BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1978

MÜNCHEN 1979

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über $\mathfrak{k}$-quasiordinäre Bogen

Herrn J. Aczél zum 55. Geburtstag mit freundschaftlichen Wünschen

Von **Otto Haupt**

Einleitung

0.1. In einem topologischen Bild einer abgeschlossenen Kreisscheibe, dem sogen. Grundbereich Q, sei gegeben ein System $\mathfrak{k}$ von Bogen und Kurven K (Vgl. [1.], 1.1.), der sogen. Ordnungscharakteristiken K, kurz *OCh*. Um deutlich zu machen, daß Punkte $z_1, \ldots, z_s \in Q$ auf $K \in \mathfrak{k}$ liegen, schreiben wir auch $K(z_1, \ldots, z_s)$ statt K. Zu $\mathfrak{k}$ gehöre eine natürliche Zahl $k := k(\mathfrak{k}) \geq 1$, die sogen. Grundzahl von $\mathfrak{k}$ mit folgender Eigenschaften: Sind die $z_k \in K$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, verschieden und gibt es keine weiteren $K' = K'(z_1, \ldots, z_k)$ mit $K \neq K' \in \mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k}$-*Unität* von $K(z_1, \ldots, z_k)$), so ist $K(z_1, \ldots, z_k)$ stetige Funktion von $(z_1, \ldots, z_\varkappa)$ ($\mathfrak{k}$-*Stetigkeit* von K).

0.2. Es sei Z die Menge aller k-tupel $z := (z_1, \ldots, z_k)$ mit lauter *verschiedenen* $z_k \in Q$. Bezüglich der $z \in Z$ bzw. der $K(z) := K(z_1, \ldots z_k) \in \mathfrak{k}$ hat man nun die Disjunktion: Es ist z *entweder* $\mathfrak{k}$-entartet, d. h. es gibt kein $K(z) \in \mathfrak{k}$ *oder* $\mathfrak{k}$-ordinär, d. h. es gibt genau ein $K(z) \in \mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{k}$-halbordinär, d. h. es existieren mindestens zwei verschiedene $K(z) \in \mathfrak{k}$. Diesen Erklärungen entsprechend bezeichnen wir eine Menge $M \subset Q$ als $\mathfrak{k}$-entartet bzw. als $\mathfrak{k}$-ordinär. bzw. als $\mathfrak{k}$-quasiordinär, wenn jedes $z \in M$ $\mathfrak{k}$-entartet bzw. $\mathfrak{k}$-ordinär bzw. entweder $\mathfrak{k}$-halbordinär oder $\mathfrak{k}$-ordinär ist; es ist M genau dann k-quasiordinär, wenn M keine $\mathfrak{k}$-entarteten z enthält.

0.3. Bei Beschränkung auf eine bestimmte Menge M, sogen. Basismenge, stellen sich jetzt, bei vorgegebenem *OCh*-System $\mathfrak{k}$, Fragen wie etwa diese: Ist M $\mathfrak{k}$-entartet oder $\mathfrak{k}$-quasiordinär. ($\boldsymbol{R}$:= Körper d. reellen Zahlen; $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$).

0.4. Die vorliegende Note verfolgt solche und verwandte Fragen bei *OCh*-Systemen $\mathfrak{k}$, die von Parabeln höchstens vom Grade $m \geq 2$ mit $J := [0; 1]$ als Definitionsbereich geliefert werden, wobei diese Parabeln bezüglich J einer „Randbedingung" genügen. Grundbereich ist dabei der Parallelstreifen $Q := \{(\chi, \eta) : \chi \in J \wedge \eta \in \bar{\boldsymbol{R}}\}$ und die Basismengen sind Graphen $G := G(f) := \{(\chi, \eta) : \chi \in \wedge\ \eta = f(\chi)\}$ mit stetigem $f : J \to \boldsymbol{R}$.

Unter anderem ergibt sich: Die $\mathfrak{k}$-quasiordinären $G(f)$ sind gekennzeichnet durch eine Funktionalgleichung für f. Im speziellen Fall $m = 2\ (= k)$ werden alle Lösungen dieser Funktionalgleichung angegeben. Auch werden für beliebiges $m \geq 3$ Aussagen gewonnen.

Auf Fragen wie die betr. die Funktionalgleichung für f bei $m \geq 3$, also insbesondere die nach der Existenz zugehöriger $\mathfrak{k}$-quasiordinärer $G(f)$ hoffen wir an anderer Stelle zurückkommen zu können. Vgl. auch 3.5., Anmerkung.

Herrn H. Haller habe ich für verschiedene Bemerkungen sehr zu danken.

1. Bezeichnungen

1.1. Als *Bogen* werden topologische Bilder der Strecke bezeichnet. Daß a und b die Endpunkte des Bogens B sind, wird durch die Schreibweise $B(a|b)$ angezeigt; außerdem wird $\underset{\sim}{B}(a|b) := B(a|b) \setminus \{a, b\}$ gesetzt; es ist also $\underset{\sim}{B}$ der größte offene Teilbogen in B.

1.2. Es ist $J := [0; 1] \subset \boldsymbol{R}$ und $Q := \{(\chi, \eta) : \chi \in J \wedge \eta \in \bar{\boldsymbol{R}}\}$; ferner sei $Q_g := Q \setminus \underline{Q}$ der Rand von Q. Es ist Q der Grundbereich, in dem sich alle folgenden Betrachtungen abspielen (vgl. 0.1.). (Es ist also Q der Parallelstreifen zwischen den η-Parallelen durch (0; 0) und 1, 0)).

