BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1990

MÜNCHEN 1991

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zwei weitere Beweise zu einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon

Von **Herbert Naumann** in Hilden

Vorgelegt von Kurt Schütte in der Sitzung vom 12. Januar 1990

Als Satz von Napoleon wird folgender Satz der Elementargeometrie bezeichnet:

Die Mittelpunkte der über den Seiten eines beliebigen Dreiecks nach außen angelegten gleichseitigen Dreiecke bilden stets ein gleichseitiges Dreieck.

(Die Herkunft dieses Satzes konnte bisher nicht geklärt werden, vor 1912 ist jedenfalls eine Zuschreibung an Napoleon nicht bekannt. Siehe hierzu J. Fischer [1], S. 324–325 und die dort zitierte Literatur.)

K. Schütte hat in [2] und [3] eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon bewiesen, die (in unwesentlich geänderter Formulierung) lautet:

Voraussetzung. An die Seiten eines beliebigen Dreiecks $A_1A_2A_3$ seien außen die Dreiecke $A_3A_2B_1$, $A_1A_3B_2$, $A_2A_1B_3$ angelegt mit den gerichteten Winkeln $\beta_1 = \sphericalangle A_3B_1A_2$, $\beta_2 = \sphericalangle A_1B_2A_3$, $\beta_3 = \sphericalangle A_2B_3A_1$, wobei $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$ ist. Dann hat man an den Umkreismittelpunkten M_1, M_2, M_3 der außen angelegten Dreiecke die gerichteten Winkel $2\beta_1 = \sphericalangle A_3M_1A_2$, $2\beta_2 = \sphericalangle A_1M_2A_3$, $2\beta_3 = \sphericalangle A_2M_3A_1$.

Behauptung. $M_1M_2M_3$ ist ein Dreieck mit den gerichteten Winkeln $\beta_1 = \sphericalangle M_2M_1M_3$, $\beta_2 = \sphericalangle M_3M_2M_1$, $\beta_3 = \sphericalangle M_1M_3M_2$.

(Bei dem Satz von Napoleon ist $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \pi/3$, das Dreieck $M_1M_2M_3$ also ein gleichseitiges.)

In den nun folgenden Beweisen sei unter einem Winkel stets der *gerichtete* Winkel verstanden. Dadurch brauchen Fallunterscheidungen nicht gemacht zu werden, die Beweise werden so kürzer und direkter.

Beweis 1

M_2M_3P sei das Dreieck mit $\sphericalangle PM_3M_2 = \beta_3$ und $\sphericalangle M_3M_2P = \beta_2$, also mit $\sphericalangle M_2PM_3 = \beta_1$.

a_1, a_2, a_3 seien die Verbindungsgeraden M_2M_3, M_3P, PM_2.

1. Spiegelt man hintereinander an den Geraden a_2 und a_1, so erhält man eine Drehung um den Punkt M_3 mit dem Drehwinkel $2\beta_3$, durch die A_2 auf A_1 abgebildet wird.

2. Spiegelt man hintereinander an den Geraden a_1 und a_3, so erhält man eine Drehung um den Punkt M_2 mit dem Drehwinkel $2\beta_2$, durch die A_1 auf A_3 abgebildet wird.

3. Aus 1. und 2. folgt: Spiegelt man hintereinander an den Geraden a_2 und a_3, so erhält man eine Drehung um den Punkt P mit dem Drehwinkel $2\beta_3 + 2\beta_2 = 2\pi - 2\beta_1$, durch die A_2 auf A_3 abgebildet wird.

4. Aus 3. folgt: Durch eine Drehung um den Punkt P mit dem Drehwinkel $2\beta_1$ wird A_3 auf A_2 abgebildet.

Da auch durch eine Drehung um den Punkt M_1 mit dem Drehwinkel $2\beta_1$ der Punkt A_3 auf A_2 abgebildet wird, folgt $P = M_1$.

Somit ist die Behauptung bewiesen.

Anmerkung. Es lohnt sich, die Spiegelungen an den Geraden a_1, a_2, a_3 noch einmal zu betrachten. Im obigen Beweis wird A_2 zunächst durch Spiegelung an a_2 auf einen Punkt abgebildet, der S genannt sei, anschließend wird S durch Spiegelung an a_1 auf A_1 abgebildet. Damit ist also S auch das Spiegelbild von A_1 an a_1, und da S sodann durch Spiegelung an a_3 in A_3 übergeht, ist S ebenfalls das Spiegelbild von A_3 an a_3. Die Existenz dieses gemeinsamen Spiegelpunktes S, der ersichtlich noch die interessante Eigenschaft hat, gemeinsamer Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke $A_iA_jB_k$ zu sein, ist in Schütte [2], [3] ein wesentlicher Bestandteil der dortigen Beweise.

