

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1979

MÜNCHEN 1980

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

1420

Über den Zustandsraum der Quantenphysik

Fritz Bopp

Sektion Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München

Der Theorie des endlichdimensionalen und der des unendlichdimensionalen Hilbertraums liegen verschiedenartige Axiome zugrunde [1]. Darum kann man die zweite Theorie nicht durch Grenzübergang aus der ersten gewinnen. Daraus folgt, daß die Bewährung der endlichdimensionalen Theorie in der Quantenphysik von Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden noch nicht die der unendlichdimensionalen Theorie gerantiert. Es gibt Gründe, an deren Anwendbarkeit in der Quantenphysik zu zweifeln. Dazu gehört insbesondere der, daß die durch Quantisierung gefundenen Hamiltonoperatoren oft mathematisch nicht existieren. Sie genügen nicht den Axiomen des unendlichdimensionalen Hilbertraums.

Zwei Auswege bieten sich an: Entweder muß man die Hamiltonoperatoren den Axiomen anpassen, was einen Freiraum für Spekulationen schafft, den man nach allem, was man weiß, nur in renormierbaren Theorien unter Kontrolle hat, – oder man muß die Axiome des unendlichdimensionalen Zustandsraums abändern, wofür es gute physikalische Gründe gibt.

Die Menge der einer physikalischen Theorie zugrundeliegenden Daten ist vielleicht unbegrenzt wachsend, aber in jedem Augenblick endlich. Will man unbegründeten Hypothesen aus dem Wege gehen, so muß man mindestens anfangs das Unendliche vom Endlichen her begreifen. Man darf also das Unendliche nur als werdendes zulassen. Es wird sich zeigen, daß damit Weichen gestellt sind, die eine Rückkehr zum seienden Unendlich ausschließen.

Zunächst steht diesem Ziel innerphysikalisch die Heisenbergsche Vertauschungsrelation im Wege, aus der die für Oszillatormatrizen hervorgeht:

$$(1) \quad [a, a^\dagger] = 1.$$

Ihre Spur ist unendlich, während die für Kommutatoren endlicher Matrizen verschwindet. Auch hiernach gibt es keinen Grenzübergang von endlichen zu unendlichen Matrizen.

Das ändert sich jedoch, wenn man von endlichen Ausschnitten der Oszillatormatrizen mit $\Omega + 1$ Zeilen und Spalten ausgeht, von

$$(2) \quad a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & \sqrt{\Omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und der dazu hermitesch konjugierten Matrix $a^\dagger$. Ihr Kommutator ist gleich

$$(3) \quad [a, a^\dagger] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & -\Omega \end{pmatrix} \equiv : I$$

Einerseits ist die Spur gleich 0. Andererseits unterscheidet sich der Kommutator vom Heisenbergschen nur im letzten Diagonalglied, das mit wachsendem Ω ins Unendlich abwandert. So betrachtet haben wir werdendes Unendlich vor uns.

Denkt man an den Oszillator und wählt man Ω von vorneherein hinreichend groß, z.B. 10^{100} , so sind die Zustände mit Quantenzahlen nahe bei Ω praktisch unerreichbar. Der Unterschied zwischen den Vertauschungsrelationen (1) und (3) ist also bei hinreichend großem Ω und erst recht bei unendlich werdendem nicht merklich.

Doch gibt es ein grundsätzliches Bedenken, auf das Stumpf [2] aufmerksam gemacht hat. Die Matrix I in (3) ist indefinit und darum nicht unitärinvariant. Das könnte die statistische Deutung der Quantenmechanik beeinträchtigen.

