BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1990

MÜNCHEN 1991

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Moduln mit Koprimärzerlegung

Von **Helmut Zöschinger**

Vorgelegt von Otto Forster in der Sitzung vom 15. Dezember 1989

Einleitung

Sei R ein kommutativer Ring. Ein R-Modul M heißt *koprimär,* wenn $M \neq 0$ ist und wenn für jedes $x \in R$ entweder $xM = M$ oder $x^e M = 0$ ist für ein $e \geqq 1$. M heißt *darstellbar,* wenn M Summe von endlich vielen koprimären Untermoduln ist. Eine Darstellung $M = U_1 + \ldots + U_n$, in der alle U_i koprimär sind, heißt nach Kirby [2] eine *Koprimärzerlegung,* nach MacDonald [3] auch eine Sekundärdarstellung von M. Beide Autoren untersuchen die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Darstellung – analog zur klassischen Noether-Lasker-Theorie der Primärzerlegung von noetherschen Moduln. Sie zeigen insbesondere, daß jeder artinsche Modul darstellbar ist. Nach Sharp ([4] Theorem 2.3) ist über einem noetherschen Ring auch jeder injektive Modul darstellbar.

Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, über einem noetherschen Ring R weitere Klassen darstellbarer Moduln anzugeben und sie im 1-dimensionalen Fall vollständig zu beschreiben. Dabei erweisen sich die beiden folgenden Reduktionen als sehr nützlich:

(1.5) *Sei M ein R-Modul und $P(M)$ der radikalvolle Anteil von M (d.h. der größte Untermodul von M, der keine maximalen Untermoduln besitzt). Genau dann ist M darstellbar, wenn $P(M)$ darstellbar ist und wenn es ein Ideal $\mathfrak{b}$ von R gibt, so daß $R/\mathfrak{b}$ artinsch ist und $\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{b}) + P(M) = M$.*

(1.7) *Sei M ein R-Modul und S eine multiplikative Teilmenge von R, so daß alle Elemente von S bijektiv auf M operieren. Genau dann ist M als R-Modul darstellbar, wenn M_S als R_S-Modul darstellbar ist.*

Obwohl beide Aussagen einfach zu beweisen sind, liefern sie eine Fülle bisher nicht bekannter Beispiele, und die zweite erlaubt die Behandlung aller R-Moduln von endlicher Goldie-Dimension:

(2.4) *Ein R-Modul M von endlicher Goldie-Dimension ist genau dann darstellbar, wenn auf jedem Faktormodul von M die Nichtnullteiler bijektiv operieren.*

Insbesondere ist jeder radikalvolle Minimax-Modul darstellbar. Mit Hilfe der Menge $\mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p}$ ist Annullator eines Faktormoduls von $M\}$ erhält man folgendes hinreichende Kriterium:

(3.2) *Sei M ein R-Modul, so daß Att(M) diskret ist (d.h. aus $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ in Att(M) stets folgt $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$). Dann ist M darstellbar.*

Mit ihm folgt, daß im Falle $\dim(R) \leqq 1$ jeder radikalvolle R-Modul darstellbar ist, also in der obigen Aussage (1.5) nur mehr die Existenz des Ideales $\mathfrak{b}$ gefordert werden muß. In diesem Falle ist auch die Klasse aller darstellbaren R-Moduln gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen (für ein Gegenbeispiel bei $\dim(R) > 1$ siehe 3.5).

Jeder darstellbare R-Modul besitzt nach ([3] p. 34) eine Kompositionsreihe mit koprimären Faktoren, und für die Charakterisierung dieser (im Fall $\dim(R) > 1$ schwächeren) Eigenschaft erinnern wir an folgende Begriffe: Für jeden R-Modul M ist $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p}$ ist Annullator eines *artinschen* Faktormoduls von $M\}$ (siehe [7] p. 16), und für jede Gabriel-Topologie $\mathfrak{G}$ auf R (siehe [5] p. 146) ist $H_{\mathfrak{G}}(M) = \cap \{\mathfrak{a} M \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{G}\}$. Damit zeigen wir in

(4.2) *Für einen R-Modul $M \neq 0$ sind äquivalent:*

(i) *M besitzt eine Folge von Untermoduln $0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_n = M$, in der alle Faktoren M_i/M_{i-1} koprimär sind.*

(ii) *Koass(M) ist endlich, und für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R ist die absteigende Folge $M \supset \mathfrak{a} M \supset \mathfrak{a}^2 M \supset \mathfrak{a}^3 M \supset \ldots$ stationär.*

(iii) *Zu jeder Gabriel-Topologie $\mathfrak{G}$ auf R gibt es ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$ mit $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$.*

Die in (ii) auftretende absteigende Kettenbedingung spielt in der ganzen Arbeit eine zentrale Rolle, und abschließend beschreiben wir im Falle $\dim(R) \leqq 1$ alle R-Moduln, die ihr genügen.

R ist stets ein kommutativer noetherscher Ring. Die modultheoretischen Bezeichnungen sind so, wie sie in ([7] p. 2–3) vereinbart wurden.

1. Grundtatsachen über koprimäre und darstellbare Moduln

Für jeden R-Modul M gilt $\operatorname{Koass}(M) \subset \operatorname{Att}(M)$, und wir zeigen in (1.4, a), daß bei darstellbaren Moduln beide Mengen übereinstimmen. Weil jeder Primdivisor des Ideales $\operatorname{Ann}_R(M)$ ein Element von $\operatorname{Att}(M)$ ist, gilt $\cap \operatorname{Att}(M) = \sqrt{\operatorname{Ann}_R(M)}$, während für $\mathfrak{a} = \cap \operatorname{Koass}(M)$ im allgemeinen nur $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M = 0$ ist. Mit Hilfe der Menge $\operatorname{Att}(M)$ lassen sich die koprimären R-Moduln sehr einfach beschreiben:

Lemma 1.1. *Für einen R-Modul M und ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R sind äquivalent:*

(i) *M ist $\mathfrak{p}$-koprimär.*

(ii) *$\operatorname{Att}(M) = \{\mathfrak{p}\}$.*

(iii) *$\operatorname{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$ und $\mathfrak{p}^e M = 0$ für ein $e \geqq 1$.*

Beweis. (i $\rightarrow$ ii) Für jeden koprimären Modul M ist $\sqrt{\operatorname{Ann}_R(M)}$ ein Primideal, sagen wir $\mathfrak{p}$, und M heißt dann $\mathfrak{p}$-*koprimär*. Ist nun $\mathfrak{q} \in \operatorname{Att}(M)$, $\mathfrak{q} = \operatorname{Ann}_R(M/U)$, folgt $\operatorname{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{q}$ und $x M \neq M$ für alle $x \in \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. (ii $\rightarrow$ iii) Nur die zweite Aussage ist noch zu zeigen, und die folgt aus $\mathfrak{p} = \sqrt{\operatorname{Ann}_R(M)}$. (iii $\rightarrow$ i) Für jeden R-Modul N gilt $\cup \operatorname{Koass}(N) = \{x \in R \mid x N \neq N\}$, so daß hier aus $x M \neq M$ stets folgt $x^e M = 0$, also M koprimär ist und $\sqrt{\operatorname{Ann}_R(M)} = \mathfrak{p}$.

Folgerung 1.2. *Sei M ein R-Modul und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Dann gilt: (a) Ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Element von $\operatorname{Att}(M)$, so sind die Faktormoduln $M/\mathfrak{p}^i M$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ alle $\mathfrak{p}$-koprimär. (b) Ist U ein Untermodul von M, so daß U und M/U $\mathfrak{p}$-koprimär sind, so ist auch M $\mathfrak{p}$-koprimär. (c) Ist M die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, so gilt für $U = M[\mathfrak{a}] = \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{a})$: Genau dann ist U $\mathfrak{p}$-koprimär, wenn $\mathfrak{p}$ ein minimaler Primdivisor von $\mathfrak{a}$ ist.*

Beweis. (a) folgt sofort mit (ii), ebenso (b) wegen $\operatorname{Att}(M) \subset \operatorname{Att}(U) \cup \operatorname{Att}(M/U)$. Bei (c) ist $U \cong \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M)$, also nach dem Beweis von ([7] Folgerung 3.3) $\operatorname{Att}(U) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$, so daß $\operatorname{Att}(U) = \{\mathfrak{p}\}$ äquivalent ist mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ und $h(\mathfrak{p}/\mathfrak{a}) = 0$.

Die nächste Folgerung wurde für den Spezialfall $A = R$ von Sharp in ([4] Theorem 2.3) bewiesen:

Folgerung 1.3. *Ist M ein injektiver und A ein endlich erzeugter R-Modul, so ist $\mathrm{Hom}_R(A, M)$ darstellbar.*

Beweis. Bei $A \neq 0$ kann man irreduzible Faktoren A/A_i wählen, so daß $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = 0$ ist, und der Monomorphismus $A \to \prod_{i=1}^{n} (A/A_i)$ induziert einen Epimorphismus $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_R(A/A_i, M) \to \mathrm{Hom}_R(A, M)$. Für jedes $H_i = \mathrm{Hom}_R(A/A_i, M)$ ist wieder nach ([7] Folgerung 3.3) $\mathrm{Att}(H_i) = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(A/A_i) \mid M[\mathfrak{q}] \neq 0\}$, wegen $|\mathrm{Ass}(A/A_i)| = 1$ also $|\mathrm{Att}(H_i)| \leqq 1$, d.h. nach dem Lemma H_i Null oder koprimär. Damit ist $\prod_{i=1}^{n} H_i$ darstellbar, also auch der Faktormodul $\mathrm{Hom}_R(A, M)$.