1.3. Die Basismengen (vgl. 0.3.) sind Bogen $G(f)$, deren Endpunkte in Q_g liegen und die sich parallel zur η-Achse topologisch auf J projizieren. Die Ordnungscharakteristiken sind ebenfalls Bogen, nämlich Parabeln, d. h. Graphen $G(p)$ von Polynomen $p : J \to \boldsymbol{R}$ mit Endpunkten in Q_g, die einer Randbedingung (vgl. 2.1.) genügen und die sich ebenfalls parallel zur η-Achse topologisch auf J projizieren. Ist $G(f)$ orientiert, so kann und soll jedes $G(p)$ so orientiert werden, daß die Anfangspunkte von $G(f)$ und den $G(p)$ sich aufeinander projizieren.

1.4. Mit der Abkürzung $POW(M) :=$ Kardinalzahl von M, erklären wir M als von endlichen Punktordnungswert

$POW(M; \mathfrak{k})$ bzw. von beschränktem $POW(M; \mathfrak{k}) = r\,(< +\infty)$ bezüglich des OCh-Systems $\mathfrak{k}$ unserer Parabeln, wenn für alle $K \in \mathfrak{k}$ gilt: $POW(M \cap K)$ ist endlich bzw. wenn $\max \{POW(M \cap K) : K \in \mathfrak{k}\} = r$ existiert.

2. Das System $\mathfrak{k}$ der Ordnungscharakteristiken

2.1. Es sei m eine natürliche Zahl, $m \geq 2$, und $p : J \to \boldsymbol{R}$ mit

$$p(x) := \sum\nolimits_{\mu=0}^{\mu=m} g_\mu \chi^{m-\mu} \text{ mit } \chi_\mu \in J \text{ und konstanten } g_\mu \in \boldsymbol{R}.$$

Es sei P die Menge aller dieser p und $G(p)$ der Graph von p. Als $OCh\ K \in \mathfrak{k}$ erklärt man diejenigen $G(p)$, für die außerdem die

$$\text{Randbedingung} \quad p(1) = \tilde{\alpha} p(0)$$

mit einem für alle p gleichen (d. h. konstanten) $\tilde{\alpha} \in \boldsymbol{R}$ erfüllt und wobei $\tilde{\alpha}$ im übrigen beliebig wählbar ist. Das System der Ordnungscharakteristiken K ist also

$$\mathfrak{k} := \mathfrak{k}(\tilde{\alpha}) := \{K : K := G(p) \wedge p \in P \wedge p(1) = \tilde{\alpha} p(0)\}.$$

Es liegen die K bis auf ihre Endpunkte in $\underline{Q}$ und es ist m die Grundzahl von $\mathfrak{k}$. (vgl. auch weiter unten).

2.2. Man setze jetzt $x := (\chi_1, \ldots, \chi_m)$. Es ist $x \in J^m$ und es sei

(S) $\quad S := \{x : x := (\chi_1, \ldots, \chi_m) \wedge \bigwedge_\mu \chi_\mu \in J \wedge \chi_\mu \neq \chi_\varrho$ für $\mu \neq \varrho\}$.

Zur Bestimmung eines $K \in \mathfrak{k}$ durch m Punkte $z_\mu := (\chi_\mu, \eta_\mu)$ mit $\eta_\mu \in \boldsymbol{R}$, $x \in S$, hat man die Gleichungen für die $m + 1$ „Unbekannten" g_μ:

$$\langle \mathrm{p} \rangle \quad \begin{aligned} & g_0 \chi_\mu^m + \ldots + g_{m-1} \chi_\mu^1 + g_m = \eta_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, m \\ & g_0 + \ldots\ldots + g_{m-1} + g_m (1 - \tilde{\alpha}) = 0. \end{aligned}$$

Zwecks Untersuchung von $\langle \mathrm{p} \rangle$ bezeichnen wir mit $M_r(x) := M_r(\chi_1, \ldots \chi_r)$ die r, r-Matrix mit den Zeilen $(\chi_\varrho^{r-1} \chi_\varrho^{r-2} \ldots x_\varrho^0)$, $\varrho = 1, \ldots, r$.

Bekanntlich ist dann

$$V_r(x) := \det M_r(x) = (-1)^{\binom{r}{2}} \Pi_{\tau<\varrho} (\chi_\varrho - \chi_\tau),\ \tau, \varrho = 1, \ldots, r.$$

Die $m+1, m+1$-Matrix $m_{m+1}(x, \tilde{\alpha})$ der linken Seiten von $\langle p \rangle$, also

$$M_{m+1}(x, \tilde{\alpha}) := \begin{pmatrix} \chi_1^m & \cdots\cdots\cdots & \chi_1 & \chi_1^0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \chi_m^m & \cdots\cdots\cdots & \chi_m & \chi_m^0 \\ 1 & \cdots\cdots\cdots & 1 & 1-\tilde{\alpha} \end{pmatrix}$$

besitzt dann die Determinante

$$\det M_{m+1}(x, \tilde{\alpha}) = V_{m+1}(\chi_1, \ldots, \chi_m, 1) - \tilde{\alpha} V_m(x) \Pi_{\mu=1}^m \chi_\mu =$$
$$= (-1)^{\binom{m+1}{2}} V_m(x) W_m(x, \tilde{\alpha}) \qquad \text{mit}$$
$$W_m(x, \tilde{\alpha}) := (1-\chi_1) \ldots (1-\chi_m) - (-1)^m \tilde{\alpha} \chi_1 \ldots \chi_m.$$

Im Folgenden *setzen* wir abkürzend

$\alpha := (-1)^m \tilde{\alpha}$, also $\tilde{\alpha} = (-1)^m \alpha$, wobei dann auch α (für jedes m) beliebig (in $\boldsymbol{R}$) wählbar ist.

