

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München

Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften

1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der Potentiale von Flächen und Räumen.

Von A. Korn.

(Eingelaufen 19. Januar.)

I. Abschnitt.

Verallgemeinerung einiger Sätze über Potentiale von Doppelbelegungen.

Die folgenden 3 Sätze bilden eine Verallgemeinerung einiger früherer Sätze,¹⁾ durch welche der allgemeine Beweis der Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels ermöglicht wurde. Der verallgemeinerte Satz II dieser Abhandlung ist bereits von Liapounoff²⁾ bewiesen worden; wenn ich auch diesen hier noch einmal beweise, so geschieht dies, um zu zeigen, daß die Hilfsmittel, mit denen der Beweis des ursprünglichen Satzes von mir gegeben wurde, auch für die Verallgemeinerung ausreichen. Die Beweise der Sätze I und III in ihrer neuen allgemeinen Form werden in dieser Abhandlung zum ersten Male gegeben.

Während für den Beweis der Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels diese Verallgemeinerungen nicht nötig waren, sondern die ursprünglich von mir gegebenen Sätze³⁾

¹⁾ A. Korn, C. r. 130, p. 1238, 1900; Abhandlungen zur Potentialtheorie 1 (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901); Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen (diese Ber. 33, S. 3, 1903).

²⁾ Liapounoff, Comm. de la Soc. Math. de Kharkow 1902.

³⁾ A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie 1, Satz I—III, S. 5—11.

ausreichen, sind diese verallgemeinerten Sätze sehr nützlich für den Beweis einer der Neumannschen analogen Methode in der Theorie des elastischen Gleichgewichts; aus diesem Grunde war ich gezwungen, noch einmal auf diese Sätze zurückzukommen und sie in der Form zurechtzulegen, in der sie für diese neue Methode in der Elastizitätstheorie geeignet sind.

§ 1.

I.¹⁾ Ist die Funktion κ der Stelle auf einer stetig gekrümmten, geschlossenen Fläche ω derart stetig, daß ihre absoluten Funktionsdifferenzen in zwei Punkten 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\leq A \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad \left| \begin{array}{l} A \text{ endliche Konstante,} \\ \lambda \text{ irgend ein echter Bruch,} \end{array} \right.$$

und setzen wir:

$$1) \quad W = \int_{\omega} \kappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

so sind bereits die ersten Ableitungen (sowohl die tangentialen, als auch die normalen) der Funktion:

$$2) \quad W_1 = \frac{1}{2} \int_{\omega} (W_a + W_i) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

an der Oberfläche (sowohl an der Innenseite, als auch an der Außenseite) derart stetig, daß, wenn σ eine beliebige Richtung bedeutet, für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$\text{abs.} \left[\left| \frac{\partial W_1}{\partial \sigma} \right|_2 - \left| \frac{\partial W_1}{\partial \sigma} \right|_1 \right] < (c_1 A + c_2 \text{ abs. Max. } \kappa) r_{12}^{\lambda'}, \quad (\lambda' < \lambda)$$

wo c_1 und c_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahlen $\lambda\lambda'$ abhängen, λ' einen beliebigen echten Bruch $< \lambda$ (in strengem Sinne).

¹⁾ Beiläufig sei bemerkt, daß sich der Satz auch für $\lambda' = \lambda$ beweisen läßt, doch genügt die hier gegebene Fassung des Satzes für unsere Zwecke.

Wir beweisen zunächst, daß die ersten tangentialen Ableitungen der Funktion:

$$3) \quad W_{\omega} = \frac{1}{2} (W_a + W_b)$$

für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12} die Eigenschaft haben:

$$4) \text{ abs. } \left[\left| \frac{\partial W_{\omega}}{\partial h} \right|_2 - \left| \frac{\partial W_{\omega}}{\partial h} \right|_1 \right]^{1)} \leq (a_1 A + a_2 \text{ abs. Max. } \kappa) r_{12}^{\lambda''}, \lambda'' < \lambda,$$

wo a_1 und a_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahlen $\lambda\lambda''$ abhängen, λ'' einen beliebigen echten Bruch $< \lambda$ (in strengem Sinne).

Wir bilden zum Beweise die Ableitung von W_{ω} nach irgend einer tangentialen Richtung $h_{1(2)}^{1)}$ in den Punkten 1 und 2:

$$5) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial W_{\omega}}{\partial h} \right|_2 = \int_{\omega} (\kappa - \kappa_2) \frac{\cos(\nu h_2) - 3 \cos(r h_2) \cos(r \nu)}{r^3} d\omega, \\ \left| \frac{\partial W_{\omega}}{\partial h} \right|_1 = \int_{\omega} (\kappa - \kappa_1) \frac{\cos(\nu h_1) - 3 \cos(r h_1) \cos(r \nu)}{r^3} d\omega \end{cases}$$

(eine strenge Begründung dieser Formeln s. diese Berichte 33, S. 13—18).

Wir denken uns um den Mittelpunkt O der die Punkte 1 und 2 verbindenden Geraden eine Kugel mit dem Radius

$$r_{12};$$

die Schnittkurve ζ dieser Kugeloberfläche und der Fläche ω zerlegt ω in einen Teil ω_1 , der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1$.

Wir konstruieren ferner um O als Zentrum eine Kugel mit dem Radius R [der größer ist, als eine bestimmte endliche Länge], deren Schnittkurve Σ mit ω die Fläche ω in einen Teil $\omega_1 + \omega_2$, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt, so daß man für den von $\omega_1 + \omega_2$ herührenden Teil in den Integralen 5).

¹⁾ $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1; \dots$, wobei $|\varepsilon_1| < \text{endl. Konst. } r_{12}, \dots$

$$6) \quad \begin{cases} |\kappa - \kappa_1| \leq A \cdot r^1, \\ |\kappa - \kappa_2| \leq A \cdot r^1, \\ |\cos(\nu h_{1(2)})| \leq r f, \\ |\cos(r\nu)| \leq r F \end{cases}$$

(f und F endlich) setzen kann.

Es folgt dann zunächst für die von ω_1 herrührenden Integrale 5):

$$7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\omega_1} (\kappa - \kappa_{1(2)}) \frac{\cos(\nu h_{1(2)}) - 3 \cos(r h_{1(2)}) \cos(r\nu)}{r^3} d\omega \\ & \leq \text{endl. Konst. } A \cdot \int_{\omega_1} \frac{dw}{r^{2-\lambda}}, \\ & \leq \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^1. \end{aligned} \right.$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned} & \text{abs.} \left| \int_{\omega_2} (\kappa - \kappa_1) \frac{\cos(\nu h_1) - 3 \cos(r h_1) \cos(r\nu)}{r^3} d\omega \right|_1^2 \\ & \leq \int_1^2 \int_{\omega_2} \left\{ |\kappa(\xi\eta\zeta) - \kappa(xys)| + A r_{12}^1 \right\} \left| \frac{\partial}{\partial s} \frac{\cos(\nu h_1) - 3 \cos(r h_1) \cos(r\nu)}{r^3} \right| d\omega ds, \end{aligned}$$

wobei das Integral $\int_1^2 (-) ds$ über eine zwischen 1 und 2 auf ω , beliebig verlaufende Kurve s zu erstrecken ist, deren Abstände von ω_2 kleiner als r_{12} sind. Somit ist:

$$\begin{aligned} & \text{abs.} \left| \int_{\omega_2} (\kappa - \kappa_1) \frac{\cos(\nu h_1) - 3 \cos(r h_1) \cos(r\nu)}{r^3} d\omega \right|_1^2 \\ & \leq \text{endl. Konst. } A \cdot \int_1^2 \left\{ \int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^{3-\lambda}} + r_{12}^1 \int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^3} \right\}^2 ds, \\ & \leq \text{endl. Konst. } A \cdot \left\{ \frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}} + \frac{r_{12}^1}{r_{12}^3} \right\} \int_1^2 ds, ^1) \\ & \leq \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^1, \end{aligned}$$

¹⁾ Mit Berücksichtigung der letzten Formel S. 292 meines Lehrbuchs der Potentialtheorie I.