Lemma 1.4. *Für jeden darstellbaren R-Modul M gilt:*

(a) *$\mathrm{Koass}(M)$ ist endlich und stimmt mit $\mathrm{Att}(M)$ überein.*

(b) *Zu jeder Zerlegung $\mathrm{Koass}(M) = X \,\dot\cup\, Y$ gibt es einen darstellbaren Untermodul U von M mit $\mathrm{Koass}(U) = X$ und $\mathrm{Koass}(M/U) = Y$.*

(c) *Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von R gibt es ein $e \geqq 1$ mit $M[\mathfrak{a}^e] + \mathfrak{a}M = M$.*

(d) *Der radikalvolle Anteil $P(M)$ ist wieder darstellbar und der reduzierte Anteil $M/P(M)$ ist koatomar und halbartinsch. Außerdem ist $P(M)$ koabgeschlossen in M.*

Beweis. Für $M = 0$ sind alle Aussagen klar, so daß gleich $M \neq 0$ sei und $M = U_1 + \ldots + U_n$ eine Koprimärzerlegung von M, in der kein U_i überflüssig ist.

(a) Mit $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(U_i)}$ behaupten wir, daß $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ ist. Der Epimorphismus $U_1 \times \ldots \times U_n \to M$ liefert für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$, daß $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(U_j) = \{\mathfrak{p}_j\}$ ist für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, also $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Att}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. Bei $n = 1$ ist man fertig. Bei $n \geqq 2$ gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $A_i = U_1 + \ldots + \widehat{U}_i + \ldots + U_n$, daß $M/A_i \neq 0$, also als Faktormodul von U_i ebenfalls $\mathfrak{p}_i$-koprimär ist, und es folgt $\{\mathfrak{p}_i\} = \mathrm{Koass}(M/A_i) \subset \mathrm{Koass}(M)$.

(b) Schreibt man $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k\}$ mit paarweise verschiedenen $\mathfrak{q}_i$, so ist für jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$ der Untermodul $V_j = \Sigma \{U_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_j\}$ ebenfalls $\mathfrak{q}_j$-koprimär und $M = V_1 + \ldots + V_k$. Bei der angegebenen Zerlegung von $\mathrm{Koass}(M)$ können wir gleich $X = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s\}$ und $Y = \{\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_k\}$ annehmen, und dann leistet $U = V_1 + \ldots + V_s$ das Gewünschte: Die Epimorphismen $V_1 \times \ldots \times V_s \to U$ und $V_{s+1} \times \ldots \times V_k \to M/U$ zeigen, daß $\mathrm{Koass}(U) \subset X$ und $\mathrm{Koass}(M/U) \subset Y$ ist, und darin gilt beide Male Gleichheit (wegen $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Koass}(U) \cup \mathrm{Koass}(M/U)$).

(c) Man kann gleich $\mathfrak{a}\, M \neq M$ annehmen und dann die U_i so numerieren, daß $\mathfrak{a}\, U_i \neq U_i$ ist für $i \in \{1, \ldots, s\}$ und $\mathfrak{a}\, U_i = U_i$ für die restlichen i. Es folgt $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathrm{Ann}_R(U_i)}$, also $U_i \subset M[\mathfrak{a}^e]$ für ein gemeinsames $e \geqq 1$ und alle $i \leqq s$, und daraus $M[\mathfrak{a}^e] + \mathfrak{a}\, M = M$.

(d) Sei gleich $P(M) \neq M$ und $U_1, \ldots, U_s$ nicht radikalvoll, U_i radikalvoll für alle $i > s$. Zu jedem $i \leqq s$ gibt es dann ein maximales Ideal $\mathfrak{m}_i$ und ein $e_i \geqq 1$ mit $\mathfrak{m}_i^{e_i} \cdot U_i = 0$, mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{m}_s^{e_s}$ folgt $U_i \subset M[\mathfrak{b}]$ für alle $i \leqq s$, mit $B = \sum_{i>s} U_i$ also $M[\mathfrak{b}] + B = M$. Weil $R/\mathfrak{b}$ artinsch ist und $P(M)/B$ durch $\mathfrak{b}$ annulliert wird, folgt bereits $B = P(M)$, also die erste Behauptung, und als Faktormodul von $M[\mathfrak{b}]$ ist auch $M/P(M)$ koatomar und halbartinsch. Ist schließlich A ein Untermodul von $P(M)$ und $P(M)/A$ klein in M/A, wird M/A als wesentliche Überdeckung von $M/P(M)$ ebenfalls koatomar, hat also nach ([6] Lemma 1.1) keine radikalvollen Untermoduln, und es folgt $P(M)/A = 0$, d. h. $P(M)$ ist koabgeschlossen in M.

Folgerung 1.5. *Ein R-Modul M ist genau dann darstellbar, wenn $P(M)$ darstellbar ist und wenn es ein Ideal $\mathfrak{b}$ von R gibt, so daß $R/\mathfrak{b}$ artinsch ist und $M[\mathfrak{b}] + P(M) = M$.*

Beweis. Ist M darstellbar, so haben wir bei $P(M) \neq M$ im letzten Teil (d) ein solches Ideal $\mathfrak{b}$ konstruiert, und bei $P(M) = M$ setze man $\mathfrak{b} = R$. Bei der Umkehrung bleibt zu zeigen, daß $N = M[\mathfrak{b}]$ darstellbar ist: Für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ ist $L_\mathfrak{m}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} N[\mathfrak{m}^i]$ höchstens dann ungleich Null, wenn $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{m}$ ist, und mit $\mathfrak{m}^e + \mathfrak{b} = \mathfrak{m}^{e+1} + \mathfrak{b}$ folgt, daß $\mathfrak{m}^e \cdot L_\mathfrak{m}(N)$ radikalvoll, also Null ist. In der Zerlegung $N = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} L_\mathfrak{m}(N)$ sind also fast alle Summanden Null und die restlichen koprimär.

In dem Spezialfall, daß M reduziert, d. h. $P(M) = 0$ ist, erhält man:

Folgerung 1.6. *Ein reduzierter R-Modul M ist genau dann darstellbar, wenn $R/\mathrm{Ann}_R(M)$ artinsch ist.*

Bemerkungen zum Lemma. 1) Aus Punkt (b) folgt für einen beliebigen R-Modul M: Ist Y eine endliche Teilmenge von Koass(M), so gibt es einen Untermodul U von M mit $\mathrm{Koass}(M/U) = Y$. (Zum Beweis wähle man einen artinschen Faktormodul M/M_0 mit $Y \subset \mathrm{Koass}(M/M_0)$ und wende auf ihn (b) an.) Aber für unendliche Y gilt das nicht mehr. Ist z. B. $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsring mit $\dim(R) > 1$ und $M = \coprod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{m}^i$, so gibt es unendlich viele, paarweise verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ der Höhe 1, $Y = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots\}$ ist eine Teilmenge von $\text{Koass}(M) = \text{Spec}(R)$, aber nach ([8] Folgerung 1.6) existiert überhaupt kein R-Modul N mit $\text{Koass}(N) = Y$. Ist schließlich X eine nichtleere Teilmenge von $\text{Koass}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$, so gibt es, weil M reduziert ist, keinen Untermodul U von M mit $\text{Koass}(U) = X$.

2) Definiert man die zwei folgenden Klassen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}'$ von R-Moduln durch $M \in \mathscr{A} \Longleftrightarrow$ *Zu jedem Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* R *gibt es ein* $e \geqq 1$ *mit* $M[\mathfrak{a}^e] + \mathfrak{a}M = M$, $M \in \mathscr{A}' \Longleftrightarrow$ *Zu jedem Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* R *gibt es ein* $e \geqq 1$ *mit* $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$, so gehört nach Punkt (c) jeder darstellbare R-Modul zu $\mathscr{A}$, und natürlich ist $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$. Der Hauptvorteil der Klasse $\mathscr{A}'$ ist, daß sie gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist (nicht aber $\mathscr{A}$, siehe Beispiel 3.5). Genauer zeigen wir in Abschnitt 4, daß für den Ring R äquivalent sind: (i) $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$. (ii) $\mathscr{A}$ ist gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen. (iii) $\dim(R) \leqq 1$. – Ist $M \in \mathscr{A}'$, folgt aus $M[x] = 0$ auch $xM = M$, d. h. auf M operiert jeder Nichtnullteiler bijektiv.

Lemma 1.7. *Sei M ein R-Modul und S eine multiplikative Teilmenge von R, so daß alle Elemente von S bijektiv auf M operieren. Genau dann ist M als R-Modul koprimär (darstellbar), wenn M_S als R_S-Modul koprimär (darstellbar) ist.*

B e w e i s. Bei beliebigem S ist die Abbildung $\text{Att}_{R_S}(M_S) \ni \mathscr{P} \longmapsto \mathscr{P} \cap R \in \text{Att}_R(M)$ wohldefiniert und injektiv. Falls also $M_S \neq 0$ und M $\mathfrak{p}$-koprimär ist, muß nach (1.1) $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ und M_S als R_S-Modul $\mathfrak{p}R_S$-koprimär sein (siehe auch [3] p. 27). Falls aber M eine Darstellung $M = U_1 + \ldots + U_n$ mit koprimären U_i besitzt, sind in $M_S = U_{1S} + \ldots + U_{nS}$ wie eben alle U_{iS} Null oder koprimär, so daß M_S auch als R_S-Modul darstellbar ist.