Dieser Schwierigkeit entkommt man durch die umgekehrte Frage: Welche unitären Transformationen lassen I invariant? Es sind offensichtlich alle unitären Matrizen, für die die Gleichungen

$$(4) \quad U_{n, \Omega+1} = U_{\Omega+1, n} \quad (n \neq \Omega+1), \quad U_{\Omega+1, \Omega+1} = 1.$$

gelten, also alle, die keine Übergänge von und nach $\Omega+1$ liefern. Wir gelangen so zu einer physikalisch plausiblen Auswahlregel. Klarerweise bleibt die Gruppeneigenschaft der durch (4) eingeschränkten unitären Matrizen erhalten. Danach sind nur solche unitären Transformationen zulässig, die mit I vertauschbar sind. Wegen $U = e^{i\eta}$, $\eta^\dagger = \eta$ folgt daraus, daß auch die hermiteschen Matrizen η , welche physikalische Größen darstellen, mit I vertauschbar sein müssen:

$$(5) \quad [I, \eta] = 0.$$

Das gilt insbesondere für den Hamiltonoperator.

Somit ist die statistische Deutung der Quantenmechanik nicht gefährdet, wenn man die Vertauschungsrelation (3) akzeptiert und nur Operatoren zuläßt, die den Zustand $\Omega+1$ nicht an Wechselwirkungen beteiligen. Da solche Wechselwirkungen schon bei hohen Quantenzahlen keine Bedeutung haben, trifft dies erst recht zu, wenn wir Ω als unendlich werdende ganze Zahl betrachten. Es ist also stets möglich, mit a und $a^\dagger$ so zu rechnen, als handele es sich um endliche Matrizen.

Die Oszillatormatrizen a und $a^\dagger$ kann man durch einen Satz von Fermioperatoren ψ_i , $\psi_i^\dagger$, $i \in \mathbb{N}$, darstellen, der den Vertauschungsrelationen genügt:

$$(6) \quad \{\psi_i, \psi_i^\dagger\} = \delta_{ik}, \quad \{\psi_i, \psi_k\} = \{\psi_i^\dagger, \psi_k^\dagger\} = 0.$$

Eine solche Darstellung ist wahrscheinlich nicht allgemein empfehlenswert, im folgenden aber aus zwei Gründen bequem. Erstens bewältigt man mit ihr die Randbedingungen (4) und die Folgebedingung (5) auf elegante Weise. Zweitens kriegt man bosonische und fermionische Quantenfeldtheorien mit einem Schlag in den Griff.

Statt von der unendlichen Folge von Operatoren $\psi_i, \psi_i^\dagger$ gehen wir von einer endlichen, unendlich werdenden Anzahl von Operatoren aus:

$$(7) \quad i \in (1, 2 \dots \Omega).$$

Damit bilden wir die Operatoren

$$(8) \quad \chi_0 = \prod_{i=1}^{\Omega} \psi_i \psi_i^\dagger = \chi_0^\dagger, \quad \chi_i = \chi_0 \psi_i, \quad \chi_i^\dagger = \psi_i^\dagger \chi_0$$

und die Zustandsvektoren

$$(9) \quad |n\rangle = \chi_n^\dagger |0\rangle, \quad n \in (0, 1, 2 \dots \Omega),$$

und es gelten die Gleichungen

$$\chi_m |n\rangle = \delta_{mn} |0\rangle, \quad \chi_m^\dagger |n\rangle = 0.$$

Die Operatoren

$$G = \sum_{m,n} c_{mn} \chi_m^\dagger \chi_n$$

bilden hiernach den von $|n\rangle$ aufgespannten Zustandsraum

$$|\varphi\rangle = \sum_n \varphi_n |n\rangle$$

stets in sich oder auf sich ab. Aus

$$|\varphi'\rangle = G |\varphi\rangle = \sum_n \varphi'_n |0\rangle$$

folgt nämlich

$$\varphi'_m = \sum_n c_{mn} \varphi_n.$$

Wir können daher $|n\rangle$ mit der n -ten Anregungsstufe des Oszillators identifizieren und haben damit eine Fermionendarstellung der Operatoren $a, a^\dagger$ für Bosonen:

$$(10) \quad \begin{aligned} a &= \sum_n \sqrt{n+1} \chi_n^\dagger \chi_{n+1}, \\ a^\dagger &= \sum_n \sqrt{n+1} \chi_{n+1}^\dagger \chi_n. \end{aligned}$$