²⁾ Mit Rücksicht darauf, daß r_{12} kleiner als jedes r .

und wir erhalten weiter:

$$\begin{aligned} \text{abs. } (x_2 - x_1) \left| \int_{\omega_2} \frac{\cos(\nu h_1) - 3 \cos(r h_1) \cos(r \nu)}{r^3} d\omega \right|_2 \\ \leq \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^1 \left| \int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^3} \right|_2^1, \\ \leq \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{1''} \quad (\lambda'' < \lambda). \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \text{abs. } \left| \int_{\omega_2} (x - x_2) \left[\frac{\cos(\nu h_2) - 3 \cos(r h_2) \cos(r \nu)}{r^3} - \frac{\cos(\nu h_1) - 3 \cos(r h_1) \cos(r \nu)}{r^3} \right] d\omega \right|_2 \\ < \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12} \left| \int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^{3-1}} \right|_2 \\ \leq \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^1 \end{aligned}$$

und es folgt aus den drei letzten Formeln:

$$8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \text{abs. } \left| \int_{\omega_2} (x - x_2) \frac{\cos(\nu h_2) - 3 \cos(r h_2) \cos(r \nu)}{r^3} d\omega \right|_2 \\ & - \left| \int_{\omega_2} (x - x_1) \frac{\cos(\nu h_1) - 3 \cos(r h_1) \cos(r \nu)}{r^3} d\omega \right|_1 \end{aligned} \right\} \leq \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{1''}.$$

Schließlich ist, da die Entfernungen des Flächenteiles $\omega - \omega_1 - \omega_2$ von 1 und 2 größer sind, als eine bestimmte, endliche Länge:

$$9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \text{abs. } \left| \int_{\omega - \omega_1 - \omega_2} (x - x_1) \frac{\cos(\nu h_2) - 3 \cos(r h_2) \cos(r \nu)}{r^3} d\omega \right|_2 \\ & - \left| \int_{\omega - \omega_1 - \omega_2} (x - x_1) \frac{\cos(\nu h_1) - 3 \cos(r h_1) \cos(r \nu)}{r^3} d\omega \right|_1 \end{aligned} \right\} \\ & < \text{endl. Konst. abs. Max. } x \cdot r_{12}, \\ & \left| (x_2 - x_1) \int_{\omega - \omega_1 - \omega_2} \frac{\cos(\nu h_2) - 3 \cos(r h_2) \cos(r \nu)}{r^3} d\omega \right|_2 \\ & \leq \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^1, \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. Anm. 1 u. 2 auf Seite 6..

und die Addition der Ungleichungen 7), 8), 9) ergibt die behauptete Ungleichung 4).

Um mit Hilfe der Ungleichung 4), die wir jetzt bewiesen haben, die eigentliche Behauptung unseres Satzes zu beweisen, müssen wir uns noch zwei Hilfssätze zurecht legen:

Hilfssatz I.¹⁾ Das Flächenpotential:

$$10) \quad V = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r},$$

in dem H lediglich als eine endliche²⁾ Funktion der Stelle auf der Fläche vorausgesetzt wird, hat die Eigenschaft, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Oberfläche in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$11) \quad \text{abs. } |V|_1^2 \leq A \cdot \text{abs. Max. } H \cdot r_{12}^A,$$

wo A einen beliebigen echten Bruch, und A eine endliche Konstante vorstellt, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches A abhängt.

Hilfssatz 2.³⁾ Die ersten Ableitungen des Flächenpotentials:

$$V = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r},$$

in dem H als eine derart stetige Funktion der Stelle auf der Fläche ω vorausgesetzt wird, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$12) \quad \text{abs. } (H_2 - H_1) \leq A \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad \left| \begin{array}{l} A \text{ endlich,} \\ \lambda \text{ ein echter Bruch,} \end{array} \right.$$

¹⁾ Allgemeinere Fassung eines bereits früher von mir bewiesenen Satzes (Lehrbuch der Potentialtheorie I, S. 388).

²⁾ Endlich im Sinne von „endlich und integrierbar“.

³⁾ Erweiterung eines Satzes von Hölder (Beiträge zur Potentialtheorie, Stuttgart 1882). Beiläufig sei bemerkt, daß sich der Satz auch für $\lambda' = \lambda$ beweisen läßt, doch genügt die hier gegebene weniger allgemeine Fassung für unsere Zwecke.

sind selbst auf der Fläche derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Innen(Außen)seite von ω in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$13) \text{ abs. } \left(\left| \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right|_2 - \left| \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right|_1 \right) \leq (B A + C \text{ abs. Max. } H) r_{12}^{\lambda'}, (\lambda' < \lambda)$$

wenn σ eine ganz beliebige (tangentielle oder normale oder irgend eine andere) Richtung vorstellt, B, C endliche Konstanten, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahlen λ' abhängen.

Zum Beweise des Hilfssatzes 1 denken wir uns um den Mittelpunkt O der Graden 1, 2 eine Kugel mit dem Radius r_{12} , die ω in der Kurve ζ schneidet und in einen 1 und 2 enthaltenden Teil ω_1 und einen Teil $\omega - \omega_1$ zerlegt. Dann ist der von ω_1 herrührende Teil der Differenz $|V_2 - V_1|$

$$\begin{aligned} \text{abs. } |V_{\omega_1}| &\leq 2 \int_{\omega_1} H \frac{d\omega}{r}, \\ &\leq 2 \text{ abs. Max. } H \cdot \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r}, \\ &\leq 2 \text{ abs. Max. } H \cdot r_{12}^{1)} \end{aligned}$$

der von $\omega - \omega_1$ herrührende Teil der Differenz $|V_2 - V_1|$

$$\text{abs. } |V_{\omega - \omega_1}| \leq \text{endl. Konst. abs. Max. } H \cdot r_{12} \cdot \text{Max. } \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^2}$$

auf der Graden 1, 2,

$$\leq \text{endl. Konst. abs. Max. } H \cdot r_{12} \cdot \frac{1}{r_{12}^{1-A}}, {}^2)$$

wo A einen beliebigen echten Bruch vorstellt. Durch Addition der beiden Ungleichungen ergibt sich aber die Behauptung des Hilfssatzes 1.

Zum Beweise des Hilfssatzes 2 bedenken wir zunächst, daß, wenn x eine beliebige Richtung vorstellt:

¹⁾ Formel 46) oder 47) S. 38 u. 39 meines Lehrbuchs der Potentialtheorie I.

²⁾ Mit Rücksicht auf die letzte Formel S. 392 dieses Lehrbuchs.

$$^1) \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\omega} \frac{d\omega}{r} \right) = - \int_{\omega} \cos(\nu x) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \int_{\omega} \frac{K \cos(\nu x)}{r} d\omega, \quad \left| \right.$$

K Krümmungsmaß von $d\omega$,

daß somit, da

$$- \int_{\omega} \cos(\nu x) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \pm 2\pi \cos(\nu x) - \left| \int_{\omega} \cos(\nu x) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_{\omega}$$

mit Rücksicht auf die Ungleichung 4) sogar stetige erste Ableitungen auf ω hat, und nach dem Hilfssatz 1:

$$\text{abs.} \left| \int_{\omega} \frac{K \cos(\nu x)}{r} d\omega \right|_1^2 \leq ar_{12}^A \quad \left| \begin{array}{l} \text{bei genügend kleinem } r_{12}, \\ A \text{ beliebiger echter Bruch, } a \text{ endlich} \end{array} \right.$$

auch:

$$14) \quad \text{abs.} \left| \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{d\omega}{r} \right|_1^2 \leq \text{endl. Konst. } r_{12}^A, \quad \left| \begin{array}{l} A \text{ beliebiger echter} \\ \text{Bruch.} \end{array} \right.$$

Zum Beweise des Hilfssatzes 2 haben wir daher nur die Ungleichung:

$$15) \text{ abs.} | \Psi_1^2 |_1 \leq (\text{endl. Konst. } A + \text{endl. Konst. abs. Max. } H) r_{12}^{\lambda'} \quad (\lambda' < \lambda)$$

nachzuweisen, wenn wir

$$16) \quad \Psi_{1(2)} = \left| \int_{\omega} \{ H(\xi \eta \varsigma) - H(xy\xi) \} \frac{\cos(r\xi)}{r^2} d\omega \right|_{1(2)}$$

setzen.

Wir teilen die Fläche ω in drei Teile: Wir denken uns, ähnlich wie wir dies schon einmal gehabt haben, um den Mittelpunkt O der die Punkte 1 und 2 verbindenden Graden eine Kugel mit dem Radius r_{12} ; die Schnittkurve ς dieser Kugeloberfläche und der Fläche ω zerlegt ω in einen Teil ω_1 , der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1$. Wir konstruieren ferner um O als Zentrum eine Kugel mit dem Radius R (der größer ist als eine bestimmte, endliche Länge), deren Schnittkurve Σ mit ω die Fläche ω in einen Teil $\omega_1 + \omega_2$, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt, so daß

¹⁾ Mit Rücksicht auf Formel 54) S. 42 dieses Lehrbuchs.

²⁾ Anm. 2 S. 9.

man für den von $\omega_1 + \omega_2$ herrührenden Teil in den Integralen 16):

$$|H - H_1(2)| \leq A \cdot r^1$$

setzen kann.