Entsprechend wird *gesetzt*:

$$W(x, \alpha) := W_m(x, \tilde{\alpha}) = (1-\chi_1) \ldots (1-\chi_m) - \alpha \chi_1 \ldots \chi_m$$
und
$$M(x, \alpha) := M_{m+1}(x, \tilde{\alpha}).$$

2.3. Bevor auf die Diskussion von $\langle p \rangle$ eingegangen wird, seien einige, später benützte Bemerkungen zusammengestellt, die sich auf $W(x, \alpha)$ mit $x := (\chi_1, \ldots, \chi_m) \in J^m$ beziehen.

2.3.1. (I) Es sei $j : (x \to x)$ mit $x \in J^m$ die Identität. Dann ist $W(j, \alpha)$ *stetige* Funktion von j im J^m, also (vgl. 2.2., (S)) nicht nur in S, weil jetzt auch $\chi_\mu = \chi_\varrho$ für $\mu \neq \varrho$ zugelassen ist.

(II) Für $x = (\chi_1, \ldots, \chi_m)$ werde gesetzt
$x^r := (\chi_1, \ldots, \chi_{r-1}, \chi_{r+1}, \ldots, \chi_m) \in J^{m-1}$ sowie
$P(x^r) := \Pi_{\varrho \neq r} (1-\chi_\varrho)$, $Q(x^r) := \Pi_{\varrho \neq r} \chi_\varrho$.

Für jedes $r = 1, \ldots, m$, hat man dann

$$W(x, \alpha) = P(x^r) - \chi_r W(x^r, -\alpha) \text{ und}$$
$$W(x^r, -\alpha) = P(x^r) + \alpha Q(x^r).$$

(III) Aus (II) folgt: Es ist

$$W(j,x^r,\alpha) := W(\chi_1, \ldots, \chi_{r-1}, j, \chi_{r+1}, \ldots, \chi_m, \alpha)$$

bei konstantem (x^r, α), d. h. konstanten x^r und α, konstant genau für $W(x^r, -\alpha) = 0$.

(III 1) Unter Voraussetzung der Konstanz von (x^r, α) und von $W(j, x^r, \alpha)$ ist $W(x, \alpha) \geq 0$; und zwar $W(x, \alpha) > 0$, wenn $\bar{m}_r := \max\{\chi_\varrho : \chi_\varrho \neq \chi_r\} < 1$ bzw. $W(x, \alpha) = 0$, wenn $\bar{m}_r = 1$ (Denn aus den Vor. folgt $W(x, \alpha) = P(x^r)$). Bei $\bar{m}_r = 1$ folgt aus $W(x^r, -\alpha) = 0$, daß entweder $\alpha = 0$ oder ein $\chi_\varrho = 0$ ist für $\varrho \neq r$.

(III 2) Ein nicht konstantes $W(j, x^r, \alpha)$ ist streng isoton bzw. streng antiton, je nachdem $W(x^r, -\alpha) < 0$ bzw. > 0 (bei konstantem (x^r, α)).

(III 3) Im Falle $\alpha \geq 0$ ist $W(j,x^r,\alpha)$, soweit nicht konstant, streng antiton für jedes $r = 1, \ldots, m$ (bei konstantem (x^r, α)).

2.3.2. Es werde gesetzt: $S^+ := \{x; x \in J^m \wedge W(x, \alpha) > 0\} =: S^+(\alpha) \subset J^m$, $S^- := \{x : x \in J^m \wedge W(x, \alpha) < 0\} =: S^-(\alpha)$, $S^0 := \{x : x \in J^m \wedge W(x, \alpha) = 0\} =: S^0(\alpha)$. O. B. d. A. sei dabei $0 \leq \chi_1 \leq \ldots < \chi_\mu \leq \chi_{\mu+1} \leq \ldots \leq \chi_m \leq 1$, für alle x.

B e h a u p t u n g. (a) Es ist $J^m = S^+(\alpha) \cup S^0(\alpha) \cup S^-(\alpha)$ eine Zerlegung von J^m.

(b) Für alle α ist $S^+(\alpha) \neq \varnothing$ und $S^0(\alpha) \neq \varnothing$; und es ist $S^-(\alpha) = \varnothing$ genau für $\alpha = 0$ oder $\alpha < 0$. Es enthält $S^0(\alpha)$ die (von α unabhängige) Menge $S_0 := \{x : x \in J^m \wedge \chi_1 = 0 \wedge \chi_m = 1\}$; dabei ist $S^0 = S_0$ genau für $\alpha < 0$. Für $\alpha = 0$ ist $S^0(0) = \{x : x \in \in J^m \wedge \chi_m = 1\}$.

(c) Bezogen auf die übliche Topologie in J^m sind $S^+(\alpha)$ und $S^-(\alpha)$ offen in J^m für alle α. Hingegen ist $S^0(\alpha)$ für alle α Randmenge, d. h. abgeschlossen und nirgends dicht in J^m.

(d) Es ist $S^+(\alpha)$ für alle α und, für alle α mit $S^-(\alpha) \neq \varnothing$, auch $S^-(\alpha)$ zusammenhängend in J^m (und sogar bogenverknüpft).