Denn es ist

$$\begin{aligned}
a a^\dagger &= \sum_{m,n} \sqrt{(m+1)(n+1)} \chi_m^\dagger \chi_{m+1} \chi_{n+1}^\dagger \chi_n \\
&= \sum_n (n+1) \chi_n^\dagger \chi_{n+1} \chi_{n+1}^\dagger \chi_n = \sum_n (n+1) \chi_n^\dagger \chi_n, \\
a^\dagger a &= \sum_{m,n} \sqrt{(n+1)(m+1)} \chi_{n+1}^\dagger \chi_n \chi_m^\dagger \chi_{m+1} \\
&= \sum_n (n+1) \chi_{n+1}^\dagger \chi_{n+1} = \sum_n n \chi_n^\dagger \chi_n,
\end{aligned}$$

woraus

$$(11) \quad [a, a^\dagger] = 1$$

hervorgeht. Die unbequeme Ränderung der Matrix ist verschwunden, weil das Operatorpaar $\psi_{\Omega+1}$, $\psi_{\Omega+1}^\dagger$ gar nicht vorkommt. Man bestätigt die obere Ausrechnung von $aa^\dagger$ und $a^\dagger a$ leicht durch Anwendung der Operatoren auf alle Basisvektoren, z.B. ist für alle $|m\rangle$

$$\begin{aligned}
&\sum_n (n+1) \chi_n^\dagger \chi_n \chi_{n+1}^\dagger \chi_{n+1} |m\rangle = \\
&= (m+1) \chi_m^\dagger \chi_{m+1} \chi_{m+1}^\dagger |0\rangle = (m+1) |m\rangle
\end{aligned}$$

im Einklang mit

$$\sum_n (n+1) \chi_n^\dagger \chi_n |m\rangle = (m+1) |m\rangle.$$

Wir haben damit Bosonenoperatoren durch Fermionenoperatoren dargestellt. Das ist ungewöhnlich, bewährt sich aber auch bei speziellen Problemen. So kann man z.B. die Bose-Einstein-Statistik aus der Fermistatistik ableiten, wie aus einer Aufgabe in Sommerfelds Thermodynamik hervorgeht [3].

Da einzelne Paare von Fermionenoperatoren durch 2×2 -Matrizen und Ω Paare durch $2^\Omega \times 2^\Omega$ -Matrizen dargestellt werden, vollzieht sich der Übergang zu beliebig großem Ω allein durch die Hinzufügung weiterer Operatorpaare. Hamiltonoperatoren

$$(12) \quad H = H(\psi^\dagger, \psi)$$

$$\psi^\dagger = \{\psi_n^\dagger\}, \quad \psi = \{\psi_n\}, \quad n \in (1, 2 \dots \Omega)$$

sind ohne zusätzliche Bedingungen vom Typus (5) auf den jeweils betrachteten Zustandsraum bezogen.

Wir unterstreichen noch einmal, daß wir nicht meinen, die fermionische Darstellung der Bosonenoperatoren sei allgemein empfehlenswert. Sie ist jedoch mathematisch möglich und bei der Formulierung der allgemeinen Grundlagen von Quantenfeldtheorien bequem, weil man sich zunächst nur um Spinorfeldtheorien zu kümmern braucht. Die Zweckmäßigkeit der fermionischen Darstellung endet dort, wo es darum geht, die Eigenständigkeit der Bosonen deutlich zu machen, z. B. bei ihrer Einführung durch Eichfelder.

Beiläufig sei angemerkt, daß man auch umgekehrt Fermionenoperatoren ψ , $\psi^\dagger$ durch Bosonenoperatoren α und $\alpha^\dagger$ darstellen kann. Das spielt hier jedoch keine Rolle.