Es folgt dann zunächst für den von ω_1 herrührenden Teil der Differenz $|\Psi|_1^2$.

$$17) \quad \begin{cases} \text{abs. } |\Psi_{\omega_1}|_1^2 \leq \text{endl. Konst. } A \left\{ \left| \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}} \right|_1 + \left| \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}} \right|_2 \right\} \\ \leq \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^1, \end{cases}$$

für den von ω_2 herrührenden Teil der Differenz $|\Psi|_1^2$

$$18) \quad \begin{cases} \text{abs. } |\Psi_{\omega_2}|_1^2 \\ \leq \text{abs. } \left| \int_{\omega_2} (H - H_1) \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_1^2 + \text{abs. } (H_2 - H_1) \left| \int_{\omega_2} \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_1^2 \\ \leq \text{endl. Konst. } A \left[r_{12} \left\{ \frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}} + \frac{r_{12}^1}{r_{12}} \right\} + r_{12}^{\lambda'} \right], (\lambda' < \lambda)^1 \\ \leq \text{endl. Konst. } A r_{12}^{\lambda'}, \end{cases}$$

schließlich für den von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ herrührenden Teil der Differenz $|\Psi|_1^2$, da die Entfernungen der Fläche $\omega - \omega_1 - \omega_2$ von den Punkten der Graden 1, 2 größer als eine bestimmte, endliche Länge sind:

$$19) \quad \begin{cases} \text{abs. } \left[\left| \int_{\omega - \omega_1 - \omega_2} (H - H_1) \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_2 - \left| \int_{\omega - \omega_1 - \omega_2} (H - H_1) \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \right|_1 \right] \\ \leq \text{endl. Konst. abs. Max. } H \cdot r_{12} \\ \text{abs. } (H_2 - H_1) \int_{\omega - \omega_1 - \omega_2} \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega \leq \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^1, \end{cases}$$

und die Addition der Formeln 17), 18), 19) ergibt die Ungleichung 15) und damit auch die Behauptung des Hilfsatzes 2.

¹⁾ Man vergleiche die analoge Untersuchung S. 7.

Wir werden nunmehr leicht zeigen können, daß die Ungleichung 4) die Behauptung unseres eigentlichen Satzes I nach sich zieht, daß die ersten Ableitungen der Funktion:

$$20) \quad W_1 = \int_{\omega} W_{\omega} \frac{\cos(rv)}{r^2} d\omega$$

auf der Oberfläche ω derart stetig sind, daß, wenn σ eine ganz beliebige Richtung vorstellt, für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$21) \quad \text{abs.} \left[\left| \frac{\partial W_1}{\partial \sigma} \right|_2 - \left| \frac{\partial W_1}{\partial \sigma} \right|_1 \right] < (c_1 A + c_2 \text{ abs. Max. } \kappa) r_{12}'$$

wo c_1 und c_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängen und von den Zahlen $\lambda\lambda'$, λ' einen beliebigen echten Bruch $< \lambda$ in strengem Sinne.

Es ist in der Tat:

$$22) 1) \quad \begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial \sigma} = \int_{\omega} \frac{\partial W_{\omega}}{\partial \sigma} \frac{\cos(rv)}{r^2} d\omega \\ - \int_{\omega} \cos(v\sigma) \left\{ \frac{\partial W_{\omega}}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial W_{\omega}}{\partial \eta} \frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial W_{\omega}}{\partial \zeta} \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} d\omega \end{cases}$$

d. h. es setzt sich $\frac{\partial W_1}{\partial \sigma}$ aus ersten Ableitungen von Flächenpotentialen

$$\int_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

additiv zusammen, in denen die Funktion H die Voraussetzung des Hilfssatzes 2 erfüllt. Der Hilfssatz 2 beweist somit unmittelbar die Behauptung unseres eigentlichen Satzes I.

¹⁾ Formel 59 S. 46 meines Lehrbuchs der Potentiontheorie I., wenn wir allgemein durch Überstreichung einer Richtung h die tangentielle Richtung mit den Richtungskosinussen:

$$\begin{aligned} \cos(\bar{h}x) &= \cos(hx) - \cos(hv)\cos(vx), & \cos(\bar{h}y) &= \cos(hy) - \cos(hv)\cos(vy), \\ \cos(\bar{h}z) &= \cos(hz) - \cos(hv)\cos(vz), \end{aligned}$$

andeuten.

§ 2.

II. Die Werte des über eine stetig gekrümmte, geschlossene Fläche ω zu erstreckenden Integrales:

$$23) \quad W = \int_{\omega} \kappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

in dem κ eine (abteilungsweise) stetige Funktion der Stelle auf ω vorstellt, auf der Fläche selbst:

$$24) \quad W_{\omega} = \frac{1}{2} (W_a + W_i)$$

sind selbst auf der Fläche ω derart stetig, daß für 2 Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$25) \quad \text{abs. } |W_{\omega}|_1^2 \leq a \text{ abs. Max. } \kappa \cdot r_{12}^A,$$

wo A einen beliebigen echten Bruch darstellt und a eine endliche Konstante, die lediglich von der Gestalt der Fläche und der Wahl des echten Bruches A abhängt.

Der Beweis ist dem Beweise des Hilfssatzes 1 des § 1 einigermaßen analog. Wir teilen die Fläche ω in drei Teile: Wir denken uns, ähnlich wie wir dies bereits getan haben, um den Mittelpunkt O der die Punkte 1 und 2 verbindenden Graden eine Kugel mit dem Radius r_{12} ; die Schnittkurve c dieser Kugelfläche und der Fläche ω zerlegt die Fläche ω in einen Teil ω_1 , der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1$. Wir konstruieren ferner um O als Zentrum eine Kugel mit dem Radius R (der größer ist als eine bestimmte, endliche Länge), deren Schnittkurve Σ mit ω die Fläche ω in einen Teil $\omega_1 + \omega_2$, der 1 und 2 enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt, so daß man für den von $\omega_1 + \omega_2$ herrührenden Teil in den Integralen:

$$W_{\omega,1(2)} = \left| \int_{\omega} \kappa \cdot \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_{\omega,1(2)}$$

den Werten von W_{ω} in 1 und 2 auf der Fläche

$$26) \quad |\cos(r\nu)| \leq \text{endl. GröÙe} \cdot r_{12}$$

setzen kann.

Es folgt dann zunächst für den von ω_1 herrührenden Teil der Differenz $|W_{\omega}|_1^2$:

$$27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{abs. } |W_{\omega_1}|_1^2 \leq \text{endl. Konst. abs. Max. } \kappa \left\{ \left| \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r} \right|_1 + \left| \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r} \right|_2 \right\}, \\ \leq \text{endl. Konst. abs. Max. } \kappa \cdot r_{12} \text{ (Vgl. Anm. } ^1) \text{ S. 9),} \end{array} \right.$$

für den von ω_2 herrührenden Teil der Differenz $|W_{\omega}|_1^2$:

$$28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{abs. } |W_{\omega_2}|_1^2 \leq \text{endl. Konst. abs. Max. } \kappa \cdot r_{12} \cdot \text{Max. } \int_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^2} \\ \text{auf der Graden 1, 2,} \\ \leq \text{endl. Konst. abs. Max. } \kappa \cdot r_{12}^A, \text{ (A beliebiger} \\ \text{echter Bruch, vgl. S. 9);} \end{array} \right.$$

schließlich für den von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ herrührenden Teil der Differenz $|W_{\omega}|_1^2$, da die Entfernungen des Gebietes $\omega - \omega_1 - \omega_2$ von der Graden 1, 2 größer sind, als eine bestimmte, endliche Länge:

$$29) \quad \text{abs. } |W_{\omega - \omega_1 - \omega_2}|_1^2 \leq \text{endl. Konst. abs. Max. } \kappa \cdot r_{12},$$

und die Addition der Formeln 27), 28), 29) ergibt die Behauptung 25). Wir wollen diesem Satze den folgenden als Zusatz anfügen, obgleich er eigentlich bereits in die Theorie der Raumpotentiale gehört:

Zusatz zu II. Das Raumpotential:

$$30) \quad V = \int \frac{d\tau}{r} \text{ über den Innenraum von } \omega$$

hat an der Oberfläche ω zweite Ableitungen, die an der Innen(Außen)seite von ω derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$31) \quad \text{abs. } \left| \frac{\partial^2 V}{\partial h_1 \partial h_2} \right|_1^2 \leq \text{endl. Konst. } r_{12}^A$$

wo h_1, h_2 zwei beliebige Richtungen vorstellen, λ einen ganz beliebigen echten Bruch und b eine endliche Konstante, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches λ abhängig ist.

