

Ueber die Bewegung der Elektronen.

Von

F. Lindemann.

Erster Teil:

Die translatorische Bewegung.

(Eingelaufen am 12. Januar 1907.)

Während ich versuchte, mittelst der Elastizitätstheorie des Lichtäthers die Gesetzmäßigkeiten in den Spektren der Elemente zu erklären,¹⁾ haben andere die Theorie der Elektronen zu diesem Zwecke herangezogen. Da die Ausbreitung der elektrischen Kraft Zeit erfordert, so wird ein bewegtes elektrisches Teilchen (sei es ein geladenes materielles Teilchen oder ein Quantum von Elektrizität ohne materielle Unterlage) im allgemeinen auf sich selbst Kräfte ausüben, welche die Bewegung beeinflussen. Als Eigenschwingungen werden solche schwingende Bewegungen des Elektrons angesehen, bei denen diese Kräfte verschwinden, sogenannte kräftefreie Schwingungen. Um diese Bestrebungen mit meinen Untersuchungen zu vergleichen, mußte ich die betreffende Literatur eingehend studieren. Besonders hat Sommerfeld sehr allgemeine Untersuchungen über die von bewegten Elektronen auf sich selbst ausgeübten Kräfte angestellt, und aus seinen Formeln für den besonderen Fall der konstanten Geschwindigkeit das auch sonst schon abgeleitete Resultat bestätigt, daß die Bewegung eines Elektrons mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit kräftefrei sei.

Eine Änderung der Geschwindigkeit bedingt dagegen das Auftreten von Kräften, und so kommt man zu der Anschauung, daß das masselose Elektron sich verhält wie ein träges Massenteilchen, wobei sich dann allerdings die Masse als Funktion der Geschwindigkeit ergibt; und auf Grund dieser Resultate konnte man dazu übergehen, die Trägheit der materiellen Massen umgekehrt durch die scheinbare Trägheit der Elektronen zu erklären, so daß sich die Masse aus Elektronen zusammensetzt und nur deshalb konstant zu sein scheint, weil die in der Mechanik vorkommenden Geschwindigkeiten nicht groß genug sind, um die Abweichungen hervortreten zu lassen. Die fundamentale Wichtigkeit dieser neuen Auffassungsweise der Mechanik erfordert vor allem eine volle Klarlegung der Grundgesetze

¹⁾ Zur Theorie der Spektrallinien, Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXI, 1901 und Bd. XXII, 1903. Es sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, daß ich am Schlusse der letzteren Abhandlung in den asymptotischen Werten bei der Korrektur irrtümlicher Weise eine Quadratwurzel durch eine vierte Wurzel ersetzt habe. — Unter Benützung genauerer asymptotischer Entwicklungen habe ich inzwischen die Untersuchungen fortgesetzt und Formeln erhalten, die sich den Beobachtungen besser anschließen; die Resultate sind vorläufig zusammengestellt in meiner Rektoratsrede: Gestalt und Spektrum der Atome, Süddeutsche Monatshefte, 2. Jahrg. 1905 (englische Übersetzung in The Monist, vol. 16, Chicago 1906).

für die Bewegung eines Elektrons, und eine solche versuche ich im folgenden auf Grund der partiellen Differentialgleichungen der Elektronentheorie zu geben.

Die dabei gewonnenen Resultate sind von den bisher erhaltenen wesentlich verschieden. Ich knüpfe zunächst an den allgemeinen Ansatz an, den man Sommerfeld verdankt; in den Aufsätzen des letzteren kommen verschiedene Entwicklungen vor, die mir aus mathematischen Gründen nicht haltbar erscheinen. Ich habe deshalb seine ganze Untersuchung von neuem durchgeführt und dabei möglichst ausführlich alle zweifelhaften Stellen erörtert. Schließlich habe ich in § 16 die betreffenden Stellen eingehend bezeichnet und besprochen, zugleich auch klarzulegen versucht, weshalb die ältere Behandlung der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit (nach Lorentz und Abraham) dazu führte, diese Bewegung als eine kräftefreie anzusehen.

Die vorliegende Arbeit behandelt nur die reine Translation, und zwar für den Fall, daß die Bahn des Elektrons und die Geschwindigkeit willkürlich gegeben sei; es wird ganz allgemein die durch das Elektron erzeugte Kraft berechnet. Erläutert ist die allgemeine Theorie durch den Fall konstanter Unterlichtgeschwindigkeit (§ 12), wobei sich die Kraft nicht gleich Null ergibt und der Grenzfall der Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit ohne Schwierigkeit erledigt wird. Hiernach dürften die erwähnten Vorstellungen über die Erklärung der Trägheit materieller Massen aus der Elektronentheorie sich nur unter Hinzufügung neuer Hypothesen aufrecht erhalten lassen. Auch die Vorstellung, daß ein konstanter elektrischer Strom der Elektronenbewegung mit konstanter Geschwindigkeit (dem konstanten Konvektionsstrom) äquivalent sei, ist nur qualitativ, nicht quantitativ zutreffend, da ein konstanter Strom keine Selbstinduktion zeigt, ein konstant bewegtes Elektron dagegen auf sich selbst Kräfte ausübt.