In Spinorfeldtheorien haben wir bei Verwendung des Schrödingerbildes in jedem Punkt $\mathbf{r}$ des Raumes oder in jedem Punkt $\mathbf{p}$ des Impulsraumes eine Anzahl f von Paaren von Fermionenoperatoren

$$\psi^\dagger = \{\psi_\alpha^\dagger(r)\}, \quad \psi = \{\psi_\alpha(r)\}, \quad \alpha \in (1, 2 \dots f).$$

Je nach der Quarktheorie ist f eine kleinere oder größere endliche Zahl. Ziehen wir Bosonen in Betracht, so ist bereits f unendlich werdend. Die Größe von f spielt zunächst keine wesentliche Rolle. Darum beschränken wir uns auf $f = 4$.

Die Raumpunkte $\mathbf{r}$ bilden ein dreidimensionales Kontinuum, das sich einer Ausschöpfung durch Folgen entzieht. Werdendes Unendlich erfordert einen Raum mit abzählbaren Punkten. Denkt man dabei z. B. an eine Folge von unendlichen kubischen Gittern, die im gleichen Maß immer feiner und größer werden, so ist es von vorneherein ausgeschlossen, Rotationssymmetrie darzustellen, von der Lorentzinvarianz ganz zu schweigen. Dennoch steht die Forderung der Abzählbarkeit der Raumpunkte der Lorentzinvarianz nicht im Wege.

Wenn man nämlich voraussetzt, daß die Koordinaten dem (nach Lorentz benannten) Zahlenkörper $\mathbb{L}$ angehören, der durch die Rechenoperatoren $(+, -, \cdot, :, \sqrt{})$ definiert ist, so ist die Raum-Zeit lorentzinvariant, weil die Lorentzrelationen

$$g_{\mu\nu} l^\mu_\sigma l^\nu_\sigma = g_{\sigma\sigma}$$

(bei Lorentz-Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$) von $\mathbb{L}$ -Zahlen befriedigt werden. Setzt man nämlich in einen vollständigen Satz innerhalb gewisser Grenzen frei wählbarer $\mathbb{L}'$, $\mathbb{L}$ -Zahlen ein, so sind auch die übrigen $\mathbb{L}'$, $\mathbb{L}$ -Zahlen, weil bei ihrer Berechnung neben rationaler Operationen nur Quadratwurzeln vorkommen [8].

Hier verwenden wir die Abzählbarkeit nur als technisches Hilfsmittel. Doch könnte die Darstellbarkeit der Lorentzgruppe in einem Raum mit abzählbaren Punkten von grundsätzlicher Bedeutung sein. Da in der Quantenphysik sprunghafte Vorgänge möglich sind, gibt es, nachdem Lorentzinvarianz mit Abzählbarkeit verträglich ist, soweit ich sehe, keinen zwingenden physikalischen Grund, den Raum als mathematisches Kontinuum zu betrachten.

Im weiteren spielt diese grundsätzliche Frage keine Rolle. Bei abzählbaren Punkten erhält man an Stelle der herkömmlichen Integrale Summen, oft solche über den Impulsraum, etwa

$$(18) \quad W = \sum_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}).$$

In Gittersummen kann man dafür nach bekannten Sätzen näherungsweise schreiben

$$(19) \quad W = \delta'_0 \int d^3\mathbf{p} f(\mathbf{p}) = Z \bar{f}.$$

Darin ist δ'_0 die Punktdichte im Impulsraum, $Z = \delta'_0 \int d^3\mathbf{p}$ die Punktzahl und $\bar{f}$ der Mittelwert im Impulsraum:

$$(20) \quad \bar{f} = \int f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} / \int d^3\mathbf{p}.$$

Dazu gibt es auch Fehlerabschätzungen. Dabei ist eine integrierbare und in Hinblick auf möglichst kleine Fehler eine glatte Interpolation vorausgesetzt.