Wir bedenken, daß infolge einer einfachen Greenschen Umformung:

$$32)^1) \quad \frac{\partial V}{\partial h_1} = \int_{\omega} \frac{\cos(\nu h_1)}{r} d\omega,$$

daraus folgt unmittelbar die Behauptung unseres Zusatzes mit Hilfe des Hilfssatzes 2 des § 1.

Man kann den Zusatz auch direkt aus dem Satze II herleiten, aus diesem Grunde füge ich denselben in diesem § hinzu, für uns war aber die Herleitung mit Hilfe des bereits bewiesenen Hilfssatzes 2 des vorigen § einfacher.

§ 3.

III. Ist θ die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum einer stetig gekrümmten, geschlossenen Fläche ω mit den gegebenen Randwerten $\bar{\theta}$, welche auf der Fläche derart stetig vorausgesetzt werden, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$33) \quad \text{abs. } |\bar{\theta}|_1^2 < A r_{12}^{\lambda}, \quad \left| \begin{array}{l} A \text{ endlich,} \\ \lambda \text{ echter Bruch,} \end{array} \right.$$

dann ist allgemein für zwei Punkte 1 und 2 des Innenraumes in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$34) \quad \text{abs. } |\theta|_1^2 < (a A + b \text{ abs. Max. } \bar{\theta}) r_{12}^{\lambda}$$

wo a, b endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche und der Zahl λ abhängen.

¹⁾ Vgl. z. B. Formeln 88, S. 62 meines Lehrbuchs der Potentialtheorie I.

Wir beweisen zunächst, daß das Potential der Doppelbelegung:

$$35) \quad W = \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{\cos(r\nu)}{r^3} d\omega$$

im Innenraume derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$36) \text{ abs. } |W|_1^2 \leq (\text{endl. Konst. } A + \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta}) r_{12}^4.$$

Sobald die Entfernung der beiden Punkte 1 und 2 von der Fläche größer ist, als eine bestimmte, endliche Länge, sind ja alle Ableitungen von W stetig, wir haben daher nur zu beweisen, daß man um jeden Punkt der Oberfläche einen Raum abgrenzen kann, in dem die größte Entfernung zweier Punkte kleiner (gleich) ist, als eine bestimmte, endliche Länge, und in dem für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$37) \text{ abs. } |W|_1^2 \leq (a A + \beta \text{ abs. Max. } \bar{\theta}) r_{12}^4, \quad |a, \beta \text{ endlich.}$$

Die Voraussetzung 33) bestehe für

$$r_{12} < \sigma,$$

wo σ größer sein soll, als eine bestimmte, endliche Länge; wir schlagen um den Mittelpunkt O der Graden 1, 2 eine Kugel mit dem Radius $\frac{c\sigma}{2}$, wo c einen echten Bruch vorstellen soll und bezeichnen mit 3 den Punkt der Fläche ω , der von der Verbindungsgraden 1, 2 die kürzeste Entfernung hat. Zerlegen wir den Teil von ω , dessen Entfernungen von 0 kleiner sind als $\frac{\sigma}{2}$ noch in zwei Teile ω_1 und ω_2 so, daß ω_2 alle Punkte enthalte, deren Entfernungen von den Punkten 1 und 2 größer sind, als r_{12} — ω_1 kann sich auch auf null reduzieren —, dann ist der von ω_1 herrührende Teil der Differenz

$$|W - W_2|_1^2 = \left| \int_{\omega} (\bar{\theta} - \bar{\theta}_2) \frac{\cos(r\nu)}{r^3} d\omega \right|_1^2:$$

$$38) \left\{ \begin{array}{l} \text{abs. } |W - W_3|_{\omega_1}^2 \\ < \text{endl. Konst. } A r_{12}^2 \left[\left| \int_{\omega_1} \frac{|\cos(r\nu)|}{r^3} d\omega \right| + \left| \int_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right| \right], \\ < \text{endl. Konst. } A r_{12}^2, \end{array} \right.$$

der von ω_3 herrührende Teil der Differenz $|W - W_3|_1^2$

$$39) \left\{ \begin{array}{l} \text{abs. } |W - W_3|_{\omega_2}^2 \\ < \int_1^2 \int_{\omega_2} (\theta(\xi\eta\varsigma) - \bar{\theta}_3) \frac{2}{r^3} d\omega ds^1, \\ < \int_1^2 \int_{\omega_2} \text{endl. Konst. } \frac{r^2}{r^3} d\omega ds < \text{endl. Konst. } \frac{A r_{12}^2}{r_{12}^{1-\lambda}}, ^2) \end{array} \right.$$

endlich, da alle Punkte der Fläche $\omega - \omega_1 - \omega_2$ von den Punkten der Verbindungsgrade 1, 2 größer sind, als eine bestimmte, endliche Länge, der von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ herrührende Teil der Differenz $|W - W_3|_1^2$:

$$40) \text{ abs. } |W - W_3|_{\omega - \omega_1 - \omega_2}^2 < \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta} \cdot r_{12},$$

und es folgt die Formel 37) durch Addition der Ungleichungen 38), 39), 40).

Damit ist aber auch die Behauptung 36) für irgend zwei Punkte des Innenraumes von ω in genügend kleiner Entfernung r_{12} bewiesen.

Nach der Methode des arithmetischen Mittels ist nun

$$41) \quad \theta = + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + w,$$

wo w das Potential einer Doppelbelegung darstellt, deren erste Ableitungen nach dem Satze I bereits im ganzen Innenraume stetig sind. Durch die Formel 36) ist daher die Behauptung des Satzes III mitbewiesen.

¹⁾ Das Integral $\int_1^2 (-) ds$, analog früheren Betrachtungen, über die Verbindungsgrade 1, 2 zu erstrecken.

²⁾ Man vgl. S. 6.

Zusatz 1 zu III. Ein jedes Flächenpotential

$$42) \quad V = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

ist, wenn man über die Funktion H lediglich voraussetzt, daß sie endlich¹⁾ ist, im ganzen Innenraume und Außenraume derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$43) \quad \text{abs. } V_1^2 < \overline{\text{endl. Konst. abs. Max. } H \cdot r_{12}^4} \cdot A \text{ beliebiger echter Bruch.}$$

Der Zusatz folgt unmittelbar nach dem Hilfssatz 1 des § 1 und dem Satze III.

Zusatz 2 zu III. Das Raumpotential²⁾

$$44) \quad V = \int \frac{d\tau}{r}$$

besitzt zweite Ableitungen, welche im ganzen Innen-(Außen)raume derart stetig sind, daß für zwei Punkte des Innen(Außen)raumes 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$45) \quad \text{abs. } \left| \frac{\partial^2 V}{\partial h_1 \partial h_2} \right|_1^2 < \overline{a} r_{12}^4$$

wenn h_1 und h_2 zwei ganz beliebige Richtungen vorstellen, A einen beliebigen echten Bruch und a eine endliche Konstante, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches A abhängt.

Der Zusatz folgt unmittelbar aus dem Zusatz zu dem Satze II und dem Satze III.

Zusatz 3 zu III. Besteht die Voraussetzung des Satzes III:

$$46) \quad \text{abs. } |\bar{\theta}|_1^2 < A r_{12}^4$$

¹⁾ Im Sinne von „endlich und integrabel“.

²⁾ Eine Verallgemeinerung dieses Satzes findet man im zweiten Abschnitt.

für

$$47) \quad r_{12} < \sigma,$$

wo σ größer ist als eine bestimmte, endliche Länge, und konstruieren wir um irgend einen Punkt der Oberfläche als Zentrum eine Kugel mit dem Radius

$$(1 - \Delta) \frac{\sigma}{2}$$

wo Δ eine beliebig kleine Zahl vorstellt, so ist für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes T , den diese Kugel und der Innenraum von ω gemeinsam haben:

$$48) \quad \text{abs. } |\bar{\theta}|_1^2 \leq (\text{endl. Konst. } \Delta + \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma} \text{ abs. Max. } \bar{\theta}) r_{12}^2.$$

Wir haben in dem Beweise von III nur den echten Bruch $c = 1 - \Delta$ zu setzen; die beiden Ungleichungen 38) und 39) bleiben ungeändert, die Ungleichung 40) schreiben wir:

$$\text{abs. } |W - W_s|_{\omega - \omega_1 - \omega_2}^2 \leq \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta} \cdot r_{12} \text{ Max. } \int_{\omega - \omega_1 - \omega_2} \frac{d\omega}{r^3}$$

auf der Strecke 1, 2,

und es folgt die Behauptung, wenn wir noch bedenken, daß das Integral rechts

$$\begin{aligned} & \leq \frac{\text{endl. Konst. } ^1)}{\text{kleinste Entfernung der Fläche } \omega - \omega_1 - \omega_2 \text{ von 1 und 2}} \\ & \leq \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma} \end{aligned}$$

also

$$49) \quad \text{abs. } |W - W_s|_{\omega - \omega_1 - \omega_2}^2 \leq \frac{\text{endl. Konst.}}{\Delta \cdot \sigma} \text{ abs. Max. } \bar{\theta} \cdot r_{12},$$

durch Addition von 38), 39) und 49).