Operieren nun alle $s \in S$ bijektiv auf M, wird die obige Abbildung $\text{Att}_{R_S}(M_S) \to \text{Att}_R(M)$ auch surjektiv, und wieder mit (1.1) folgt die Behauptung über „koprimär". Hat aber M_S eine Darstellung $M_S = X_1 + \ldots + X_n$ mit koprimären R_S-Untermoduln X_i, folgt mit $U_i = \{a \in M \mid \frac{a}{1} \in X_i\}$, daß $M = U_1 + \ldots + U_n$ ist, daß jedes U_i ein S-teilbarer Untermodul von M mit $U_{iS} \cong X_i$ ist, also wie eben U_i als R-Modul koprimär und damit M darstellbar ist.

Folgerung 1.8. *Jeder radikalvolle unzerlegbare R-Modul ist koprimär.*

Beweis. Ein Modul M heißt bekanntlich *unzerlegbar*, wenn $M \neq 0$ ist und aus $M = U_1 + U_2$ stets folgt $U_1 = M$ oder $U_2 = M$. In diesem Fall ist $\mathfrak{p} = \{ x \in R \mid x M \neq M \}$ ein Primideal und $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$, außerdem gibt es ein $\mathfrak{m} \in \Omega$ derart, daß für alle $0 \neq a \in M$ der Ring $R/\mathrm{Ann}_R(a)$ lokal mit dem einzigen maximalen Ideal $\overline{\mathfrak{m}}$ ist (siehe [7] p. 3). Damit erfüllt $S = R \setminus \mathfrak{m}$ die Voraussetzungen im Lemma, denn zu jedem $a \in M$ und $s \in S$ ist $(s) + \mathrm{Ann}_R(a) = R$, d. h. $a = r\,s\,a$ für ein $r \in R$. Ist M zusätzlich radikalvoll, zeigt die letzte Formel, daß auch M_S als R_S-Modul radikalvoll und unzerlegbar ist, mit $\mathrm{Koass}_{R_S}(M_S) = \{\mathscr{P}\}$ folgt jetzt, weil R_S lokal ist, nach ([8] Folgerung 1.3) $\mathscr{P}^e \cdot M_S = 0$, so daß M_S als R_S-Modul koprimär ist, also auch M als R-Modul.

Folgerung 1.9. *Sei M ein R-Modul von endlicher Goldie-Dimension, sei $\mathrm{Ass}(M)$ diskret und operiere auf M jeder Nichtnullteiler bijektiv. Dann gilt für jeden endlich erzeugten R-Modul A, daß $\mathrm{Hom}_R(A, M)$ darstellbar ist.*

Beweis. Jedes Element von $S = R \setminus \cup \mathrm{Ass}(M)$ operiert auf M bijektiv, also auch auf $H = \mathrm{Hom}_R(A, M)$. Nach dem Lemma genügt es zu zeigen, daß H_S als R_S-Modul artinsch ist: Klar ist auch M_S als R_S-Modul endlich-dimensional, und weil $\mathrm{Ass}(M)$ endlich und diskret ist, ist jedes $\mathscr{P} \in \mathrm{Ass}_{R_S}(M_S)$ ein maximales Ideal im Ring R_S, d. h. M_S halbartinsch. Nach Matlis ist deshalb M_S sogar artinsch, also auch $\mathrm{Hom}_{R_S}(A_S, M_S) \cong H_S$.

Folgerung 1.10. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R, M die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$ und $S = R \setminus \mathfrak{p}$. Ein Untermodul U von M ist genau dann darstellbar, wenn U S-gesättigt in M ist.*

Beweis. Weil jedes $s \in S$ auf M bijektiv operiert, ist nach dem Schlangenlemma $(M/U)\,[s] \cong U/s\,U$. Allein aus $U \in \mathscr{A}'$ folgt daher, daß M/U S-torsionsfrei, d. h. U S-gesättigt in M ist, und aus dem letzteren folgt mit $A = R$ und U statt M in (1.9), daß U darstellbar ist. (Es entsprechen also die darstellbaren Untermoduln von M gerade den $R_\mathfrak{p}$-Untermoduln von $M_\mathfrak{p}$, und mit Hilfe von (1.1) sieht man jetzt sofort, daß die $\mathfrak{p}$-koprimären Untermoduln von M gerade den endlich erzeugten $R_\mathfrak{p}$-Untermoduln $\neq 0$ von $M_\mathfrak{p}$ entsprechen.)

2. Darstellbare Moduln von endlicher Goldie-Dimension

Auf jedem darstellbaren R-Modul M operieren die Nichtnullteiler bijektiv, und in Spezialfällen (siehe 1.9) ist diese Eigenschaft sogar charakteristisch. Im allgemeinen ist sie aber viel schwächer, z. B. besitzt sie über einem lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ jeder R-Modul M mit $L_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$. Definiert man die folgende Klasse $\mathscr{A}''$ von R-Moduln durch $M \in \mathscr{A}'' \Longleftrightarrow$ *Auf jedem Faktormodul von M operieren die Nichtnullteiler bijektiv*, so gilt nach der Bemerkung 2 zu (1.4) $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}''$, und das Hauptergebnis von Abschnitt 2 lautet, daß jeder Modul $M \in \mathscr{A}''$ von endlicher Goldie-Dimension bereits darstellbar ist. Zusätzlich wollen wir in (2.4) die Darstellbarkeit von M durch die Lage von M in seiner injektiven Hülle Q beschreiben. – Mit $L_x(M) = \sum_{i=1}^{\infty} M[x^i]$ gehört M genau dann zu $\mathscr{A}''$, wenn $L_x(M) + x\,M = M$ ist für alle $x \in R$, d. h. wenn es zu jedem $x \in R$ und $a \in M$ eine Gleichung $x^n(a - x\;b) = 0$ gibt mit $b \in M$, $n \geqq 1$. Aus dieser elementweisen Beschreibung folgt sofort, daß die Klasse $\mathscr{A}''$ gegenüber Gruppenerweiterungen und beliebigen direkten Summen abgeschlossen ist und jeder halbartinsche Modul (als Summe seiner artinschen Untermoduln) zu ihr gehört. – Auch für nichtzyklische Ideale $\mathfrak{a}$ definieren wir $L_{\mathfrak{a}}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} M[\mathfrak{a}^i]$, und bekanntlich heißt M $\mathfrak{a}$-torsion (bzw. $\mathfrak{a}$-torsionsfrei), wenn $L_{\mathfrak{a}}(M) = M$ (bzw. $L_{\mathfrak{a}}(M) = 0$) ist.

Lemma 2.1. *Für jeden R-Modul $M \in \mathscr{A}''$ gilt:*

(a) *$\cap$ Koass$(M) \subset \cap$ Ass(M).*

(b) *Jeder koatomare Faktormodul von M ist halbartinsch.*

(c) *Für jede Erweiterung $M \subset N$ und jedes zyklische Ideal $\mathfrak{a}$ von R gilt $L_{\mathfrak{a}}(N/M) = (L_{\mathfrak{a}}(N) + M)/M$.*

(d) *Ein Untermodul U von M gehört genau dann zu $\mathscr{A}''$, wenn für jedes zyklische Ideal $\mathfrak{a}$ von R gilt $L_{\mathfrak{a}}(M/U) = (L_{\mathfrak{a}}(M) + U)/U$.*

Beweis. (a) Zu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, also $R/\mathfrak{p} \cong U \subset M$, wähle man in der Menge $\{ V \subset M \mid V \cap U = 0 \}$ ein maximales Element V_o, und aus $\mathrm{Ass}(M/V_o) = \{ \mathfrak{p} \}$ folgt für jedes $s \in R \backslash \mathfrak{p}$ nach Voraussetzung $s \cdot M/V_o = M/V_o$, für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(M/V_o)$ also $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, insbesondere $\cap\,\mathrm{Koass}(M) \subset \mathfrak{p}$.

(b) Man kann gleich M als koatomar annehmen, und wählt man zu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ die Untermoduln U und V_o wie in (a), folgt aus Koass $(M/Vo) \subset \Omega$ speziell $\mathfrak{p} \in \Omega$.

(c) zu $\bar{a} \in L_x(N/M)$, d.h. $x^e\ a \in M$ für ein $e \geqq 1$, gibt es nach Voraussetzung eine Gleichung $x^n(x^e\ a - x^e\ b) = 0$ mit $b \in M$, $n \geqq 1$, und damit ist $a - b \in L_x(N)$, also $\bar{a} \in (L_x(N) + M)/M$.

(d) Gelte $L_\mathfrak{a}(M/U) = (L_\mathfrak{a}(M) + U)/U$ für alle zyklischen Ideale $\mathfrak{a}$. Um $U \in \mathscr{A}''$ zu zeigen, sei $x \in R$ und $a \in U$: Nach Voraussetzung gibt es eine Gleichung $x^n(a - x\ b) = 0$ mit $b \in M$, $n \geqq 1$, aus $\bar{b} \in L_x(M/U) = (L_x(M) + U)/U$ folgt $x^m(b - b_1) = 0$ mit $b_1 \in U$, $m \geqq n$, und daraus wie gewünscht $x^m(a - x\ b_1) = 0$. Die Umkehrung folgt sofort mit (c).