Bei dichtliegenden Punkten, also schon in einem unendlichen feinen Gitter und erst recht im $\mathbb{Q}$ - und $\mathbb{L}$ -Raum mit rationalen bzw. $\mathbb{L}$ -wertigen Koordinaten sind (18) und (19/20) in Strenge äquivalent. Mit diesen Gleichungen kehren wir zu Integralen der gewöhnlichen Analysis zurück. Sie unterscheiden sich von den entsprechenden Integralen der Quantenfeldtheorie in unendlichen Konstanten. Nur zwei dieser Konstanten sind unabhängig, nämlich die unendliche Punktzahl Z und der unendliche Impuls-

cotoff C . Sie sind durch ihre Definitionsgleichungen unendlich werdend:

$$(21) \quad Z = \delta'_0 \int d^3 \mathbf{p}, \quad C = \int d\mathbf{p}.$$

Z und C sind nicht ganz unbekannt. Einerseits gibt es in jedem Punkt des Impuls- (oder Ortsraums) $f = 4$ Quantenzustände für ein Fermion, im ganzen also $4Z$. Andererseits haben wir im Phasenraum (mit $\hbar$ als Einheit) $\frac{1}{8\pi^3} \int d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{r}$ Quantenzellen und das Vierfache an Plätzen für ein Fermion. Folglich ist.

$$(22) \quad Z = \frac{1}{8\pi^3} \int d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{r}.$$

Daraus und aus

$$\delta(\mathbf{p}) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}$$

folgt in Verbindung mit (21)

$$(23) \quad \delta'_0 = \delta(\mathbf{p}) \big|_{\mathbf{p}=0}$$

Die Zahl Z der Punkt ist also gleich der Zahl der Quantenzellen im Phasenraum, und die Punktdichte ist gleich dem Wert der δ -Funktion im Ursprung.

Diese Feststellung sprengt übrigens den Rahmen der Distributionstheorie, läßt sich aber bei geeigneter Definition der δ -Funktion in der Ω -Analysis von Schmieden-Laugwitz [4] rechtfertigen. Hier begnügen wir uns mit der quantenphysikalischen Verankerung.

Aus (22) folgt ferner, wenn wir die Punktdichte im Raume

$$(24) \quad \delta_0 = \delta(\mathbf{r}) \big|_{\mathbf{r}=0}$$

einführen:

$$(25) \quad Z = \delta_0 \int d^3 \mathbf{r}.$$

Wie bei unendlichen Gitterräumen ist die Zahl der Punkte im Lagenraum gleich der im Impulsraum. Das Integral für δ_0 ist durch den Impulsstoff bestimmt:

$$(26) \quad \delta_0 = \frac{1}{8\pi^3} \int d^3 \mathbf{p} = \frac{C^3}{6\pi^2}.$$

Der Unterschied zur gewöhnlichen Hilbertraumtheorie ist formal unscheinbar, aber inhaltlich schwerwiegend. Denn in der herkömmlichen Theorie sind unendlich werdende Faktoren ausgeschlossen. Das ist der eigentliche Grund, warum man von physikalisch begründet erscheinenden Operatoren sagt, sie seien mathematisch nichtexistent. Wir meinen, daß in der Quantenphysik Axiome zu verwerfen sind, die physikalisch anschaulich erfaßbare Zahlen nur darum ausschließen, weil sie unendlich werden. Darum ist der konventionelle Hilbertraum für die Quantenphysik ungeeignet.

Wahrscheinlich ist die Hilbertraumtheorie auf der Basis der Non-Standard-Analysis [5] insbesondere in der älteren Version von Schmieden-Laugwitz, die wir Ω -Analysis [4] nennen, ein adäquates Instrument. Die spätere logistische Verfeinerung durch Robinson dürfte für konkrete Rechnungen keine Bedeutung haben, weil Ultrafilter nicht konstruktiv sind.

Der Anwendung der Ω -Analysis wird das Transfertheorem [6] entgegengehalten, nach dem sich jeder Ω -analytische Beweis standard-analytisch führen läßt. An der Gültigkeit des Transfertheorem kann man nicht zweifeln. Doch verführt es zu falschen Schlüssen. Denn Rückkehr zu konventionellen Methoden bedeutet nicht Rückkehr zur gewöhnlichen Hilbertraumtheorie, sind doch die obigen Rechnungen mit werdendem Unendlich konventionell und sogar elementar, weil hinter allen Rechnungen endliche Matrizen stehen. Erst am Ende bezieht man sich darauf, daß C und Z unendlich werdende Zahlen sind.