Zusatz 4 zu III. Sind außer $\bar{\theta}$ die ersten tangentialen Ableitungen von $\bar{\theta}$ auf der Fläche ω derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

¹⁾ Vgl. Anmerkung ¹⁾ S. 6.

$$50) \quad \text{abs.} \left| \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{h}} \right|_1^2 < A \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad \left| \begin{array}{l} \lambda \text{ echter Bruch,} \\ A \text{ endliche Konstante,} \end{array} \right.$$

wo h^1) eine beliebige tangentielle Richtung vorstellt, so sind die ersten Ableitungen der Potentialfunktion θ im ganzen Raume i derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes i in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$51) \quad \text{abs.} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right|_1^2 < (aA + b \text{ abs. Max. } \bar{\theta}) r_{12}^{\lambda'}, \quad (\lambda' < \lambda)$$

wo σ eine ganz beliebige Richtung vorstellt, a, b endliche Konstanten, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und den Zahlen $\lambda \lambda'$ abhängen.

Es folgt zunächst die behauptete Stetigkeit der ersten Ableitungen von W von der Art 51) genau in derselben Weise, wie die Behauptung des Satzes I aus der Ungleichung 4) S. 5. Schließlich ist nach der Methode des arithmetischen Mittels:

$$52) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \frac{\partial w_1}{\partial \sigma},$$

wo w_1 das Potential einer Doppelbelegung darstellt, deren erste Ableitungen bereits im ganzen Raume i nach Satz I von der Art 51) eindeutig und stetig sind. Damit ist auch der Zusatz 4 bewiesen.

¹⁾ $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \dots$, wobei $|\varepsilon_1| < \text{endl. Konst. } r_{12}$.

II. Abschnitt.

Einige Sätze über Raumpotentiale.

Ein bekannter Satz von Hölder¹⁾ sagt aus, daß die zweiten Ableitungen des Raumpotentials:

$$1) \quad V = \int_{\tau} E \frac{d\tau}{r}$$

eindeutig und stetig sind, im ganzen Innenraume sowohl, als auch im ganzen Außenraume, falls die absoluten Funktionsdifferenzen von E in zwei Punkten 1 und 2 des Raumes τ

$$< A \cdot r_{12}^{\lambda}$$

sind, bei genügend kleiner Entfernung r_{12} der beiden Punkte, wo A eine endliche Konstante, λ eine positive, von null verschiedene Zahl vorstellt.

Er sagt ferner aus, daß die Sprünge der zweiten Ableitungen bei dem Durchgange durch die Oberfläche des Gebietes τ dieselben sind, wie bei der Voraussetzung endlicher erster Ableitungen von E , und daß schließlich auch die obige Bedingung für E für die Gültigkeit der Formel:

$$\Delta V = -4\pi E$$

in jedem Punkte des Innenraumes hinreichend ist.

Ich werde in diesem zweiten Abschnitt vier Sätze beweisen, von denen der erste eine Erweiterung des Hölderschen Satzes ist; die drei anderen Sätze beziehen sich auf ein diesem Satze verwandtes Gebiet der Potentialtheorie, und es sei hervor-
gehoben, daß dieselben in meinen Abhandlungen zur Elastizitätstheorie eine ganz außerordentlich wichtige Rolle spielen werden.

¹⁾ Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie, Tübingen 1892.

§ 1.

I. Erfüllt die Funktion E der Stelle des Raumes τ die Bedingung, daß die absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12} :

$$\overline{\leq} A \cdot r_{12}^\lambda$$

sind, wo A eine endliche Konstante, λ einen echten Bruch vorstellt, so sind auch die zweiten Ableitungen des Raumpotentiales:

$$V = \int_{\tau} E \frac{d\tau}{r}$$

sowohl im Innenraume, als auch im Außenraume derart stetig, daß die absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 des Innen(Außen)raumes in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\leq (aA + b \text{ abs. Max. } E) r_{12}^\lambda$$

sind, wo a und b endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt des Gebietes τ abhängig sind und von der Zahl λ .

Es seien 1 und 2 zwei Punkte des Innenraumes in der Entfernung r_{12} , wir beschränken uns auf die Betrachtung im Innenraume, die Betrachtung im Außenraume ist Schritt für Schritt dieselbe. Wir denken uns um den Mittelpunkt O der Graden 1, 2 eine Kugel mit dem Radius r_{12} und nennen das Gebiet, welches τ und diese Kugel gemein haben, τ_1 , dann ist, wenn wir

$$\left. \begin{aligned} V &= \overbrace{\int_{\tau} [E(\xi\eta\varsigma) - E(xyz)] \frac{d\tau}{r}}^{V''} + \underbrace{\int_{\tau} (E(xyz) - E_1) \frac{d\tau}{r}}_{V'} + \int_{\tau} E_1 \frac{d\tau}{r}, \\ 2) \quad V' &= V - \int_{\tau} E_1 \frac{d\tau}{r}, \\ V'' &= \int_{\tau} [E(\xi\eta\varsigma) - E(xyz)] \frac{d\tau}{r} \end{aligned} \right\}$$

setzen, mit D_2 irgend eine zweite Ableitung bezeichnen und r_{12} genügend klein annehmen:

$$\left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_1 \leq 2A \left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_1, \quad \left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_2 \leq 2A \left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_2,$$

wobei durch den Index τ_1 angedeutet werden soll, daß das Potential V'' nur über den Raum τ_1 erstreckt werden soll, also:

$$\text{abs. } \left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_1^2 \leq 2A \left[\left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_1 + \left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_2 \right].$$

Aus der durch eine einfache Green'sche Umformung folgenden Formel:

$$3) \quad \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \int_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}} d\omega, \quad \left| \begin{array}{l} \omega_1 \text{ Oberfläche von } \tau_1, \\ \nu \text{ innere Normale von } d\omega, \end{array} \right|$$

ergibt sich:

$$\left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_1 \leq \frac{1}{\lambda} r_{12}^{\lambda} \left| \int_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_1, \quad \left| \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \right|_2 \leq \frac{1}{\lambda} r_{12}^{\lambda} \left| \int_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_2,$$

somit:

$$\text{abs. } \left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_1^2 \leq \frac{16\pi}{\lambda} A r_{12}^{\lambda}, \quad \text{abs. } \left| D_2 V''_{\tau_1} \right|_1^2 \leq \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{\lambda} \quad 1)$$

und:

$$4) \quad \text{abs. } |D_2(V-V')|_1^2 + \text{abs. } |D_2 V'_{\tau_1}|_1^2 \leq \text{endl. Konst. } A \cdot r_{12}^{\lambda} + \text{endl. Konst. abs. Max. } E \cdot r_{12}^{\lambda} \quad 2).$$

Wir schlagen jetzt um O eine zweite Kugel mit dem Radius R ; wir können denselben so wählen, daß derselbe größer

1) Da $D_2 \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r}$ stets endlich ist.

2) Da stets bei genügend kleinem r_{12} : $\text{abs. } \left| D_2 \int_{\tau_1} \frac{d\tau}{r} \right|_1^2 \leq \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}$,

wo A einen beliebigen echten Bruch darstellt. (Zusatz 2 zu Satz III des I. Abschnitts.)