Beweis 2

Die Summe der Innenwinkel in einem Sechseck beträgt 4π. Da in dem Sechseck $A_1M_3A_2M_1A_3M_2$ die Summe der Winkel bei den M_i gleich $\Sigma\, 2\beta_i = 2\pi$ ist, so muß auch die Summe der Sechseckinnenwinkel γ_i bei den A_i gleich 2π sein.

Wegen $\overline{A_3M_1} = \overline{A_2M_1}$ läßt sich an $\overline{A_3M_1}$ das Dreieck $M_3'A_3M_1$ kongruent und orientierungsgleich dem Dreieck $M_3A_2M_1$ anlegen. Das Dreieck $M_2A_3M_3'$ ist dann kongruent und orientierungsgleich dem Dreieck $M_2A_1M_3$, denn $\overline{M_2A_3} = \overline{M_2A_1}$, $\overline{A_3M_3'} = \overline{A_2M_3} = \overline{A_1M_3}$ und $\sphericalangle M_3'A_3M_2 = 2\pi - \gamma_2 - \gamma_3 = \gamma_1$.

Da $\sphericalangle M_3'M_1A_3 = \sphericalangle M_3M_1A_2$, ist $\sphericalangle M_3'M_1M_3 = \sphericalangle A_3M_1A_2 = 2\beta_1$, da ferner $\sphericalangle A_1M_2M_3 = \sphericalangle A_3M_2M_3'$, so ist $\sphericalangle M_3M_2M_3' = \sphericalangle A_1M_2A_3 = 2\beta_2$.

Wegen $\overline{M_3'M_1} = \overline{M_3M_1}$, $\overline{M_3'M_2} = \overline{M_3M_2}$ und $M_3' \neq M_3$ halbiert die Verbindungsgerade M_1M_2 die Winkel $\sphericalangle M_3'M_1M_3 = 2\beta_1$ und $\sphericalangle M_3M_2M_3' = 2\beta_2$.

Somit ist die Behauptung ein zweites Mal bewiesen.

Anmerkung zum Beweis 2. Durch Spiegelung an M_1M_2 wird das Dreieck $M_1M_2M_3'$ auf $M_1M_2M_3$ und der Punkt A_3 auf einen Punkt abgebildet, der S genannt werde. Das Dreieck SM_1M_2 ist dann spiegelbildlich kongruent zu $A_3M_1M_2$, SM_2M_3 ist spiegelbildlich kongruent zu $A_3M_2M_3'$ und damit auch zu $A_1M_2M_3$, und SM_3M_1 ist spiegelbildlich kongruent zu $A_3M_3'M_1$ und damit auch zu $A_2M_3M_1$. Daraus ergibt sich von neuem, daß S auch Spiegelbild von A_1 an M_2M_3 und von A_2 an M_3M_1 ist.

Die Kanten $\overline{SM_1}$, $\overline{SM_2}$, $\overline{SM_3}$ bewirken eine Aufteilung des Sechsecks $A_1M_3A_2M_1A_3M_2$ in drei Drachenvierecke (Drachen, *engl.* kite), deren Symmetrieachsen M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3 sind. Aus der Winkelhalbierungseigenschaft dieser Achsen folgt, wenn (i, j, k) eine zyklische Permutation von (1, 2, 3) ist, unmittelbar $\sphericalangle M_kM_jM_i = \frac{1}{2} \sphericalangle A_iM_jA_k = \beta_j$, q.e.d.

Herrn Prof. Dr. K. Schütte danke ich herzlich für die freundliche Ermunterung, diese Beweise zu publizieren.

Literatur

[1] Fischer, J.: Napoleon und die Naturwissenschaften. Stuttgart: Franz Steiner Verlag Wiesbaden 1988 (= Boethius; Bd. 16).

[2] Schütte, K.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. Mathematische Semesterberichte **34**, 256–268 (1987).

[3] Schütte, K.: Neue Fassung einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. Elemente d. Mathematik **44**, 133–138 (1989).