Die „Rechtsexaktheit" von $L_\mathfrak{a}$ in Punkt (c) kann man nicht für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von R zeigen: In Beispiel (3.5) wird ein lokaler Integritätsring $(R, \mathfrak{m})$ und eine Erweiterung $M \subset N$ angegeben, in der M teilbar (also gewiß aus $\mathscr{A}''$) ist und $L_\mathfrak{m}(N) = 0$, $L_\mathfrak{m}(N/M) \neq 0$. Unter folgender Zusatzbedingung an $\mathrm{Ass}(M)$ erhält man aber:

Lemma 2.2. *Ist $M \in \mathscr{A}''$ und $\mathrm{Ass}(M) \setminus \Omega$ endlich, so gilt für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R:*

(a) *$L_\mathfrak{a}(M) + \mathfrak{a}M = M$.*

(b) *$L_\mathfrak{a}(N/M) = (L_\mathfrak{a}(N) + M)/M$ für jede Erweiterung $M \subset N$.*

Beweis. (a) folgt unmittelbar aus (b), denn mit $M_o = \mathfrak{a}\, M$ ist auch $M_o \in \mathscr{A}''$ (als Faktormodul von M^m) und $\mathrm{Ass}(M_o) \setminus \Omega$ endlich, also $(L_\mathfrak{a}(M) + M_o)/M_o = L_\mathfrak{a}(M/M_o) = M/M_o$.

Beim Beweis von (b) sei im 1. Schritt sogar $\mathrm{Ass}(M) \setminus \Omega = \emptyset$, d.h. M halbartinsch. Dann gilt für jeden Untermodul U von M, daß $\mathrm{Ass}(M/L_\mathfrak{a}(M) + U) \subset \mathrm{Ass}(M/L_\mathfrak{a}(M))$, also $M/L_\mathfrak{a}(M) + U$ $\mathfrak{a}$-torsionsfrei ist, d.h. $L_\mathfrak{a}(M/U) = (L_\mathfrak{a}(M) + U)/U$. Um die entsprechende Formel für $M \subset N$ zu zeigen, sei $N_1/M = L_\mathfrak{a}(N/M)$ und V_o ein maximales Element in der Menge $\{ V \subset N_1 \mid V \cap M = 0 \}$. $\mathrm{Ass}(N_1/V_o) = \mathrm{Ass}(M) \subset \Omega$ zeigt, daß auch N_1/V_o halbartinsch, also nach dem vorhergehenden $L_\mathfrak{a}(N_1/V_o) + (M + V_o)/V_o = N_1/V_o$ ist. Mit $N_2/V_o = L_\mathfrak{a}(N_1/V_o)$ heißt das $N_2 + M = N_1$, und weil die kanonische Abbildung $N_2 \to N_2/V_o \times N_1/M$ injektiv ist, ist auch N_2 $\mathfrak{a}$-torsion, also $L_\mathfrak{a}(N_1) + M = N_1$.

Sei im 2. Schritt nur $M \in \mathscr{A}''$ und $\mathrm{Ass}(M) \setminus \Omega$ endlich. Für jedes $e \geqq 1$ sei $N_e/M = (N/M)\ [\mathfrak{a}^e]$, und könnten wir $L_\mathfrak{a}(N_e) + M = N_e$

zeigen, folgte aus $L_{\mathfrak{a}}(N) + M \supset N_e$ für alle $e \geqq 1$ auch $(L_{\mathfrak{a}}(N) + M)/M \supset \sum_{e=1}^{\infty} (N_e/M) = L_{\mathfrak{a}}(N/M)$ wie gewünscht. Statt N_e schreiben wir ab jetzt wieder N und wollen zusätzlich $\mathfrak{a}^e \cdot N/M = 0$ annehmen. Mit dem größten halbartinschen Untermodul $L(M) = \bigoplus L_{\mathfrak{m}}(M)$ von M ist nach Voraussetzung $\mathrm{Ass}(M/L(M))$ endlich, mit $M_1/L(M) = L_{\mathfrak{a}}(M/L(M))$ also auch $\mathrm{Ass}(M/M_1)$ endlich, und weil M/M_1 $\mathfrak{a}$-torsionsfrei ist, gibt es ein $x \in \mathfrak{a}$, das kein Nullteiler auf M/M_1 ist. Wegen $M \in \mathscr{A}''$ operiert x, also auch x^e bijektiv auf M/M_1, es folgt $\mathrm{Ext}_R^1(N/M, M/M_1) = 0$, und in $V/M_1 \oplus M/M_1 = N/M_1$ ist $\mathfrak{a}^e \cdot V/M_1 = 0$, also auch $V/L(M)$ $\mathfrak{a}$-torsion. Nach dem ersten Schritt ist $L_{\mathfrak{a}}(V) + L(M) = V$, also $L_{\mathfrak{a}}(V) + M = N$ wie gewünscht.

Bemerkung. Im Fall $\dim(R) \leqq 1$ ist die Zusatzbedingung an $\mathrm{Ass}(M)$ automatisch erfüllt, so daß für jeden R-Modul $M \in \mathscr{A}''$ die Punkte (a) und (b) gelten (siehe auch 3.9).

Lemma 2.3. *Ist U ein artinscher Untermodul von M und M/U darstellbar, so ist auch M darstellbar.*

Beweis. Sei zuerst M/U $\mathfrak{q}$-koprimär. Für ein Komplement V_o von U in M, d.h. ein minimales Element in der Menge $\{ V \subset M \mid V + U = M \}$, gilt dann $\mathrm{Koass}(V_o) = \mathrm{Koass}(M/U) = \{ \mathfrak{q} \}$, insbesondere $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}^i V_o = 0$. Aus $\mathfrak{q}^e \cdot M/U = 0$ folgt aber auch $\mathfrak{q}^e V_o \subset U$, daraus $\mathfrak{q}^f V_o = 0$ für ein $f \geqq e$, und nach (1.1) bedeutet das, daß V_o $\mathfrak{q}$-koprimär ist, also mit U auch $V_o + U = M$ darstellbar ist.

Ist M/U nur darstellbar, folgt mit einer Koprimärzerlegung $M/U = M_1/U + \ldots + M_n/U$, daß nach dem ersten Schritt alle M_i darstellbar sind, also auch $M = M_1 + \ldots + M_n$.

Satz 2.4. *Für einen R-Modul M von endlicher Goldie-Dimension sind äquivalent:*

(i) *M ist darstellbar.*
(ii) *$M \in \mathscr{A}''$.*
(iii) *Ist Q die injektive Hülle von M, so gilt $L_{\mathfrak{a}}(Q/M) = (L_{\mathfrak{a}}(Q) + M)/M$ für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von R.*

Beweis. (i → ii) ist klar, ebenso (ii → iii) nach (2.2, b), denn $\mathrm{Ass}(M)$ ist endlich. Weil Q als injektiver Modul zu $\mathscr{A}''$ gehört, folgt (iii → ii) nach (2.1, d), und es bleibt (ii → i) zu beweisen:

Wegen $M \in \mathscr{A}''$ operieren alle Elemente von $S = R \setminus \cup \operatorname{Ass}(M)$ auf M bijektiv, so daß es nach (1.7) genügt zu zeigen, daß M_S als R_S-Modul darstellbar ist. Klar ist M_S als R_S-Modul wieder aus $\mathscr{A}''$ und endlich-dimensional, außerdem der Ring R_S semilokal, so daß wir statt R_S wieder R schreiben und einen Induktionsbeweis über $n = \dim(R)$ führen können. Bei $n = 0$ ist M sogar artinsch. Bei $n \geqq 1$ betrachten wir zuerst $N = M/L(M)$ und $T = R \setminus \cup \operatorname{Ass}(N)$: Weil eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_n$ mit $\mathfrak{p}_n \cap T = \emptyset$ unmöglich ist (sonst wäre $\mathfrak{p}_n$ ein maximales Ideal in R und $\mathfrak{p}_n \in Ass(N)$), ist $\dim(R_T) < n$, also nach Induktion N_T als R_T-Modul darstellbar, so daß nach (1.7) auch $N = M/L(M)$ als R-Modul darstellbar ist. Weil aber $L(M)$ artinsch ist, folgt mit (2.3) die Darstellbarkeit von M.

Folgerung 2.5. *Sei M ein radikalvoller R-Modul, der der Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln genügt. Dann ist M darstellbar.*

Beweis. Nach ([7] Satz 2.3) ist M von endlicher Goldie-Dimension, und für jedes $x \in R$ ist die absteigende Folge $M \supset x\,M \supset x^2\,M \supset \ldots$ stationär, d.h. $M\,[x^e] + x\,M = M$ für ein $e \geqq 1$. Also ist $M \in \mathscr{A}''$, und (ii $\to$ i) liefert die Behauptung.

Ein Modul M heißt bekanntlich *Minimax-Modul,* wenn M einen endlich erzeugten Untermodul B besitzt, so daß M/B artinsch ist. Dann sind in jeder absteigenden Folge $M \supset U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ von Untermoduln fast alle Faktoren U_i/U_{i+1} endlich erzeugt, so daß M insbesondere die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln erfüllt. Als Spezialfall von (2.5) erhält man also:

Folgerung 2.6. *Jeder radikalvolle Minimax-Modul ist darstellbar.*

3. Moduln, für die Att(M) diskret ist

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes lautet, daß die in der Überschrift angegebenen Moduln darstellbar sind. Mit seiner Hilfe wird dann die Klasse aller darstellbaren R-Moduln im Falle $\dim(R) \leqq 1$ näher beschrieben.