B e w e i s *Betr.* (a) *und* (b). Klar. – *Betr.* (c) Wegen der Stetigkeit von $W(j, \alpha)$ sind $S^\pm(\alpha)$ offen. Es sei $x' := (\chi_1', \ldots, \chi_m') \in \in S^0(\alpha)$, wobei wieder $0 \leq \chi_1' \leq \ldots \leq \chi_\mu' \leq \chi_{\mu+1}' \leq \ldots \leq$

$\leq \chi'_m \leq 1$. – Wir unterscheiden: (A 1) Im Fall $\alpha = 0$ ist $P(x') = 0$ ($= \Pi_\mu (1 - \chi'_\mu)$), also $\chi'_m = 1$, während $P(x'') > 0$ für $x'' \in S^+$; man kann aber x''_m beliebig nahe bei 1, also x'' beliebig nahe bei x' wählen. – (A —) Im Falle $\alpha < 0$ ist $P(x'')$ oder (und) $Q(x'')$ ($= \Pi_\mu \chi''_\mu$) positiv für $x'' \in S^+$ und wieder x'' beliebig nahe bei x' wählbar. – (A +) Im Falle $\alpha > 0$ gibt es (wegen der strengen Antitonie von $W(j, x^r, \alpha)$) zu x' beliebig benachbarte $x'' \in S^+$ und $x'' \in S^-$.

Betr. (d) Es sei $x^i := (\chi^i_1, \ldots \chi^i_m) \in S^+$, $i = 1, 2$, mit $0 \leq x^i_\mu \leq x^i_{\mu+1} \leq 1$, $1 \leq \mu \leq m - 1$. Man setzt $x'' = (\chi_1, \ldots, \chi_m)$ mit $\chi_\mu := \min\{\chi^1_\mu, \chi^2_\mu\}$, sodaß $\chi_\mu \leq \chi_{\mu+1}$ für $1 \leq \mu \leq m$. Für $\chi^i_\mu(t) := t\chi_\mu + (1 - t)\chi^i_\mu$ mit $1 \leq t \leq 1$ gilt $\chi^i_\mu(0) = \chi^i_\mu$ und $\chi^i_\mu(1) = \chi_\mu$. Setzt man $x^i_\mu(t) := (\chi_1, \ldots, \chi_{\mu-1}, \chi^i_\mu(t), \ldots, \chi^i_m)$, so hat man $x^i_\mu(1) = x^i_{\mu+1}(0)$. – *Im Fall* $\alpha \geq 0$ ist (gemäß 2.3.1., (III 3)) $W(x^i_\varrho(j), \alpha)$ konstant oder streng antiton (in j bei konstanten χ^i_μ und $\varrho = 1, \ldots, m$), mithin $W(x^i_\mu, \alpha) > 0$, wenn $W(x^i_{\mu-1}, \alpha) > 0$. Durch Induktion nach μ (bei Weglassung von Konstanzintervallen) folgt $x \in S^+$, wenn $x^1, x^2 \in S^+$. Und da x mit x^1 und mit x^2 durch je einen in S^+ verlaufenden Streckenzug verbunden ist, ergibt sich die Beh. für $\alpha \geq 0$ und S^+. – Analog ergibt sich die Beh. für $S^- \neq \varnothing$ bei $\alpha \geq 0$. – Im Fall $\alpha < 0$ ist $S^- = \varnothing$ (2.3.2., (b)) und $x^i \in S^+$ genau für $P(x^i)$ oder (und) $Q(x^i) > 0$; dabei ist z. B. $P(x^i))$ stetig und streng antiton für jedes χ^i_μ (bei im übrigen konstanten χ^i_ϱ mit $\varrho \neq \mu$). Ist nun Erstens $P(x^i) > 0$ für $i = 1$ sowohl als für $i = 2$, so kann man wie im Falle $\alpha > 0$ für S^+ schließen. Ist aber Zweitens etwa $P(x^1) > 0$, indes $P(x^2) = 0$, so geht man in S^+ stetig von x^1 zu x^2 über; weil $Q(x^2) > 0$, ist dies möglich.

2.4. Vereinbarung. Bisher war $x \in J^m$ angenommen worden; demgegenüber werde von jetzt ab, soweit nicht anderes bemerkt, $x \in S$ (vgl. 2.2., (S)) angenommen, also $0 \leq \chi_1 < \chi_2 < \cdots < \chi_\mu < \chi_{\mu+1} < \cdots < \chi_m \leq 1$. Demgemäß ist dann $S^\pm$ bzw. S^0 zu verstehen als $S^\pm \frown S$ bzw. $S^0 \frown S$.

Auch die $S^\pm \frown S$ sind offen und zusammenhängend.

2.4.1. Hinsichtlich $< p >$ bzw. $M(x, \alpha)$ (vgl. 2.2.) gilt:

Für alle $x \in S$ und $\alpha \in \boldsymbol{R}$ ist $m \leq \operatorname{Rang} M(x, \alpha) \leq m + 1$; und zwar ist $\operatorname{Rang} M(x, \alpha) = m$ genau für $W(x, \alpha) = 0$.

Denn in $M(x, \alpha)$ ist die m, m-Matrix $M_m(x)$ enthalten mit $\det M_m(x) = V_m(x) \neq 0$ für alle $x \in S$ (unabhängig von α).

Die $x \in S^0$ werden als irregulär bezeichnet und die $x \in S \setminus S^0$ als regulär (für jedes α).

2.4.2. Neben den $x \in S$ werden $y := (\chi, \eta) \in J \times \boldsymbol{R}$ betrachtet und $z := (y_1, \ldots, y_m)$ mit $y_\mu = (\chi_\mu, \eta_\mu)$; dabei wird $x(z) := (\chi_1, \ldots, \chi_m)$ gesetzt und $Z := \{z : x(z) \in S\}$ (Es ist. $G(f) \subset J \times \boldsymbol{R}$, vgl. 3.1.).