Mit der hier entwickelten Methode wird das Singularitätenproblem der Quantenfeldtheorie nicht aus der Welt geschafft. Doch ist nun eine klare Frage gestellt: Unter welchen Bedingungen liefern die unveränderten, durch die Quantisierung bestimmten Operatoren Eigenwerte, deren Abstände von dem Eigenwert des Grundzustands endlich sind? Dabei ist es physikalisch unerheblich und im Hinblick auf die unerreichbar erscheinenden Quarks vielleicht sogar wünschenswert, daß die meisten Eigenwerte bei dem Grenzübergang unendlich werden.

Zum Schluß behandeln wir zwei einfache Beispiele zur Erläuterung der Methode. Das erste ist wohlbekannt und liefert kaum

neue Ergebnisse. Das zweite ist wenig untersucht und führt zu zwei interessanten Fragen.

In Spinorfeldtheorien ist der Bewegungsoperator bei barer Masse $m_b = 0$ durch

$$(27) \quad H_0 = \int d^3\mathbf{p} \, \psi^\dagger(\mathbf{p}) \, \varrho_1 \, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \, \psi(\mathbf{p})$$

definiert. Im $\mathcal{L}$ -Raum ersetzen wir $\psi \rightarrow \sqrt{\delta'_0} \psi$, $\psi^\dagger \rightarrow \sqrt{\delta'_0} \psi^\dagger$, so daß

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}} \psi^\dagger(\mathbf{p}) \, \varrho_1 \, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \, \psi(\mathbf{p})$$

ist und die Vertauschungsrelationen folgende Gestalt haben:

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{p}), \psi^\dagger_\beta(\mathbf{p}')\} = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}.$$

Das ganze Spektrum ist streng berechenbar, weil H_0 im $\mathbf{p}$ -Raum separierbar ist. In üblicher Weise erhält man als Grundzustand die Diracsee $|D\rangle$ mit dem Eigenwert

$$\begin{aligned} W_0 &= \sum_{\mathbf{p}} \text{Spur} \left(\varrho_1 \, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \, \frac{1 - \varrho_1 \, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}}{2} \right), \quad \mathbf{e} = \mathbf{p}/p, \\ &= -2 \sum_{\mathbf{p}} p = -2 \delta'_0 \int p \, d^3\mathbf{p} = -2 Z \int p \, d^3\mathbf{p} / \int d^3\mathbf{p}, \end{aligned}$$

also ist

$$(28) \quad W_0 = -\frac{3}{2} CZ.$$

Es gibt nichts Neues außer dem Zahlenwert für W_0 . Auch das Spektrum über der Diracsee ist das übliche. Zwar sind die Spektrallinien im $\mathcal{L}$ -Raum abzählbar; aber sie sind dichtliegend. Sie bilden sozusagen ein Quasikontinuum. Wegen $m_b = 0$ beginnt es beim Grundzustand. Der ganze endliche Bereich ist voller Linien. Die im Unendlichen liegenden sind physikalisch uninteressant. Der unendlich werdenden unteren Grenze in (28) steht übrigens als obere Grenze $+\frac{3}{2} CZ$ gegenüber.

Daneben betrachten wir den Wechselwirkungsoperator einer Spinorfeldtheorie mit lokaler Wechselwirkung

$$(29) \quad H_1 = g \int d^3\mathbf{r} \, \psi^\dagger(\mathbf{r}) \, \Upsilon \, \psi(\mathbf{r}) \, \psi^\dagger(\mathbf{r}) \, \Upsilon \, \psi(\mathbf{r}).$$

Darin ist

$$\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\rho}$$

einer der lorentzinvarianten Wechselwirkungsmatrizen im Schrödingerbild (nämlich A - S - P). Die 4×4 -Matrizen $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ und $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sind schiefsymmetrisch und wechselseitig vertauschbar. Ihre Produkttafeln stimmen mit der für Paulimatrizen überein. Auch das Spektrum von H_1 ist streng berechenbar, diesmal weil der Operator im $\mathbf{r}$ -Raum separierbar ist.