ist, als eine bestimmte, endliche Länge, aber dennoch genügend klein so, daß die Oberfläche ω_2 dieser Kugel den Raum $\tau - \tau_1$ in zwei Teile τ_2 und $\tau - \tau_1 - \tau_2$ zerlegt, und daß für je zwei Punkte 1 und 2 des Raumes $\tau_1 + \tau_2$:

$$\text{abs. } |E|_1^2 \leq A \cdot r_{12}^2.$$

Es ist dann:

$$\text{abs. } |D_2 V'_{\tau_2}|_1^2 \leq \int_{\tau_2}^2 [|E(\xi\eta\varsigma) - E(xyz)| + A \cdot r_{12}^2] \left| \frac{\partial D_2^1}{\partial s} \right| d\tau ds,$$

wobei wir durch den Index τ_2 andeuten, daß das Potential V' nur über den Raum τ_2 erstreckt werden soll, und unter ds ein Element der Graden 1, 2¹⁾ verstehen, und es ist auf der Graden 1, 2:

$$\int_{\tau_2} [|E(\xi\eta\varsigma) - E(xyz)| + A r_{12}^2] \left| \frac{\partial D_2^1}{\partial s} \right| d\tau < 6A \int_{\tau_2} \frac{d\tau}{r^{4-\lambda}} + 6A r_{12}^2 \int_{\tau_2} \frac{d\tau}{r^4}$$

oder, da entsprechend der Formel 3):

$$\int_{\tau_2} \frac{d\tau}{r^{4-\lambda}} = \frac{1}{\lambda-1} \int_{\omega_1+\omega_2} \frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}} d\omega, \quad \left| \begin{array}{l} \nu \text{ die in das Gebiet } \tau_2 \text{ hinein-} \\ \text{gehende Normale von } d\omega, \end{array} \right.$$

$$< \frac{12A}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2}r_{12})^{1-\lambda}} \cdot 4\pi + \frac{12A}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}r_{12}} \cdot r_{12}^2 \cdot 4\pi$$

daraus folgt:

$$\int_{\tau_2} [|E(\xi\eta\varsigma) - E(xyz)| + A r_{12}^2] \left| \frac{\partial D_2^1}{\partial s} \right| d\tau < 4\pi \cdot \frac{48(2-\lambda)}{1-\lambda} A \cdot r_{12}^2$$

somit:

$$5) \quad \text{abs. } |D_2 V'_{\tau_2}|_1^2 \leq 4\pi \frac{48(2-\lambda)}{1-\lambda} A r_{12}^2.$$

Schließlich ist, da R größer ist als eine gegebene endliche Länge:

1) Falls die Verbindungsgrade 1, 2 nicht ganz im Innenraume verlaufen sollte, kann dieselbe durch eine andere zwischen 1 und 2 verlaufende, ganz im Innenraume liegende Kurve s ersetzt werden.

$$6) \quad \text{abs. } |D_1 V'_{\tau-r_1-r_2}|_1^2 \leq b' \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}, \quad (b' \text{ endlich}),$$

und es folgt durch Addition von 4), 5), 6) die Behauptung:

$$7) \quad \text{abs. } |D_1 V|_1^2 \leq (aA + b \text{ abs. Max. } E) r_{12}^4.$$

§ 2.

II. Die ersten Ableitungen des Raumpotentiales:

$$V = \int_{\tau} E \frac{d\tau}{r}$$

in dem E lediglich als endlich¹⁾ vorausgesetzt wird, sind im ganzen Raume derartig stetig, daß ihre absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\leq A \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^4$$

sind, wo man für λ einen beliebigen echten Bruch setzen kann und A eine endliche Konstante vorstellt, die lediglich von der Gestalt des Gebietes τ und der Wahl des echten Bruches λ abhängt.

Es seien 1 und 2 zwei Punkte des Raumes in der Entfernung r_{12} ; wir denken uns um den Mittelpunkt O der Graden 1, 2 eine Kugel mit dem Radius r_{12} und nennen wieder das Gebiet, welches τ und diese Kugel gemein haben, τ_1 , dann ist, wenn wir mit $D_1 V$ irgend eine erste Ableitung von V bezeichnen und r_{12} genügend klein annehmen:

$$|D_1 V_{\tau_1}|_1 \leq 4\pi \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^4, \quad |D_1 V_{\tau_1}|_2 \leq 4\pi \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^4$$

somit:

$$8) \quad \text{abs. } |D_1 V_{\tau_1}|_1^2 \leq 8\pi \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^4.$$

Es ist ferner:

$$\text{abs. } |D_1 V_{\tau-r_1}|_1^2 \leq \int_1^2 \left| \frac{\partial D_1 V_{\tau-r_1}}{\partial s} \right| ds$$

¹⁾ Endlich im Sinne von endlich und integrabel.

wenn wir wieder unter ds ein Element der Graden 1, 2 verstehen, und es ist auf der Graden 1, 2:

$$\left| \frac{\partial D_1 V_{\tau-\tau_1}}{\partial s} \right| < \alpha \text{ abs. Max. } E \int_{\tau-\tau_1} \frac{d\tau}{r^3} < \beta \text{ abs. Max. } E \int_{\tau-\tau_1} \frac{d\tau}{r^{2+\lambda}},$$

α, β endliche Konstanten,

oder, da entsprechend der Formel 3):

$$\int_{\tau-\tau_1} \frac{d\tau}{r^{2+\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda} \int_{\omega+\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega, \quad \left| \begin{array}{l} \omega \omega_1 \text{ Oberflächen von } \tau, \tau_1, \\ \nu \text{ die in das Innere von } \tau-\tau_1, \\ \text{gehenden Normalen,} \end{array} \right|$$

auch:

$$< \frac{8}{1-\lambda} \text{ abs. Max. } E \frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}},$$

daraus folgt:

$$\int_1^2 \left| \frac{\partial D_1 V_{\tau-\tau_1}}{\partial s} \right| ds < \frac{8}{1-\lambda} \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^\lambda,$$

und:

$$9) \quad \text{abs. } |D_1 V_{\tau-\tau_1}|_1^2 < \frac{8}{1-\lambda} \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^\lambda,$$

somit, durch Addition von 8) und 9) die Behauptung:

$$10) \quad \text{abs. } |D_1 V|_1^2 < A \text{ abs. Max. } E \cdot r_{12}^\lambda.$$

§ 3.

III. Verstehen wir unter $\bar{\theta}$ eine Funktion der Stelle auf einer Kugelfläche vom Radius R , die derart¹⁾ stetig ist, daß die absolute Funktionsdifferenz für zwei Punkte 1 und 2 der Kugelfläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$< A \cdot r_{12}^\lambda,$$

¹⁾ Es ist möglich, daß man die Voraussetzung des Satzes:

$$\text{abs. } |\bar{\theta}|_1^2 < A \cdot r_{12}^\lambda$$

entbehren kann, und daß die Stetigkeit von θ auf der Kugelfläche hinreichend ist; doch ist der Satz in der obigen Form für die Zwecke, für die wir ihn brauchen werden, ausreichend.

wo A eine endliche Konstante, λ einen echten Bruch vorstellt, und ist θ die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum der Kugel bei den Randwerten θ , so sind die zweimal nach der Normalen genommenen Ableitungen des Raumpotentials:

$$11) \quad V = \int \theta \frac{d\tau}{r}$$

an der inneren (äußeren) Seite der Kugelfläche in folgender Weise darstellbar:

$$12) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} = 2\pi \bar{\theta} + \frac{1}{2} \int_{\omega} \bar{\theta} \cdot \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial \nu} \int \theta \frac{d\tau}{r}, & \text{außen,} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} = -4\pi \bar{\theta} + \frac{1}{2} \int_{\omega} \bar{\theta} \cdot \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial \nu} \int \theta \frac{d\tau}{r}, & \text{innen,} \end{cases}$$

ν innere Normale.

Wir denken uns zum Beweise die Funktion θ auf der Kugelfläche nach Kugelfunktionen entwickelt, was ja bei der Voraussetzung des Satzes gestattet ist:

$$13) \quad \bar{\theta} = \sum_0^{\infty} Y_j(\mu, \varphi),$$

dann ist:

$$\theta = \sum_0^{\infty} \left(\frac{r_1}{R}\right)^j Y_j(\mu_1, \varphi_1) \quad \text{für jeden Punkt } (r_1, \mu_1, \varphi_1) \text{ in der Kugel,}$$

und:

$$V = \int \theta \frac{d\tau}{r} = 4\pi \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} \frac{R^{j+3}}{\varrho^{j+1}} Y_j(\mu, \varphi)$$

für jeden Punkt (ϱ, μ, φ) des Außenraums,

$$14) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} = 4\pi \sum_0^{\infty} \frac{(j+1)(j+2)}{(2j+1)(2j+3)} Y_j(\mu, \varphi)$$

außen an der Kugelfläche.

Da ferner:

$$15) \quad \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial \nu} = -4\pi \sum_0^{\infty} \frac{j+1}{(2j+1)(2j+3)} Y_j(\mu, \varphi)$$

und:

$$16) \quad \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = -4\pi \sum_0^{\infty} \frac{j}{2j+1} Y_j(\mu, \varphi)$$

außen an der Kugelfläche,

so folgt die erste Formel 12) unmittelbar aus 13), 14), 15) und 16).

Die zweite Formel 12) ergibt sich, wenn man bedenkt, daß:

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} \right|_a = 4\pi \bar{\theta} + \left| \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} \right|,$$

$$\left| \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_a = -4\pi \bar{\theta} + \left| \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|.$$

§ 4.