Bei Benutzung der in 0.2. eingeführten Bezeichnungen hat man jetzt:

(I) Es ist $z \in Z$ entweder $\mathfrak{k}$-entartet oder $\mathfrak{k}$-halbordinär genau dann, wenn $x(z)$ irregulär ist. Ferner ist $z \in Z$ $\mathfrak{k}$-ordinär genau für reguläres $x(z)$.

(II) Die einzigen, für alle α, insbesondere also für $\alpha = 0$, irregulären $x \in S$ sind die $x^0 = (0 = \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-1}, \chi_m = 1) \in S$.

(III) Die einzigen für $\alpha = 0$ irregulären $x \in S$ sind die mit $\chi_m = 1$.

(IV) Ein $z \in Z$ mit irregulärem $x(z)$ ist $\mathfrak{k}$-halbordinär genau dann, wenn die $(m+1, m+2)$-Matrix

$$M(x, \alpha, \eta) := \begin{pmatrix} \chi_1^m & \cdots\cdots \chi_1 & 1 & \eta_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \chi_m^m & \cdots\cdots \chi_m & 1 & \eta_m \\ 1 & \cdots\cdots\cdots 1 & 1-\tilde{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

den Rang m besitzt. Für alle z mit irregulärem $x(z)$ und mit Rang $M(x, \alpha, \eta) = m+1$ und nur für solche z ist z $\mathfrak{k}$-entartet.

Anmerkung. Weil S^0 nirgends dicht in S ist, spielt m die Rolle der Grundzahl für $\mathfrak{k}$.

3. Die Grundbogen

3.1. Es sei $f: J \to \boldsymbol{R}$ stetig in J. Als Grundbogen G diene $G := G(f) := \text{Graph } f := \{(\chi, \eta) : \chi \in J \wedge \eta := f(\chi)\}$. Es ist G

$\mathfrak{k}$-normal, d. h. ist $y_\mu := (\chi_\mu, f(\chi_\mu))$, und entspricht die Reihenfolge $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ der Orientierung von J, so die entsprechende Reihenfolge der y_μ (einer Orientierung von $G(f)$ und) einer Orientierung von $K \in \mathfrak{k}$, wenn die $y_\mu \in G \cap K$.

3.2. Zu jedem G existiert eine in $(J \times \boldsymbol{R})^m$ dichte Menge von $\mathfrak{k}$-ordinären $z \in Z$; denn die Menge $S \setminus S^0$ der $\mathfrak{k}$-regulären $x \in S$ ist dicht in S und für solche x ist $< \mathrm{p} >$ bei beliebigen $\eta_\mu = f(\chi_\mu)$, wenn $x = (\chi_1, \ldots, \chi_m)$, eindeutig lösbar (Zu jedem irregulären x gibt es G, für die x ein $\mathfrak{k}$-entartetes $z \in Z$ liefert.)

3.3. Es erhebt sich jetzt die Frage nach allen Grundbogen $G = G(f)$, die $\mathfrak{k}$-quasiordinär sind (im Sinne von 0.2.: wobei also $M = G$). Diese G sind definitionsgemäß gekennzeichnet dadurch, daß die Gleichungen $< \mathrm{p} >$ mit $\eta_\mu = f(\chi_\mu)$, $\mu = 1, \ldots, m$, lösbar sind für alle $x \in S$. Zu den $\mathfrak{k}$-quasiordinären G gehören trivialerweise alle OCh für alle α bei beliebigem m.

Satz. *Bei gegebenem* $\alpha \in \boldsymbol{R}$ ist $G(f)$ $\mathfrak{k}$-*quasiordinär genau dann, wenn für* $x \in S^0$, *also für alle irregulären* $x \in S$ *d. h. mit*

$$\langle \mathrm{W}_0 \rangle \qquad W(x, \alpha) = 0$$

die Funktionalgleichung

$$\langle \mathrm{f} \rangle \quad 0 = \sum_{\mu=1}^{m} d_\mu\, f(\chi_\mu) = \det \begin{pmatrix} \chi_1^{m-1} & \cdots \chi_1 & 1 & f(\chi_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_m^{m-1} & \chi_m & 1 & f(\chi_m) \\ 1 & \ldots\ldots 1 & (1 - \tilde{\alpha}) & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. In $\langle \mathrm{f} \rangle$ *bedeutet also* d_μ *diejenige, mit geeignetem Vorzeichen versehene Determinante, welche aus der in* $\langle \mathrm{f} \rangle$ *rechterhand stehenden Determinante* d *durch Streichen der* μ-ten *Zeile und der letzten Spalte resultiert (Entwickelung von* d *nach den Elementen der letzten Spalte). Mit der Abkürzung* x^μ (wie in 2.3.1.) *hat man also*

$$\langle d_\mu \rangle \quad d_\mu = (-1)^\mu\, V_{m-1}(x^\mu) \cdot W(x^\mu, -\alpha) \text{ mit}$$

$$\langle W(x^\mu, -\alpha) \rangle \qquad W(x^\mu, -\alpha) = \Pi_{\nu \neq \mu} (1 - \chi_\nu) + \alpha\, \Pi_{\nu \neq \mu} \chi_\nu.$$

Bemerkung. Im Falle $\alpha \leq 0$ ist jedes $G(f)$ $\mathfrak{k}$-ordinär bezüglich des Teilsystems von $\mathfrak{k}$, das keine OCh durch Endpunkte von $G(f)$ enthält.

