
            G        M        S

B2 =    -  62°     57'      ,3203866868/+01

L2 =      105°      5'      ,3829966356/+02

A2 =      114°     46'      ,4148390432/+02
```

Rückrechnung mit Gegenazimut:

```
GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGSPUNKTES:
      G            M            S

B1 = -,620/+02     ,570/+02     ,32038668700o/+01

L1 =  ,105/+03     ,500/+01     ,38299663560o/+02

A1 =  ,294/+03     ,460/+02     ,41483904320o/+02

ENTFERNUNG (IN METER)   ,15000000000o/+08

GEOGR. KOORDINATEN DES ENDPUNKTES:
          G        M        S

B2 =      50°      0        ,69234479o8/-07

L2 =       9°      59'      ,5999999990/+02

A2 =     319°      59'      ,5999999993/+02
```

b) Zweite Hauptaufgabe nach dem modifizierten Helmertschen Verfahren

Das Helmertsche Verfahren für die 2. Hauptaufgabe erfordert eine Bestimmung von $\Delta\lambda$ auf dem Wege der allmählichen Annäherung. Helmert bedient sich dabei der Gaußschen Gleichungen (2.20) und erhält zugleich mit $\Delta\lambda$ die Azimute A_1, A_2 und das sphärische Bogenstück $\Delta\sigma$.

Die Gaußschen Gleichungen sind zur Auflösung mit Rechenautomaten insofern ungünstig, als zugleich mit der Ermittlung der gesuchten Größen eine Quadrantenbestimmung erforderlich ist, wobei insbesondere für die Argumente $\frac{A_1 + A_2}{2}$ und $\frac{A_1 - A_2}{2}$ eindeutige Kriterien sehr schwierig anzugeben sind.

Weitaus besser eignet sich das von Bodemüller in [9] verwendete Formelsystem, das eine gemeinsame Bestimmung von $\Delta\sigma$, β_m, σ_1, σ_2 und $\Delta\lambda$ durch sukzessive Approximation ermöglicht. Diese Bodemüllersche Modifikation wird deshalb der Erstellung des Rechenprogramms zugrunde gelegt.

Berechnungsfolge:

Für die Lösung der 2. Hauptaufgabe ergibt sich somit die nachstehende Berechnungsfolge:

1. Vorprogramm II mit den unter 3.2.2 angegebenen Einzelschritten und zusätzlicher Berechnung der Hilfsgröße n aus

$$n = \frac{\mathfrak{a}}{2 - \mathfrak{a}}. \tag{3.23}$$

2. Übergang auf die reduzierten Breiten β_1 und β_2 durch direkte Berechnung von $\sin\beta_1$, $\cos\beta_1$, $\sin\beta_2$, $\cos\beta_2$ mit Hilfe der Beziehungen (2.2).

3. Gemeinsame Bestimmung von $\Delta\sigma$, β_m, σ_1, σ_2 und $\Delta\lambda$ durch allmähliche Annäherung. Die Berechnung wird in der Form einer Iterationsschleife angeordnet.

a) Als Ausgangswert für die Iteration dient der Absolutwert des durch das Vorprogramm ermittelten Längenunterschiedes Δl:

$$|\Delta l| \Rightarrow \Delta\lambda^{(i)}.$$

b) Berechnung eines genäherten Wertes für $\Delta\sigma$ mit Hilfe des sphärischen Kosinussatzes:

$$\cos\Delta\sigma^{(i)} = \sin\beta_1 \sin\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos\Delta\lambda^{(i)}. \tag{3.31}$$

Da $0 \leqq \Delta\sigma^{(i)} \leqq \pi$ ist, wird durch das UP. $\arccos x$ gleichzeitig die Quadrantenfrage geklärt.

c) Ermittlung eines Näherungswertes $\beta_m^{(i)}$ aus

$$\cos\beta_m^{(i)} = \cos\beta_1 \cos\beta_2 \frac{\sin\Delta\lambda^{(i)}}{\sin\Delta\sigma^{(i)}}. \tag{3.32}$$

$\beta_m^{(i)}$ ergibt sich daraus stets zu $0 \leqq \beta_m^{(i)} \leqq \frac{\pi}{2}$.

d) Mit $\beta_m^{(i)}$ ergibt sich ein Näherungswert für σ_1 aus

$$\cos\sigma_1^{(i)} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_m^{(i)}}. \tag{3.33}$$

Zur Ermittlung des Quadranten von $\sigma_1^{(i)}$ wird durch Umformung der Gleichung

$$\cos\sigma_2 = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_m} \tag{3.34}$$

mit

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma$$

folgende Beziehung hergeleitet:

$$\sin\sigma_1^{(i)} = \frac{\sin\beta_1 \cos\Delta\sigma^{(i)} - \sin\beta_2}{\sin\beta_m^{(i)} \sin\Delta\sigma^{(i)}}. \tag{3.35}$$

Der Quadrant von $\sigma_1^{(i)}$ läßt sich dann mit Hilfe der Vorzeichen von $\sin\sigma_1^{(i)}$ und $\cos\sigma_1^{(i)}$ bestimmen. Es gelten nachstehende Kriterien:

$\sigma_1^{(i)}$ Quadrant	I	II	III	IV
$\sin\sigma_1^{(i)}$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos\sigma_1^{(i)}$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

e) $\sigma_2^{(i)}$ ergibt sich unmittelbar aus

$$\sigma_2^{(i)} = \sigma_1^{(i)} + \Delta\sigma^{(i)}.$$

f) Berechnung von $k_1^{(i)}$ aus

$$k_1^{(i)} = \frac{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2\beta_m^{(i)}} - 1}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2\beta_m^{(i)}} + 1}. \tag{3.36}$$

g) Mit Hilfe der Gleichung (2.59) läßt sich nun ein zweiter Näherungswert für $\Delta\lambda$ berechnen:

$$\Delta\lambda^{(i+1)} = \Delta l + \frac{e^2}{2}\cos\beta_m^{(i)}\left\{\left(1 + n - \frac{k_1^{(i)}}{2} - \frac{k_1^{(i)2}}{4}\right)\Delta\sigma^{(i)} - \frac{k_1^{(i)}}{4}\left(\sin 2\sigma_2^{(i)} - \sin 2\sigma_1^{(i)}\right) + \frac{k_1^{(i)2}}{16}\left(\sin 4\sigma_2^{(i)} - \sin 4\sigma_1^{(i)}\right)\right\}. \tag{3.37}$$

h) Die Differenz der Näherungswerte ist

$$d = \Delta\lambda^{(i)} - \Delta\lambda^{(i+1)}.$$

i) Bildung der Prüfgröße

$$p = |d| - \varepsilon.$$

ε ist wieder eine Genauigkeitsschranke.

k) Wenn $p \geqq 0$, dann $\Delta\lambda^{(i+1)} \Rightarrow \Delta\lambda^{(i)}$ und Fortsetzung der Iteration;

wenn $p < 0$, dann $\Delta\lambda^{(i+1)} \Rightarrow \Delta\lambda$ und Beendigung der Iteration.

Mit Beendigung der Iteration sind auch die Größen β_m, σ_1 und σ_2 bekannt:

$$\beta_m^{(i)} \Rightarrow \beta^m$$
$$\sigma_1^{(i)} \Rightarrow \sigma_1$$
$$\sigma_2^{(i)} \Rightarrow \sigma_2.$$

4. Berechnung der Länge Δs der geodätischen Linie mit (2.51).

5. Das Azimut A_1 wird berechnet aus

$$\sin A_1 = \frac{\cos\beta_m}{\cos\beta_1}. \tag{3.38}$$

Die Quadrantenbestimmung für A_1 erfolgt mit Hilfe von σ_1 bzw. $\sin\sigma_1$ und dem Vorzeichen von Δl nach den folgenden Kriterien, die gleichzeitig für das Azimut A_2 verwendet werden können:

A_1 Quadrant	I	II	III	IV
Δl	$\geqq 0$		< 0	
σ_1	$\pi < \sigma_1 < 2\pi$	$0 \leqq \sigma_1 \leqq \pi$	$0 \leqq \sigma_1 \leqq \pi$	$\pi < \sigma_1 < 2\pi$
$\sin\sigma_1$	< 0	$\geqq 0$	$\geqq 0$	< 0

6. Das Azimut A_2 ergibt sich aus

$$\sin A_2 = \frac{\cos\beta_m}{\cos\beta_2}. \tag{3.39}$$

Der Quadrant von A_2 wird aus den Kriterien unter 5. erhalten, wenn darin an Stelle von σ_1 die Größe σ_2 verwendet wird.

7. Umwandlung von A_1 und A_2 in Altgrad.

8. Drucken von Δs, A_1 und A_2.

Die einzelnen Abschnitte des Rechenablaufes sind in dem Flußdiagramm Abb. 18 dargestellt.

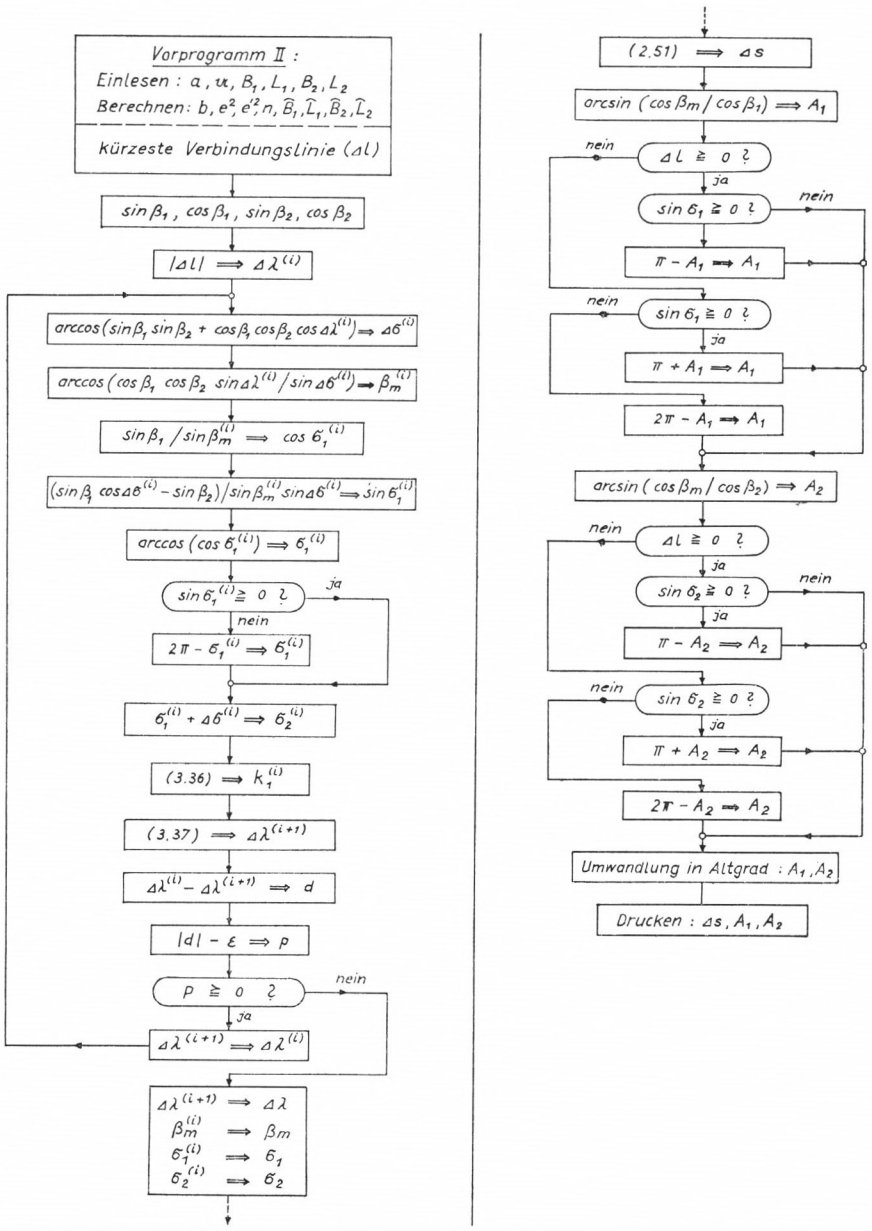

Abb. 18: Flußdiagramm zur Lösung der 2. Hauptaufgabe nach dem modifizierten Helmertschen Verfahren

Programmbeschreibung:

Das für die Zuse Z 23 erstellte Rechenprogramm benötigt die Trommelzellen 5000 bis 6068. Die eigentliche Befehlsfolge umfaßt jedoch nur 568 Worte. Startadresse ist wieder 5500 (5547). Die Eingabe der Ausgangsdaten erfolgt in der gleichen Weise wie beim Lösungsprogramm nach Bessel (siehe S. 78). Die Genauigkeitsschranke ε wurde mit $1 \cdot 10^{-12}$ festgelegt.

Rechenbeispiel:

Mit dem Rechenprogramm wurde ebenfalls das auf Seite 73 angegebene Zahlenbeispiel durchgerechnet. Als Ausgangsdaten wurden neben den vorgegebenen Werten B_1, L_1 die mit dem Helmertschen Programm für die 1. Hauptaufgabe erhaltenen Werte B_2, L_2 verwendet. Die Rechenzeit betrug 3,0 (5,3) Minuten.[1] Gegenüber den Werten der 1. Hauptaufgabe ergaben sich folgende Abweichungen der Ergebnisse:

$$\Delta s \quad 0{,}23 \text{ mm}$$
$$A_1 \quad 5'' \cdot 10^{-8}$$
$$A_2 \quad 1{,}2'' \cdot 10^{-7}.$$

Das ausführliche Rechenbeispiel wird nachstehend angegeben:

```
LOESUNG DER 2. GEODAET. HAUPTAUFGABE (HELMERT-BODEMUELLER)


ELLIPSOIDKONSTANTEN:  GR. HALBACHSE (IN METER)   ,6378388000/+07
                      ABPLATTUNG = 1 :  ,297000000/+03


GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGS- U. ENDPUNKTES:
      G            M            S