IV. Verstehen wir unter $\bar{\theta}$ eine Funktion der Stelle auf einer beliebigen, geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω , und zwar eine derart stetige Funktion, daß die absoluten Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$< A r_{12}^{\lambda}, \quad (r_{12} < \sigma),$$

wo A eine endliche Konstante, λ einen echten Bruch vorstellt, und ist $\bar{\theta}$ die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum von ω bei den Randwerten $\bar{\theta}$, so ist die Funktion:

$$17) \quad f = \bar{\theta} - \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{\omega} \bar{\theta} \frac{d\tau}{r} \right|_a$$

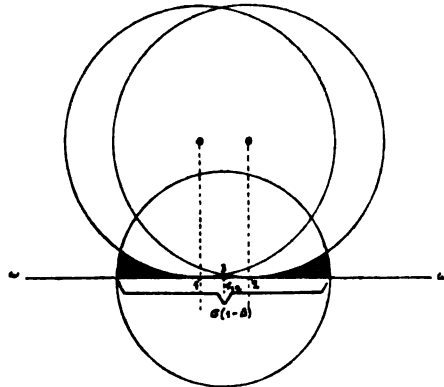
der Stelle an der Außenseite der Oberfläche ω derart stetig, daß die Funktionsdifferenzen für zwei Punkte 1 und 2 der Oberfläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$< \left[\varepsilon_{\sigma} A + \left(c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon_{\delta} \sigma} \right) \text{abs. Max. } \bar{\theta} \right] r_{12}^{\lambda}, \quad (r_{12} < (1-\delta)\sigma),$$

wo c_1 und c_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Zahl λ

abhängen, δ eine Zahl, die beliebig klein gewählt werden kann, ε_σ und ε_δ zwei Konstanten, die mit abnehmendem σ bzw. δ zu null konvergieren, aber stets bestimmte, von null verschiedene positive Werte haben, sobald σ und δ von null verschiedene positive Werte besitzen.

Zum Beweise seien 1 und 2 zwei Punkte der Oberfläche ω in der Entfernung r_{12} , und wir denken uns zwei Kugeln mit einem Radius R , der größer ist als eine bestimmte, endliche Länge, aber doch klein genug, daß die beiden Kugeln, welche bzw. die Fläche ω in 1 und 2 berühren sollen, ganz in dem Innenraume von ω liegen. Auf dem Schnittkreise der beiden Kugeln, die wir in der Folge als erste und zweite Kugel be-



zeichnen wollen, markieren wir den Punkt 3, der von der Graden 1, 2 den kürzesten Abstand hat, und wir konstruieren um diesen Punkt 3 als Zentrum eine Kugel mit dem Durchmesser

$$\sigma(1 - \Delta),$$

wo Δ eine beliebig klein gewählte Zahl sein mag. Den Teil der Kugel, der im Innenraume von ω , aber außerhalb der beiden zuerst konstruierten Kugeln liegt, wollen wir mit T bezeichnen. T ist in der Figur schraffiert. Der Gang unseres Beweises wird nun folgender sein:

Wir werden zeigen, daß die Funktion:

$$18) \left\{ \begin{array}{l} F = \theta - \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{\tau-T} (\theta - \bar{\theta}_1) \frac{d\tau}{r} \right|_a \quad \left| \begin{array}{l} \text{nach Belieben eine der} \\ \text{4 Richtungen:} \end{array} \right. \\ \text{innere Normale von } \omega \text{ in 1 oder 2,} \\ \text{innere Normale der beiden zuerst konstruierten Kugel-} \\ \text{flächen in 3,} \end{array} \right.$$

die Ungleichungen erfüllt:

$$19a) \text{ abs. } |F|_1^3 < \left\{ \varepsilon_\sigma A + \left(b + \frac{c}{\varepsilon_\delta \sigma} \right) \text{abs. Max. } \bar{\theta} \right\} r_{12}^4, \quad \left| r_{12} < (1 - \delta) \sigma, \right.$$

$$19b) \text{ abs. } |F|_2^3 < \left\{ \varepsilon_\sigma A + \left(\beta + \frac{\gamma}{\varepsilon_\delta \sigma} \right) \text{abs. Max. } \bar{\theta} \right\} r_{12}^4, \quad \left| \begin{array}{l} b, c, \beta, \gamma \text{ endl.} \\ \text{Konstanten,} \end{array} \right.$$

und daß die Funktion:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{\tau} (\theta - \bar{\theta}_1) \frac{d\tau}{r} \right|_a$$

in den beiden Punkten 1 und 2 Werte besitzt, deren absolute Differenz

$$< \left(\varepsilon_\sigma A + \left(B + \frac{C}{A} \right) \text{abs. Max. } \bar{\theta} \right) r_{12}^4, \quad (B, C \text{ endl. Konstanten}),$$

und daraus wird sehr leicht die Behauptung folgen.

Wir wollen zuerst zeigen, daß

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{\tau} (\theta - \bar{\theta}_1) \frac{d\tau}{r} \right|_a$$

die zuletzt behauptete Eigenschaft besitzt.

Wir bemerken hierzu zunächst, daß bei der Voraussetzung unseres Satzes über θ :

$$20) 1) \text{ abs. } |\theta|_1^2 < \text{endl. Konst. } \varrho_{12}^4 \quad \left| \begin{array}{l} \text{für zwei beliebige Punkte} \\ \text{des Innenraumes in genügend} \\ \text{kleinem Abstand } \varrho_{12}, \end{array} \right.$$

¹⁾ Satz III des I. Abschnitts.

und im Besonderen in dem Raume T :

$$21)^1) \text{ abs. } |\theta|_1^2 < \left(\text{endl. Konst. } A + \frac{\text{endl. Konst.}}{A \cdot \sigma} \text{ abs. Max. } \bar{\theta} \right) \varrho_{12}^4.$$

Wir teilen ferner das Gebiet T noch in zwei Teile (1) und (2), so daß (2) alle Punkte von T enthält, deren Abstand von den Punkten der Verbindungsgraden 1, 2 größer als r_{12} ist — das Gebiet (2) kann sich auch auf Null reduzieren. Dann ist:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(1)} [\theta(\xi \eta \zeta) - \theta(x y z)] \frac{d\tau}{r} \\ & \leq \left(\text{endl. Konst. } A + \frac{\text{endl. Konst.}}{A \cdot \sigma} \text{ abs. Max. } \bar{\theta} \right) \int_{(1)} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}}, \end{aligned}$$

oder, da entsprechend der Formel 3) dieses Abschnittes:

$$\int_{(1)} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} = \frac{2}{\lambda} \int_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}} d\omega$$

auch:

$$< \left(\text{endl. Konst. } A + \frac{\text{endl. Konst.}}{A \cdot \sigma} \text{ abs. Max. } \bar{\theta} \right) \int_{\omega_1} \frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}} d\omega$$

wenn wir mit ω_1 die Oberfläche von (1) bezeichnen. Nun ist für die Teile von ω_1 , welche der Fläche ω und den beiden zuerst konstruierten Kugelflächen angehören:

$$\cos(r\nu) \leq \text{endl. Konst. } r_{12}$$

für den übrigen Teil ist:

$$\int \frac{\cos(r\nu)}{r^{2-\lambda}} < r_{12}^\lambda \int \frac{|\cos(r\nu)|}{r^2} d\omega$$

und gleichfalls:

$$\int \frac{|\cos(r\nu)|}{r^2} d\omega < \text{endl. Konst. } r_{12}.$$

¹⁾ Zusatz 3 zu III des I. Abschnitts.

Es ist somit jedenfalls:

$$\int_{\omega_1} \frac{\cos(r r')}{r^{1-\varepsilon}} d\omega < \text{endl. Konst. } r_{12}^{1-\varepsilon}$$

und folglich:

$$\begin{aligned} \text{abs. } \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(1)} [\theta(\xi \eta \zeta) - \theta(x y z)] \frac{d\tau}{r} \\ < \left[\varepsilon A + \frac{\text{endl. Konst.}}{1} \text{ abs. Max. } \bar{\theta} \right] r_{12}^2 \quad \begin{array}{l} \text{sowohl in 1,} \\ \text{als auch in 2.} \end{array} \end{aligned}$$

Da wieder infolge einer einfachen Greenschen Transformation:

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(1)} \frac{d\tau}{r} = \int_{\omega_1} \cos(r r') \frac{\partial^2}{\partial \nu'^2} d\omega' \quad \begin{array}{l} \text{man vgl. z. B. Formel 88)} \\ \text{S. 62 meines Lehrbuchs der} \\ \text{Potentialtheorie I,} \end{array}$$

ferner wiederum für die Teile von ω_1 , welche der Fläche ω und den beiden zuerst konstruierten Kugelflächen angehören:

$$\cos(r r') = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon < \text{endl. Konst. } r_{12},$$

für den übrigen Teil:

$$\int \frac{\cos(r r')}{r^2} d\omega < \text{endl. Konst. } r_{12}.$$

so ist sowohl in 1, als auch in 2:

$$\text{abs. } \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(1)} \frac{d\tau}{r} < \text{endl. Konst. } r_{12},$$

somit:

$$(\theta_2 - \bar{\theta}_1) \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(1)} \frac{d\tau}{r} < \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta} \cdot r_{12},$$

und es folgt:

$$22) \left\{ \begin{array}{l} \text{abs. } \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(1)} [\theta(\xi \eta \zeta) - \bar{\theta}_1] \frac{d\tau}{r} \right| \\ < \left(\varepsilon A + \left(\text{endl. Konst.} + \frac{\text{endl. Konst.}}{A} \right) \text{ abs. Max. } \bar{\theta} \right) r_{12}^2, \\ \text{(sowohl in 1, als auch in 2).} \end{array} \right.$$