3.3.1. Für jedes $x \in S^0$ läßt sich χ_m in Abhängigkeit von $\chi_1, \ldots, \chi_{m-1}$ und α darstellen als (vgl. 2.3.1.)

$$\langle \mathrm{m} \rangle \quad \begin{aligned} \chi_m &:= \varphi_m(\chi_1, \ldots, \chi_{m-1}, \alpha) = \\ &= (W(x^m, -\alpha))^{-1} \cdot (1 - \chi_1) \ldots (1 - \chi_{m-1}). \end{aligned}$$

Dabei ist $W(x^m, -\alpha) \neq 0$ für jedes α. – Aus $W(x^m, -\alpha) = 0$ würde nämlich (wegen $\chi_\mu < 1$, $\mu = 1., \ldots, m - 1$) folgen, daß $\alpha < 0$ und dann (wegen $W(x, \alpha) = 0$) $\chi_1 = 0$; daher wäre $W(x^m, -\alpha) = (1 - \chi_1) \ldots (1 - \chi_{m-1}) > 0$ im Widerspruch zu $W(x^m, -\alpha) = 0$.

Daraus ergibt sich die folgende

Kennzeichnung der $\mathfrak{k}$-quasiordinären $G(f)$ durch die Funktionalgleichung

$$\langle \mathrm{f} \rangle \quad 0 = d_m f(\varphi_m) + \textstyle\sum_{\mu=1}^{m-1} (d_\mu \circ \varphi_m) f(\chi_\mu),$$

wobei $0 \leq \chi_1 < \ldots < \chi_{m-1} < 1$, $(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ irregulär und

$$d_m = V_{m-1}(x^m)\, W(x^m, -\alpha) \quad \text{sowie}$$

$$\begin{aligned} d_\mu \circ \varphi_m = (-1)^\mu\, V_{m-1}(\chi_1, \ldots, \chi_{\mu-1}, \chi_{\mu+1}, \ldots, \chi_{m-1}, \varphi_m) \cdot \\ \cdot W(\chi_1, \ldots, \chi_{\mu-1}, \chi_{\mu+1}, \ldots, \varphi_m, -\alpha). \end{aligned}$$

3.4. Bestimmung der $\mathfrak{k}$-quasiordinären Bogen $G(f)$ im Falle $m = 2$. Hier ist $\alpha = \tilde{\alpha}$.

Zwecks Bestimmung der Lösungen von $\langle W_0 \rangle$ und $\langle \mathrm{f} \rangle$ (vgl. 3.3.) setzen wir

$$\langle \mathrm{t} \rangle \quad t(j) := (1 - \alpha)\, j - 1,$$

sodaß $\langle \mathrm{f} \rangle$ sich schreibt in der Gestalt

$$\langle \mathrm{f}' \rangle \quad t(\chi_2) f(\chi_1) = t(\chi_1) f(\chi_2) \text{ für alle irregulären } (\chi_1, \ldots, \chi_m).$$

3.4.1. Der Fall $\alpha = 0$.

Für $m = 2$ hat man den

Satz. (1) *Es ist $t(\chi) = 0$ für ein $\chi \in [0; 1]$, falls $\alpha = 0$, genau dann, wenn $\chi = 1$.*

(2) *Für $\alpha = 0$ wird die Gesamtheit der $\mathfrak{k}$-quasiordinären $G(f)$ geliefert durch die Gesamtheit der stetigen $f\colon [0; 1] \to \boldsymbol{R}$ mit $f(1) = 0$ (zu diesen $G(f)$ gehören insbesondere die OCh.).*

Beweis. *Betr.* (1). Folgt aus $\chi \in [0; 1]$. – *Betr.* (2) Für $\alpha = 0$ ist $S^0 := \{(\chi_1, 1) : 0 \leq \chi_1 < 1\}$. Ferner ist $t(\chi) = \chi - 1$, also $t(\chi_1) \neq 0$ und $t(1) = 0$. Daher folgt aus $t(\chi_1)f(1) = t(1)f(\chi_1)$ (d. h. aus $\langle \mathrm{f} \rangle$), daß $f(1) = 0$ genau für $\mathfrak{k}$-quasiordinäres $G(f)$ (gemäß 3.3.1.)).

3.4.2. Der Fall $\alpha \neq 0$.

Satz. *Für* $m = 2$ *und* $\alpha \neq 0$ *gilt:*

(1) *Im Falle* $\alpha < 0$ *liefern alle* f *mit* $f(1) = \alpha f(0)$ *und nur sie ein* $\mathfrak{k}$*-quasiordinäres* $G(f)$.

(2) *Im Falle* $\alpha > 0$ *liefert* f *genau dann ein* $\mathfrak{k}$*-quasiordinäres* $G(f)$, *wenn* f *darstellbar ist in der Gestalt* $f = t \,.\, q$. *Dabei besitzt* t *die in* 3.4., $\langle \mathrm{t} \rangle$, *angegebene Bedeutung und* q *genügt der Gleichung* $q = q \circ h := q(h)$, *wobei*

$\langle \mathrm{h} \rangle$ $\quad h := (j - 1) : t(j)$.

Zusatz. (1) Im Fall $\alpha < 0$ *ist* $\mathfrak{k}$*-ordinär jeder* offene *Bogen* $G = G(f)$ *mit in* J *stetigem, im übrigen beliebigem* f.