B1 =  ,500/+02     0            0

L1 =  ,100/+02     0            0

B2 = -,620/+02     ,570/+02     ,320386687000/+01

L2 =  ,105/+03     ,500/+01     ,382996635600/+02

ENTFERNUNG (IN METER)   ,150000000000227/+08

AZIMUTE:
      G        M        S

A1 =  139°     59'      ,5999999995/+02

A2 =  114°     46'      ,414839042o/+02
```

c) Zweite Hauptaufgabe nach dem Einschwenkverfahren von Bodemüller

Das unter 2.2.2 beschriebene „Einschwenkverfahren" von Bodemüller stellt ursprünglich ein direktes Verfahren zur Lösung der 2. Hauptaufgabe dar. Die Genauigkeit ist dabei jedoch letztlich abhängig von der Einführung eines guten Näherungswertes $\Delta\lambda'$, um den durch die ebene Berechnung von δs und δq verursachten Fehler möglichst klein zu halten. Der Wert $\Delta\lambda'$ soll auf 5″ bis 10″ genau gefunden werden. Bodemüller bedient sich dazu

[1] Der in Klammern angegebene Wert stellt die Rechenzeit einschließlich des Zeitbedarfs für Einlesen sowie Ausdrucken von Protokoll und Ergebnissen dar.

eines Nomogramms zur Entnahme von ersten Näherungswerten β'_m und $\Delta\sigma'$, mit denen er $\Delta\lambda'$ aus

$$\Delta\lambda' = \Delta l + (1 + n)\frac{e^2}{2}\cos\beta'_m\,\Delta\sigma' \tag{3.40}$$

berechnet. Bei der Lösung mit programmgesteuerten Rechenautomaten kommt die Verwendung graphischer Hilfsmittel nicht in Betracht. Die Berechnung eines Näherungswertes $\Delta\lambda'$ mit der Jordanschen Formel (2.42) ist wegen der verhältnismäßig großen Unsicherheit bei großen Breiten- und Längenunterschieden ebenfalls nicht geeignet.

Es mußte deshalb ein gesondertes Verfahren zur Gewinnung eines geeigneten Ausgangswertes $\Delta\lambda'$ entwickelt werden, das folgenden Ablauf nimmt: Unter Verwendung des gegebenen Längenunterschiedes Δl an Stelle von $\Delta\lambda$ wird zunächst mit dem sphärischen Kosinussatz ein Näherungswert $\Delta\sigma'^{(i)}$ berechnet. Mit den Beziehungen (3.41) und (3.42) ergibt sich damit ein genäherter Wert $\beta'^{(i)}_m$. Durch Einsetzen in (3.40) wird nun ein Wert $\Delta\lambda'^{(i+1)}$ erhalten, der den Genauigkeitsansprüchen im allgemeinen genügen dürfte. Um jedoch die geforderte Ausgangsgenauigkeit für alle Fälle sicher zu erreichen, wird die Berechnung in der Form einer Iterationsschleife angeordnet. Der Vorgang kann nun so oft wiederholt werden, bis sich $\Delta\lambda'^{(i+1)}$ gegenüber $\Delta\lambda'^{(i)}$ nur noch weniger als um einen beliebig wählbaren Betrag ε' ändert. Wenn für ε' der Wert $1''$ eingeführt wird, dann dürfte nach spätestens zwei Durchläufen ein für alle praktischen Fälle ausreichender Näherungswert $\Delta\lambda'$ feststehen.

Diese iterative Berechnung von $\Delta\lambda'$ beansprucht nur geringe Rechenzeit, da nur wenige Rechenformeln zu durchlaufen sind. Außerdem werden die beim letzten Durchgang erhaltenen Werte $\Delta\sigma'^{(i)}$ $A'^{(i)}_1$ und $\beta'^{(i)}_m$ unmittelbar für den weiteren Lösungsgang verwendet, so daß auch der erforderliche Mehraufwand an Programmierungsarbeit kaum ins Gewicht fällt.

Im übrigen sollen hinsichtlich der Quadranten- und Vorzeichenfestlegungen dieselben Vereinbarungen gelten wie für die beiden vorausgehenden Rechenprogramme.

Berechnungsfolge:

Im einzelnen ergibt sich nachstehender Berechnungsablauf:

1. Vorprogramm II mit denselben Einzelschritten wie bei der modifizierten Helmertschen Lösung (siehe S. 85).
2. Übergang zu den reduzierten Breiten β_1 und β_2 durch direkte Berechnung von $\sin\beta_1$, $\cos\beta_1$, $\sin\beta_2$, $\cos\beta_2$ nach den Beziehungen (2.2).
3. Ermittlung eines Näherungswertes $\Delta\lambda'$:

   a) Ausgangswert ist der ellipsoidische Längenunterschied Δl:

   $$\Delta l \Rightarrow \Delta\lambda'^{(i)}.$$

   b) Berechnung von $\Delta\sigma'^{(i)}$ aus

   $$\cos\Delta\sigma'^{(i)} = \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos\Delta\lambda'^{(i)}. \tag{3.41}$$

   Die Quadrantenfrage wird durch das UP. $\arccos x$ gelöst.

   c) Berechnung von $\sin A'^{(i)}_1$ aus

   $$\sin A'^{(i)}_1 = \cos\beta_2\frac{\sin\Delta\lambda'^{(i)}}{\sin\Delta\sigma'^{(i)}}. \tag{3.42}$$

Der Zahlenwert für $A_1'^{(i)}$ selbst wird zunächst nicht benötigt. Die Bestimmung von A_1' erfolgt deshalb nach Abschluß der Iteration.

d) Ein erster Näherungswert für $\cos \beta_m'$ wird mit

$$\cos \beta_m'^{(i)} = \sin A_1'^{(i)} \cos \beta_1 \tag{3.43}$$

erhalten.

e) Berechnung von $\Delta \lambda'^{(i+1)}$ aus

$$\Delta \lambda'^{(i+1)} = \Delta l + (1 + n) \frac{e^2}{2} \cos \beta_m'^{(i)} \Delta \sigma'^{(i)}. \tag{3.44}$$

f) Bildung der Differenz

$$d = \Delta \lambda'^{(i)} - \Delta \lambda'^{(i+1)}.$$

g) Bildung der Prüfgröße

$$p = |d| - \varepsilon'.$$

h) Wenn $p \geqq 0$, dann $\Delta \lambda'^{(i+1)} \Rightarrow \Delta \lambda'^{(i)}$ und Fortsetzung der Iteration;

wenn $p < 0$, dann $\Delta \lambda'^{(i+1)} \Rightarrow \Delta \lambda'$ und Beendigung der Iteration.

Mit Abbruch der Iteration sind gleichzeitig die Werte $\Delta \sigma'$, $\sin A_1'$ und $\cos \beta_m'$ bekannt:

$$\Delta \sigma'^{(i)} \Rightarrow \Delta \sigma'$$

$$\sin A_1'^{(i)} \Rightarrow \sin A_1'$$

$$\cos \beta_m'^{(i)} \Rightarrow \cos \beta_m'.$$

4. Der Zahlenwert für β_m' wird jetzt aus $\cos \beta_m'$ abgeleitet.

5. Berechnung von σ_1' aus

$$\cos \sigma_1' = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_m'}. \tag{3.45}$$

Für die Quadrantenbestimmung von σ_1' wird noch $\sin \sigma_1'$ benötigt, das entsprechend (3.35) aus

$$\sin \sigma_1' = \frac{\sin \beta_1 \cos \Delta \sigma' - \sin \beta_2}{\sin \beta_m' \sin \Delta \sigma'} \tag{3.46}$$

erhalten wird. Dann gelten für den Quadranten von σ_1' nachstehende Kriterien:

σ_1' Quadrant	I	II	III	IV
$\sin \sigma_1'$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos \sigma_1'$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

6. Mit σ_1' ergibt sich σ_2' zu

$$\sigma_2' = \sigma_1' + \Delta \sigma'.$$

7. Ermittlung von A'_1 aus $\sin A'_1$. Der Quadrant von A'_1 läßt sich mit Hilfe von Δl und σ'_1 nach folgenden Kriterien bestimmen:

A'_1 Quadrant	I	II	III	IV
Δl	$\geqq 0$		< 0	
σ'_1	$\pi < \sigma'_1 < 2\pi$	$0 \leqq \sigma'_1 \leqq \pi$	$0 \leqq \sigma'_1 \leqq \pi$	$\pi < \sigma'_1 < 2\pi$
$\sin \sigma'_1$	< 0	$\geqq 0$	$\geqq 0$	< 0

8. Berechnung von $\cos A'_2$:

(3.47) $$\cos A'_2 = -\sin \sigma'_2 \frac{\sin \beta'_m}{\cos \beta_2}.$$

Der Wert für A'_2 selbst wird nicht benötigt.

9. Berechnung von k'_1:

(3.48) $$k'_1 = \frac{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \beta'_m} - 1}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \beta'_m} + 1}.$$

10. Berechnung von $\Delta l'$ aus

(3.49) $$\Delta l' = \Delta \lambda' - \frac{e^2}{2} \cos \beta'_m \left\{ \left(1 + n - \frac{k'_1}{2} - \frac{k'^2_1}{4}\right) \Delta \sigma' - \frac{k'_1}{4} (\sin 2\sigma'_2 - \sin 2\sigma'_1) + \frac{k'^2_1}{16} (\sin 4\sigma'_2 - \sin 4\sigma'_1) \right\}.$$

11. Berechnung von $\Delta s'$ aus

(3.50) $$\Delta s' = b \frac{1 + \frac{1}{4} k'^2_1}{1 - k'_1} \left\{ \Delta \sigma' + \left(\frac{1}{2} k'_1 - \frac{3}{16} k'^3_1\right) (\sin 2\sigma'_2 - \sin 2\sigma'_1) - \frac{1}{16} k'^2_1 \ (\sin 4\sigma'_2 - \sin 4\sigma'_1) \right\}.$$

12. (2.62): $$\delta l = \Delta l - \Delta l'.$$

13. (2.64): $$\delta s = a \cos \beta'_m \, \delta l.$$

14. Die endgültige Länge der geodätischen Linie ergibt sich jetzt zu

(2.66) $$\Delta s = \Delta s' + \delta s.$$

15. (2.65): $$\delta q = \mathrm{a} \cos \beta_2 \cos A'_2 \, \delta l.$$

16. Ermittlung der reduzierten Länge $\mathfrak{m}$ der geodätischen Linie nach (2.69).

17. (2.67) $$\delta A_1 = \frac{\delta q}{\mathfrak{m}}.$$

18. Das Azimut A_1 ergibt sich damit zu

(2.68) $$A_1 = A'_1 + \delta A_1.$$

19. Berechnung von A_2 aus

(3.51) $$\sin A_2 = \sin A_1 \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2}.$$

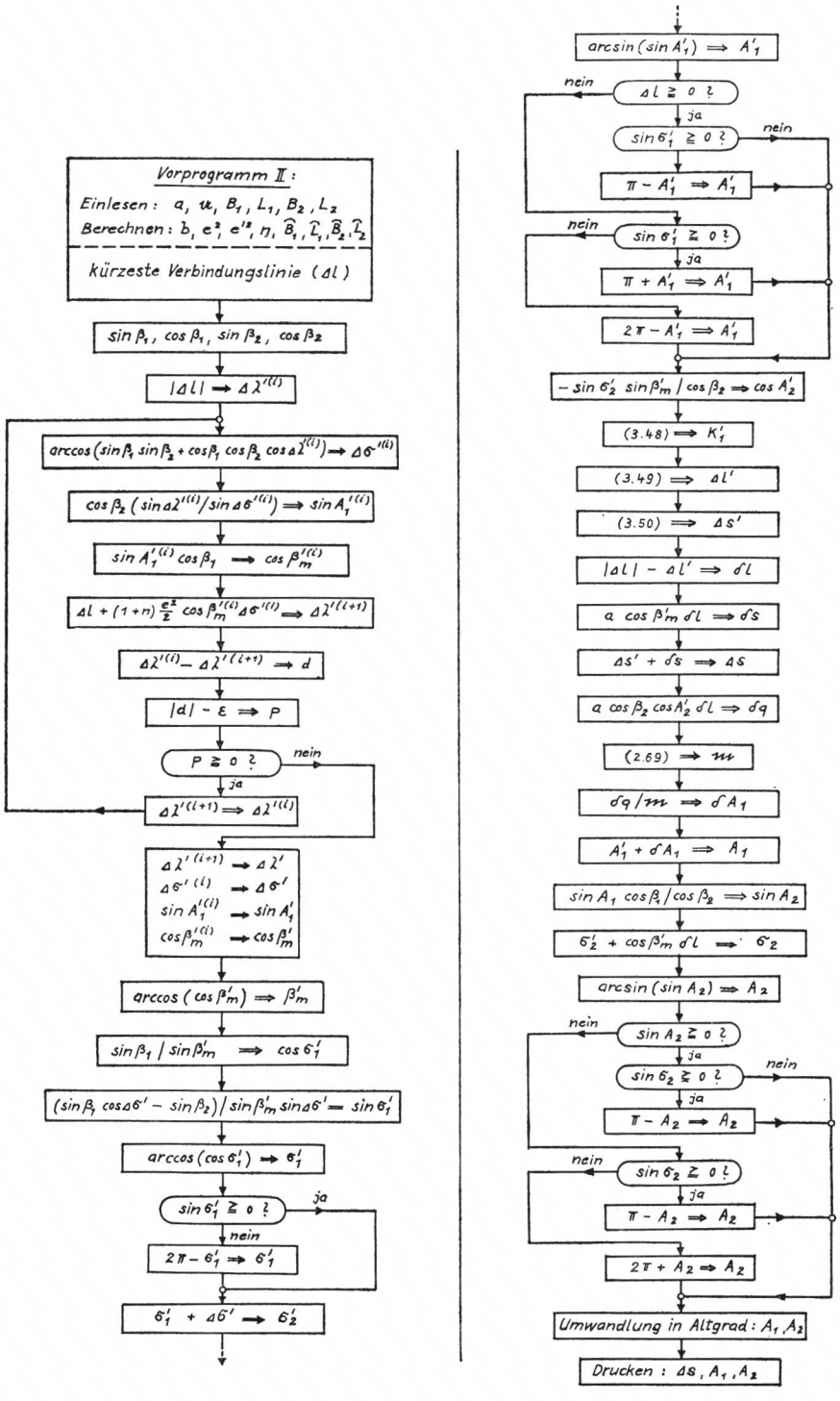

Abb. 19: Flußdiagramm zur Lösung der 2. Hauptaufgabe nach dem Einschwenkverfahren von Bodemüller

Zur Quadrantenbestimmung von A_2 wird noch σ_2 benötigt, das mit ausreichender Genauigkeit erhalten wird aus

$$\sigma_2 \approx \sigma_2' + \frac{\delta s}{a} = \sigma_2' + \cos \beta_m' \, \delta l. \tag{3.52}$$

Damit gelten für den Quadranten von A_2 nachstehende Kriterien:

A_2 Quadrant	I	II	III	IV
$\sin A_2$	$\geqq 0$		< 0	
σ_2	$\pi < \sigma_2 < 2\pi$	$0 \leqq \sigma_2 \leqq \pi$	$0 \leqq \sigma_2 \leqq \pi$	$\pi < \sigma_2 < 2\pi$
$\sin \sigma_2$	< 0	$\geqq 0$	$\geqq 0$	< 0

20. Umwandlung von A_1 und A_2 in Altgrad und Drucken von Δs, A_1 und A_2.

Die Darstellung des genauen Rechenablaufes erfolgt in dem Flußdiagramm Abb. 19.

Programmbeschreibung:

Das Rechenprogramm für die Zuse Z 23 belegt die Speicherplätze 5000 bis 6178. Es ist mit der Adresse 5500 (5547) zu starten. Die Befehlsfolge selbst ist mit 678 Worten wesentlich umfangreicher als beim modifizierten Helmertschen Verfahren. Die Eingabe der Ausgangsdaten hat wieder in der auf Seite 78 angegebenen Weise zu erfolgen. Die Genauigkeitsschranke ε' für die iterative Bestimmung von $\Delta\lambda'$ wurde mit $5 \cdot 10^{-6}$ ($\sim 1''$) festgelegt.

Rechenbeispiel:

Für die Durchrechnung des Rechenbeispiels wurden dieselben Ausgangswerte wie beim Helmertschen Verfahren für die 2. Hauptaufgabe verwendet. Erwartungsgemäß war die Rechenzeit mit 1,4 (3,8) Minuten wesentlich kürzer. Die Abweichungen gegenüber den Werten der 1. Hauptaufgabe betragen:

Δs 0,23 mm

A_1 $8'' \cdot 10^{-8}$

A_2 $2{,}1'' \cdot 10^{-7}$.

Das Rechenbeispiel ist nachstehend angegeben:

```
LOESUNG DER 2. GEODAET. HAUPTAUFGABE (BODEMUELLER)

ELLIPSOIDKONSTANTEN:  GR. HALBACHSE (IN METER)    ,6378388000/+07
                      ABPLATTUNG = 1 :  ,297000000/+03

GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGS- U. ENDPUNKTES:
       G            M            S

B1 =  ,500/+02     0            0

L1 =  ,100/+02     0            0

B2 = -,620/+02     ,570/+02     ,32038668700 0/+01

L2 =  ,105/+03     ,500/+01     ,38299663560 0/+02

ENTFERNUNG (IN METER)   ,15000000000226/+08

AZIMUTE:
       G        M        S

A1 =  139'      59'      ,5999999992/+02

A2 =  114'      46'      ,4148390411/+02
```

3.3.3 *Rechenprogramme für die Lösung nach Levallois und Dupuy*

a) Erste Hauptaufgabe

Die Zählung der Bogenlänge s und damit von ω und λ erfolgt hier von dem Äquatorschnittpunkt P_0 der geodätischen Linie aus, auf den in der Rechenrichtung gesehen der Punkt P_1 unmittelbar folgt. Der Parameter A_0 kann somit alle Werte zwischen 0 und 2π annehmen. Die nachstehende Hilfsfigur Abb. 20 dient wieder zur Herleitung der Quadranten- und Vorzeichenkriterien.

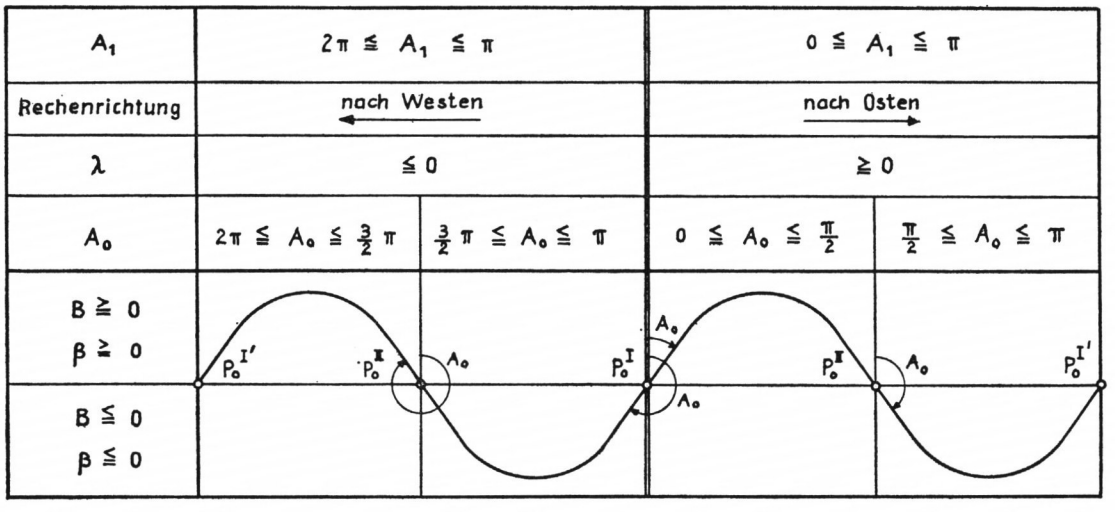

Abb. 20

Das Verfahren von Levallois und Dupuy ermöglicht ursprünglich eine direkte Lösung der 1. Hauptaufgabe. Da jedoch die Umkehrung der Gleichung (2.77) für die Bogenlänge $\Delta\omega$ auf Grund von Tafeldifferenzen erfolgte, kommt ihre Anwendung für elektronische Rechenautomaten nicht in Betracht. Das bedeutet, daß die Lösung der 1. Hauptaufgabe hier nur auf dem Wege der indirekten Auflösung der Gleichung (2.77) erfolgen kann.

Berechnungsfolge:

Die 1. Hauptaufgabe erfordert somit nachstehenden Lösungsgang:

1. Vorprogramm I mit den unter 3.2.1 angegebenen Einzelschritten.
2. Berechnung von $\sin\beta_1$ und $\cos\beta_1$ mit den Beziehungen (2.2).
3. Berechnung des Parameters A_0 aus

$$\sin A_0 = \cos\beta_1 \sin A_1. \tag{3.53}$$

Der Quadrant von A_0 hängt ab von der Größe von A_1 und vom Vorzeichen von B_1. Aus Abb. 20 können folgende Quadrantenkriterien entnommen werden:

A_0 Quadrant	I	II	III	IV
A_1	$0 \leqq A_1 \leqq \pi$		$\pi < A_1 < 2\pi$	
$\sin A_1$	$\geqq 0$		< 0	
B_1	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

4. Berechnung von ω_1 aus

$$\cos\omega_1 = \frac{\operatorname{tg} A_0}{\operatorname{tg} A_1}. \tag{3.54}$$

Durch das UP. $\arccos x$ wird ω_1 bereits im richtigen Quadranten erhalten.

5. Ermittlung von $\Delta\omega$ durch allmähliche Annäherung:

a) Der Parameter k wird vor Beginn der Iteration berechnet:

$$k = e' \cos A_0. \tag{2.30}$$

b) Ein Näherungswert für $\Delta\omega$ ergibt sich aus

$$\Delta\omega^{(i)} \doteq \frac{\Delta s}{b}.$$

c) Mit $\Delta\omega^{(i)}$ wird ein Näherungswert für ω_2 erhalten:

$$\omega_2^{(i)} = \omega_1 + \Delta\omega^{(i)}.$$

d) Berechnung von ΔW_2, ΔW_4, ΔW_6 aus

$$\begin{aligned} \Delta W_2 &= \frac{1}{2}(\Delta\omega - \sin\omega_2\cos\omega_2 + \sin\omega_1\cos\omega_1) \\ \Delta W_4 &= \frac{3}{4}\Delta W_2 - \frac{1}{4}(\cos\omega_2\sin^3\omega_2 - \cos\omega_1\sin^3\omega_1) \\ \Delta W_6 &= \frac{5}{6}\Delta W_4 - \frac{1}{6}(\cos\omega_2\sin^5\omega_2 - \cos\omega_1\sin^5\omega_1). \end{aligned} \tag{3.55}$$

e) Ein zweiter Näherungswert für $\Delta\omega$ ergibt sich aus

$$\Delta\omega^{(i+1)} = \frac{\Delta s}{b} - \left\{\frac{k^2}{2}\Delta W_2 - \frac{k^4}{8}\Delta W_4 + \frac{k^6}{16}\Delta W_6 - \ldots\right\}. \tag{3.56}$$

f) Die Änderung von $\Delta\omega$ ist

$$d = \Delta\omega^{(i)} - \Delta\omega^{(i+1)}.$$

g) Bildung der Prüfgröße

$$p = |d| - \varepsilon,$$

wobei ε die vorgegebene Genauigkeitsschranke ist.

h) Wenn $p \geqq 0$, dann $\Delta\omega^{(i+1)} \Rightarrow \Delta\omega^{(i)}$ und Fortsetzung der Iteration;
wenn $p < 0$, dann $\Delta\omega^{(i+1)} \Rightarrow \Delta\omega$ und Beendigung der Iteration.

i) Mit Beendigung der Iteration sind auch ω_2, ΔW_2, ΔW_4, ΔW_6 bekannt:

$$\omega_2^{(i)} \Rightarrow \omega_2,$$

$$\Delta W^{(i)} \Rightarrow \Delta W.$$

6. Berechnung von β_2 aus

$$\sin\beta_2 = \cos A_0 \sin\omega_2. \tag{3.57}$$

Das Vorzeichen von β_2 wird durch das UP. arcsin x geregelt.

7. Berechnung von A_2 aus

$$\sin A_2 = \frac{\sin A_0}{\cos\beta_2}. \tag{3.58}$$

Zur Quadrantenbestimmung wird ferner berechnet

$$\cos A_2 = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\omega_2}. \tag{3.59}$$

Damit ergeben sich folgende Kriterien für den Quadranten von A_2:

A_2 Quadrant	I	II	III	IV
$\sin A_2$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos A_2$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

8. Berechnung von $\Delta\lambda$ durch Anwendung von (2.19) auf Dreieck $P_{1K}\,P_{nK}\,P_{2K}$:

$$\sin\Delta\lambda = \frac{|\sin A_0|\,\sin\Delta\omega}{\cos\beta_1\cos\beta_2}. \tag{3.60}$$

Dabei ist stets der Absolutwert von $\sin A_0$ zu verwenden. Zur Quadrantenermittlung wird außerdem berechnet

$$\cos\Delta\lambda = \frac{\cos\Delta\omega - \sin\beta_1\sin\beta_2}{\cos\beta_1\cos\beta_2}. \tag{3.61}$$

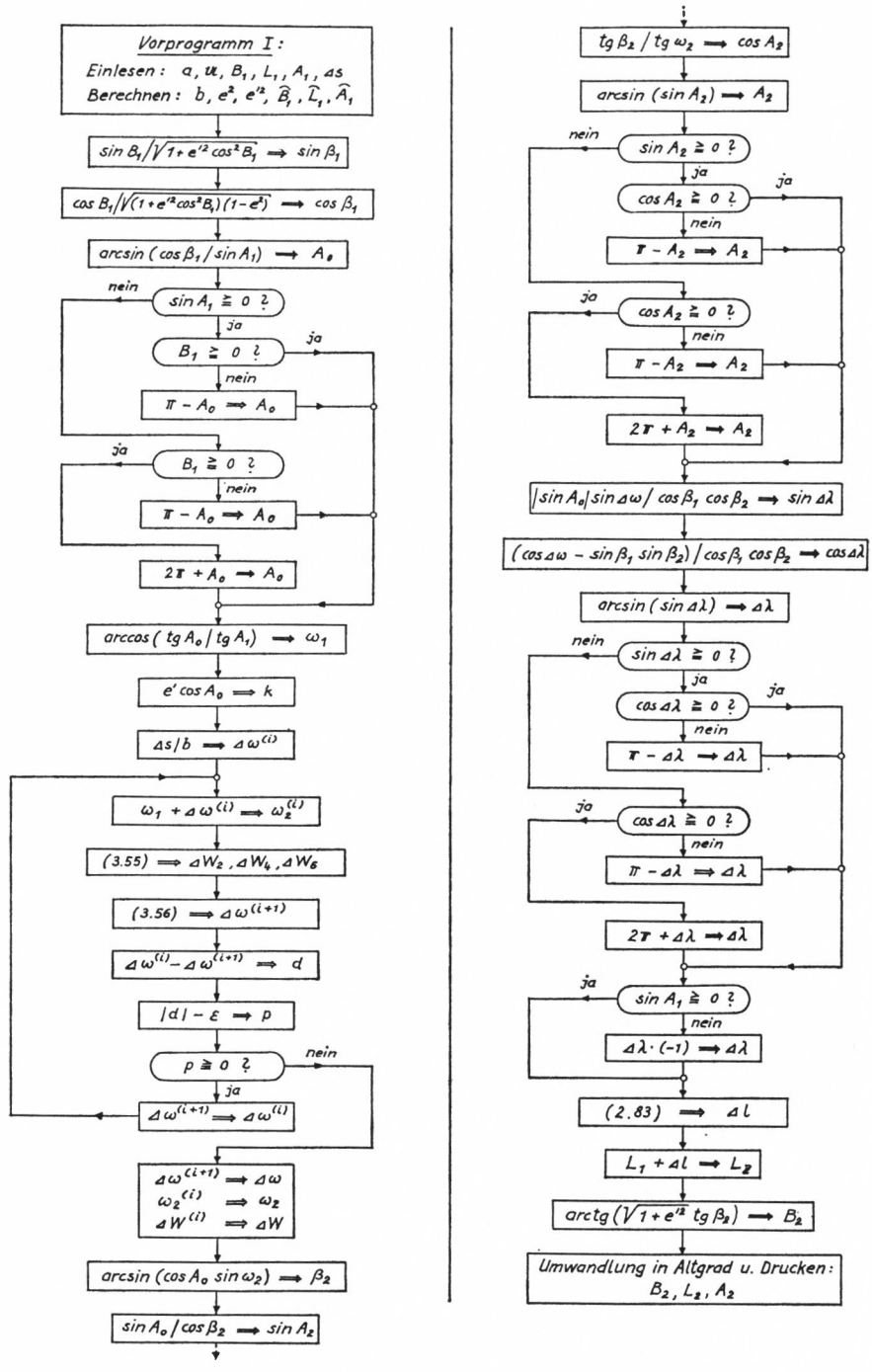

Abb. 21: Flußdiagramm zur Lösung der 1. Hauptaufgabe nach Levallois und Dupuy

Für den Quadranten von $\Delta\lambda$ werden damit nachstehende Kriterien erhalten:

$\Delta\lambda$ Quadrant	I	II	III	IV
$\sin\Delta\lambda$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos\Delta\lambda$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

Für das Vorzeichen von $\Delta\lambda$ gilt:

Wenn $0 \leqq A_1 \leqq \pi$ $(\sin A_1 \geqq 0)$, dann $\Delta\lambda \geqq 0$;

wenn $\pi \leqq A_1 \leqq 2\pi$ $(\sin A_1 < 0)$, dann $\Delta\lambda < 0$.

9. Berechnung von Δl mit (2.83) unter Verwendung der bei der Iteration gewonnenen Größen ΔW_2, ΔW_4, ΔW_6.

10. Die geographische Länge L_2 ist

$$L_2 = L_1 + \Delta l.$$

11. Berechnung von B_2 aus β_2 mit

$$\operatorname{tg} B_2 = \sqrt{1 + e'^2}\, \operatorname{tg} \beta_2. \tag{2.1}$$

12. Umwandlung von B_2, L_2, A_2 in Altgrad und Drucken.

Das Flußdiagramm Abb. 21 zeigt den genauen Rechenablauf.

Programmbeschreibung:

Das Rechenprogramm belegt die Speicherplätze von 3000 bis 4116. Auf die Befehlsfolge entfallen 616 Worte. Die Startadresse ist 3500 (3547). Die Ausgangsdaten sind wieder in der auf Seite 73 angegebenen Weise einzulesen. Die Genauigkeitsschranke ε wurde zu $1 \cdot 10^{-12}$ gewählt.

Rechenbeispiel:

Die Durchrechnung des Rechenbeispiels von Seite 73 erbrachte die aus dem nachstehenden Protokoll ersichtlichen Ergebnisse. Die Rechenzeit betrug 1,8 (4,2) Minuten. Bei der Rückrechnung mit dem Gegenazimut ergaben sich folgende Abweichungen gegenüber den Ausgangswerten:

B_1 $1'' \cdot 10^{-8}$

L_1 $2'' \cdot 10^{-8}$

A_1 $1'' \cdot 10^{-8}$.