Andererseits ist:

$$\text{abs.} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(2)} (\theta - \bar{\theta}_1) \frac{d\tau}{r} \right|_1^2 \\ < \int_1^2 \int_{(2)} \left\{ \theta(\xi\eta\zeta) - \theta(xyz) \right\} + \left(\text{endl. K. } A + \frac{\text{endl. K.}}{A \cdot \sigma} \text{abs. M. } \bar{\theta} \right) r_{12}^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \frac{1}{r} \right\} d\tau ds,$$

wenn wir mit ds ein Element der Verbindungsgraden 1, 2¹⁾ bezeichnen, somit:

$$< \left(\text{endl. Konst. } A + \frac{\text{endl. Konst.}}{A \cdot \sigma} \text{abs. Max. } \bar{\theta} \right) \int_1^2 \left\{ \int_{(2)} \frac{d\tau}{r^{1-\lambda}} + r_{12}^2 \int_{(2)} \frac{d\tau}{r^4} \right\} ds;$$

da entsprechend der Formel 3) dieses Abschnitts:

$$\int_{(2)} \frac{d\tau}{r^{1-\lambda}} = \frac{1}{\lambda-1} \int_{\omega_2} \frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}} d\omega, \quad \left| \begin{array}{l} \omega_2 \text{ Oberfläche von (2),} \\ \nu \text{ die in das Innere von (2) hinein-} \\ \text{gehenden Normalen,} \end{array} \right.$$

auch:

$$< \left(\text{endl. Konst. } A + \frac{\text{endl. Konst.}}{A \cdot \sigma} \text{abs. Max. } \bar{\theta} \right) \\ \int_1^2 \left\{ \int_{\omega_2} \frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}} d\omega + r_{12}^2 \int_{\omega_2} \frac{\cos(r\nu)}{r^3} d\omega \right\} ds.$$

Wieder ist für die Teile der Fläche ω_2 , welche der Fläche ω und den zuerst konstruierten Kugelflächen angehören:

$$\cos(r\nu) < \text{endl. Konst. } \sigma.$$

Für den übrigen Teil ist:

$$\int \frac{\cos(r\nu)}{r^3} d\omega < \text{endl. Konst. } \sigma,$$

es folgt somit:

$$\int_{\omega_2} \frac{\cos(r\nu)}{r^{3-\lambda}} d\omega + r_{12}^2 \int_{\omega_2} \frac{\cos(r\nu)}{r^3} d\omega < \text{endl. Konst. } \sigma \frac{r_{12}^2}{r_{12}}$$

¹⁾ Vgl. Anmerkung ¹⁾ S. 24.

und:

$$23) \quad \text{abs.} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{(2)} (\theta - \bar{\theta}_1) \frac{d\tau}{r} \right|_1^2 < \left(\varepsilon_\sigma A + \frac{\text{endl. Konst.}}{A} \text{abs. Max. } \bar{\theta} \right) r_{12}^4.$$

Durch Addition von 22) und 23) ergibt sich:

$$24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{abs.} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_T (\theta - \bar{\theta}_1) \frac{d\tau}{r} \right|_{a1}^2 \\ < \left(\varepsilon_\sigma A + \left(\text{endl. Konst.} + \frac{\text{endl. Konst.}}{A} \right) \text{abs. Max. } \bar{\theta} \right) r_{12}^4. \end{array} \right.$$

Wir gehen jetzt zum Beweise der Formel 19 a) über. Wir teilen zum Beweise derselben das Gebiet $i-T$ in vier Teile, 1. in die Kugel T_1 , deren Oberfläche ω in 1 berührt, 2. in den Teil T_2 von $i-T-T_1$, welcher außerhalb der Kugel mit dem Radius $\frac{\sigma}{2}(1-A)$ um den Punkt 3 als Zentrum liegt, drittens in den Teil T_3 von $i-T-T_1-T_2$, dessen Abstände von den Punkten der Verbindungsgraden 1, 3 größer sind, als r_{12} , und viertens in den übrig bleibenden Teil T_4 von $i-T$.

Dann ist zunächst analog 22) und 23):

$$25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{abs.} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{T_4} (\theta - \bar{\theta}_1) \frac{d\tau}{r} \right|_a^3 \\ < \left(\varepsilon_\sigma A + \left(\text{endl. Konst.} + \frac{\text{endl. Konst.}}{A} \right) \text{abs. Max. } \bar{\theta} \right) r_{12}^4, \end{array} \right.$$

$$26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{abs.} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{T_3} (\theta - \bar{\theta}_1) \frac{d\tau}{r} \right|_1^3 \\ < \left(\varepsilon_\sigma A + \frac{\text{endl. Konst.}}{A} \text{abs. Max. } \bar{\theta} \right) r_{12}^4; \end{array} \right.$$

es ist ferner:

$$27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{abs.} \left| \theta - \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{T_1} (\theta - \bar{\theta}_1) \frac{d\tau}{r} \right|_a \right|_1^3 \\ < \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta} \cdot r_{12}^4 \end{array} \right.$$

nach dem Satze III dieser Abhandlung.

¹⁾ Mit Rücksicht auf Satz II dieses Abschnitts und Satz II des I. Abschnitts.

Schließlich ist:

$$28) \left\{ \begin{array}{l} \text{abs. } \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_{T_2} (\theta - \bar{\theta}_1) \frac{d\tau}{r} \right|_1^3 \\ \leq \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\sigma(1-D) - \frac{1}{2}r_{12}} \cdot r_{12}^{(1)} \\ \leq \text{endl. Konst. } D \cdot \sigma(1-D) \text{ abs. Max. } \bar{\theta} \cdot r_{12}, \quad (r_{12} < \sigma(1-D)(1-D)). \end{array} \right.$$

Aus 25), 26), 27), 28) folgt nunmehr unmittelbar die Formel 19 a), und analog die Formel 19 b).

Berücksichtigt man, daß nach Zusatz 2 zu Satz II des I. Abschnitts:

$$29) \quad \text{abs. } \bar{\theta}_1 \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_1 \frac{d\tau}{r} \right|^2 \leq \text{endl. Konst. abs. Max. } \bar{\theta} \cdot r_{12}^4$$

bei genügend kleinem r_{12} , D ein ganz beliebiger echter Bruch, so ergibt sich aus 19 a), 19 b) und 24) unmittelbar die Behauptung unseres Satzes, wenn wir noch zeigen können, daß tatsächlich die Formeln 19 a), 19 b) bestehen, welche Richtung von den 4 Richtungen

innere Normale von ω in 1 oder 2,

innere Normalen der beiden ersten Kugelflächen in 3

wir auch wählen mögen.

Wir bemerken hierzu, daß die Fehler, welche wir machen, wenn wir eine dieser Richtungen durch eine andere derselben ersetzen,

$$\leq \mathfrak{A} \cdot \text{endl. Konst. } r_{12}$$

sind, wenn $\mathfrak{A}$ den absolut größten Wert bezeichnet, den irgend eine der zweiten Ableitungen von

$$\int \theta \frac{d\tau}{r} \quad \left| \begin{array}{l} \text{(hinstreckt über eine der beiden} \\ \text{zuerst konstruierten Kugeln)} \end{array} \right.$$

haben kann, da nur in 27) ein Fehler entstehen kann.

¹⁾ Da $\int_{T_2} \frac{d\tau}{r^2}$ auf der Verbindungslinie 1, 3 kleiner als
endl. Konst.

kürzester Abstand von T_2 nach dieser Verbindungslinie.

Nun ist, wie bereits aus den Hölderschen Untersuchungen hervorgeht:

$$\alpha < \varepsilon_\sigma A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\sigma^{\lambda'}} \text{abs. Max. } \bar{\theta}, \quad \lambda' \text{ ein beliebiger, echter Bruch,}$$

somit auch der gemachte Fehler

$$< (\varepsilon_\sigma A + \frac{\text{endl. Konst.}}{\sigma} \text{abs. Max. } \bar{\theta}) r_{12},$$

und damit ist unser Satz vollständig bewiesen.