In gleicher Weise ist die Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit behandelt (§ 13), wobei der Grenzübergang zur Lichtgeschwindigkeit sich ohne Anstand vollziehen läßt und zu demselben Resultate führt, wie beim Ausgange von Unterlichtgeschwindigkeit. Weiters sind die allgemeinen Formeln zur Behandlung der gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung verwandt; dabei zeigt sich, daß der allmähliche Übergang von Unter- zu Überlichtgeschwindigkeit und umgekehrt sich ohne jede Schwierigkeit vollzieht.

Alle Untersuchungen beziehen sich auf Volumladung, d. h. es wird vorausgesetzt, daß das bewegte (kugelförmige) Teilchen sich wie ein Nichtleiter verhalte, dessen ganzes Innere elektrisch geladen ist. Die Voraussetzung bloßer Oberflächenladung kann durch Grenzübergang leicht erledigt werden. Ich werde darauf in einer Fortsetzung der vorliegenden Arbeit zurückkommen, in der dann auch die rotatorische Bewegung Berücksichtigung finden soll.

§ 1. Das elektromagnetische Feld eines bewegten Elektrons.

Die von einem bewegten elektrischen Teilchen (z. B. einem Elektron) ausgehenden Kräfte hängen von zwei Potentialen ab, dem „skalaren Potentiale“ φ , das der Gleichung:

$$(1) \quad \ddot{\varphi} - c^2 \Delta^2 \varphi = \tau^2 \varrho$$

genügen muß, und dem „Vektorpotentiale“ $\mathfrak{A}$, dessen Bestandteile $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ durch die drei Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{aligned} \ddot{\mathfrak{A}}_x - c^2 \Delta^2 \mathfrak{A}_x &= \varrho c v_x, \\ \ddot{\mathfrak{A}}_y - c^2 \Delta^2 \mathfrak{A}_y &= \varrho c v_y, \\ \ddot{\mathfrak{A}}_z - c^2 \Delta^2 \mathfrak{A}_z &= \varrho c v_z \end{aligned}$$

bestimmt werden.¹⁾ In ruhendem Zustande geht das skalare Potential φ in das elektrostatische, das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ in das magnetische Potential über. In obigen Gleichungen bedeutet φ'' den zweiten Differentialquotienten von φ nach der Zeit t an dem im absoluten Raume festen Punkte mit den Koordinaten x', y', z' , und es ist:

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2}.$$

Es bedeutet ferner ϱ die elektrische Dichte an diesem Punkte, c die Lichtgeschwindigkeit, und v_x, v_y, v_z sind die Komponenten der Geschwindigkeit

$$(3) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

mit der sich das Elektron bewegt.

Nur im Innern des Elektrons ist ϱ von Null verschieden; es ist also ϱ eine im allgemeinen unstetige Funktion des Ortes und außerdem (da der Ort des bewegten Elektrons sich mit der Zeit ändert) eine Funktion der Zeit. Die dadurch der Integration entgegenstehenden Schwierigkeiten kann man in folgender Weise beseitigen.

Es werde ein mit dem Elektron fest verbundenes Koordinatensystem (x, y, z) eingeführt, das sich mit der Geschwindigkeit v im Raume translatorisch bewegt, d. h. es werde

$$(4) \quad \begin{aligned} x' &= x + \int_0^t v_x dt, \\ y' &= y + \int_0^t v_y dt, \\ z' &= z + \int_0^t v_z dt \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. in Betreff der Literatur den Artikel „Maxwells elektromagnetische Theorie“ von H. A. Lorentz in der Enzyklopädie der Mathematik, V 2, 1, und für die Ableitung besonders Abraham, Prinzipien der Dynamik des Elektrons, Annalen der Physik, Bd. 315 (neue Folge, Bd. 10), 1903, (französische Übersetzung in dem Werke: Jons, Électrons, Corpuscules, herausgegeben von der Société française de physique, Paris 1905, t. I), ferner desselben Verfassers Werk: Elektromagnetische Theorie der Strahlung, Leipzig 1905.

gesetzt, wobei vorausgesetzt wird, daß die Bewegung des Elektrons zur Zeit $t = 0$ beginnt. Bezeichnet dann $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ den Differentialquotienten von φ nach der Zeit an einer mit diesem Koordinatensystem fest verbundenen Stelle, so ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} \frac{dz'}{dt},$$

oder nach (4):

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} v_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} v_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} v_z,$$

wo nun v_x, v_y, v_z gegebene Funktionen von t sind.