Durch Übergang zum $\mathcal{L}$ -Quasikontinuum erhält man aus obigem Integral die Summe

$$H_l = g \delta_0 \sum_{\mathbf{r}} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\gamma} \psi(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\gamma} \psi(\mathbf{r}).$$

Die Eigenwerte setzen sich additiv aus denjenigen des lokalen Operators

$$H_l = \psi^\dagger \boldsymbol{\gamma} \psi \psi^\dagger \boldsymbol{\gamma} \psi \equiv \psi^\top \boldsymbol{\gamma} \psi^\dagger \psi^\top \boldsymbol{\gamma} \psi^\dagger$$

zusammen.

Maximal haben wir vier Fermionen pro Punkt und $2^4 = 16$ Eigenfunktionen. Der Eigenwert $\lambda = 0$ ist 10fach entartet. Er umschließt alle Zustände mit 0 und 4 bzw. 1 und 3 Fermionen, letzteres wegen $\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0$. Für 2-Fermionen-Zustände

$$|\Phi\rangle = \psi^\dagger A \psi^\dagger |0\rangle, \quad A^\top = -A,$$

erhält man aus

$$(\psi^\dagger \boldsymbol{\gamma} \psi) (\psi^\dagger \boldsymbol{\gamma} \psi) (\psi^\dagger A \psi^\dagger) |0\rangle = \lambda \psi^\dagger A \psi^\dagger |0\rangle$$

die Gleichung

$$[\boldsymbol{\gamma}, [\boldsymbol{\gamma}, A]] = -2 \boldsymbol{\gamma} A \boldsymbol{\gamma} = \lambda A.$$

Sie liefert zwei dreifach entartete Eigenwerte, nämlich für

$$A = \begin{matrix} \boldsymbol{\rho}, & \lambda = -8, \\ \boldsymbol{\sigma}, & +8. \end{matrix}$$

Die Grundzustandsenergie für $2Z$ Fermionen ist hiernach gleich

$$W_1 = -8 g \delta_0 \sum_{\mathbf{r}} 1 = -8 g \delta_0 Z,$$

d. i. nach (26)

$$(30) \quad W_1 = -\frac{4}{3\pi^2} g C^3 Z.$$

Da g die Dimension C^{-2} hat, ist der Ausdruck dimensionsrichtig, bei endlichem g aber viel stärker unendlich als W_0 . Bereits das deutet darauf hin, daß die Kopplungskonstante g in physikalisch vernünftigen Theorien unendlich klein sein muß.

Bei obiger Wechselwirkungsmatrix ergibt sich ein äquidistantes Linienspektrum hoch entarteter Eigenwerte. Der Linienabstand ist

$$\Delta W = 8 g \delta_0 = \frac{4}{3\pi^2} g C^3$$

Die angeregten Zustände können im Bereich endlicher Energie nur dann mitspielen, wenn ΔW eine endliche Massengröße ist, also nur wenn die Kopplungskonstante g gemäß (M endlich)

$$(31) \quad g = \frac{3\pi^2 M}{4 C^3}$$

unendlich klein ist. In diesem Fall kann man sich stets mit Störungsrechnungen erster Ordnung begnügen. Im Hinblick auf die Erfolge solcher Störungsrechnungen gerade im Bereich der höchsten gegenwärtig erreichbaren Energien mag das von Bedeutung sein.