```
LOESUNG DER 1. GEODAET. HAUPTAUFGABE  (LEVALLOIS U. DUPUY)


ELLIPSOIDKONSTANTEN:  GR. HALBACHSE (IN METER)   ,6378388000/+07
                      ABPLATTUNG = 1 :  ,297000000o/+o3

GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGSPUNKTES:
      G            M            S

B1 =  ,5oo/+o2     o            o

L1 =  ,1oo/+o2     o            o

A1 =  ,14o/+o3     o            o

ENTFERNUNG (IN METER)   ,15oooooooooo/+o8

GEOGR. KOORDINATEN DES ENDPUNKTES:
           G        M        S

B2 =    -  62'      57'     ,32o3866194/+o1

L2 =      1o5'       5'     ,3829966oo6/+o2

A2 =      114'      46'     ,4148396717/+o2
```

Rückrechnung mit Gegenazimut:

```
GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGSPUNKTES:
      G            M            S

B1 = -,62o/+o2     ,57o/+o2     ,32o386619ooo/+o1

L1 =  ,1o5/+o3     ,5oo/+o1     ,3829966oo6oo/+o2

A1 =  ,294/+o3     ,46o/+o2     ,4148396717oo/+o2

ENTFERNUNG (IN METER)   ,15oooooooooo/+o8

GEOGR. KOORDINATEN DES ENDPUNKTES:
           G        M        S

B2 =       49       59'     ,5999999999/+o2

L2 =        9'      59'     ,5999999998/+o2

A2 =      319'      59'     ,5999999999/+o2
```

b) Zweite Hauptaufgabe

Die zweite Hauptaufgabe erfordert eine gemeinschaftliche Bestimmung von $\Delta\omega$, A_0, ω_1, ω_2 und $\Delta\lambda$ durch allmähliche Annäherung. Es ist hier zweckmäßig, den Parameter A_0 nur im ersten Quadranten zu definieren. Die Zählung von s, ω und λ erfolgt dann von dem in der Rechenrichtung gesehen hinter P_1 liegenden Äquatorschnittpunkt P_0 aus, auf den ein positives Maximum unmittelbar folgt. Die Rechenrichtung ist somit nur bei der Ermittlung der Azimute A_1 und A_2 zu berücksichtigen. Zur Aufstellung der Quadrantenkriterien dient die nachstehende Hilfsfigur Abb. 22.

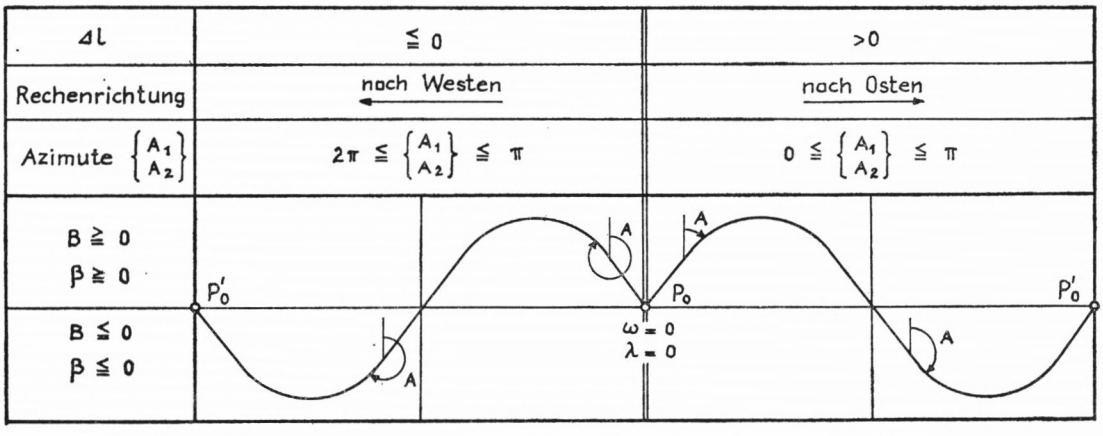

Abb. 22

Berechnungsfolge:

Der Rechenablauf umfaßt folgende Schritte:

1. Vorprogramm II mit den unter 3.2.2 angegebenen Einzelschritten.
2. Übergang auf reduzierte Breiten durch direkte Berechnung von $\sin\beta_1$, $\cos\beta_1$, $\sin\beta_2$, $\cos\beta_2$ vermittels der Beziehungen (2.2).
3. Gemeinschaftliche Bestimmung von $\Delta\omega$, A_0, ω_1, ω_2 und $\Delta\lambda$ durch allmähliche Annäherung:

   a) Die Koeffizienten B_2, B_4, B_6 werden vor Beginn der Iteration nach (2.84) berechnet.

   b) Als Ausgangswert für die Iteration dient der Absolutwert des ellipsoidischen Längenunterschiedes:

$$|\Delta l| \Rightarrow \Delta\lambda^{(i)}.$$

   c) Berechnung von $\Delta\omega^{(i)}$ durch Anwendung des sphärischen Kosinussatzes auf Dreieck $P_{1K}\,P_{nK}\,P_{2K}$:

$$\cos\Delta\omega^{(i)} = \sin\beta_1 \sin\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos\Delta\lambda^{(i)}. \tag{3.62}$$

   Die Quadrantenfrage für $\Delta\omega^{(i)}$ wird durch das UP. arccos x selbständig gelöst, da $0 \leqq \Delta\omega^{(i)} \leqq \pi$ ist.

   d) Berechnung von $A_0^{(i)}$ aus

$$\sin A_0^{(i)} = \cos\beta_1 \cos\beta_2 \frac{\sin\Delta\lambda^{(i)}}{\sin\Delta\omega^{(i)}}. \tag{3.63}$$

   Da $0 \leqq \Delta\lambda^{(i)} \leqq \pi$ und $0 \leqq \Delta\omega^{(i)} \leqq \pi$ ist, ergibt sich daraus $\sin A_0^{(i)} \geqq 0$ bzw. $0 \leqq A_0^{(i)} \leqq \frac{\pi}{2}$.

e) Berechnung von $\omega_1^{(i)}$ aus

$$\sin \omega_1^{(i)} = \frac{\sin \beta_1}{\cos A_0^{(i)}}. \tag{3.64}$$

Zur Ermittlung des Quadranten von $\omega_1^{(i)}$ wird ferner $\cos \omega_1^{(i)}$ berechnet (vgl. (3.35)):

$$\cos \omega_1^{(i)} = -\frac{\sin \beta_1 \cos \Delta\omega^{(i)} - \sin \beta_2}{\cos A_0^{(i)} \sin \Delta\omega^{(i)}}. \tag{3.65}$$

Die Quadrantenkriterien lauten dann:

$\omega_1^{(i)}$ Quadrant	I	II	III	IV
$\sin \omega_1^{(i)}$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos \omega_1^{(i)}$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

f) $\omega_2^{(i)}$ ergibt sich unmittelbar aus

$$\omega_2^{(i)} = \omega_1^{(i)} + \Delta\omega^{(i)}.$$

g) Berechnung der Wallisschen Integrale $\Delta W_2^{(i)}$, $\Delta W_4^{(i)}$, $\Delta W_6^{(i)}$ nach (3.55).

h) Ein zweiter Näherungswert für $\Delta\lambda$ ergibt sich jetzt aus (vgl. (2.83) und (2.84))

$$\Delta\lambda^{(i+1)} = \Delta l - \sin A_0^{(i)} \left[- \mathfrak{a}\, \Delta\omega^{(i)} + \cos^2 A_0^{(i)} B_2 \Delta W_2^{(i)} + \cos^4 A_0^{(i)} B_4 \Delta W_4^{(i)} + \cos^6 A_0^{(i)} B_6 \Delta W_6^{(i)} + \ldots \right]. \tag{3.66}$$

i) Bildung der Differenz der Näherungswerte

$$d = \Delta\lambda^{(i)} - \Delta\lambda^{(i+1)}.$$

k) Bildung der Prüfgröße

$$p = |d| - \varepsilon.$$

ε ist dabei die Genauigkeitsschranke.

l) Wenn $p \geqq 0$, dann $\Delta\lambda^{(i+1)} \Rightarrow \Delta\lambda^{(i)}$ und Fortsetzung der Iteration;
wenn $p < 0$, dann $\Delta\lambda^{(i+1)} \Rightarrow \Delta\lambda$ und Beendigung der Iteration.

m) Ist die Iteration beendet, dann stehen auch $\Delta\omega$, (A_0), ω_1 und ω_2 fest:

$$\begin{aligned} \Delta\omega^{(i)} &\Rightarrow \Delta\omega \\ A_0^{(i)} &\Rightarrow (A_0) \\ \omega_1^{(i)} &\Rightarrow \omega_1 \\ \omega_2^{(i)} &\Rightarrow \omega_2. \end{aligned}$$

4. Das Azimut A_1 wird berechnet aus

$$\sin A_1 = \frac{\sin (A_0)}{\cos \beta_1}. \tag{3.67}$$

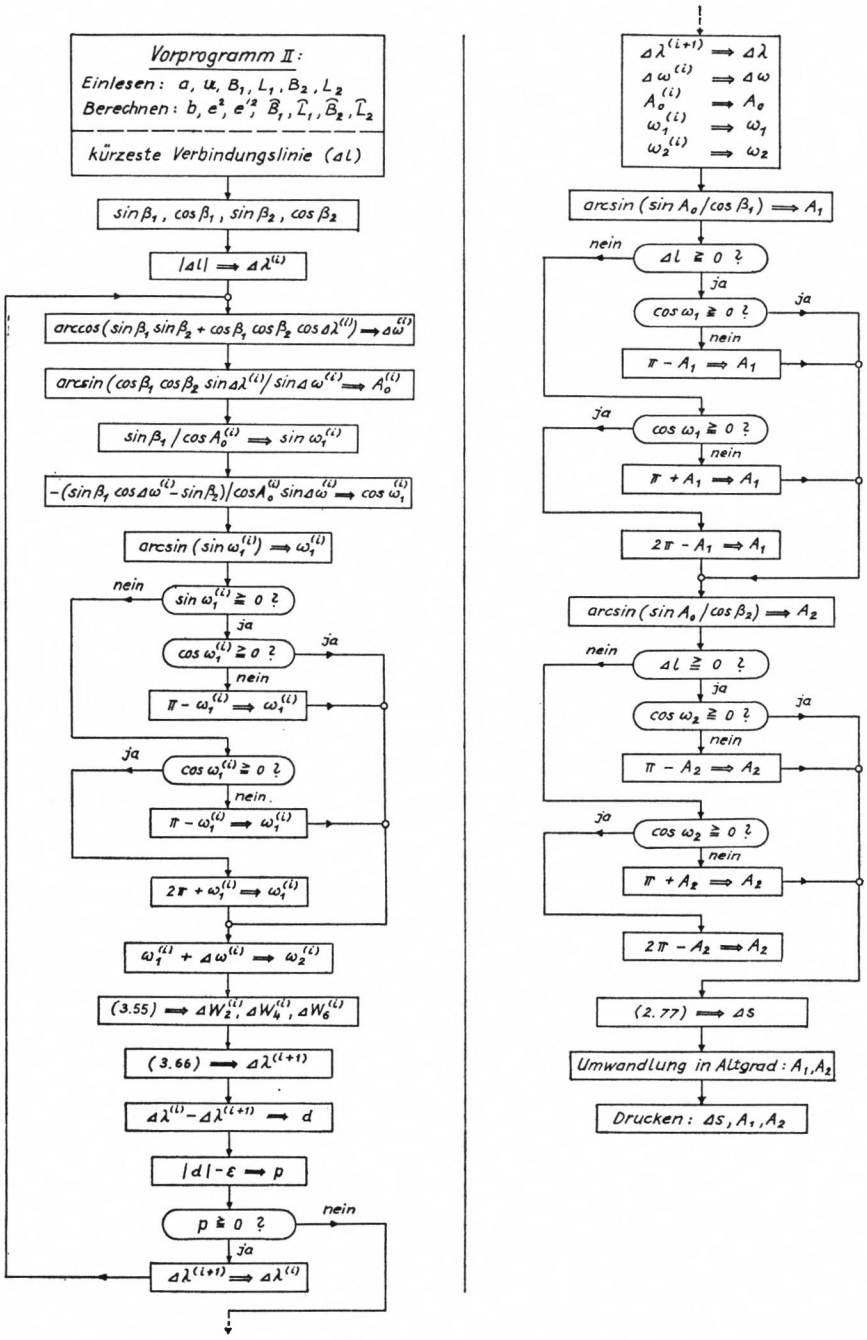

Abb. 23: Flußdiagramm zur Lösung der 2. Hauptaufgabe nach Levallois und Dupuy

Die Quadrantenbestimmung erfolgt mit Hilfe von ω_1 bzw. $\cos \omega_1$ und dem Vorzeichen von Δl. Aus Abb. 22 lassen sich folgende Kriterien entnehmen:

A_1 Quadrant	I	II	III	IV
Δl	$\geqq 0$		< 0	
ω_1	$0 \leqq \omega_1 \leqq \frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2} \leqq \omega_1 \leqq 2\pi$	$\frac{\pi}{2} < \omega_1 < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \omega_1 < \frac{3\pi}{2}$	$0 \leqq \omega_1 \leqq \frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2} \leqq \omega_1 \leqq 2\pi$
$\cos \omega_1$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

5. Das Azimut A_2 ergibt sich aus

$$\sin A_2 = \frac{\sin (A_0)}{\cos \beta_2}. \tag{3.68}$$

Der Quadrant von A_2 wird mit Hilfe der Kriterien unter 4. erhalten, wenn an Stelle von ω_1 die Größe ω_2 verwendet wird.

6. Berechnung der Entfernung Δs mit (2.77).

7. Umwandlung von A_1 und A_2 in Altgrad und Drucken von Δs, A_1 und A_2.

Der genaue Rechenablauf ist in dem Flußdiagramm Abb. 23 aufgezeichnet.

Programmbeschreibung:

Das Programm für die Zuse Z 23 belegt die Speicherplätze 5000 bis 6148. Die Befehlsfolge umfaßt 648 Worte. Startadresse ist 5500 (5547). Die Ausgangsdaten sind in der gleichen Form wie bei den vorausgehenden Programmen für die 2. Hauptaufgabe einzugeben. Die Genauigkeitsschranke ε wurde mit $1 \cdot 10^{-12}$ festgelegt.

Rechenbeispiel:

Die Durchrechnung des Zahlenbeispiels von Seite 73 erfolgte mit den vorgegebenen Ausgangswerten B_1, L_1 und den nach dem vorausgehenden Rechenprogramm für die 1. Hauptaufgabe gefundenen Werten B_2, L_2. Die Rechenzeit betrug 3,2 (5,5) Minuten. Es ergaben sich dabei folgende Abweichungen gegenüber den Werten der 1. Hauptaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta s &\quad 0{,}001 \text{ mm} \\ A_1 &\quad 4'' \cdot 10^{-8} \\ A_2 &\quad 8'' \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Das Rechenbeispiel wird nachstehend angegeben:

```
LOESUNG DER 2. GEODAET. HAUPTAUFGABE (LEVALLOIS U. DUPUY)


ELLIPSOIDKONSTANTEN:  GR. HALBACHSE (IN METER)   ,6378388000/+07
                      ABPLATTUNG = 1 :  ,297000000o/+o3


GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGS- U. ENDPUNKTES:
      G            M            S

B1 =  ,5oo/+o2     o            o

L1 =  ,1oo/+o2     o            o

B2 = -,62o/+o2     ,57o/+o2     ,32o386619ooo/+o1

L2 =  ,1o5/+o3     ,5oo/+o1     ,3829966oo6oo/+o2

ENTFERNUNG (IN METER)   ,15oooooooooooo1/+o8


AZIMUTE:
      G        M        S

A1 =  139°     59'      ,5999999996/+o2

A2 =  114°     46'      ,414839o7o9/+o2
```

3.3.4 *Rechenprogramm für die erste Hauptaufgabe nach der Lösung von Hubeny*

Die Zählung der Bogenlänge s und damit von ω und λ beginnt hier wie beim Verfahren nach Levallois und Dupuy bei dem Äquatorschnittpunkt P_0 der geodätischen Linie, auf den in der Rechenrichtung der Punkt P_1 unmittelbar folgt. Somit kann der Parameter A_0 wieder alle Werte zwischen 0 und 2π annehmen. Zur Herleitung der Quadranten- und Vorzeichenkriterien kann die Hilfsfigur Abb. 20 verwendet werden.

Die Lösung der 1. Hauptaufgabe erfordert eine indirekte Berechnung der Bogenlänge ω_2 aus der Gleichung (2.89), wobei Hubeny jedoch eine Iteration umgeht. Von den beiden unter 2.2.4 angegebenen Möglichkeiten, aus dem Näherungswert $\omega_{2,0}$ den endgültigen Wert ω_2 zu ermitteln, ist der Weg der differentiellen Zuschläge für die Automatenrechnung der geeignetere; hier kann nämlich mit geringem Programmierungsaufwand durch Anordnung dieses Rechenabschnittes zu einer kleinen Iterationsschleife der Vorgang so oft wiederholt werden, bis eine gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Dieser Weg wird deshalb für das Rechenprogramm verwendet.

Berechnungsfolge:

1. Vorprogramm I (siehe Seite 64).
2. Berechnung von $\cos \beta_1$ nach (2.2).

3. Ermittlung des Parameters A_0 mit Hilfe des Satzes von Clairaut aus

$$\sin A_0 = \sin A_1 \cos \beta_1. \tag{3.53}$$

Der Quadrant von A_0 hängt von A_1 und B_1 ab; aus Abb. 20 ergeben sich folgende Kriterien:

A_0 Quadrant	I	II	III	IV
A_1	$0 \leqq A_1 \leqq \pi$		$\pi < A_1 < 2\pi$	
$\sin A_1$	$\geqq 0$		< 0	
B_1	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

4. Berechnung von λ_1 aus

$$\cos \lambda_1 = \frac{\cos A_1}{\cos A_0}. \tag{3.69}$$

Der Quadrant von λ_1 wird durch das UP. arccos x geregelt. Das Vorzeichen von λ_1 läßt sich mit Hilfe von Abb. 20 angeben:

Wenn $0 \leqq A_1 \leqq \pi$ $(\sin A_1 \geqq 0)$, dann $\lambda_1 \geqq 0$;

wenn $\pi < A_1 < 2\pi$ $(\sin A_1 < 0)$, dann $\lambda_1 < 0$.

5. Berechnung von ω_1 aus

$$\cos \omega_1 = \frac{\operatorname{tg} A_0}{\operatorname{tg} A_1}. \tag{3.70}$$

Die Quadrantenreglung erfolgt durch das UP. arccos x.

6. Berechnung der Koeffizienten A_s, B_s, C_s, D_s, E_s, F_s und A_l, B_l, C_l, D_l, E_l aus (2.88) und (2.94).

7. Berechnung der Koeffizienten $[A_s]$, $[B_s]$, $[C_s]$, $[D_s]$, $[E_s]$ und $[A_l]$, $[B_l]$, $[C_l]$, $[D_l]$ aus (2.90) und (2.96).

8. Berechnung der zu ω_1 gehörigen Bogenlänge s_1 nach (2.89). Die Gleichung (2.89) wird auch später noch benötigt; es wird deshalb für die Berechnung von $s = f(\omega)$ ein Unterprogramm (UP. s) mit dem Parameter ω hergestellt.

9. $$s_2 = s_1 + \Delta s.$$

10. Berechnung eines ersten Näherungswertes für ω_2 aus

$$\omega_{(2)} \doteq \frac{s_2}{[A_s]}.$$

11. Berechnung eines zweiten Näherungswertes für ω_2 aus

$$\omega_{2,0} = \frac{s_2 - [B_s] \cos \omega_{(2)} \sin \omega_{(2)}}{[A_s]}. \tag{2.97}$$

12. Ermittlung des endgültigen Wertes ω_2:

a) Berechnung der zu $\omega_{2,0}$ gehörigen ellipsoidischen Bogenlänge $s_{2,0}$ mit UP. s.

b) Ermittlung eines differentiellen Zuschlages

$$d\omega_2 = \frac{s_2 - s_{2,0}}{[A_s] + [B_s] \cos 2\omega_{2,0}}. \tag{2.100}$$

c) Die Bogenlänge ω_2 ist dann

$$\omega_2 = \omega_{2,0} + d\omega_2.$$

d) Berechnung der zu ω_2 gehörigen ellipsoidischen Bogenlänge s_2' mit UP. s.

e) Die Änderung der Bogenlänge ist

$$d = s_2 - s_2'.$$

f) Bildung der Prüfgröße

$$p = |d| - \varepsilon,$$

wobei ε wieder eine beliebig wählbare Genauigkeitsschranke ist.

g) Wenn $p \geqq 0$, dann $\omega_2 \Rightarrow \omega_{2,0}$ und Fortsetzung der Iteration;
wenn $p < 0$, dann Beendigung der Iteration.

13. Berechnung von β_2 aus

$$\sin \beta_2 = \cos A_0 \sin \omega_2. \tag{3.71}$$

Das Vorzeichen von β_2 wird durch das UP. arcsin x geregelt.

14. Berechnung von λ_2 aus

$$\operatorname{tg} \lambda_2 = \sin A_0 \operatorname{tg} \omega_2. \tag{3.72}$$

Zur Bestimmung des Quadranten von λ_2 wird noch berechnet

$$\sin \lambda_2 = \operatorname{tg} A_0 \operatorname{tg} \beta_2. \tag{3.73}$$

Der Quadrant von λ_2 ergibt sich dann aus den nachstehenden Kriterien:

λ_2 Quadrant	I	II	III	IV
$\sin \lambda_2$	$\geqq 0$		< 0	
$\operatorname{tg} \lambda_2$	$\geqq 0$	< 0	$\geqq 0$	< 0

Für das Vorzeichen von λ_2 gilt:

Wenn $0 \leqq A_1 \leqq \pi$ $(\sin A_1 \geqq 0)$, dann $+\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2$;
wenn $\pi < A_1 < 2\pi$ $(\sin A_1 < 0)$, dann $\lambda_2 - 2\pi \Rightarrow \lambda_2$.

15. Berechnung von A_2 aus

$$\sin A_2 = \sin A_1 \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2}. \tag{3.74}$$

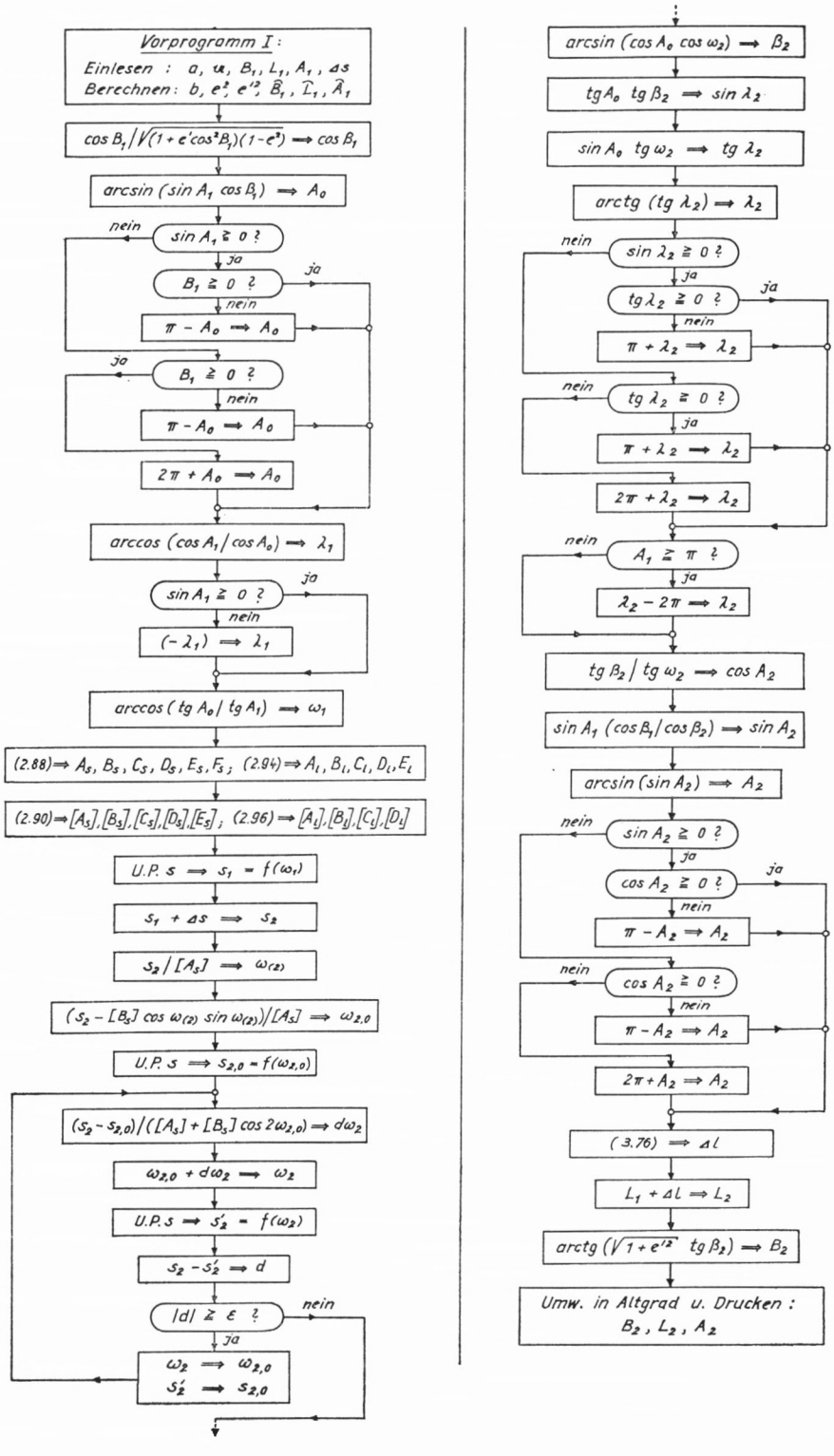

Abb. 24: Flußdiagramm zur Lösung der 1. Hauptaufgabe nach Hubeny

Zur Ermittlung des Quadranten von A_2 wird außerdem berechnet

$$\cos A_2 = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\operatorname{tg} \omega_2}. \tag{3.75}$$

Es gelten dann nachstehende Kriterien:

A_2 Quadrant	I	II	III	IV
$\sin A_2$	$\geqq 0$		< 0	
$\cos A_2$	$\geqq 0$	< 0	< 0	$\geqq 0$

16. Berechnung von Δl aus

$$\begin{aligned} \Delta l = \lambda_2 - \lambda_1 &+ [A_l]\ (\omega_2 - \omega_1) \\ &+ [B_l]\ (\cos \omega_2 \sin \omega_2 - \cos \omega_1 \sin \omega_1) \\ &+ [C_l]\ (\cos \omega_2 \sin^3 \omega_2 - \cos \omega_1 \sin^3 \omega_1) \\ &+ [D_l]\ (\cos \omega_2 \sin^5 \omega_2 - \cos \omega_1 \sin^5 \omega_1). \end{aligned} \tag{3.76}$$

17. Die geographische Länge L_2 ergibt sich zu

$$L_2 = L_1 + \Delta l.$$

18. Berechnung von B_2 aus β_2 mit

$$\operatorname{tg} B_2 = \sqrt{1 + e'^2}\ \operatorname{tg} \beta_2. \tag{2.1}$$

19. Umwandlung von B_2, L_2, A_2 in Altgrad und Drucken.

Den genauen Programmablauf zeigt das Flußdiagramm Abb. 24.

Programmbeschreibung:

Das Rechenprogramm belegt 1394 Speicherplätze (von 3000 bis 4394), wovon auf die Befehlsfolge 894 Worte entfallen. Es ist mit der Adresse 3500 zu starten. Die Ausgangsdaten sind ebenfalls in der auf Seite 73 angegebenen Weise einzulesen. Die Genauigkeitsschranke ε wurde zu $1 \cdot 10^{-5}$ m gewählt.

Rechenbeispiel:

Zur Durchrechnung des Zahlenbeispiels von Seite 73 waren hier 1,9 (4,3) Minuten Rechenzeit erforderlich. Die Rückrechnung mit dem Gegenazimut ergab folgende Abweichungen gegenüber den Ausgangswerten:

$$\begin{array}{ll} B_1 & 4'' \cdot 10^{-9} \\ L_1 & 3'' \cdot 10^{-8} \\ A_1 & 1'' \cdot 10^{-8}. \end{array}$$

Das vollständige Beispiel wird untenstehend angegeben.

Auf die Erstellung eines Rechenprogramms für die 2. Hauptaufgabe wird verzichtet, da die von Hubeny verwendeten Gaußschen Gleichungen für die Automatenrechnung nicht geeignet sind und außerdem das Programm im Vergleich zu den für die 2. Hauptaufgabe bereits vorliegenden Lösungsprogrammen verhältnismäßig umfangreich werden würde.

Rechenbeispiel:

```
LOESUNG DER 1. GEODAET. HAUPTAUFGABE (HUBENY)

ELLIPSOIDKONSTANTEN:  GR. HALBACHSE (IN METER)   ,6378388000/+07
                      ABPLATTUNG = 1 :  ,297000000/+03

GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGSPUNKTES:
      G          M          S

B1 =  ,500/+02   0          0

L1 =  ,100/+02   0          0

A1 =  ,140/+03   0          0

ENTFERNUNG (IN METER)   ,15000000000/+08

GEOGR. KOORDINATEN DES ENDPUNKTES:
          G        M        S

B2 =   -  62°      57'      ,32038670 8/+01

L2 =      105°      5'      ,3829966426/+02

A2 =      114°     46'      ,4148390343/+02
```

Rückrechnung mit Gegenazimut:

```
GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGSPUNKTES:
      G          M          S