(2) Im Fall $\alpha > 0$ *gilt: Für jedes* $\mathfrak{k}$*-quasiordinäre* $G(f)$ *ist* f *darstellbar als*

$\langle \mathrm{w} \rangle$ $\quad f = t^{-1}. (w + (w \circ h))$, $\quad$ also $q = w + (w \circ h)$,

wobei $w : J \to \boldsymbol{R}$ *stetig, im übrigen aber beliebig ist. Umgekehrt wird durch jedes* f *der Gestalt* $\langle \mathrm{w} \rangle$ *ein* $\mathfrak{k}$*-quasiordinäres* $G(f)$ *geliefert. (Für* $\alpha > 0$ *ist* $h > 0$ *und streng antiton.).*

Beweis. *Betr.* (1). Für $\alpha < 0$ ergibt sich aus $W(x, \alpha) = 0$, daß $\chi_1 = 0$ und $\chi_2 = 1$ das einzige irreguläre (χ_1, χ_2) ist. Für dieses $(0,1)$ ergibt sich aber aus $\langle \mathrm{f} \rangle$, daß $f(0) = g_2$ und $f(1) = g_0 + g_1 + g_2 = \alpha f(0)$, wobei g_0 und g_1 beliebig. Und da $(0,1)$ bei $\alpha < 0$ das einzige irreguläre Paar ist, liefert jedes (stetige) f mit $f(1) = \alpha f(0)$ ein $\mathfrak{k}$-quasiordinäres $G(f)$.

Betr. (2). (A) Für $\alpha > 0$ läßt sich $\langle \mathrm{f}' \rangle$ in Rücksicht auf 3.3.1, $\langle \mathrm{m} \rangle$, so schreiben:

$\langle \mathrm{f} \rangle$ $\quad (t \circ h) \cdot f = t \cdot (f \circ h)$ in J.

Außerdem gilt

$\langle \mathrm{h}^2 \rangle$ $\quad h \circ h = j$.

(Es ist $h > 0$ und streng antiton, weil $h'(\chi) \cdot (t(\chi))^2 = -\alpha < 0$ in J).

(B) Ist f Lösung von $\langle \mathrm{f} \rangle$ und $q := t^{-1} \cdot f$, so ergibt $\langle \mathrm{f} \rangle$, daß $q o h = (t o h)^{-1} \cdot (f o h) = t^{-1} \cdot f = q$. – Ist andererseits $\bar{q} := \bar{q} o h$ und $\bar{q} := t^{-1} \cdot \bar{f}$, so gilt $(t o h) \cdot \bar{f} = (t o h) \cdot t \cdot \bar{q} = (t o h) \cdot t \cdot (\bar{q} o h) = (t o h) \cdot t \cdot (t o h)^{-1} \cdot (\bar{f} o h) = t \cdot (\bar{f} o h) = (t o h) \cdot \bar{f}$; es genügt also jedes $\bar{f}$ mit $\bar{f} := t \cdot \bar{q}$ und $\bar{q} = \bar{q} o h$ der Gleichung $\langle \mathrm{f} \rangle$. Hat man ein stetiges, im übrigen beliebiges $w|J$ und setzt $\bar{q} := w + (w o h)$, so gilt $\bar{q} o h = (w o h) + w$ (wegen $\langle \mathrm{h}^2 \rangle$), also $\bar{q} = \bar{q} o h$, sodaß $f := t^{-1} \cdot (w + (w o h))$ eine Lösung von $\langle \mathrm{f} \rangle$ liefert.

3.4.3. Erwähnt sei noch Folgendes:

Für alle $\tilde{\alpha}$ und m gilt: (I) *Jeder $\mathfrak{k}$-quasiordinäre Grundbogen $G(f)$ genügt der gleichen „Randbedingung" wie die OCh, d. h. es ist $f(1) = \tilde{\alpha} f(0)$.* – (II) *Unter den Parabeln von höchstens dem Grade m sind die OCh die einzigen $\mathfrak{k}$-quasiordinären Bogen (sozusagen sind dies die „trivialen" $\mathfrak{k}$-quasiordinären Bogen).*

Beweis. *Betr.* (I) Da $(\chi_1 = 0, \chi_2 = 1)$ irregulär ist für alle α, folgt aus $\langle \mathrm{f} \rangle$ für alle $\mathfrak{k}$-quasiordinären $G(f)$, daß $t(1) f(0) = t(0) f(1)$. Wegen $t(0) = -1$ und $t(1) = -\tilde{\alpha}$ folgt $f(1) = \tilde{\alpha} f(0)$. – *Betr.* (II) Gemäß (I) genügen die *OCh* der „Randbedingung" (vgl. 2.1.).

3.5. Grundbogen mit vorgegebenem Punktordnungswert bezüglich $\mathfrak{k}$.

Satz. *Zu jedem $\tilde{\alpha}$ und $m \geq 2$ sowie zu jedem $n \geq m$ gibt es Grundbogen $G(f)$ mit $POW((G(f); \mathfrak{k}) = n$.*