Lemma 3.1. *Sei M ein R-Modul und $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ gleichzeitig minimales und maximales Element von Att(M). Dann gilt für $V = \cap \{ s\,M \mid s \in R \setminus \mathfrak{p} \}$:*

(a) *V ist der größte $\mathfrak{p}$-koprimäre Untermodul von M.*
(b) *V ist das einzige Komplement von $\mathfrak{p}\, M$ in M.*
(c) *Es gibt ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$, und damit ist $V = Ann_R(\mathfrak{p}^e M) \cdot M$.*

Beweis. Weil R noethersch ist, gibt es ein $e \geqq 1$ mit $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^e M) = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^{e+1} M)$, und wir behaupten, daß $\mathfrak{p}$ kein Primdivisor von $\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^e M)$ sein kann: Andernfalls hätte man $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(\overline{r})$ für ein $\overline{r} \in R/\mathfrak{c}$, aus $\overline{r} \neq 0$ folgte $r \notin \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{p}^{e+1} M)$, d.h. $r\,t \notin \mathfrak{c}$ für ein $t \in \mathfrak{p}$, und das ist unmöglich.

Ist nun $\mathfrak{p}$ minimales und maximales Element von $\mathrm{Att}(M)$, folgt $\mathfrak{c}\, M + \mathfrak{p}\, M = M$: Andernfalls hätte man ein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$ mit $\mathfrak{c} + \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, aus $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ folgte $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{p}$, so daß $\mathfrak{p}$ auch minimal über $\mathfrak{c}$ wäre im Widerspruch zur Vorbemerkung. Insbesondere erhält man aus $\mathfrak{c}\,\mathfrak{p}^e M = 0$, daß $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$ ist. $\mathfrak{c}\, M$ ist sogar ein Komplement von $\mathfrak{p}\, M$, denn aus $X \subset \mathfrak{c}\, M$, $X + \mathfrak{p}\, M = M$ folgt $\mathfrak{c}\, X = \mathfrak{c}\, M$, also $X = \mathfrak{c}\, M$, und derselbe Beweis zeigt, daß $\mathfrak{c}\, M$ das einzige Komplement von $\mathfrak{p}\, M$ ist. Wegen $\mathrm{Koass}\,(\mathfrak{c}\, M) = \mathrm{Koass}(M/\mathfrak{p}\, M) = \{\, \mathfrak{p} \,\}$ ist $\mathfrak{c}\, M$ nach (1.1) $\mathfrak{p}$-koprimär, insbesondere $\mathfrak{c}\, M \subset V$, und wegen $\mathfrak{c} \not\subset \mathfrak{p}$ hat man noch ein $s_0 \in \mathfrak{c} \cap R\backslash\mathfrak{p}$, so daß aus $V \subset s_0\, M \subset \mathfrak{c}\, M$ folgt $V = \mathfrak{c}\, M$ und alle drei Punkte bewiesen sind.

Satz 3.2. *Ist $\mathrm{Att}(M)$ diskret, so ist M darstellbar. Genauer gilt bei $M \neq 0$: Sind $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ die paarweise verschiedenen Elemente von $\mathrm{Att}(M)$, so ist $V_i = \cap \{\, s\, M \mid s \in R\backslash\mathfrak{q}_i \,\}$ der größte $\mathfrak{q}_i$-koprimäre Untermodul von M ($1 \leqq i \leqq k$) und es ist $M = V_1 + \ldots + V_k$.*

Beweis. Nach (3.1, a) ist nur noch die letzte Behauptung zu zeigen, und dazu sei $M' = V_1 + \ldots + V_k$. Nach (3.1, b) gilt $V_i + \mathfrak{q}_i M = M$ für alle i, mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_k$ also $M' + \mathfrak{a}\, M = M$. Aus $\mathfrak{a} \subset \cap\, \mathrm{Att}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$ folgt aber $\mathfrak{a}^n M = 0$ für ein $n \geqq 1$, also $M' = M$.

Zusatz. *Ist $\mathrm{Att}(M)$ diskret und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, so hat $\mathfrak{a}M$ genau ein Komplement V in M, nämlich $V = Ann_R(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M) \cdot M$. Speziell ist $Ann_R(P(M)) \cdot M \oplus P(M) = M$.*

Beweis. Weil M darstellbar ist, gibt es ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$, so daß $\mathfrak{a}\, M$ und $U = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M = \mathfrak{a}^e M$ dieselben Summanden in M haben. Mit $V = \mathrm{Ann}_R(U) \cdot M$ folgt $V + U = M$: Andernfalls hätte man ein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(M)$ mit $\mathrm{Ann}_R(U) + \mathfrak{a}^e \subset \mathfrak{q}$, es folgte $\mathfrak{q} \in \mathrm{Att}(U)$ (weil

$\mathfrak{q}$ minimal über $\mathrm{Ann}_R(U)$ ist) sowie $\mathfrak{q}\,U = U$, und das ist unmöglich. Für jeden weiteren Summanden X von U in M gilt aber $\mathrm{Ann}_R(U) \cdot X = \mathrm{Ann}_R(U) \cdot M$, also $V \subset X$, so daß V wie behauptet das einzige Komplement von U in M ist.

Speziell zu $P(M)$ gibt es nach (1.5) ein Ideal $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b}\,M = \mathfrak{b}^2\,M = \ldots = P(M)$, so daß nach dem vorhergehenden $V = \mathrm{Ann}_R(P(M)) \cdot M$ das einzige Komplement von $P(M)$ in M ist. Bleibt $V \cap P(M) = 0$ zu zeigen: Bei $P(M) = 0$ oder $P(M) = M$ ist das klar, im nichttrivialen Fall aber wähle man die Numerierung der $\mathfrak{q}_i$ in (3.2) so, daß die $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s \in \Omega$ sind und die $\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_k \notin \Omega$. Mit $A = V_1 + \ldots + V_s$ und $B = V_{s+1} + \ldots + V_k$ gilt dann $A + B = M$ und $\mathrm{Ann}_R(A) + \mathrm{Ann}_R(B) = R$, also sogar $A \oplus B = M$. Es folgt $B = P(M)$ und $\mathrm{Ann}_R(P(M)) \cdot A = V$, also auch $A = V$ wie gewünscht.

Lemma 3.3. *Sei U ein Untermodul von M, so daß U und M/U darstellbar sind. Gelte zusätzlich, daß aus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(U)$, $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(M/U)$ und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ stets folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Dann ist auch M darstellbar.*

Beweis. Sei zuerst M/U $\mathfrak{q}$-koprimär. Falls $\mathfrak{q} \notin \mathrm{Koass}(U)$, folgt mit $V = \mathrm{Ann}_R(U) \cdot M$, daß $V + U = M$ ist: Andernfalls hätte man $\mathrm{Ann}_R(U) \subset \mathfrak{q}$, dazu einen minimalen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathrm{Ann}_R(U)$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(U) = \mathrm{Koass}(U)$ lieferte nach Voraussetzung $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, entgegen der Annahme. Nun gibt es aber einen Epimorphismus $(M/U)^m \to \mathrm{Ann}_R(U) \cdot M$, so daß mit M/U auch V $\mathfrak{q}$-koprimär ist, also $V + U = M$ wie behauptet darstellbar. Falls $\mathfrak{q} \in \mathrm{Koass}(U)$, gibt es nach (1.4, b) einen darstellbaren Untermodul U_1 von U mit $\mathrm{Koass}(U_1) = \mathrm{Koass}(U) \setminus \{\mathfrak{q}\}$, $\mathrm{Koass}(U/U_1) = \{\mathfrak{q}\}$. Nach (1.2, b) ist dann M/M_1 $\mathfrak{q}$-koprimär, aus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(U_1)$, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ folgt stets $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, so daß wegen $\mathfrak{q} \notin \mathrm{Koass}(U_1)$ nach dem ersten Fall M wieder darstellbar ist.

Ist nun M/U darstellbar $\neq 0$, wähle man eine Koprimärzerlegung $M/U = M_1/U + \ldots + M_n/U$, in der kein M_i/U überflüssig ist. Für $\mathrm{Koass}(M_i/U) = \{\mathfrak{q}_i\}$ gilt dann $\mathfrak{q}_i \in \mathrm{Koass}(M/U)$ nach dem Beweis von (1.4, a), so daß aus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(U)$, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_i$ stets folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_i$. Nach dem ersten Teil sind daher alle M_i darstellbar, also auch $M = M_1 + \ldots + M_n$.

Die Zusatzbedingung im Lemma ist z. B. dann erfüllt, wenn $\mathrm{Koass}(U)$ nur aus maximalen Idealen besteht, d. h. man erhält als Spezialfall:

Folgerung 3.4. *Sei U ein Untermodul von M, so daß $R/\mathrm{Ann}_R(U)$ artinsch und M/U darstellbar ist. Dann ist auch M darstellbar.*

Daß man ohne die Zusatzbedingung in (3.3) nicht auskommt, zeigt das folgende Beispiel 3.5. Sei R ein lokaler Integritätsring mit $\dim(R) = 2$, sei $k = R/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper, K der Quotientenkörper und T die globale Transformation von R, d. h. $T/R = L_{\mathfrak{m}}(K/R)$. Dann ist $\mathrm{Ext}^i_R(k, T) = 0$ für $i = 0,1$ und $\mathrm{Ext}^2_R(k, T) \neq 0$, also auch $\mathrm{Ext}^1_R(k, K/T) \neq 0$, d. h. es gibt eine nicht-zerfallende exakte Folge

$$0 \to K/T \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} k \to 0,$$

in der dann $U = \mathrm{Bi}\,\alpha$ 0-koprimär und M/U $\mathfrak{m}$-koprimär ist. Weil aber U nicht direkter Summand, also groß in M ist, folgt aus $L_{\mathfrak{m}}(K/T) = 0$ auch $L_{\mathfrak{m}}(M) = 0$, insbesondere $M[\mathfrak{m}^e] + \mathfrak{m}M \neq M$ für alle $e \geqq 1$, so daß M nicht darstellbar ist. (Genauer ist $M \notin \mathscr{A}$, aber natürlich $M \in \mathscr{A}'$. Die Ungleichung $L_{\mathfrak{m}}(M) + \mathfrak{m}M \neq M$ und (2.2, a) zeigen überdies, daß $\mathrm{Ass}(M)$ unendlich sein muß. Tatsächlich gehört jedes Primideal der Höhe 1 zu $\mathrm{Ass}(K/T)$, und davon gibt es nach dem Krull'schen Hauptidealsatz unendlich viele).