B1 = -,620/+02   ,570/+02   ,32038670 80/+01

L1 =  ,105/+03   ,500/+01   ,3829966426/+02

A1 =  ,294/+03   ,460/+02   ,4148390343/+02

ENTFERNUNG (IN METER)   ,15000000000/+08

GEOGR. KOORDINATEN DES ENDPUNKTES:
          G        M        S

B2 =      50°      0        ,4088443841/-08

L2 =       9°     59°       ,5999999997/+02

A2 =     319°     59°       ,5999999999/+02
```

3.3.5 *Rechenprogramme für die Lösungen nach Sodano*

Die unter 2.2.5 zusammengestellten Lösungsformeln von Sodano eignen sich unmittelbar zur Verwendung in Rechenautomaten. Sodano gibt in [40] außerdem vollständige Kriterien zur Quadranten- und Vorzeichenbestimmung an, die jedoch für die zu erstellenden Rechenprogramme teilweise etwas abgeändert und vereinfacht werden.

a) Erste Hauptaufgabe

Es ist zu erwarten, daß die Beziehungen (2.129) und (2.134) nur Ergebnisse mit verhältnismäßig geringer Genauigkeit zulassen; deshalb wird das Rechenprogramm versuchsweise so abgefaßt, daß neben der direkten Lösung eine Unterteilung der geodätischen Linie in kürzere Teilstrecken und somit eine Lösung der 1. Hauptaufgabe nach dem neuen Verfahren der „progressiven Iteration" möglich ist.

Berechnungsfolge:

Nachstehend werden lediglich die zur direkten Lösung der 1. Hauptaufgabe erforderlichen Rechenschritte angegeben:

1. Vorprogramm I (siehe Seite 64).

2. Berechnung von $\sin\beta_1$ und $\cos\beta_1$ nach den Beziehungen (2.2).

3. (2.124) $$\cos\beta_m = \cos\beta_1 \sin A_1 .$$

4. (2.125) $$g = \cos\beta_1 \cos A_1 .$$

5. (2.126) $$\Delta\sigma_s = \frac{\Delta s}{b} .$$

6. (2.127) $$m_1 = \left(1 + \frac{e'^2}{2}\sin^2\beta_1\right)\left(1 - \cos^2\beta_m\right) .$$

7. (2.128) $$a_1 = \left(1 + \frac{e'^2}{2}\sin^2\beta_1\right)\left(\sin^2\beta_1 \cos\Delta\sigma_s + g \sin\beta_1 \sin\Delta\sigma_s\right) .$$

8. Berechnung von $\Delta\sigma$ mit Hilfe der Beziehung (2.129).

9. Berechnung von $\sin\beta_2$ aus

(2.130) $$\sin\beta_2 = \sin\beta_1 \cos\Delta\sigma + g \cdot \sin\Delta\sigma .$$

10. Berechnung von $\cos\beta_2$ aus

$$\cos\beta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\beta_2} .$$

11. Berechnung von A_2 aus

(3.77) $$\operatorname{tg} A_2 = \frac{\cos\beta_m}{g \cdot \cos\Delta\sigma - \sin\beta_1 \sin\Delta\sigma} .$$

Zur Quadrantenbestimmung wird neben dem Vorzeichen von tg A_2 das Azimut A_1 bzw. das Vorzeichen von sin A_1 verwendet:

A_2 Quadrant	I	II	III	IV
A_1	$0 \leqq A_1 \leqq \pi$		$\pi < A_1 < 2\pi$	
$\sin A_1$	$\geqq 0$		< 0	
$\operatorname{tg} A_2$	$\geqq 0$	< 0	$\geqq 0$	< 0

12. Berechnung von $\Delta\lambda$ aus

$$\operatorname{tg} \Delta\lambda = \frac{\sin \Delta\sigma \, |\sin A_1|}{\cos \beta_1 \cos \Delta\sigma - \sin \beta_1 \sin \Delta\sigma \cos A_1}. \tag{3.78}$$

Im Hinblick auf die Quadrantenbestimmung wird dabei der Absolutwert von sin A_1 verwendet, so daß zunächst stets positive Werte für $\Delta\lambda$ erhalten werden; die Ermittlung des Vorzeichens erfolgt dann anschließend an die Quadrantenbestimmung. Der Quadrant von $\Delta\lambda$ läßt sich mit Hilfe des Vorzeichens von tg $\Delta\lambda$ und der sphärischen Bogenlänge $\Delta\sigma$ bzw. des Vorzeichens von sin $\Delta\sigma$ angeben:

$\Delta\lambda$ Quadrant	I	II	III	IV
$\Delta\sigma$	$0 \leqq \Delta\sigma \leqq \pi$		$\pi < \Delta\sigma < 2\pi$	
$\sin \Delta\sigma$	$\geqq 0$		< 0	
$\operatorname{tg} \Delta\lambda$	$\geqq 0$	< 0	$\geqq 0$	< 0

Für das Vorzeichen von $\Delta\lambda$ gilt:

Wenn $0 \leqq A_1 \leqq \pi$, dann $\Delta\lambda \geqq 0$;
wenn $\pi < A_1 < 2\pi$, dann $\Delta\lambda < 0$.

13. Berechnung von Δl mit Hilfe von (2.134).

14. $L_2 = L_1 + \Delta l$.

15. Übergang auf die ellipsoidische Breite B_2 mit

$$\sin B_2 = \frac{\sin \beta_2}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_2}}. \tag{3.79}$$

16. Umwandlung von B_2, L_2, A_2 in Altgrad und Drucken.

Das nachstehende Flußdiagramm Abb. 25 stellt zugleich auch den Rechenablauf bei schrittweiser Berechnung dar.

Programmbeschreibung:

Das Rechenprogramm belegt die Trommelzellen 3000 bis 4154. Die Befehlsfolge umfaßt 611, bei schrittweiser Berechnung 654 Worte. Die Startadresse ist 3500 (3547). Zur schrittweisen Lösung ist nach der Entfernung Δs zusätzlich die Länge δs der Teilstrecke einzugeben. Für $\delta s = 0$ erfolgt die Berechnung unter Verwendung der Gesamtentfernung Δs auf direktem Wege. Im übrigen sind die Ausgangsdaten in der bekannten Weise abzulochen.

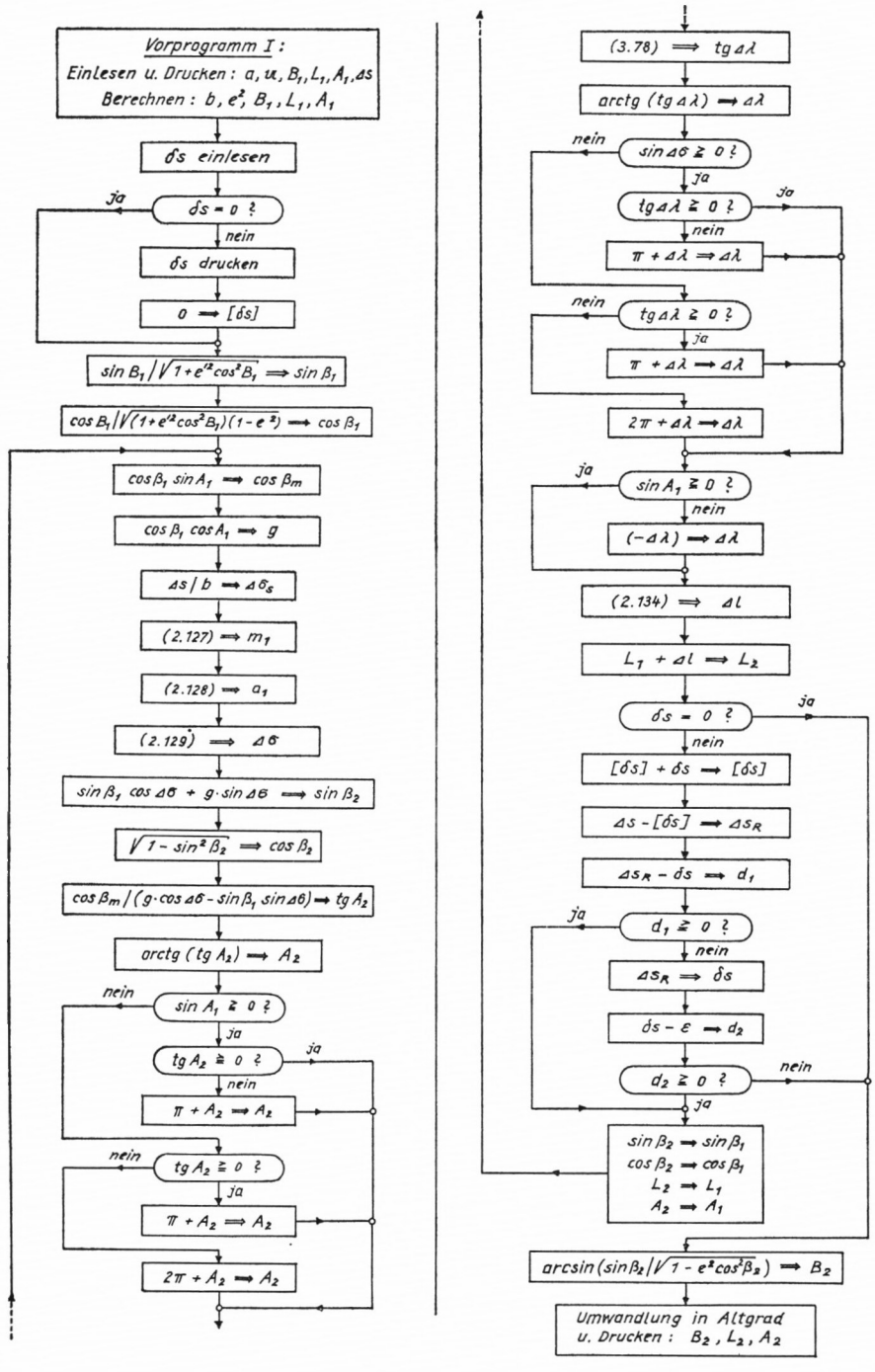

Abb. 25: Flußdiagramm zur Lösung der 1. Hauptaufgabe nach Sodano

Rechenbeispiel:

Das Zahlenbeispiel von Seite 73 wurde zunächst direkt berechnet, wofür eine Rechenzeit von 0,9 (3,3) Minuten erforderlich war. Das Beispiel ist untenstehend angegeben.

Da sich erwartungsgemäß erhebliche Abweichungen gegenüber den Ergebnissen der vorausgehenden Rechenprogramme zeigen, wird die Berechnung auch in Teilstrecken von 100, 500 und 1000 km Länge durchgeführt. Die Ergebnisse einschließlich der Rechenzeiten werden nachstehend zusammengestellt:

Länge der Teilstrecke	B 2	L 2	A 2	Rechenzeit
km	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	Min.
100	—62 57 03,2089	105 05 38,3236	114 46 41,4625	106,2
500	03,2089	38,3235	41,4626	21,2
1000	03,2088	38,3232	41,4628	10,7
15000 (direkt)	03,2116	38,3380	41,4510	0,9
Sollwerte	—62 57 03,2039	105 05 38,2977	114 46 41,4839	

Die Ergebnisse zeigen, daß eine Unterteilung der geodätischen Linie in kleinere Abschnitte zwar eine spürbare, jedoch keineswegs ausreichende Genauigkeitssteigerung zur Folge hat. Kleinere Teilstrecken als 1000 km bewirken bei stark erhöhten Rechenzeiten kaum einen zusätzlichen Genauigkeitsgewinn.

Rechenbeispiel:

```
LOESUNG DER 1. GEODAET. HAUPTAUFGABE (SODANO)


ELLIPSOIDKONSTANTEN:  GR. HALBACHSE (IN METER)   ,6378388000000/+07
                      ABPLATTUNG = 1 :  ,297000000000/+03


GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGSPUNKTES:
      G          M          S

B1 = ,500/+02    0          0

L1 = ,100/+02    0          0

A1 = ,140/+03    0          0

ENTFERNUNG (IN METER)   ,150000000000/+08

GEOGR. KOORDINATEN DES ENDPUNKTES:
          G        M        S

B2 =   - 62'      57'      ,3211642459/+01

L2 =     105'      5'      ,3833798063/+02

A2 =     114'     46'      ,4145096065/+02
```

b) Zweite Hauptaufgabe

Dem Rechenprogramm zur direkten Lösung der 2. Hauptaufgabe werden die bis zu den Gliedern mit $\mathfrak{a}^3$ bzw. e'^6 reichenden genaueren Formeln (2.119) und (2.122) zugrunde gelegt. Die Quadrantenregeln für das Azimut A_1 können direkt aus [40] übernommen werden, die Kriterien für A_2 erfordern eine geringe Abänderung, da Sodano das Gegenazimut A_{21} berechnet.

Berechnungsfolge:

1. Vorprogramm II (siehe S. 65).
2. Berechnung von $\sin\beta_1$, $\cos\beta_1$, $\sin\beta_2$, $\cos\beta_2$, nach den Beziehungen (2.2).
3. (2.111) $$a' = \sin\beta_1 \sin\beta_2,$$
   (2.112) $$b' = \cos\beta_1 \cos\beta_2.$$
4. Berechnung von $\Delta\sigma'$ aus
   (2.110) $$\cos\Delta\sigma' = a' + b' \cos\Delta l.$$

   Durch das UP. $\arccos x$ wird gleichzeitig die Quadrantenfrage geregelt.

5. (2.114) $$c' = \frac{b' \sin\Delta l}{\sin\Delta\sigma'}.$$
6. (2.115) $$m' = 1 - c'^2.$$
7. Berechnung von $\Delta\lambda$ mit Hilfe von (2.119).
8. Berechnung von $\Delta\sigma$ aus
   (2.120) $$\cos\Delta\sigma = a' + b' \cos\Delta\lambda.$$

   $\Delta\sigma$ wird durch das UP. $\arccos x$ im richtigen Quadranten erhalten.

9. (2.121) $$\cos\beta_m = \frac{b' \sin\Delta\lambda}{\sin\Delta\sigma}.$$
10. $$\sin^2\beta_m = 1 - \cos^2\beta_m.$$
11. Berechnung der Koeffizienten A_0, B_0, C_0, D_0 nach (2.123).
12. (3.80) $$\cos 2\sigma = \frac{2a'}{\sin^2\beta_m} - \cos\Delta\sigma.$$
13. (3.81) $$\cos 4\sigma = 2\cos^2 2\sigma - 1.$$
14. (3.82) $$\cos 6\sigma = 4\cos^3 2\sigma - 3\cos 2\sigma.$$
15. Berechnung von Δs mit Hilfe von (2.122).
16. Berechnung des Azimutes A_1 aus
    (3.83) $$\operatorname{tg} A_1 = \frac{\sin\Delta\lambda \cos\beta_2}{\sin\beta_2 \cos\beta_1 - \cos\Delta\lambda \sin\beta_1 \cos\beta_2}.$$

Für den Quadranten von A_1 gelten folgende Kriterien:

A_1 Quadrant	I	II	III	IV
Δl	$\geqq 0$		< 0	
$\operatorname{tg} A_1$	$\geqq 0$	< 0	$\geqq 0$	< 0

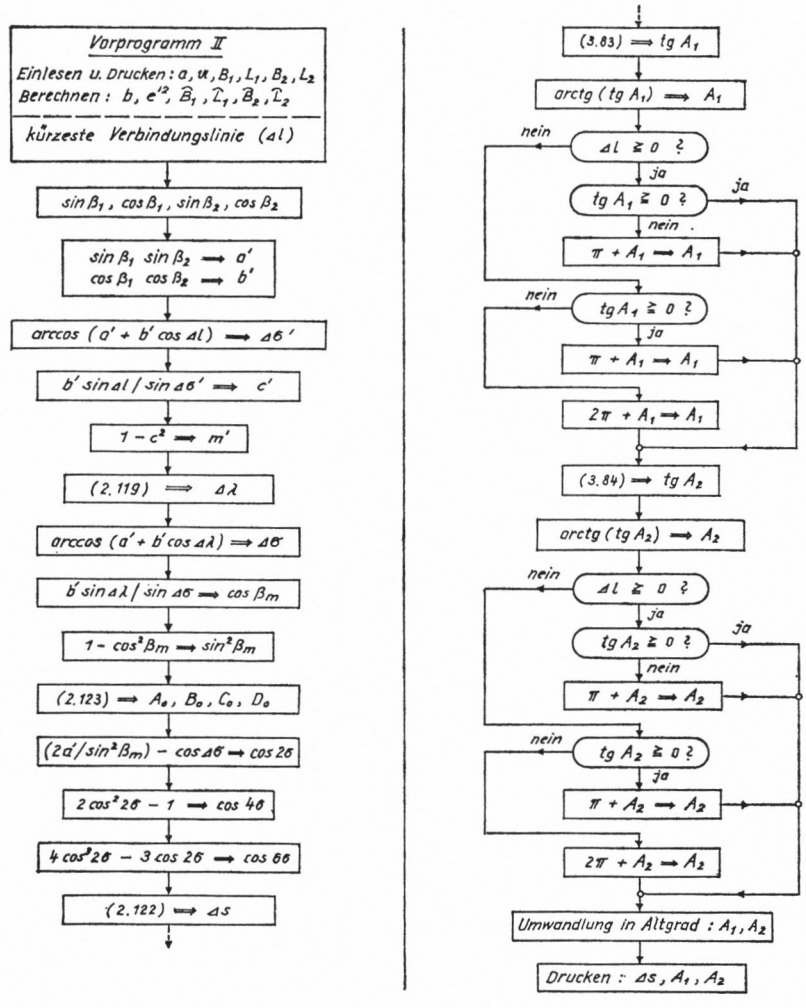

Abb. 26: Flußdiagramm zur Lösung der 2. Hauptaufgabe nach Sodano

17. Berechnung des Azimuts A_2 aus

$$\text{tg } A_2 = \frac{\sin \Delta\lambda \cos \beta_1}{\sin \beta_2 \cos \beta_1 \cos \Delta\lambda - \sin \beta_1 \cos \beta_2} \tag{3.84}$$

und Quadrantenbestimmung mit Hilfe folgender Kriterien:

A_2 Quadrant	I	II	III	IV
Δl	$\geqq 0$		< 0	
tg A_2	$\geqq 0$	< 0	$\geqq 0$	< 0

18. Umwandlung von A_1 und A_2 in Altgrad.

19. Drucken von Δs, A_1 und A_2.

Der Programmablauf ist in dem Flußdiagramm Abb.26 aufgezeichnet.

Programmbeschreibung:

Das Rechenprogramm belegt die Speicherplätze 5000 bis 6370. Es ist mit der Adresse 5500 (5547) zu starten. Die Befehlsfolge umfaßt 870 Worte. Die Eingabe der Ausgangsdaten hat wieder in der auf Seite 78 angegebenen Weise zu erfolgen.

Rechenbeispiel:

Als Ausgangswerte wurden hier neben den vorgegebenen Koordinaten B_1, L_1 die mit dem Rechenprogramm nach Hubeny für die 1. Hauptaufgabe gewonnenen Werte B_2, L_2 verwendet. Die Rechenzeit betrug 1,2 (3,5) Minuten. Die Abweichungen der nachstehend angegebenen Ergebnisse gegenüber den Ausgangswerten der 1. Hauptaufgabe sind:

$$\begin{array}{ll} \Delta s & 0{,}174\ \text{mm} \\ A_1 & 2{,}2'' \cdot 10^{-6} \\ A_2 & 5{,}8'' \cdot 10^{-6}. \end{array}$$

```
LOESUNG DER 2. GEODAET. HAUPTAUFGABE (SODANO)