Durch Wiederholung dieser Differentiations-Operation erhält man:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dv_x}{dt} - 2 S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} v_x + S S v_x v_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

wenn zur Abkürzung folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx_x}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dv_z}{dt},$$

$$S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} v_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} v_x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} v_y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} v_z,$$

$$S S v_x v_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = v_x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + v_y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + v_z^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 v_y v_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + 2 v_z v_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + 2 v_x v_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Die Differentialgleichung (1) wird infolgedessen:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dv_x}{dt} - 2 S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} v_x + S S v_x v_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - c^2 \Delta^2 \varphi = c^2 \varrho.$$

Hier ist nun die elektrische Dichte ϱ für jeden mit dem beweglichen Systeme fest verbundenen Punkt x, y, z von der Zeit unabhängig, also nur noch von x, y, z abhängig, und zwar gleich Null außerhalb des Elektrons.

Indem man die Funktion $\varrho = f(x, y, z)$ durch ein Fourier'sches Integral darstellt, läßt sich die in dieser Unstetigkeit liegende Schwierigkeit umgehen.¹⁾ Es ist nach Fourier:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk dl dm \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\kappa, \lambda, \mu) e^{iS(x-\kappa)k} d\kappa d\lambda d\mu,$$

worin:

$$S(x - \kappa)k = (x - \kappa)k + (y - \lambda)l + (z - \mu)m.$$

Indem wir durch die Gleichungen:

$$(7) \quad \varrho' = e^{iS k x} = e^{i(kx + ly + mz)}$$

$$(8) \quad P = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varrho(\kappa, \lambda, \mu) e^{-iS k x} d\kappa d\lambda d\mu$$

¹⁾ Nach dem Vorgange von A. Sommerfeld (Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1904), dem wir in den zunächst folgenden Paragraphen uns anschließen, von dessen Resultaten aber die unsrigen wesentlich abweichen werden (vgl. unten § 16).

zwei von k, l, m abhängige Hilfsfunktionen einführen, läßt sich obige Fouriersche Formel in der Gestalt:

$$(9) \quad \varrho = f(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} P \cdot \varrho' \cdot dk dl dm$$

schreiben. Diesen Wert setzen wir auf der rechten Seite von (6) ein und erhalten dadurch eine für alle Werte von x, y, z gültige analytische Darstellung der Funktion ϱ .

Von den mehrfachen Integralen machen wir uns frei, indem wir auch auf der linken Seite von (6) statt der Funktion φ mittels der Formel

$$(10) \quad \varphi = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi' (k, l, m) \cdot P \cdot dk dl dm$$

eine weitere Hilfsfunktion φ' einführen. Die auf der rechten und linken Seite von (6) dann unter dem dreifachen (nach k, l, m) genommenen Integralzeichen auftretenden Funktionen setzen wir einander gleich und dividieren beiderseits mit P ; so entsteht die folgende partielle Differentialgleichung für die von x, y, z, k, l, m und t abhängige Funktion φ' :

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - s \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{dv_x}{dt} - 2s \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} v_x + s s \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial y} v_x v_y - c^2 \Delta^2 \varphi' = c^2 \cdot e^{i s k x}.$$

Die Differentialgleichung ist der Gleichung (6) vollkommen analog gebildet; statt der unstetigen Funktion $\varrho = f(x, y, z)$ steht nur jetzt auf der rechten Seite die durchaus stetige Funktion ϱ' , welche durch (7) eingeführt wurde. Die Bestimmung der Potentialfunktion φ ist daher vorläufig zurückgeführt auf die Bestimmung einer spezielleren Potentialfunktion φ' , welche einer durch den ganzen Raum stetigen (wenn auch imaginären) Dichtigkeitsverteilung ϱ' der Elektrizität entspricht.

Die Berechtigung der bei dieser Zurückführung benutzten Operationen bedarf aber noch der näheren Untersuchung; die Gleichung (6) nämlich führt nur dann auf die Gleichung (11) für φ' , wenn es gestattet ist, die Differentiation der durch (10) definierten Funktion φ nach x, y, z, t unter dem dreifachen Integralzeichen auszuführen. Bleibt die Funktion $\varphi' (k, l, m)$ für unendlich große Werte von k, l, m endlich, so ist diese Operation jedenfalls erlaubt, wenn auf der rechten Seite von (10) unter dem Integralzeichen der Faktor e^{-ps} hinzugefügt wird, wo s die positive Quadratwurzel:

$$(12) \quad s = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}$$

bedeutet und p eine positive Konstante bezeichnet. Setzen wir also:

$$(13) \quad \varphi_p = \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-ps} \varphi' (k, l, m) \cdot P \cdot dk dl dm$$