Satz 3.6. *Ist $\dim(R) \leqq 1$, so gilt:*

(a) *Jeder radikalvolle R-Modul ist darstellbar.*

(b) *Ist M darstellbar und U ein Untermodul von M mit $\mathrm{So}(M/U) = 0$, so ist auch U darstellbar.*

(c) *Ist U ein Untermodul von M, so daß U und M/U darstellbar sind, so ist auch M darstellbar.*

Beweis. (a) Ist M radikalvoll, hat jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(M)$ die Höhe Null, so daß M nach (3.2) darstellbar ist.

(b) Sei zuerst M radikalvoll und $\mathrm{So}(M/U) = 0$. Dann ist auch U radikalvoll, denn zu jedem $\mathfrak{m} \in \Omega$ gibt es ein $r \in \mathfrak{m}$ derart, daß $R/(r)$ artinsch ist, und aus $rM = M$, $(M/U)[r] = 0$ folgt dann $rU = U$, also erst recht $\mathfrak{m}U = U$. Ist aber M nur darstellbar, also $M[\mathfrak{b}] + P(M) = M$ wie in (1.5), folgt wegen $M[\mathfrak{b}] \subset U$ auch $U[\mathfrak{b}] + P(M) \cap U = U$, darin ist $P(M) \cap U$ nach dem ersten Schritt radikalvoll (also gleich $P(U)$), und mit (a) folgt die Behauptung.

(c) Wie in den Beweisen von (2.3) und (3.3) kann man gleich M/U als $\mathfrak{q}$-koprimär annehmen. Falls $\mathfrak{q} \notin \Omega$, ist die Zusatzbedingung in (3.3) erfüllt, also M darstellbar. Falls $\mathfrak{q} \in \Omega$, gibt es ein Ideal $\mathfrak{b}$, so daß $R/\mathfrak{b}$ artinsch und $P(M) = \mathfrak{b}M$ ist (weil das nach (1.5) für U gilt und

$\mathfrak{q}^e \cdot M/U = 0$ ist), dazu ein $r \in \mathfrak{b}$, so daß auch $R/(r)$ artinsch ist, und es folgt $P(M) = rM = r^2 M$, $M[r] + P(M) = M$, also wieder mit (a) die Behauptung.

Zusatz. *Jede der drei Aussagen im Satz ist charakteristisch für* $\dim(R) \leqq 1$. *Betrachten wir zum Beweis etwas allgemeiner die folgenden drei Ringeigenschaften:* (α) *Jeder radikalvolle R-Modul gehört zu* $\mathscr{A}''$. (β) *Ist M ein injektiver R-Modul und U ein Untermodul von M mit* $So(M/U) = 0$, *so folgt* $U \in \mathscr{A}''$. (γ) *Ist M ein R-Modul, U ein maximaler Untermodul von M und U darstellbar, so folgt* $M \in \mathscr{A}$. *Dann behaupten wir, daß aus jeder von ihnen* $\dim(R) \leqq 1$ *folgt.*

Beweis. (α) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \Omega$ und M die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$. Mit $S = R \setminus \mathfrak{p}$ ist dann M_S als R_S-Modul artinsch, d. h. M erfüllt die Minimalbedingung für S-gesättigte Untermoduln. Nach Voraussetzung ist nun jeder radikalvolle Untermodul U von M S-teilbar, d. h. S-gesättigt in M, und die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln impliziert nach ([7] Satz 2.3) $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$.

(β) Sind $\mathfrak{p}$, M und S wie in Teil (α), so ist jetzt jeder Untermodul U von M, mit $So(M/U) = 0$, nach Voraussetzung S-gesättigt in M. Aus der Minimalbedingung für Untermoduln U mit $So(M/U) = 0$ folgt aber nach ([7] Satz 1.6) $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$.

(γ) Wir zeigen im 1. Schritt für jeden darstellbaren R-Modul A: Ist $A[\mathfrak{m}] = 0$ für ein $\mathfrak{m} \in \Omega$, folgt $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, A) = 0$ für alle $i \geqq 1$. Bei $i = 1$ gilt nämlich für jede Erweiterung $A \subset B$ mit $B/A \cong R/\mathfrak{m}$, daß nach Voraussetzung $B \in \mathscr{A}$, insbesondere $B[\mathfrak{m}^e] + \mathfrak{m}B = B$ ist für ein $e \geqq 1$, und weil A $\mathfrak{m}$-teilbar, also schon $A = \mathfrak{m}B$ ist, folgt $B[\mathfrak{m}^e] \oplus A = B$ wie verlangt. Bei $i > 1$ wähle man eine injektive Hülle $A \subset Q$, für die ebenfalls $Q[\mathfrak{m}] = 0$ ist, mit $\operatorname{Ext}^1_R(R/\mathfrak{m}, A) = 0$ folgt $(Q/A)[\mathfrak{m}] = 0$, so daß für den darstellbaren Modul Q/A nach Induktion $\operatorname{Ext}^{i-1}_R(R/\mathfrak{m}, Q/A) = 0$ ist, also $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, A) = 0$ wie behauptet.

Sei im 2. Schritt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \Omega$, M die injektive Hülle von $M_0 = R/\mathfrak{p}$ und $M_0 \subset U \subset M$ definiert durch $U/M_0 = L(M/M_0)$. Für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ ist dann $(M/U)[\mathfrak{m}] = 0$, also nach dem ersten Schritt $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M/U) = 0$ für alle $i \geqq 1$. Aus $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, U) = 0$ für alle $i \geqq 0$ folgt aber nach Foxby ([1] Corollary 1.5) $\mathfrak{m}U = U$. Damit ist U radikalvoll, und weil U Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul ist, folgt nach ([7] Lemma 1.1, e) $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$.

Folgerung 3.7. *Ist* $\dim(R) \leqq 1$ *und* M *ein radikalvoller, sockelfreier R-Modul* $\neq 0$, *so gilt mit den Bezeichnungen von (3.2)* $M = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.

Beweis. Auch ohne Bedingung an den Sockel gilt mit $U_i = V_1 + \ldots + \widehat{V_i} + \ldots + V_k$, daß $V_i \cap U_i$ halbartinsch ist, denn aus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(V_i \cap U_i)$ folgt $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}_j \subset \mathfrak{p}$ für ein $j \neq i$, also $h(\mathfrak{p}) \neq 0$, $\mathfrak{p} \in \Omega$. Bei $\mathrm{So}(M) = 0$ ist also die Summe $M = V_1 + \ldots + V_k$ direkt.

Durch einfaches Zusammenfassen von (3.6, a) mit (3.4) und (2.2, a) erhält man schließlich die beiden folgenden Charakterisierungen:

Folgerung 3.8. *Ist* $\dim(R) \leqq 1$, *so ist ein R-Modul* M *genau dann darstellbar, wenn* M *einen Untermodul* U *besitzt, so daß* $R/\mathrm{Ann}_R(U)$ *artinsch und* M/U *radikalvoll ist.*

Folgerung 3.9. *Ist* $\dim(R) \leqq 1$, *so gehört ein R-Modul* M *genau dann zur Klasse* $\mathscr{A}''$, *wenn* $M/L(M)$ *radikalvoll ist.*

4. Die Klasse $\mathscr{A}'$

Wählt man in einem darstellbaren Modul $M \neq 0$ eine Koprimärzerlegung $M = U_1 + \ldots + U_n$ derart, daß kein U_i überflüssig ist, so erhält man mit $M_i = U_1 + \ldots + U_i$ eine Folge von Untermoduln $0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_n = M$, in der alle Faktoren M_i/M_{i-1} koprimär sind. Es erhebt sich die Frage, wann ein R-Modul M solch eine Kompositionsreihe mit koprimären Faktoren besitzt. Nach dem Beispiel in (3.5) braucht M nicht darstellbar zu sein, aber es ist sofort zu sehen, daß $\mathrm{Koass}(M)$ endlich ist und daß es zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von R ein $e \geqq 1$ gibt mit $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$, d. h. $M \in \mathscr{A}'$ ist. Wir zeigen in (4.2), daß diese beiden Bedingungen auch hinreichend sind und fügen eine weitere Charakterisierung durch die Untermoduln $H_{\mathfrak{G}}(M) = \cap \{\mathfrak{a}M \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{G}\}$ ($\mathfrak{G}$ eine Gabriel-Topologie auf R) hinzu. Im Rest dieses Abschnittes untersuchen wir die Klasse $\mathscr{A}'$ speziell über 1-dimensionalen Ringen, zeigen, daß sie dort mit $\mathscr{A}$ übereinstimmt und geben eine explizite Beschreibung ihrer Elemente an (4.7).