ELLIPSOIDKONSTANTEN:  GR. HALBACHSE (IN METER)   ,6378388000/+07
                      ABPLATTUNG = 1 :  ,297000000/+03


GEOGR. KOORDINATEN DES ANFANGS- U. ENDPUNKTES:
      G            M            S

B1 =  ,500/+02     0            0

L1 =  ,100/+02     0            0

B2 = -,620/+02     ,570/+02     ,32038670800o/+01

L2 =  ,105/+03     ,500/+01     ,38299664260o/+02

ENTFERNUNG (IN METER)   ,150000000001736/+08


AZIMUTE:
      G        M        S

A1 =  139°     59'      ,5999999775/+02

A2 =  114°     46'      ,4148389762/+02
```

3.4 Übersicht über die erstellten Rechenprogramme

Die erstellten Rechenprogramme zur Lösung der geodätischen Hauptaufgaben werden nachstehend zusammengestellt:

Rechenprogramm (Verfahren)	Speicherbedarf (Trommelzellen)	Länge der Befehlsfolge (Worte)	Startadresse	Bemerkungen
1. Hauptaufgabe				
Bessel	3000–4281	781	3500 (3547)	indirekte Lösung
Helmert	3000–4073	573	3500 (3547)	direkte Lösung
Levallois u. Dupuy	3000–4116	616	3500 (3547)	indirekte Lösung
Hubeny	3000–4396	894	3500 (3549)	indirekte Lösung
Sodano	3000–4154	611[1]	3500 (3547)	direkte Lösung
2. Hauptaufgabe:				
Bessel	5000–6509	1009[2]	5500 (5547)	indirekte Lösung
Helmert	5000–6068	568	5500 (5547)	indirekte Lösung
Bodemüller	5000–6178	678	5500 (5547)	direkte Lösung
Levallois u. Dupuy	5000–6148	648	5500 (5547)	indirekte Lösung
Sodano	5000–6370	870	5500 (5547)	direkte Lösung

Die in Klammern beigegebenen Startadressen gelten, wenn bereits bei der vorausgehenden Berechnung dieselben Ellipsoidparameter a, $\mathfrak{a}$ verwendet wurden, so daß diese nicht mehr neu eingelesen zu werden brauchen.

Die Zusammenstellung der Ergebnisse für das Zahlenbeispiel erfolgt unter 3.5.

3.5 Zusammenstellung von Rechenbeispielen

Mit den unter 3.3 erstellten Rechenprogrammen wurden für Untersuchungen über Genauigkeit, Anwendungsbereich und Wirtschaftlichkeit der einzelnen Programme außer dem bereits angegebenen eine Reihe weiterer Zahlenbeispiele für die geodätischen Hauptaufgaben berechnet. Sie erstrecken sich auf geodätische Linien zwischen 100 km und 40000 km Länge, so daß damit gleichzeitig die Verwendbarkeit der Programme sowohl für kurze als auch für mittlere und lange Entfernungen überprüft werden kann. Im einzelnen wurden geodätische Linien folgender Längen berechnet:

Beispiel 1	100 km
Beispiel 2	1000 km
Beispiel 3	ca. 1320 km
Beispiel 4	5000 km
Beispiel 5	10000 km

[1] Bei schrittweiser Berechnung umfaßt die Befehlsfolge 654 Worte.

[2] Ohne Verwendung der Jordanschen Formel sind nur 944 Worte erforderlich.

Beispiel 6	15000 km
Beispiel 7	19900 km
Beispiel 8	40000 km

In der Zusammenstellung ist das bereits früher berechnete Zahlenbeispiel als Beispiel 6 aufgeführt. Beispiel 3 wurde ebenfalls aus [20] entnommen. Beispiel 7 wurde gewählt, um die Leistungsfähigkeit der einzelnen Programme für die 2. Hauptaufgabe bei nahezu diametraler Lage der Punkte P_1 und P_2 untersuchen zu können. Die Entfernung $\Delta s =$ 20000 km konnte nicht berücksichtigt werden, weil der Anwendungsbereich der Rechenprogramme für die 2. Hauptaufgabe wegen der erforderlichen besonderen Eindeutigkeitsuntersuchungen hier etwas eingeschränkt wurde (vgl. Abschnitt 3.2.2). Beispiel 3 wurde auf dem Besselschen Ellipsoid, die übrigen Beispiele wurden auf dem Internationalen Ellipsoid berechnet.

Jedes Beispiel wurde zunächst mit jedem der Rechenprogramme für die 1. Hauptaufgabe durchgerechnet. Um auch bei der 2. Hauptaufgabe die Ergebnisse miteinander vergleichen zu können, wurden hier einheitlich die mit dem offensichtlich sehr genauen Rechenprogramm nach Hubeny erhaltenen Ergebnisse als Ausgangsdaten zugrunde gelegt. Als „Sollwerte" können dann die bei der 1. Hauptaufgabe verwendeten Ausgangsdaten A_1 und Δs sowie das nach Hubeny berechnete Azimut A_2 bezeichnet werden. Beim Rechenprogramm nach Bessel für die 2. Hauptaufgabe wurde die Jordansche Formel (2.42) zur Ermittlung eines Näherungswertes für $\Delta\lambda$ benützt.

Für Wirtschaftlichkeitsuntersuchungen wurden jeweils die vom Automaten benötigten Rechenzeiten festgestellt. Die in den nachstehenden Tabellen enthaltenen Zeitangaben stellen die reinen Rechenzeiten dar. Der Zeitbedarf für das Einlesen der Ausgangsdaten und das Drucken des Protokolls und der Ergebnisse einschließlich der jeweiligen Umwandlung in Altgrad ist darin nicht enthalten. Er beträgt bei der Ausgabe über den Fernschreiber im Durchschnitt insgesamt ca. 2,5 Min., bei der Ausgabe über den Schnellocher ist er natürlich wesentlich niedriger.

Sämtliche Ergebnisse werden in den nachstehenden Tabellen zusammengestellt. Bei den geographischen Koordinaten und den Azimuten werden sie auf $1'' \cdot 10^{-8}$, bei den Entfernungen auf $1 \cdot 10^{-6}$ Meter angegeben.

Den Ergebnissen sind die jeweils auf einem einzigen Lochstreifen untergebrachten Ausgangsdaten in der unmittelbar zur Eingabe in den Rechenautomaten verwendeten Anordnung vorangestellt.

Eingabedaten für die Rechenbeispiele zur 1. Hauptaufgabe:

```
6378388
297
50 0 0
10 0 0
160 0 0
100000

                    70 0 0
40 0 0              -30 0 0
0 0 0               200 0 0
10 0 0              10000000
1000000

                    50 0 0
6377397,155         10 0 0
299,152812853       140 0 0
45 0 0              15000000
10 0 0
29 3 15,4598        -50 0 0
1320284,366         290 0 0
                    310 0 0
6378388             19900000
297
65 0 0              50 0 0
10 0 0              10 0 0
5 0 0               50 0 0
5000000             40000000
```

Rechenbeispiele für die erste Hauptaufgabe:

Beispiel 1:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\alpha = 1:297$

Gegeben: $B_1 = 50°0'0''$, $L_1 = 10°0'0''$, $A_1 = 160°0'0''$
Entfernung $\Delta s = 100000$ m

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	B_2 ° ′ ″	L_2 ° ′ ″	A_2 ° ′ ″	Rechenzeit Min. Sek.
Bessel	49 09 15,0542 3924	10 28 07,8005 7126	160 21 24,9253 9520	2 18
Helmert	15,0542 3923	07,8005 7123	24,9253 9522	1 29
Levallois-Dupuy	15,0542 3927	07,8005 7124	24,9253 9520	1 35
Hubeny	15,0542 3924	07,8005 7125	24,9253 9521	1 52
Sodano	15,054068	07,800670	24,925466	0 55

Beispiel 2:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\alpha = 1:297$
Gegeben: $B_1 = 40°0'0''$, $L_1 = 0°0'0''$, $A_1 = 10°0'0''$
Entfernung $\Delta s = 1000000$ m

Ergebnisse

Rechenprogramm (Verfahren)	B_2 ° ′ ″	L_2 ° ′ ″	A_2 ° ′ ″	Rechenzeit Min. Sek.
Bessel	48 50 25,12158635	2 21 23,31808564	11 39 15,77891027	2 11
Helmert	25,12158546	23,31808538	15,77891004	1 34
Levallois-Dupuy	25,12158620	23,31808560	15,77891021	1 45
Hubeny	25,12158635	23,31808564	15,77891025	1 50
Sodano	25,122659	23,318418	15,779162	0 54

Beispiel 3:

Bessel-Ellipsoid: $a = 6377397{,}155$ m, $\alpha = 1:299{,}152812853$
Gegeben: $B_1 = 45°0'0''$, $L_1 = 10°0'0''$, $A_1 = 29°03'15'',4598$
Entfernung: $\Delta s = 1320284{,}366$ m

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	B_2 ° ′ ″	L_2 ° ′ ″	A_2 ° ′ ″	Rechenzeit Min. Sek.
Bessel	54 59 59,99990600	19 59 59,99999629	36 45 07,40055967	2 38
Helmert	59,99990579	59,99999609	07,40055943	1 34
Levallois-Dupuy	59,99990567	59,99999586	07,40055930	1 44
Hubeny	59,99990600	59,99999631	07,40055965	1 50
Sodano	55 00 00,001848	20 00 00,002633	07,402626	0 54
[20] S. 950	55 00 00,0000	20 00 00,0000	36 45 07,4006	

Beispiel 4:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\alpha = 1:297$
Gegeben: $B_1 = 65°0'0''$, $L_1 = 10°0'0''$, $A_1 = 5°0'0''$
Entfernung $\Delta s = 5000000$ m

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	B_2 ° ′ ″	L_2 ° ′ ″	A_2 ° ′ ″	Rechenzeit Min. Sek.
Bessel	70 01 22,72224871	179 38 51,25140615	173 48 43,32893796	2 35
Helmert	22,72224746	51,25140655	43,32893825	1 31
Levallois-Dupuy	22,72225941	51,25140276	43,32893469	1 44
Hubeny	22,72224870	51,25140614	43,32893788	1 48
Sodano	22,690581	51,261779	43,338376	0 55

Beispiel 5:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\alpha = 1:297$

Gegeben: $B_1 = 70°0'0''$, $L_1 = -30°0'0''$, $A_1 = 200°0'0''$

Entfernung $\Delta s = 10000000$ m

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	B_2 ° ′ ″	L_2 ° ′ ″	A_2 ° ′ ″	Rechenzeit Min. Sek.
Bessel	−18 54 14,8707 7222	308 50 59,4063 0412	187 07 17,0041 0139	2 43
Helmert	14,8707 7248	59,4063 0405	17,0041 0141	1 28
Levallois-Dupuy	14,8707 6996	59,4063 0441	17,0041 0130	1 35
Hubeny	14,8707 7222	59,4063 0410	17,0041 0140	1 50
Sodano	14,880703	59,404968	17,004524	0 54

Beispiel 6:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\alpha = 1:297$

Gegeben: $B_1 = 50°0'0''$, $L_1 = 10°0'0''$, $A_1 = 140°0'0''$

Entfernung $\Delta s = 15000000$ m

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	B_2 ° ′ ″	L_2 ° ′ ″	A_2 ° ′ ″	Rechenzeit Min. Sek.
Bessel	−62 57 03,2038 6708	105 05 38,2996 6435	114 46 41,4839 0343	2 46
Helmert	03,2038 6687	38,2996 6356	41,4839 0432	1 28
Levallois-Dupuy	03,2038 6619	38,2996 6006	41,4839 0717	1 50
Hubeny	03,2038 6708	38,2996 6426	41,4839 0343	1 53
Sodano	03,211642	38,337981	41,4509 61	0 55
[20] S. 1012	03,203824	38,299546	41,4839 93	
[27] S. 51	03,203864	38,299663	41,4839 047	

Beispiel 7:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\alpha = 1:297$

Gegeben: $B_1 = -50°0'0''$, $L_1 = 290°0'0''$, $A_1 = 310°0'0''$

Entfernung $\Delta s = 19900000$ m

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	B_2 ° ′ ″	L_2 ° ′ ″	A_2 ° ′ ″	Rechenzeit Min. Sek.
Bessel	50 33 08,0393 9508	111 20 25,6099 2919	230 48 04,1889 9866	2 26
Helmert	08,0393 9508	25,6099 2852	04,1889 9866	1 31
Levallois-Dupuy	08,0393 9805	25,6099 3486	04,1890 0308	1 48
Hubeny	08,0393 9508	25,6099 2918	04,1889 9866	1 55
Sodano	08,026166	25,582874	04,169338	0 56

Beispiel 8:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\alpha = 1:297$

Gegeben: $B_1 = 50°0'0''$, $L_1 = 10°0'0''$, $A_1 = 50°0'0''$
Entfernung $\Delta s = 40000000$ m

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	B_2 ° ′ ″	L_2 ° ′ ″	A_2 ° ′ ″	Rechenzeit Min. Sek.
Bessel	50 02 30,96935187	9 28 47,99043841	50 03 34,20558427	2 28
Helmert	30,96935189	47,99043977	34,20558429	1 32
Levallois-Dupuy	30,96934577	47,99042723	34,20557560	1 47
Hubeny	30,96935187	47,99043833	34,20558427	1 55
Sodano	31,009895	48,068802	34,263214	0 55

Eingabedaten für die Rechenbeispiele zur 2. Hauptaufgabe:

```
6378388
297
50 0 0
10 0 0
49 9 15,05423924
10 28 7,80057125

40 0 0
0 0 0
48 50 25,12158635
2 21 23,31808564
```

```
6377397,155
299,1528128
45 0 0
10 0 0
54 59 59,99990600
19 59 59,99999631

6378388
297
65 0 0
10 0 0
70 1 22,72224870
179 38 51,25140614
```

```
70 0 0
-30 0 0
-18 54 14,87077222
308 50 59,40630410

50 0 0
10 0 0
-62 57 3,20386708
105 5 38,29966426

-50 0 0
290 0 0
50 33 8,03939508
111 20 25,60992918
```

Rechenbeispiele für die zweite Hauptaufgabe:

Beispiel 1:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\mathfrak{a} = 1:297$

Gegeben: $B_1 = 50°00'00'',00000000$, $L_1 = 10°00'00'',00000000$
$B_2 = 49°09'15'',05423924$, $L_2 = 10°28'07'',80057125$

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	Entfernung Δs	A_1	A_2	Rechenzeit
	m	° ′ ″	° ′ ″	Min. Sek.
Bessel-Albrecht	100000,000000	160 00 00,00000043	160 21 24,92539567	1 38
Helmert-Bodemüller	100000,000031	00,00000052	24,92539573	2 19
Bodemüller	100000,000031	00,00000073	24,92539592	1 14
Levallois-Dupuy	100000,000001	00,00000036	24,92539556	1 35
Sodano	100000,000001	159 59 59,99999981	24,92539503	1 15
Sollwerte	100000,000000	160 00 00,00000000	160 21 24,92539521	

Beispiel 2:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\mathfrak{a} = 1:297$

Gegeben: $B_1 = 40°00'00'',00000000$, $L_1 = 0°00'00'',00000000$
$B_2 = 48°50'25'',12158635$, $L_2 = 2°21'23'',31808564$

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	Entfernung Δs	A_1	A_2	Rechenzeit
	m	° ′ ″	° ′ ″	Min. Sek.
Bessel-Albrecht	1000000,000000	9 59 59,99999994	11 39 15,77891019	2 10
Helmert-Bodemüller	999999,999991	59,99999961	15,77890980	2 23
Bodemüller	999999,999992	59,99999991	15,77891015	1 13
Levallois-Dupuy	1000000,000004	59,99999994	15,77891019	2 30
Sodano	1000000,000005	10 00 00,00000041	15,77891073	1 13
Sollwerte	1000000,000000	10 00 00,00000000	11 39 15,77891025	

Beispiel 3:

Bessel-Ellipsoid: $a = 6377397{,}155$ m, $\alpha = 1 : 299{,}1528128$

Gegeben: $B_1 = 45°00'00'',00000000$, $L_1 = 10°00'00'',00000000$
$B_2 = 54°59'59'',00990600$, $L_2 = 19°59'59'',99999631$

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	Entfernung Δs	A_1	A_2	Rechenzeit
	m	° ' "	° ' "	Min. Sek.
Bessel-Albrecht	1320284,366004	29 03 15,45979957	36 45 07,40055925	2 15
Helmert-Bodemüller	1320284,366425	15,45979914	07,40055868	2 27
Bodemüller	1320284,366427	15,45979943	07,40055906	1 20
Levallois-Dupuy	1320284,366017	15,45979955	07,40055922	2 36
Sodano	1320284,366021	15,45980028	07,40056020	1 14
Sollwerte	1320284,366000	29 03 15,45980000	36 45 07,40055965	

Beispiel 4:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\alpha = 1 : 297$

Gegeben: $B_1 = 65°00'00'',00000000$, $L_1 = 10°00'00'',00000000$
$B_2 = 70°01'22'',72224870$, $L_2 = 179°38'51'',25140614$

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	Entfernung Δs	A_1	A_2	Rechenzeit
	m	° ' "	° ' "	Min. Sek.
Bessel-Albrecht	4999999,999999	5 00 00,00000001	173 48 43,32893787	3 30
Helmert-Bodemüller	4999999,999128	00,00000002	43,32893786	2 30
Bodemüller	4999999,999128	00,00000001	43,32893786	1 16
Levallois-Dupuy	5000000,000332	00,00000002	43,32893786	2 41
Sodano	5000000,000332	4 59 59,99999998	43,32893791	1 15
Sollwerte	5000000,000000	5 00 00,00000000	173 48 43,32893788	

Beispiel 5:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\mathfrak{a} = 1:297$

Gegeben: $B_1 = 70°00'00'',00000000$, $L_1 = -30°00'00'',00000000$
$B_2 = -18°54'14'',87077222$, $L_2 = 308°50'59'',40630410$

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	Entfernung Δs m	A_1 ° ′ ″	A_2 ° ′ ″	Rechenzeit Min. Sek.
Bessel-Albrecht	10000000,000000	200 00 00,00000000	187 07 17,00410140	3 25
Helmert-Bodemüller	10000000,001114	199 59 59,99999944	17,00410121	2 15
Bodemüller	10000000,001115	199 59 59,99999998	17,00410139	1 11
Levallois-Dupuy	10000000,000070	199 59 59,99999999	17,00410140	2 54
Sodano	10000000,000071	200 00 00,00000037	17,00410156	1 14
Sollwerte	10000000,000000	200 00 00,00000000	187 07 17,00410140	

Beispiel 6:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\mathfrak{a} = 1:297$

Gegeben: $B_1 = 50°00'00'',00000000$, $L_1 = 10°00'00'',00000000$
$B_2 = -62°57'03'',20386708$, $L_2 = 105°05'38'',29966426$

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	Entfernung Δs m	A_1 ° ′ ″	A_2 ° ′ ″	Rechenzeit Min. Sek.
Bessel-Albrecht	15000000,000001	140 00 00,00000002	114 46 41,48390346	3 45
Helmert-Bodemüller	15000000,000238	00,00000004	41,48390352	2 59
Bodemüller	15000000,000237	00,00000000	41,48390343	1 27
Levallois-Dupuy	15000000,000066	139 59 59,99999997	41,48390335	3 14
Sodano	15000000,000174	59,99999775	41,48389762	1 16
Sollwerte	15000000,000000	140 00 00,00000000	114 46 41,48390343	

Beispiel 7:

Internationales Ellipsoid: $a = 6378388$ m, $\alpha = 1 : 297$

Gegeben: $B_1 = -50°00'00'',00000000$, $L_1 = 290°00'00'',00000000$
$B_2 = 50°33'08'',03939508$, $L_2 = 111°20'25'',60992918$

Ergebnisse:

Rechenprogramm (Verfahren)	Entfernung Δs m	A_1 ° ' "	A_2 ° ' "	Rechenzeit Min. Sek.
Bessel-Albrecht	19900000,000000	309 59 59,99999974	230 48 04,18899892	8 10
Helmert-Bodemüller	19899999,999959	59,99997529	04,18902408	6 04
Bodemüller	19900000,000160	59,99921930	04,18980191	1 43
Levallois-Dupuy	19900000,000145	59,99999879	04,18899990	7 08
Sodano	19899990,644	45,3749	19,2365	1 16
Sollwerte	19900000,000000	310 00 00,00000000	230 48 04,18899866	

4. VERGLEICH UND BEURTEILUNG DER RECHENPROGRAMME

Die erstellten Rechenprogramme sollen nach folgenden in erster Linie praktischen Gesichtspunkten miteinander verglichen und beurteilt werden:

a) Genauigkeit,

b) Reichweite,

c) Programmlänge (Programmierungsaufwand und Speicherbedarf),

d) erforderliche Rechenzeiten.

Gleichzeitig soll dabei berücksichtigt werden, ob ein direkter Lösungsablauf erfolgt oder eine Iteration erforderlich ist.

Bei dem Vergleich sind die Programme für die erste und zweite Hauptaufgabe jeweils gesondert zu betrachten.

Die Beurteilung der Genauigkeit kann auf Grund der oben berechneten Zahlenbeispiele erfolgen. Allerdings fehlen hierzu absolut richtige Vergleichswerte. Dazu können jedoch ersatzweise infolge ihrer besonders hohen Genauigkeit die mit dem Rechenprogramm nach Hubeny gewonnenen Ergebnisse verwendet werden. Die mit diesem Programm zu erreichende Genauigkeit läßt sich größenordnungsmäßig abschätzen; sie hängt wie bei allen vorliegenden Programmen im wesentlichen von der Genauigkeit der verwendeten Grundgleichungen ab, da ja die Auflösung der sphärischen Hilfsdreiecke nach strengen Formeln erfolgt.

Bei den Koeffizienten (2.90) der Grundgleichung (2.89) ist als erstes jeweils das Glied mit

$$F_s = a \cdot \frac{7}{256} \cdot e^{10} = 3{,}8 \cdot 10^{-13} \cdot a$$

vernachlässigt. Die weiteren vernachlässigten Glieder sind mindestens von der Ordnung e^{12} und somit wesentlich kleiner. In (2.89) würden außer dem Glied mit ω weitere fünf Glieder mit F_s enthalten sein, deren Gesamtwert bei einer Bogenlänge von $\omega = 2\pi$ maximal

$$R_s \approx (2\pi + 5) \cdot F_s \cdot \cos^{10} A_0 = (6{,}3 + 5 \cdot 0{,}5) \cdot 3{,}8 \cdot 10 \cdot 1 \cdot a = 3{,}3 \cdot 10^{-12} \cdot a$$

betragen kann. Dabei werden die Produkte $\cos\omega \sin\omega$, $\cos\omega \sin^3\omega$, ... in (2.89) jeweils zu 0,5 angenommen.

Entsprechend würden in (2.95), wo zunächst die Glieder mit

$$E_l = \frac{7}{256} \cdot e^{10} = 3{,}8 \cdot 10^{-13}$$

vernachlässigt sind, außer dem Glied mit ω weitere vier Glieder mit E_l auftreten; ihr Gesamtwert kann bei $\omega = 2\pi$ maximal

$$R_l \approx (2\pi + 4) \cdot E_l \cdot \sin A_0 \cdot \cos^8 A_0 = (6{,}3 + 4 \cdot 0{,}5) \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-13} \cdot 1 \cdot 1 = 3{,}2 \cdot 10^{-12}$$

erreichen. Die Produkte $\cos\omega \sin\omega$, $\cos\omega \sin^3\omega$, ... in (2.95) sind hier ebenfalls zu 0,5 angenommen.

In beiden Fällen ist bei den vernachlässigten Gliedern ein Faktor 1 vorausgesetzt. In Wirklichkeit ist dieser Faktor jedoch wesentlich kleiner. Es darf deshalb angenommen werden, daß aus den Gleichungen (2.89) und (2.95) die Größen s und l mit einer Genauigkeit von mindestens $1 \cdot 10^{-12}$ oder etwa $2'' \cdot 10^{-7}$ erhalten werden. Diese Annahme wird auch dadurch bestätigt, daß bei den obigen Rechenbeispielen für die 1. Hauptaufgabe zwischen den Ergebnissen nach Hubeny und dem ebenfalls sehr genauen Programm nach Bessel in keinem Fall Abweichungen auftreten, die größer als $1'' \cdot 10^{-7}$ sind.

Für die übrigen Verfahren ist eine Genauigkeitsabschätzung auf ähnlich einfache Weise nicht möglich, da die vernachlässigten Restglieder nicht ohne weiteres ersichtlich sind.

Die Rechenprogramme für die erste Hauptaufgabe

Beim Vergleich hinsichtlich der Genauigkeit erweist sich das Rechenprogramm nach dem Besselschen Verfahren als nahezu gleichwertig mit dem Programm nach Hubeny, mit dem, wie oben festgestellt wurde, auch bei Entfernungen etwa von der Länge des Erdumfanges eine Lagegenauigkeit von einigen Tausendstel Millimetern zu erreichen ist. Die Ergebnisse nach dem Helmertschen Verfahren weichen von den „Sollwerten" in keinem Fall um mehr als $2'' \cdot 10^{-6}$ ab, was einer Lagegenauigkeit von ca. 0,05 bis 0,10 mm entspricht. Das Rechenprogramm nach Levallois und Dupuy dürfte dagegen eine Winkelgenauigkeit von $1'' \cdot 10^{-5}$ bzw. eine Lagegenauigkeit von ca. 0,3 mm bei 40000 km Entfernung garantieren. Demgegenüber zeigen die mit dem Programm nach Sodano erhaltenen Werte schon bei einer Strecke von 100 km Abweichungen von $2'' \cdot 10^{-4}$ (ca. 6 mm). Diese Unsicherheiten nehmen mit wachsender Entfernung stark zu, so daß Zentimetergenauigkeit hier nur bei kurzen Entfernungen gewährleistet ist. Demnach ist bei diesem Programm der Anwendungsbereich bei Berechnungen für geodätische Zwecke auf etwa 100 km begrenzt, während die übrigen Programme Ergebnisse mit der jeweils genannten Genauigkeit auch für geodätische Linien von der Länge des Erdumfanges garantieren.

Hinsichtlich der Programmlänge sind natürlich wegen des damit verbundenen Programmierungsaufwandes und des erforderlichen Speicherraumes möglichst kurze und gleichzeitig übersichtliche Rechenprogramme vorzuziehen. Die Länge der einzelnen Programme,

d.h. die Anzahl der zur Darstellung der Befehlsfolge erforderlichen Worte, hängt wesentlich vom Umfang und von der Struktur der Grundgleichungen ab. Aus der Zusammenstellung auf Seite 118 ist ersichtlich, daß für die 1. Hauptaufgabe das Rechenprogramm nach Helmert das kürzeste ist, obwohl es sich hier um ein direktes Verfahren mit vollständig linearer Programmierung handelt. Diesem am nächsten kommt das Programm nach Levallois und Dupuy, während die Programme nach Hubeny und Bessel sehr umfangreich sind. Bemerkenswert ist, daß die unter die Näherungsverfahren einzureihende Lösung von Sodano ein längeres Rechenprogramm erfordert als das Verfahren von Helmert.

Die von den Programmen benötigten Rechenzeiten sind trotz der relativ geringen Rechengeschwindigkeit der Zuse Z 23 verhältnismäßig niedrig. Sie liegen bei den Programmen nach Helmert, Levallois und Dupuy und Hubeny zwischen einer und zwei Minuten, beim Besselschen zwischen zwei und drei und beim Programm nach Sodano unter einer Minute. Beim Vergleich der Rechenzeiten kommt der Unterschied zwischen den direkten und indirekten Verfahren deutlich zum Ausdruck. Der Zeitbedarf ist bei den direkten Verfahren stets kürzer und unabhängig von der Länge der geodätischen Linie. Nachstehende Tabelle zeigt die Durchschnittswerte der zur Berechnung obiger Beispiele benötigten Rechenzeiten:

Rechenprogramm (Verfahren)	durchschnittliche Rechenzeit
Bessel	2,51 Min.
Helmert	1,51 Min.
Levallois u. Dupuy	1,78 Min.
Hubeny	1,86 Min.
Sodano	0,91 Min.

Es fällt auf, daß die Durchrechnung mit dem verhältnismäßig umfangreichen Programm nach Hubeny nur wenig länger dauert als mit dem Programm nach Levallois und Dupuy und sogar viel weniger Zeit beansprucht als beim Besselschen Verfahren. Dies ist darauf zurückzuführen, daß bei Hubeny die Iteration sich nur auf einen kleinen Zyklus erstreckt und zudem rasch konvergiert.

Die Rechenprogramme für die 2. Hauptaufgabe

Die Beurteilung der Genauigkeit kann auch bei den Rechenprogrammen für die 2. Hauptaufgabe auf Grund obiger Zahlenbeispiele erfolgen, wobei die Ergebnisse mit den jeweils angegebenen „Sollwerten" verglichen werden. Die genauesten Ergebnisse ermöglicht hier das Programm nach Bessel; bei der Entfernung $\Delta s = 15000$ km ergab sich damit eine Abweichung von nur 0,001 mm, die Entfernung 19900 km wurde auf ein Zehntausendstel Millimeter genau erhalten, während die Azimute im ersteren Fall höchstens um $3'' \cdot 10^{-8}$ und im letzteren um $3'' \cdot 10^{-7}$ von den Sollwerten abweichen. Die Programme nach Helmert sowie Levallois und Dupuy sind nahezu gleichwertig; sie ermöglichen auch bei Entfernungen vom etwa halben Erdumfang noch Millimetergenauigkeit. Zu bemerken ist, daß das Programm nach Levallois und Dupuy für die 2. Hauptaufgabe eine gegenüber der 1. Hauptaufgabe etwas höhere Genauigkeit aufweist, da hier die Iteration auf Grund der genaueren Gleichung (2.83) erfolgt. Das Programm für das Bodemüllersche Einschwenk-

verfahren liefert zwar auch noch bei einer Strecke von 19900 km die Länge der geodätischen Linie auf einen Millimeter genau, jedoch zeigen sich bei nahezu diametraler Punktlage Ungenauigkeiten in den Azimuten, die etwa ab 19600 km größer als $1'' \cdot 10^{-4}$ werden. Das Programm nach Sodano gewährt bei Entfernungen bis etwa 17500 km ebenfalls Millimetergenauigkeit. Bei größeren Entfernungen treten jedoch Ungenauigkeiten auf. Durch nähere Untersuchungen wurde festgestellt, daß ab etwa 19000 km Zentimetergenauigkeit nicht mehr gewährleistet ist. Bei 19900 km beträgt die Abweichung bereits ca. 10 Meter. Im übrigen ist bei den Programmen für die 2. Hauptaufgabe der Anwendungsbereich auf Entfernungen bis etwa 19950 km beschränkt.

Die Programmlängen sind wieder aus der Zusammenstellung auf Seite 118 ersichtlich. Das kürzeste und damit übersichtlichste Programm ist auch hier das nach dem Helmertschen Verfahren. Das Programm nach Bessel umfaßt demgegenüber nahezu die doppelte Anzahl von Worten, wobei allerdings zu berücksichtigen ist, daß für die Jordansche Formel allein schon 95 Worte erforderlich sind. Verhältnismäßig kurz sind auch die Programme nach dem Verfahren von Levallois und Dupuy sowie nach dem Einschwenkverfahren von Bodemüller, wobei bemerkt werden muß, daß letzteres als direkte Lösung anzusehen ist. Dagegen ist das Rechenprogramm nach Sodano ziemlich umfangreich.

Beim Vergleich hinsichtlich der Rechenzeiten kommt der Unterschied zwischen den direkten und den iterativen Lösungen noch deutlicher zum Ausdruck als bei der 1. Hauptaufgabe. Die Rechenzeiten sind am niedrigsten und praktisch unabhängig von der Länge der geodätischen Linie beim direkten Verfahren nach Sodano. Ebenfalls sehr kurze Rechenzeiten treten beim Programm nach dem Bodemüllerschen Einschwenkverfahren auf. Jedoch zeigt sich hier ein leichtes Ansteigen der Rechenzeiten bei sehr langen Entfernungen, da jetzt offensichtlich für die iterative Ermittlung des Näherungswertes $\Delta\lambda'$ eine größere Zahl von Iterationsschritten erforderlich sind. Bei den reinen Iterationsverfahren sind die Rechenzeiten wesentlich höher und steigen infolge abnehmender Konvergenz des Annäherungsvorganges mit wachsender Entfernung merklich an, um bei Strecken nahe dem halben Erdumfang Werte zwischen 6 und 8 Minuten zu erreichen. Den relativ raschesten Ablauf unter diesen iterativen Verfahren besitzt infolge des geringeren Umfanges der Iterationsschleife das Rechenprogramm nach Helmert, die längste Zeit ist beim Programm nach Bessel erforderlich. Hier wurde auch der Einfluß der Jordanschen Formel (2.42) auf die Rechenzeit untersucht. Erwartungsgemäß ergab sich, daß bei ihrer Anwendung die Rechenzeiten nur bei kurzen und mittleren Entfernungen niedriger werden, bei Strecken über etwa 5000 km dagegen sogar ansteigen. Nachstehend werden die Durchschnittswerte der zur Berechnung der Beispiele 1 bis 7 mit den einzelnen Programmen benötigten Rechenzeiten angegeben:

Rechenprogramm (Verfahren)	durchschnittliche Rechenzeiten
Bessel	3,62 Min.
Helmert	2,99 Min.
Bodemüller	1,34 Min.
Levallois u. Dupuy	3,38 Min.
Sodano	1,25 Min.

5. BEURTEILUNG DER LÖSUNGSVERFAHREN

Bei einer Beurteilung der einzelnen Lösungsverfahren selbst hinsichtlich ihrer Eignung zur Berechnung mit elektronischen Rechenautomaten ist neben einer für alle praktischen Erfordernisse ausreichenden Genauigkeit und einer möglichst großen Reichweite der zu erwartende Programmierungsaufwand sowie der notwendige Speicherbedarf, also letztlich die Länge der zu erstellenden Befehlsfolge ausschlaggebend. Demgegenüber sind Unterschiede in den Rechenzeiten von geringerer Bedeutung, zumal die Rechenzeiten schon bei der relativ langsamen Rechenanlage Zuse Z 23 im allgemeinen verhältnismäßig niedrig sind und bei schnelleren Automaten noch weniger ins Gewicht fallen. Auch andere Gesichtspunkte wie Vollständigkeit der ersten und zweiten Hauptaufgabe sowie Homogenität der Lösungen, d. h. Verwendbarkeit derselben Grundformeln für beide Hauptaufgaben, sind hier praktisch bedeutungslos, da ohnehin die Herstellung von selbständigen Programmen für beide Hauptaufgaben zweckmäßig ist.

Dagegen ist eine Unterscheidung zwischen direkten und indirekten Lösungen unter Umständen von Interesse. Allgemein besteht hier die Ansicht, daß iterative Verfahren für die Automatenrechnung besser geeignet sind, da sie den Besonderheiten dieser Rechenanlagen besser entsprechen. Tatsächlich ist auch in der Regel durch eine zyklische Anordnung des Lösungsganges eine Verkürzung der Rechenprogramme zu erreichen; außerdem ist innerhalb gewisser Grenzen die Möglichkeit einer Steuerung der Genauigkeit gegeben. Allerdings hat dies längere Rechenzeiten zur Folge. Bei der Lösung der vorliegenden Probleme ist jedoch zu berücksichtigen, daß gegebenenfalls stets nur ein mehr oder weniger großer Lösungsabschnitt auf iterativem Wege zu berechnen ist.

Unter diesen Gesichtspunkten darf von den oben behandelten Verfahren die Helmertsche Lösung als die für die Automatenrechnung am besten geeignete bezeichnet werden. Sie ermöglicht hauptsächlich infolge der guten Konvergenz der dabei verwendeten Grundgleichungen sehr kurze und damit übersichtliche Rechenprogramme. Dies trifft bemerkenswerterweise auch bei der 1. Hauptaufgabe zu, obwohl es sich hier um eine direkte Lösung handelt. Zwar ist durch den Umkehrvorgang der Gleichung (2.50) infolge Vernachlässigung von Größen k_1^3 ein Genauigkeitsverlust eingetreten, doch werden die Ergebnisse, wie die obigen Rechenbeispiele zeigen, auch bei Entfernungen von der Größe des Erdumfanges noch mit Millimetergenauigkeit erhalten. Zudem sind die Rechenzeiten äußerst niedrig. Damit ist gleichzeitig der Nachweis erbracht, daß bei der Berechnung langer geodätischer Linien mit elektronischen Rechenanlagen direkte Verfahren keineswegs den iterativen unterlegen sein müssen. Zur Lösung der 2. Hauptaufgabe sind jedoch die von Helmert benützten Gaußschen Gleichungen (2.20), die sich schon bei der Berechnung von Hand als unpraktisch erwiesen haben, für die automatische Berechnung völlig ungeeignet. Es wird hier deshalb zweckmäßig die programmierungstechnisch wesentlich günstigere Bodemüllersche Modifikation verwendet, die ein wiederholtes Durchlaufen eines Systems von mehreren Gleichungen erfordert. Dadurch erhöhen sich zwar die Rechenzeiten gegenüber der 1. Hauptaufgabe wesentlich; sie bleiben aber dennoch beträchtlich unter denen der anderen iterativen Verfahren für die 2. Hauptaufgabe. Auch die Anforderungen hinsichtlich Genauigkeit und Reichweite werden hinreichend erfüllt.

Das Bodemüllersche Einschwenkverfahren ist für die elektronische Berechnung nur verwendbar, wenn es gelingt, den bei der konventionellen Berechnung unter Verwendung graphischer Hilfsmittel zu bestimmenden Näherungswert $\Delta\lambda'$ auf rein rechnerischem Wege