Wäre der Grundzustand einfach, so wäre der Ansatz (31) zwingend. Ein Beispiel liefert die Wechselwirkungsmatrix P - S :

$$(32) \quad \Upsilon \times \Upsilon = \varrho_2 \times \varrho_2 - \varrho_3 \times \varrho_3,$$

nach der alle lokalen Eigenwerte verschwinden außer für

$$\begin{array}{ll} A = \varrho_2, & \lambda = -4, \\ & \varrho_3, \quad +4. \end{array}$$

Danach sind der Grundzustand und auch der höchste Zustand einfach. In diesem Fall ist

$$(33) \quad W_1 = -\frac{2}{3\pi^2} g C^3 Z, \quad \Delta W = \frac{2}{3\pi^2} g C^3, \\ g = \frac{3\pi^2 M}{2 C^3}.$$

Bei entartetem Zustand wie im Falle (29) gibt es jedoch noch eine andere Möglichkeit. Die Kopplungskonstante könnte durch-

aus so groß sein, daß die angeregten Zustände des Wechselwirkungsspektrums keine Rolle spielen und daß alles Geschehen mit der Aufspaltung des $3Z$ -fach entarteten Grundzustands zusammenhängt. Die Zahl der Freiheitsgrade wäre für vielfältige Möglichkeiten genügend groß [7].

Wir schließen mit diesem Hinweis auf offene Fragen. Sie stellen zu können, ist eine Folge der neuen Methode, die es erlaubt, Eigenschaften von Quantenfeldtheorien vom Endlichen her zu verstehen. Die Rückkehr zu den Anfängen, zu den unverfälschten Operatoren, welche man bereits durch Quantisierung klassischer Feldgleichungen erhält, ist für die Methode charakteristisch.

Den Herren H. Stumpf und F. Wahl habe ich für ihr ständiges Interesse zu danken, Herrn Stumpf insbesondere für die oben erwähnte Bemerkung. Herr H. Maier-Bötzel hat mir mit zahlreichen kritischen Bemerkungen beigestanden, die sich auf seine eigenen Rechnungen stützen. Herrn Castrigiano verdanke ich zahlreiche mathematische Hinweise, die sich mehr auf das auswirkten, was nicht gesagt ist, als auf den vorliegenden Text. Er hat außerdem bei der Redaktion geholfen. Obige Bemerkungen über das Transfertheorem beantworten Zweifelsfragen bei Vorträgen.

Literaturhinweise und Anmerkungen

- [1] J. v. Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer-Verlag Berlin 1968, Kap. II.
- [2] H. Stumpf: Diskussionsbemerkung.
- [3] A. Sommerfeld: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. V, Thermodynamik und Statistik, Aufgabe IV. 7; Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1952.
- [4] D. Laugwitz: Infinitesimalkalkül, eine elementare Einführung in die Nichtstandard-Analysis; Bibliographisches Institut Mannheim 1978.
C. Schmieden, D. Laugwitz: Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung; Math. Z. **69**, 1–39 (1958).
D. Laugwitz: Über Deltafunktionen, in F. Bopp, Lorenzinvariante Wellengleichungen für Mehrbahnsysteme; Bay. Ak. d. Wiss., Sb 1958.

- [5] A. Robinson: Non-Standard Analysis; Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland (1966).
Non-Standard Analysis, Proc. Roy. Acad. Sciences, Amsterdam, A **64**, 432–440 (1961).
- [6] Transfertheorem: s. z.B. M. Davis, Applied Non-Standard Analysis; John Wiley & Sons New York 1977, p. 28.
- [7] Nach Maier-Bötzel ist es unwahrscheinlich, daß man die Anregungszustände ausklammern kann, weil H_0 2-Fermionen-Zustände schon beim ersten Schritt der Wechselwirkung in 1- und 3-Fermionen-Zustände überführt. Nur wenn der Grundzustand auch 1- und 3-Fermionen-Zustände überführt. Nur wenn der Grundzustand auch 1- und 3-Fermionen-Zustände enthält, genügt es, von der Entartung des Grundzustands zu sprechen.
- [8] Ist $a \in \mathbb{L}$, so gilt auch $\sqrt{a} \in \mathbb{L}$. Stets gibt es nur endlich viele der Operationen $(+, -, \cdot, :, \vee)$. Alle $\mathbb{L}$ -Zahlen sind geometrisch konstruierbar.