Lemma 4.1. *Für jeden R-Modul* $M \in \mathscr{A}'$ *gilt:*
(a) *Jedes attachierte Primideal ist Durchschnitt von koassoziierten.*

(b) *Ist $\mathfrak{G}$ eine Gabriel-Topologie auf R und ist Koass$(M) \cap \mathfrak{G}$ endlich, so gibt es ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$ mit $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$.*

(c) *Ist M durch fast alle maximalen Ideale teilbar, so gibt es ein Ideal $\mathfrak{b}$ von R, so daß $R/\mathfrak{b}$ artinsch ist und $P(M) = \mathfrak{b} M$.*

Beweis. (a) Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(M)$, d. h. $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(\overline{M})$ mit $\overline{M} = M/U$. Zu $\mathfrak{a} = \cap\, \mathrm{Koass}(\overline{M})$ gibt es ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$, aus $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i \overline{M} = 0$ folgt $\mathfrak{a}^e \overline{M} = 0$, und in $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ gilt dann Gleichheit.

(b) Falls Koass$(M) \cap \mathfrak{G} = \emptyset$, gilt $\mathfrak{a} M = M$ für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$, und man kann $\mathfrak{b} = R$ wählen. Falls Koass$(M) \cap \mathfrak{G} = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\}$ (paarweise verschieden), gilt nach Voraussetzung $\mathfrak{q}_i^e M = \mathfrak{q}_i^{e+1} M$ $(1 \leqq i \leqq n)$ für ein gemeinsames $e \geqq 1$, und dann leistet $\mathfrak{b} = (\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n)^e \in \mathfrak{G}$ das Gewünschte: Klar ist $H_{\mathfrak{G}}(M) \subset \mathfrak{b} M$, und für die Inklusion $\supset$ sei $\mathfrak{a} \ni \mathfrak{G}$, $\mathfrak{a} M \neq M$. Dann ist Koass$(M/\mathfrak{a} M) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$ mit paarweise verschiedenen $\mathfrak{p}_j \in \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\}$, also $\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n \subset \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_s$, außerdem $\bigcap_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{a} M)}$ nach (a), also $(\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_s)^{em} \subset \mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{a} M)$ für ein $m \geqq 1$, und zusammen folgt $\mathfrak{b}^m M \subset \mathfrak{a} M$. Nun ist aber $\mathfrak{q}_i \mathfrak{b} M = \mathfrak{b} M$ für alle $1 \leqq i \leqq n$, also schließlich $\mathfrak{b}^2 M = \mathfrak{b} M$, und $\mathfrak{b} M \subset \mathfrak{a} M$ war zu zeigen.

(c) Für die Gabriel-Topologie $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{a} \subset R \mid R/\mathfrak{a} \text{ ist artinsch}\}$ gilt stets $P(M) \subset H_{\mathfrak{G}}(M)$. Nach Voraussetzung ist Koass$(M) \cap \mathfrak{G}$ endlich, also nach (b) $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$ für ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$, und weil dann $\mathfrak{b} M$ radikalvoll ist, folgt $P(M) = \mathfrak{b} M$.

Satz 4.2. *Für einen R-Modul $M \neq 0$ sind äquivalent:*

(i) *M besitzt eine Folge von Untermoduln $0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_n = M$, in der alle Faktoren M_i/M_{i-1} koprimär sind.*

(ii) *$M \in \mathscr{A}'$ und Koass(M) ist endlich.*

(iii) *Zu jeder Gabriel-Topologie $\mathfrak{G}$ auf R gibt es ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$ mit $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$.*

Erfüllt M diese äquivalenten Bedingungen, so ist Koass$(M) =$ Att(M), und für jedes minimale Element $\mathfrak{p}$ von Att(M) gilt, daß $V = \cap \{s M \mid s \in R \setminus \mathfrak{p}\}$ der größte $\mathfrak{p}$-koprimäre Untermodul von M ist.

Beweis. (i $\rightarrow$ ii) Jeder koprimäre Modul gehört zu $\mathscr{A}'$, und weil $\mathscr{A}'$ gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist, folgt $M \in \mathscr{A}'$. Mit Koass$(M_i/M_{i-1}) = \{\mathfrak{p}_i\}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ gilt auch Koass$(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. (ii $\rightarrow$ i) Nach (4.1, a) ist Att$(M) =$ Koass(M), so daß wir einen Induktionsbeweis über $d = |\,\mathrm{Att}(M)\,|$ führen können. Bei

$d = 1$ ist M nach (1.1) selbst koprimär. Bei $d > 1$ wähle man ein maximales Element $\mathfrak{q}$ in Att(M), und mit $M' = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}^i M = \mathfrak{q}^e M$ ist dann M/M' nach (1.2, a) koprimär, während M' als Faktormodul von M^n wieder aus $\mathscr{A}'$ ist mit Att(M') $\subset$ Att(M). Wegen $\mathfrak{q} \notin$ Att(M') ist diese Inklusion echt, so daß es nach Induktion eine Folge $0 = M_o \subsetneqq M_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_{n-1} = M'$ gibt mit koprimären M_i/M_{i-1}.

(ii $\rightarrow$ iii) Das ist ein Spezialfall von (4.1, b). (iii $\rightarrow$ ii) Es ist $M \in \mathscr{A}'$, denn für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ enthält die von $\mathfrak{a}$ erzeugte Gabriel-Topologie $\mathfrak{G}$ (siehe [5] p. 150) nach Voraussetzung ein Ideal $\mathfrak{b}$ mit $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M = \mathfrak{b} M$, und mit $\mathfrak{a}^e \subset \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$. Mittels der Abbildung Spec(R) $\ni$ $\mathfrak{p} \mapsto h(\mathfrak{p}) \in N$ sieht man, daß eine Teilmenge Y von Spec(R) genau dann endlich ist, wenn jede diskrete Teilmenge von Y endlich ist. Wäre also Koass(M) nicht endlich, gäbe es paarweise unvergleichbare $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots \in$ Koass(M), und die von den $\mathfrak{p}_i$ erzeugte Gabriel-Topologie $\mathfrak{G}$ enthielte nach Voraussetzung ein Ideal $\mathfrak{b}$ mit $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$. Mit $(\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_m)^e \subset \mathfrak{b}$ folgte $\mathfrak{p}_{m+1} \mathfrak{b} M = \mathfrak{b} M$, also $\mathfrak{p}_{m+1} \notin$ Koass ($\mathfrak{b} M$), $\mathfrak{p}_{m+1} \in$ Koass($M/\mathfrak{b} M$), daraus $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_{m+1}$, $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{m+1}$ für ein $i \ni \{1, \ldots, m\}$, und das ist der gewünschte Widerspruch.

Im Zusatz haben wir Koass(M) = Att(M) bereits bewiesen. Ist aber $\mathfrak{p}$ ein minimales Element von Att(M) und $S = R \setminus \mathfrak{p}$, folgt für die Gabriel-Topologie $\mathfrak{G} = \{ \mathfrak{a} \subset R \mid \mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset \}$ und $V = H_{\mathfrak{G}}(M)$, daß es ein $s_o \in S$ gibt mit $V = s_o M$. Damit ist V S-teilbar $\neq 0$, für jedes $\mathfrak{q} \in$ Att(V) ist $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ und $\mathfrak{q} \in$ Att(M), so daß in $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ Gleichheit gilt, und Att(V) = $\{ \mathfrak{p} \}$ bedeutet nach (1.1), daß V $\mathfrak{p}$-koprimär ist. Weil schließlich jeder $\mathfrak{p}$-koprimäre Untermodul von M S-teilbar ist, also in V liegt, ist alles gezeigt. (Unter der stärkeren Voraussetzung, daß M darstellbar ist, wurde die letzte Aussage über $V = \cap\, s M$ auch in ([2] p. 574 und [3] p. 31) bewiesen.)

Folgerung 4.3. *Besitzt ein R-Modul M die Minimalbedingung für alle Untermoduln der Form U =* $\mathfrak{a} M$, *so erfüllt M die äquivalenten Bedingungen in (4.2).*

Beweis. Um (iii) zu zeigen, wähle man in der Menge $\{ \mathfrak{a} M \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{G} \}$ ein minimales Element $\mathfrak{a}_o M$, und dafür folgt $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{a}_o M$.

Um die Klasse $\mathscr{A}'$ näher zu beschreiben, müssen wir als erstes zeigen, daß die Bedingung $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$ nicht für alle Ideale $\mathfrak{a}$ zu testen ist:

Lemma 4.4. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*
(i) $M \in \mathscr{A}'$.
(ii) *Zu jedem* $x \in R$ *gibt es ein* $e \geqq 1$ *mit* $x^e M = x^{e+1} M$.
(iii) *Zu jedem* $\mathfrak{p} \in Att(M)$ *gibt es ein* $e \geqq 1$ *mit* $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$.