ausreichend genau zu erhalten. Bei dem erstellten Rechenprogramm wurde dies mit Hilfe einer rasch konvergierenden Iteration erreicht, die sehr wenig Rechenzeit und auch nur sehr geringen Mehraufwand an Programmierungsarbeit erfordert. Die Rechenzeiten sind zwar merklich kürzer als beim modifizierten Helmertschen Verfahren, da doch ein im wesentlichen direkter Lösungsablauf vorliegt; jedoch ist es diesem wegen des erforderlichen erheblich größeren Programmierungsaufwandes und auftretender Ungenauigkeiten in den Azimuten bei Entfernungen nahe dem halben Erdumfang keinesfalls vorzuziehen.

Dem Helmertschen Verfahren kommt am nächsten die Lösung nach Levallois und Dupuy, die ebenfalls für beide Hauptaufgaben nur verhältnismäßig geringen Programmierungsaufwand und relativ wenig Speicherraum erfordert. Auch sind die Forderungen hinsichtlich Genauigkeit und Reichweite ausreichend erfüllt.

Allerdings ist hier bei beiden Hauptaufgaben eine Iteration notwendig; denn die Lösung der 1. Hauptaufgabe kann nicht mehr wie bei der herkömmlichen Berechnungsweise auf direktem Wege erfolgen, da die Koeffizienten der von Levallois und Dupuy angegebenen Umkehrreihe nicht geschlossen durch Wallissche Integrale dargestellt werden können, sondern aus Tafelwerten berechnet werden müssen, so daß diese Umkehrgleichung für die Automatenrechnung nicht in Betracht kommt. Deshalb muß hier eine Auflösung der Grundgleichung (2.77) nach $\Delta\omega$ auf indirektem Wege erfolgen, wobei allerdings bei jedem Schritt gleichzeitig die Wallisschen Integrale ΔW_2, ΔW_4, ΔW_6 neu zu berechnen sind. Die Annäherung konvergiert jedoch verhältnismäßig rasch, so daß sich die Rechenzeiten im Vergleich zur direkten Helmertschen Lösung nicht stark erhöhen. Der gegenüber dem Helmertschen Verfahren etwas größere Programmierungsaufwand ist bei beiden Hauptaufgaben in erster Linie darauf zurückzuführen, daß die Wallisschen Integrale einen für die Automatenrechnung ungünstigeren Formelaufbau als die Helmertschen Reihenkoeffizienten besitzen; dies kommt auch in etwas höheren Rechenzeiten bei der 2. Hauptaufgabe im Vergleich zum Helmertschen Verfahren zum Ausdruck. Außerdem erfordert die Verwendung des Parameters A_0 bei der 1. Hauptaufgabe ausführlichere Quadrantenkriterien, da das Äquatorazimut Werte zwischen 0 und 2π annehmen kann.

Auch das Besselsche und das von Albrecht angegebene Verfahren, die beide einen indirekten Lösungsablauf erfordern, sind durchaus für die Berechnung mit elektronischen Rechenautomaten geeignet. Werden die Reihenkoeffizienten der Grundgleichungen (2.31) und (2.40) mit sämtlichen in (2.32) bzw. (2.41) angegebenen Gliedern verwendet, dann gewährleisten sie eine äußerst hohe Genauigkeit. Die Rechenprogramme sind dann allerdings ziemlich umfangreich und die Rechenzeiten verhältnismäßig hoch. Wird jedoch nur Zentimetergenauigkeit angestrebt, dann können in den Beziehungen (2.32) und (2.41) der größte Teil der Glieder von der Ordnung k^8 bzw. e^8 vernachlässigt werden. Aber auch dann werden die Rechenprogramme, hauptsächlich infolge der geringen Konvergenz dieser Reihenkoeffizienten und ihrer für die Programmierung etwas ungünstigen Struktur, im Vergleich zu den Verfahren nach Helmert sowie Levallois und Dupuy merklich umfangreicher und damit die Rechenzeiten auch etwas länger sein. Dagegen bedeutet die Zusammensetzung der Argumente der trigonometrischen Funktionen aus den Teilen M und $\Delta\sigma$ in programmierungstechnischer Hinsicht keine spürbare Erschwernis. Die Ermittlung eines Näherungswertes für $\Delta\lambda$ mit Hilfe der Jordanschen Formel (2.42) erwies sich bei langen Entfernungen als unzweckmäßig, nur bei verhältnismäßig kurzen Strecken bis ca. 1000 km sind gute Näherungswerte und damit kürzere Rechenzeiten zu erreichen. Die unmittelbare Verwendung des ellipsoidischen Längenunterschiedes Δl als erste Näherung für $\Delta\lambda$ bedeutet dagegen eine erhebliche Einsparung von Programmierungsarbeit.

Die Lösung von Hubeny erfordert verhältnismäßig hohen Programmierungsaufwand und relativ viel Speicherraum. Dies ist zwar teilweise auf den von Hubeny angestrebten im wesentlichen direkten Lösungsgang zurückzuführen, zum großen Teil aber darauf, daß sich die Auflösung der Grundgleichungen (2.89) und (2.95) bei der Automatenrechnung etwas umständlich gestaltet. Hier müssen zunächst aus den programmierungstechnisch ungünstigen Beziehungen (2.88) und (2.94) die Koeffizienten A_s, B_s, ... bzw. A_l, B_l ... berechnet werden. Zwar könnte das Programm ohne Schwierigkeiten so abgefaßt werden, daß ihre Berechnung zur Lösung mehrerer Aufgaben auf demselben Ellipsoid nur einmal zu erfolgen braucht; dies würde sich zwar auf die Rechenzeiten auswirken, eine Verkürzung des Rechenprogrammes selbst wäre damit jedoch nicht verbunden. Zu berücksichtigen ist allerdings, daß in den Beziehungen (2.88) und (2.94) die Glieder mit e^{10} und ein Teil der Glieder mit e^8 vernachlässigt werden können, sofern nur Zentimetergenauigkeit angestrebt wird. Erst nach Berechnung der Koeffizienten A_s, B_s, ... bzw. A_l, B_l, ... können die eigentlichen Reihenkoeffizienten $[A_s]$, $[B_s]$, ... bzw. $[A_l]$, $[B_l]$, ... ermittelt werden. Die hierfür zu verwendenden Beziehungen (2.90) bzw. (2.96) sind ebenfalls sehr umfangreich. Zu bemerken ist jedoch, daß sich bei der Berechnung von Hand die Ermittlung der Reihenkoeffizienten relativ einfach gestaltet, da von Hubeny hierfür in [16] für die gebräuchlichsten Ellipsoide entsprechende Tafelwerke angegeben werden.

Für die zur Lösung der 1. Hauptaufgabe erforderliche indirekte Auflösung der Grundgleichung (2.89) schlägt Hubeny die Anwendung eines Interpolationsverfahrens und einen Lösungsweg über differentielle Zuschläge vor. Beide Möglichkeiten, die zwar bei der herkömmlichen Berechnung eine Abkürzung des Rechenablaufes bedeuten, sind programmierungstechnisch ungünstig. Bei der Lösung mit Rechenautomaten wäre die Auflösung von (2.89) auf iterativem Wege vorzuziehen, obwohl damit eine geringfügige Erhöhung der Rechenzeiten verbunden wäre. Auch der von Hubeny bei der 2. Hauptaufgabe benützte Weg ist für die Automatenrechnung ungeeignet, da dabei die hierfür ungünstigen Gaußschen Gleichungen (2.20) verwendet werden. Hier wäre eine Bestimmung der Größe $\Delta\lambda$ durch allmähliche Annäherung mit Hilfe eines Formelsystems ähnlich wie bei der Lösung nach Levallois und Dupuy zu empfehlen. Es darf jedoch festgestellt werden, daß mit den Formeln von Hubeny in der in Abschnitt 2.2.4 angegebenen Form Ergebnisse mit äußerst hoher Genauigkeit zu erzielen sind.

Die Lösungen von Sodano ermöglichen eine direkte Berechnung der beiden Hauptaufgaben, was für die Automatenrechnung den Vorteil kurzer Rechenzeiten bedeutet. Die Grundformeln (2.129) und (2.134) für die 1. Hauptaufgabe reichen jedoch nur bis zu den Gliedern mit $\mathfrak{a}^2$ bzw. e'^4, so daß damit Ergebnisse mit Zentimetergenauigkeit nur bei kurzen Entfernungen bis etwa 100 km erhalten werden. Da aber auch bei kleinen Strecken die Konvergenz dieser Grundformeln nicht sehr gut ist, bringt eine Unterteilung der geodätischen Linie in kleinere Abschnitte und eine schrittweise Berechnung nach dem Verfahren der „progressiven Iteration" keine ausreichende Genauigkeitssteigerung. Obwohl der Programmierungsaufwand größer ist als beim Helmertschen Verfahren, ist das in [40] angegebene Formelsystem für die 1. Hauptaufgabe bei mittleren und langen Entfernungen nur für Näherungslösungen zu verwenden. Die Grundformeln (2.116) und (2.117) für die 2. Hauptaufgabe dürften hinsichtlich der Genauigkeit etwa denen der 1. Hauptaufgabe entsprechen. Dagegen ermöglichen die Beziehungen (2.119) und (2.122), die auch dem oben erstellten Rechenprogramm zugrunde gelegt wurden, Ergebnisse mit Zentimetergenauigkeit bei Strecken bis etwa 19000 km Länge. Bei größeren Entfernungen treten jedoch Ungenauigkeiten auf, die darauf zurückzuführen sind, daß die in der Gleichung (2.119)

verwendeten Funktionen $\csc \Delta\sigma'$ und $\operatorname{ctg} \Delta\sigma'$ in der Nähe von $\Delta\sigma' = \pi$ gegen unendlich wachsen. Zwar sind die Rechenzeiten infolge des vollständig linearen Programmablaufes äußerst kurz, Programmierungsaufwand und Speicherbedarf sind jedoch hauptsächlich wegen des vielgliedrigen Aufbaus der Beziehung (2.119) relativ hoch, so daß die Lösung auch bei der Automatenrechnung gegenüber den Verfahren von Helmert sowie Levallois und Dupuy deutliche Nachteile besitzt. Zu bemerken ist jedoch, daß Sodano vollständige für die Automatenrechnung geeignete Kriterien zur Quadranten- und Vorzeichenermittlung angibt.

6. ABSCHLIESSENDE BEMERKUNGEN

Durch Umstellung der wichtigsten auf dem Besselschen Prinzip beruhenden Lösungsverfahren für die geodätischen Hauptaufgaben in eine für die Berechnung mit elektronischen Rechenanlagen geeignete Form und Entwicklung leistungsfähiger Rechenprogramme konnte mit der vorliegenden Arbeit ein Beitrag zur Lösung des Wirtschaftlichkeitsproblems bei der Berechnung langer geodätischer Linien geleistet werden. Die dabei erstellten Programme sind für jedes beliebige Rotationsellipsoid und außerdem sowohl für kurze als auch für sehr lange Entfernungen verwendbar. Da sie teilweise Ergebnisse höchster Genauigkeit liefern, ist ihre Verwendung nicht nur für praktische Zwecke, sondern auch für theoretische Untersuchungen möglich. Allerdings liegen die Programme zunächst nur für die Rechenanlage Zuse Z 23 vor; es ist jedoch eine spätere Übersetzung für andere Rechenautomaten vorgesehen, sobald auch hier einfachere Voraussetzungen zur Berechnung mit doppelter Genauigkeit gegeben sind.

Der Herstellung der eigentlichen Rechenprogramme ging die Entwicklung von Unterprogrammen zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen und der Arcusfunktionen mit hoher Genauigkeit voraus. Hierfür war zunächst die Herleitung entsprechender Näherungsfunktionen erforderlich. Die Anwendung der erstellten Unterprogramme ist jedoch keineswegs auf die Berechnung langer geodätischer Linien beschränkt; auch ihre Übertragung für andere Rechenanlagen ist vorgesehen.

Weiterhin war es möglich, die behandelten Lösungsverfahren für lange geodätische Linien hinsichtlich ihrer Eignung für die Berechnung mit programmgesteuerten Rechenautomaten näher zu vergleichen und zu beurteilen, so daß bei der Herstellung von Programmen für andere Rechenanlagen eine zweckmäßige Auswahl erleichtert wird.

Gleichzeitig konnte mit der vorliegenden Arbeit der Nachweis dafür erbracht werden, daß die auf dem Besselschen Prinzip beruhenden Verfahren, wenn auch teilweise erst nach entsprechenden Abänderungen bzw. Ergänzungen, durchaus für die Lösung mit elektronischen Rechenanlagen geeignet sind und somit ein unmittelbares Bedürfnis nach neuen speziell auf die Automatenrechnung abgestimmten Lösungsverfahren für lange geodätische Linien zur Zeit nicht besteht. Damit soll jedoch keineswegs behauptet werden, daß es nicht noch andere evtl. sogar günstigere Wege und Möglichkeiten zur Lösung dieser Probleme mit elektronischen Rechenanlagen gäbe. Insbesondere sei hier auf die Lösung durch unmittelbare Verwendung elliptischer Integrale hingewiesen, wobei die Kriterien zur Quadranten- und Vorzeichenermittlung, die bei den vorliegenden Programmen nicht gerade zur Übersichtlichkeit beitragen, weitgehend entfallen würden. Es ist beabsichtigt, diese Möglichkeit ebenfalls zu untersuchen.

Dagegen darf bereits hier festgestellt werden, daß das Verfahren der schrittweisen Berechnung auf der Grundlage der Legendreschen Reihen gegenüber den auf dem Bessel-

schen Prinzip beruhenden Lösungen entscheidende Nachteile aufweist. Zwar entfallen hier Quadranten- und Vorzeichenkriterien vollständig, so daß die Rechenprogramme einen sehr einfachen und übersichtlichen Aufbau besitzen. Jedoch treten hier, wie durch die Ergebnisse eingehender Untersuchungen bestätigt und auch bereits an früherer Stelle bemerkt wurde, andere Mängel auf, die in erster Linie darauf zurückzuführen sind, daß die Konvergenz der Legendreschen Reihen sich mit wachsender geographischer Breite immer mehr verschlechtert. In der Nähe der Pole bzw. bei geodätischen Linien, die diese Bereiche berühren, sind somit genaue Ergebnisse praktisch nicht mehr zu erhalten. Das bedeutet, daß diese neue Methode nur in einem beschränkten Bereich anwendbar ist. Zudem bestehen wirtschaftliche Bedenken, insbesondere bei Verwendung von Automaten mit geringerer Rechengeschwindigkeit; denn die Rechenzeiten sind hier um ein Vielfaches höher als bei den auf dem Besselschen Prinzip beruhenden Verfahren, da für jeden Einzelschritt unter Umständen nahezu der gleiche Rechenaufwand erforderlich ist wie etwa für die Berechnung der ganzen geodätischen Linie nach dem direkten Verfahren von Helmert.

Die bereits vorliegenden Untersuchungsergebnisse über dieses neue Verfahren, insbesondere über die Möglichkeiten einer Genauigkeitssteigerung und einer Erweiterung des Anwendungsbereiches durch Verwendung anderer auf den Legendreschen Reihen beruhender Lösungen sowie Testergebnisse mit hierfür erstellten Rechenprogrammen sollen in einer gesonderten Veröffentlichung mitgeteilt werden.

Anmerkung:

Infolge Platzmangels ist es nicht möglich, die teilweise sehr umfangreichen Rechenprogramme der vorliegenden Arbeit beizugeben. Sämtliche Programme liegen am Geodätischen Institut der Technischen Hochschule München auf und können von dort im Bedarfsfalle angefordert werden.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Albrecht, Th.: Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. – Leipzig, 3. Auflage 1894, W. Engelmann.

[2] Baeschlin, L. F.: Lehrbuch der Geodäsie. – Zürich 1948, Orell Füssli.

[3] Bessel, F. W.: Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen. – Leipzig 1876, W. Engelmann.

[4] Billeter, E. P.: Der praktische Einsatz elektronischer Rechenautomaten. – Wien 1961, Springer-Verlag.

[5] Bodemüller, H.: Die Bogenlänge geodätischer Linien des Rotationsellipsoides. – Zeitschrift für Vermessungswesen 1952, S. 76–80.

[6] Bodemüller, H.: Die geodätischen Linien des Rotationsellipsoides und die Lösung der geodätischen Hauptaufgaben für große Strecken unter besonderer Berücksichtigung der Bessel-Helmertschen Lösungsmethode. – München 1954, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Veröffentlichung Nr. 13.

[7] Bodemüller, H.: Formeln und Tafeln zur Berechnung der beiden geodätischen Hauptaufgaben für das Internationale Ellipsoid bei großen Entfernungen. – München 1955, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 18.

[8] Bodemüller, H.: Berechnung langer geodätischer Linien. – Zeitschrift für Vermessungswesen 1958, S. 435–466.

[9] Bodemüller, H.: Beitrag zur Lösung der zweiten geodätischen Hauptaufgabe für lange Linien nach den direkten Verfahren von E. Sodano und H. Moritz sowie nach dem sog. Einschwenkverfahren. – Braunschweig 1960, Selbstverlag.

[10] Draheim, H.: Allgemeine Formeln zur Berechnung der Richtungsreduktionen und der Längenreduktion ausgewählter konformer Abbildungen. Ein Beitrag zur Untersuchung der Formtreue der Bildkurven geodätischer Linien und zur Lösung der geodätischen Hauptaufgaben mit Hilfe geodätischer Koordinaten. München 1953, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Veröffentlichung Nr. 7.

[11] Gauß, C. F.: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Zweite Abhandlung, Göttingen 1846.

[12] Gauß, C. F.: Werke, 9. Band. Herausgegeben von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig 1903. B. G. Teubner.

[13] Gotthardt, E.: Näherungsfunktionen für den Arcustangens. Zeitschrift für Vermessungswesen 1958, S. 32–34.

[14] Güntsch, F. D.: Einführung in die Programmierung digitaler Rechenautomaten. Berlin 1960, Walter de Gruyter u. Co.

[15] Helmert, F. R.: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil, Leipzig 1880. B. G. Teubner.

[16] Hubeny, K.: Formeln und Tafeln zur Berechnung der geodätischen Hauptaufgaben über beliebige Entfernungen. Graz 1960, 1. Geodätisches Institut der Technischen Hochschule Graz, Institutsmitteilungen, Folge 5.

[17] Jordan, W.: Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung. 3. Band des Handbuches von W. Jordan. Stuttgart 1941. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung.

[18] Kämmerer, W.: Ziffernrechenautomaten. Berlin 1960, Akademie-Verlag.

[19] Klein, W.: Tschebyscheffsche Funktionen. Archiv für Elektrotechnik, 23. Band, Heft 10, 1950, S. 647–657.

[20] Kneißl, M.: Mathematische Geodäsie (Landesvermessung). Band IV des Handbuches der Vermessungskunde von Jordan/Eggert/Kneißl. Stuttgart 1959. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung.

[21] Köhnlein, W.: Untersuchungen über große geodätische Dreiecke auf geschlossenen Rotationsflächen unter besonderer Berücksichtigung des Rotationsellipsoides. München 1962, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C. Heft Nr. 51.

[22] Krüger, L.: Neue Formeln zur Übertragung geographischer Koordinaten durch Hauptdreiecksseiten. Zeitschrift für Vermessungswesen 1919, S. 281–294.

[23] Lense, J.: Reihenentwicklungen in der math. Physik. Berlin 1953. Walter de Gruyter & Co.

[24] Levallois, J. J. et Dupuy M.: Sur le calcul des grandes géodésiques. Bulletin Géodésique, Nouvelle série No. 16 (1952), S. 105–117.

[25] Miller, A.: Die Berechnung langer geodätischer Linien mit elektronischen Rechenautomaten. Deutscher Landesbericht über die in den Jahren 1960 bis 1962 ausgeführten Arbeiten. München 1963, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 103, S. 23–24.

[26] Moritz, H.: Eine direkte Lösung der zweiten Hauptaufgabe auf dem Rotationsellipsoid für beliebige Entfernungen. – Zeitschrift für Vermessungswesen 1959, S. 453–457.

[27] Münzer, G.: Ein Vorschlag zur Lösung der ersten geodätischen Hauptaufgabe auf dem Rotationsellipsoid. – München 1960, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 36.

[28] Näbauer, M.: Annäherung von Funktionen mit Hilfe Tschebyscheffscher Polynome. – München 1955. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 13.

[29] Rainsford, H. F.: Long geodesics on the ellipsoid. – Bulletin Géodésique No. 37 (1955), S. 12–22.

[30] Rechenzentrum, Technische Hochschule München: Algol-Programmierungsanleitung. München 1961, Institutsdruckschrift.

[31] Rechenzentrum T. H. München: Ergänzungen zur Algol-Programmierungsanleitung. – Institutsdruckschrift.

[32] Schödlbauer, A.: Iterative Lösung der geodätischen Hauptaufgaben über lange Linien mit elektronischen Rechenautomaten. Deutscher Landesbericht über die in den Jahren 1960 bis 1962 ausgeführten Arbeiten. – München 1963, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 103, S. 21–23.

[33] Schödlbauer, A.: Iterative Lösung der geodätischen Hauptaufgaben über lange Linien mit elektronischen Rechenautomaten. – München 1963, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 45.

[34] Schrader, B.: Beiträge zu einer wirtschaftlichen Lösung der geodätischen Hauptaufgaben für große Entfernungen. – München 1959, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 35.

[35] Schrader, B.: Ein Algol-Programm für die Berechnung der 2. geodätischen Hauptaufgabe. – Deutscher Landesbericht über die in den Jahren 1960 bis 1962 ausgeführten Arbeiten. München 1963, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 103, S. 103–104.

[36] Schreiber, O.: Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Koordinaten aus Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. – Berlin 1878. Königlich Preußische Landesaufnahme.

[37] Seifers, H.: Rechengerät Z 11 für geodätische Aufgaben. – München 1959, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 34.

[38] Seifers, H.: Doppelte Zahlenlänge beim Rechengerät Z 11. – München 1961, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 73.

[39] Sodano, E.: A rigorous non-iterative procedure for rapid inverse solution of very long geodesics. – Army Map Service, Washington 1957, D. C.

[40] Sodano, E.: General non-iterative solution of the inverse and direct geodetic problems. – Fort Belvoir 1963, U. S. Army Geodesy, Intelligence and Mapping, Research and Development Agency.

[41] Weber, O.: Die Berechnung langer geodätischer Linien mit Anwendung auf die geodätische Hauptaufgabe für große Entfernungen. – München 1960, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 32.

[42] Zuse, K. G.: Programmgesteuerte elektronische Rechenanlage Zuse Z 23, Programmierungsanleitung. – Bad Hersfeld 1961, Firmendruckschrift.