Beweis. Fall $n \geq m + 1$. Man wähle $f := g_n j^n + g_{n-1} j^{n-1} + \dots + g_{m+1} j^{m+1}$. Ist dann $K = G(p)$ mit $p(j) := g_0 j^m + \dots + g_m$ und $g_0 + \dots + g_{m-1} + (1 - \tilde{\alpha}) g_m = 0$, ferner $K \in \mathfrak{k}$ sonst beliebig, so besitzt bei passender Wahl der $g_n, \dots, g_{m+1}$ das Polynom $f(j) - p(j)$ genau n reelle Nullstellen in $(0; 1)$, so daß also $G(f)$ und K genau n Punkte gemeinsam haben; andererseits kann kein $f(j) - p(j)$ mehr als n Nullstellen besitzen (sofern es nicht Nullpolynom ist). – *Fall* $n = m$. Für $p(j) := j(j - \chi_2) \dots (j - \chi_{m-1})(j - 1)$ gilt $K = G(p) \in \mathfrak{k}$ bei beliebigem $\alpha \in \boldsymbol{R}$; für $G := G(\tilde{f})$ mit $\tilde{f} :=$ konst. $= 0$ ist ferner $POW(G \frown K) = m$, wobei $G \frown K$ abgesehen von den Endpunkten nur Schnittpunkte besitzt, deren jeder einfach zu zählen ist. Und wegen $p(\chi) \neq 0$ für zu 0 bzw. zu 1 hinreichend benachbarte $\chi \in (0; 1)$ leistet $f(j) = \beta j + \gamma$ für geeignete, absolut hinreichend kleine β, γ mit $\beta \neq (\tilde{\alpha} - 1)\, \gamma$ das Gewünschte.

Anmerkung. Auf die Frage, ob es $\mathfrak{k}$-quasiordinäre Bogen G mit $POW(G; \mathfrak{k}) \geq m + 1$ gibt, die keine OCh sind, soll später zurückgekommen werden.

3.6. Singuläre Punkte auf Grundbogen.

Eine $OCh\ K$ ist durch m ihrer Punkte nicht eindeutig bestimmt, wenn für diese m Punkte $z_\mu := (\chi_\mu, \eta_\mu) \in K$, $\mu = 1, \ldots, m$, das m-tupel $(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ irregulär ist. Demgegenüber gilt der

1. Satz. *Es sei* $\underset{\sim}{K} \in \mathfrak{k}$ *bei beliebigem* $\tilde{\alpha}$ *und* m. *Durch* $m + 1$ *Punkte aus* $\underset{\sim}{K}$ *ist* $\underset{\sim}{K}$ *stets eindeutig bestimmt.*

Dieser Satz ergibt sich aus dem

2. Satz. *Für beliebige* $\tilde{\alpha}$, m *gilt: Es sei* $Y := (z_1, \ldots, z_{m-1})$ *ein* $(m - 1)$*-tupel von verschiedenen, in* $\underset{\sim}{K}$ *enthaltenen Punkten* $(\underset{\sim}{K} \in \mathfrak{k})$. *Für irgend zwei (verschiedene) Punkte* $z^i \in \underset{\sim}{K} \setminus Y$, $i = 1, 2$, *ist mindestens eines der in* $\underset{\sim}{K}$ *enthaltenen* m*-tupel* (Y, z^i) $\mathfrak{k}$*-ordinär.*

Zusatz. Für alle auf $\underset{\sim}{K}$ zwischen z^1 und z^2 gelegenen z ist das m-tupel (Y, z) ebenfalls $\mathfrak{k}$-ordinär.

Beweis. Es sei $z_\nu := (\chi_\nu, \eta_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, m - 1$, und $z^i := (\chi^i, \eta^i)$, $i = 1, 2$, ferner sei gesetzt $x^i := (\chi_1, \ldots, \chi_{m-1}, \chi^i)$, wobei o. B.d. A. $\chi_\nu < \chi_{\nu+1}$ angenommen werde, aber χ^i auch zwischen den χ_ν liegen darf. Nun sei etwa x^1 irregulär, also $W(x^1, \alpha) = 0 = (1 - \chi_1) \ldots (1 - \chi_{m-1}) - \chi^1 A$, wobei $A := (1 - \chi_1) \ldots (1 - \chi_{m-1}) + \alpha \chi_1 \ldots \chi_{m-1}$. Wegen $z_\nu \in \underset{\sim}{K}$ ist dabei $(1 - \chi_1) \ldots (1 - \chi_{m-1}) > 0$ und wegen $z^1 \in \underset{\sim}{K}$ auch $\chi^1 \neq 0$. Aus $W(x^1, \alpha) = 0$ folgt also $A \neq 0$. Gemäß 2.3.1., (III), und da A von χ^1 nicht abhängt, ändert sich $W((\chi_1, \ldots, \chi_{m-1}, j), \alpha)$ stetig und streng monoton bei stetiger, streng monotoner Überführung von χ^1 in χ^2. Es ist also $W(x^2, \alpha) \neq 0$, d. h. (Y, χ^2) ist regulär.

3.6.1. Jeder Grundbogen $G = G(f)$ ist $\mathfrak{k}$-normal (vgl. 3.1.). Unter der Voraussetzung, daß K durch je $m + 1$ seiner Punkte eindeutig bestimmt ist, gilt daher für jedes G mit höchstens endlichem $POW(G; \mathfrak{k}) \geq m + 1$ der Monotonie- und folglich auch der Kontraktionssatz, gemäß [1], 2.3. und 2.4. Zufolge [1], 4.1.2., hat man daher:

Jeder Grundbogen G von höchstens endlichem $POW(G; \mathfrak{k}) \geq m + 1$ besitzt mindestens einen $\mathfrak{k}$-singulären Punkt z, d. h. ein z, dessen beliebig kleine Umgebungen auf G einen $POW \geq m + 1$ besitzen.

Literatur

[1] Haupt-Künneth, Geometrische Ordnungen. Heidelberg-New York 1967.

[2] Haupt-Künneth, Über sogenannte entartete Mengen usw. Manuscripta math. **3** (1970) 391–412.

[3] H. Künneth, Normalität bei $\mathfrak{k}$-ordinären Bogen. Sitz.-Ber. Bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl. 1971, 77–80.