Beweis. Klar ist (i $\rightarrow$ ii) und (i $\rightarrow$ iii), und zur Umkehrung betrachten wir für einen beliebigen R-Modul M die Idealmenge $\Delta(M) = \{ \mathfrak{a} \subset R \mid$ es gibt ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M \}$. Für sie gelten folgende Rechenregeln, deren Beweis dem Leser überlassen sei: ① $\mathfrak{a} \in \Delta(M) \Longleftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} \in \Delta(M) \Longleftrightarrow \mathfrak{a} + \mathrm{Ann}_R(M) \in \Delta(M)$. ② $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Delta(M) \Rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \in \Delta(M)$. Bei (ii $\rightarrow$ i) ist also $\mathfrak{a} \in \Delta(M)$ für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von R zu zeigen, und das geht durch Induktion über die Erzeugendenanzahl sofort mit ②. Bei (iii $\rightarrow$ i) nehmen wir $M \notin \mathscr{A}'$ an, und dann hat die Menge aller Ideale $\mathfrak{a} \notin \Delta(M)$ ein maximales Element $\mathfrak{a}_o$. Nach ① ist $\mathfrak{a}_o \subsetneqq \sqrt{\mathfrak{a}_o}$ unmöglich, in $\mathfrak{a}_o = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n$ muß dann nach ② ein $\mathfrak{p}_j$ mit $\mathfrak{a}_o$ übereinstimmen, d.h. $\mathfrak{a}_o$ ist ein Primideal. Für $\mathfrak{b}_o = \mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{a}_o M)$ gilt nun $\mathfrak{a}_o M = \mathfrak{b}_o M$, also auch $\mathfrak{b}_o \notin \Delta(M)$, so daß in $\mathfrak{a}_o \subset \mathfrak{b}_o$ Gleichheit folgt, und $\mathfrak{a}_o \in \mathrm{Att}(M) \setminus \Delta(M)$ steht im Widerspruch zur Voraussetzung (iii).

Zusatz. *In (iii) genügt es, alle* $\mathfrak{p} \in Att(M)$ *zu testen, die* n i c h t *minimal über* $Ann_R(M)$ *sind.*

Beweis. Ist $M \neq 0$, so zeigen wir zuerst für jeden minimalen Primdivisor $\mathfrak{q}$ von $\mathrm{Ann}_R(M)$, daß $\overline{M} = M/\mathfrak{q}M$ aus $\mathscr{A}'$ ist: Nach (4.4) ist nur $\mathfrak{p} \in \Delta(\overline{M})$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(\overline{M})$ zu zeigen, und bei $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ ist sogar $\mathfrak{p}\overline{M} = 0$, bei $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$ gilt nach Voraussetzung $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$ für ein $e \geqq 1$, also auch $\mathfrak{p}^e \overline{M} = \mathfrak{p}^{e+1} \overline{M}$.

Seien nun $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ alle minimalen Primdivisoren von $\mathrm{Ann}_R(M)$. Dann gibt es ein $m \geqq 1$ mit $(\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n)^m \subset \mathrm{Ann}_R(M)$, und weil alle $M/\mathfrak{q}_i M$ aus $\mathscr{A}'$ sind, gilt das auch für $M/(\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n)^m M$, d.h. für M.

Folgerung 4.5. *Sei* $dim(R) \leqq 1$, *M ein R-Modul und U ein Untermodul von M.*
(a) *Genau dann ist* $M \in \mathscr{A}'$, *wenn es zu jedem maximalen Ideal* $\mathfrak{m}$ *von R ein* $e \geqq 1$ *gibt mit* $\mathfrak{m}^e M = \mathfrak{m}^{e+1} M$.
(b) *Ist* $M \in \mathscr{A}'$ *und* $So(M/U) = 0$, *so ist auch* $U \in \mathscr{A}'$.

Beweis. (a) folgt unmittelbar aus dem Zusatz, und auch in (b) ist nur jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ zu testen: Es gibt ein $r \in \mathfrak{m}$, so daß $R/(r)$ artinsch ist, dazu ein $n \geqq 1$ mit $r^n M = r^{n+1} M$, und wegen $(M/U)[r^{n+1}] = 0$ folgt $r^n U = r^{n+1} U$. Weil aber $U_1 = U[r^n]$ darstellbar ist, gibt es ein $e \geqq 1$ mit $U_1[\mathfrak{m}^e] + \mathfrak{m}\, U_1 = U_1$, und aus $U_1 + r\,U = U$ folgt $U[\mathfrak{m}^e] + \mathfrak{m}\, U = U$, $\mathfrak{m}^e\, U = \mathfrak{m}^{e+1}\, U$ wie gewünscht. (Beide Aussagen sind charakteristisch für $\dim(R) \leqq 1$, wie die Zusätze (α) und (β) nach (3.6) zeigen.)

Lemma 4.6. *Sei U ein koatomarer Untermodul von M und sei $U \in \mathscr{A}'$, $M/U \in \mathscr{A}$. Dann folgt $M \in \mathscr{A}$.*

Beweis. Wir zeigen im 1. Schritt für einen beliebigen R-Modul M: Ist $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$ koatomar, so folgt bereits $M[\mathfrak{a}^e] \oplus \mathfrak{a}^e M = M$. Zum Beweis sei $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^e = (x_1, \ldots, x_m)$. Dann gibt es einen Monomorphismus $M/M[\mathfrak{b}] \to (\mathfrak{b}\, M)^m$, und weil das Ziel koatomar und $\mathfrak{b}$-teilbar ist, sind auch alle Untermoduln $\mathfrak{b}$-teilbar ([6] Lemma 1.1), insbesondere $M/M[\mathfrak{b}]$, d.h. es ist $M[\mathfrak{b}] + \mathfrak{b}\, M = M$. Auch $M[\mathfrak{b}] \cap \mathfrak{b}\, M$ ist $\mathfrak{b}$-teilbar, außerdem durch $\mathfrak{b}$ annulliert, also wie behauptet Null.

Sei im 2. Schritt $U \subset M$ wie angegeben. Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von R hat man ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{a}^e U = \mathfrak{a}^{e+1} U$, weiter ein $f \geqq 1$ mit $(M/U)[\mathfrak{a}^f] + \mathfrak{a} \cdot M/U = M/U$, und mit $(M/U)[\mathfrak{a}^f] = M_1/U$ folgt $\mathfrak{a}^f M_1 \subset U$, $\mathfrak{a}^{e+f} M_1 = \mathfrak{a}^{e+f+1} M_1$. Nach dem ersten Schritt bedeutet das $M_1[\mathfrak{a}^{e+f}] \oplus \mathfrak{a}^{e+f} M_1 = M_1$, und Addition von $\mathfrak{a}\, M$ liefert $M_1[\mathfrak{a}^{e+f}] + \mathfrak{a}\, M = M$.

Satz 4.7. *Ist $\dim(R) \leqq 1$, so sind für einen R-Modul äquivalent:*

(i) $M \in \mathscr{A}'$.

(ii) $M \in \mathscr{A}$.

(iii) *M besitzt einen koatomaren, halbartinschen Untermodul U, so daß M/U radikalvoll ist.*

Beweis. Klar ist (ii $\to$ i), und bei (i $\to$ iii) ist nach (4.5, b) auch $L(M) \in \mathscr{A}'$. Mit $\Omega = \{\, \mathfrak{m}_i \mid i \in I \,\}$, $X_i = L_{\mathfrak{m}_i}(M)$ folgt aus $L(M) = \bigoplus_{i \in I} X_i$, daß jedes $X_i \in \mathscr{A}'$ ist, und der Beweis von (4.5, b) zeigte genauer, daß es zu jedem $i \in I$ ein $e_i \geqq 1$ gibt mit $X_i[\mathfrak{m}_i^{e_i}] + P(X_i) = X_i$. Damit ist $U = \bigoplus_{i \in I} X_i[\mathfrak{m}_i^{e_i}]$ koatomar und $L(M)/U$ radikalvoll, und weil nach (2.2, a) $M/L(M)$ radikalvoll ist, gilt das auch für M/U.

(iii $\to$ ii) Ist $U \subset M$ wie angegeben, so hat man für jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ eine Zerlegung $U = L_{\mathfrak{m}}(U) \oplus U'$ und ein $e \geqq 1$ mit $\mathfrak{m}^e \cdot L_{\mathfrak{m}}(U) = 0$ ([6] Lemma 1.2), so daß wegen $\mathfrak{m}\, U' = U'$ folgt $\mathfrak{m}^e\, U = \mathfrak{m}^{e+1}\, U$. Nach (4.5, a) ist deshalb $U \in \mathscr{A}'$, nach (3.6, a) aber M/U sogar darstellbar, also nach (4.6) $M \in \mathscr{A}$ wie behauptet.

Bemerkung. Aus der Äquivalenz ($i \leftrightarrow ii$) folgt insbesondere, daß im Falle $\dim(R) \leqq 1$ die Klasse $\mathscr{A}$ gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist. Nach dem Zusatz (γ) bei (3.6) ist diese Eigenschaft sogar charakteristisch für $\dim(R) \leqq 1$.

Literatur

[1] H.-B. Foxby: On the μ^i in a minimal injective resolution II: Math. Scand. 41 (1977) 19–44.
[2] D. Kirby: Coprimary decomposition of artinian modules: J. London Math. Soc. 6 (1973) 571–576.
[3] I. G. MacDonald: Secondary representation of modules over a commutative ring: Symp. Math. 11 (1973) 23–43.
[4] R. Y. Sharp: Secondary representations for injective modules over commutative noetherian rings: Proc. Edinb. Math. Soc. 20 (1976) 143–151.
[5] B. Stenström: Rings of quotients: Springer, Berlin (1975).
[6] H. Zöschinger: Koatomare Moduln: Math. Zeitschrift 170 (1980) 221–232.
[7] – : Minimax-Moduln: J. Algebra 102 (1986) 1–32.
[8] – : Über koassoziierte Primideale: Math. Scand. 63 (1988) 196–211.