und zur Abkürzung:

$$(14) \quad D\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - s \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dv_x}{dt} - 2s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} v_x + s s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} v_x v_y - c^2 \Delta^2 \varphi,$$

so genügt die Funktion φ_p nicht der Differentialgleichung (6), sondern der Gleichung:

$$(15) \quad D\varphi_p = c^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-ps} P \cdot \varrho' \cdot dk dl dm;$$

und das obige Verfahren, welches die Gleichung (6) auf die Gleichung (11) zurückführte, wird nur anwendbar sein, wenn die Gleichung:

$$(16) \quad (D \varphi_p)_{p=0} = D(\varphi)_{p=0}$$

als bestehend nachgewiesen ist. Mit diesem Nachweise werden wir uns im folgenden noch beschäftigen (vgl. § 5).

§ 2. Das Hilfspotential φ' .

Ein partikuläres Integral der Gleichung (11) finden wir durch den Ansatz:

$$(17) \quad \varphi'_1 = e^{i(kx+ly+mz)} F(t) = e^{iSkx} F(t),$$

wo F allein von der Zeit t abhängt. Es ist dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial t^2} &= e^{iSkx} \frac{d^2 F(t)}{dt^2}, \quad \Delta^2 \varphi'_1 = -(k^2 + l^2 + m^2) \cdot F(t), \\ S \frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} \frac{dv_x}{dt} &= i e^{iSkx} \cdot F(t) \cdot S k \frac{dv_x}{dt}, \\ S \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x \partial t} v_x &= i e^{iSkx} \cdot \frac{dF(t)}{dt} \cdot S k v_x, \\ S S \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x \partial y} v_x v_y &= -e^{iSkx} F(t) \cdot S S k l v_x v_y = -e^{-iSkx} F(t) \cdot (S k v_x)^2. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Ausdrucks (17) in (11) und Fortlassen des auf beiden Seiten von (11) auftretenden Faktors e^{iSkx} erhalten wir also für $F(t)$ die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(18) \quad \frac{d^2 F}{dt^2} - 2i \frac{dF}{dt} S k v_x + \left[c^2 s^2 - i S k \frac{dv_x}{dt} - (S k v_x)^2 \right] F = c^2,$$

worin s wieder durch die Gleichung (12) definiert ist.

Diese Gleichung läßt sich durch die Substitution

$$(19) \quad F = a \cdot f$$

vereinfachen, indem man die Funktion a so bestimmt, daß das Glied mit $\frac{df}{dt}$ herausfällt.

Es wird zunächst:

$$(20) \quad a \frac{d^2 f}{dt^2} + 2 \left(\frac{da}{dt} - a i S k v_x \right) \frac{df}{dt} + \left[\frac{d^2 a}{dt^2} - 2i \frac{da}{dt} S k v_x + c^2 s^2 a + (S k v_x)^2 a - i a S k \frac{dv_x}{dt} \right] f = c^2.$$

Es soll demnach a der Bedingung

$$\frac{da}{dt} = i \cdot a \cdot S k v_x = i \cdot a \cdot (k v_x + l v_y + m v_z)$$

genügen, wodurch sich a in der Form

$$(21) \quad a = e^{iSk\mathfrak{B}_x}$$

bestimmt, wenn

$$(22) \quad \mathfrak{B}_x = \int_{t_0}^t v_x dt, \quad \mathfrak{B}_y = \int_{t_0}^t v_y dt, \quad \mathfrak{B}_z = \int_{t_0}^t v_z dt$$

gesetzt wird. In der eckigen Klammer, welche in (20) vorkommt, wird infolgedessen:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = i \frac{d \alpha}{dt} S k v_x + i \alpha S k \frac{dv_x}{dt} = i \alpha S k \frac{dv_x}{dt} - \alpha (S k v_x)^2;$$

und die genannte Gleichung nimmt folgende vereinfachte Gestalt an:

$$(23) \quad \frac{d^2 f}{dt^2} + c^2 s^2 f = c^2 \cdot e^{-i S k \mathfrak{B}_x}.$$

Ersetzt man die rechte Seite durch Null, so ist das allgemeine Integral der entstehenden homogenen linearen Differentialgleichung gleich:

$$A \cdot \cosin(cst) + B \cdot \sin(cst),$$

wo A und B Konstante bedeuten; folglich wird:

$$(24) \quad f = \frac{c}{s} \int_{t_0}^t e^{-i S k \mathfrak{B}_x(u)} \sin cs(t-u) \cdot du + A \cosin(cst) + B \sin(cst),$$

wo das Zeichen $\mathfrak{B}_x(u)$ andeutet, daß in dem durch (22) definierten Integrale $\mathfrak{B}_x(t)$ die obere Grenze t durch die Integrationsvariable u zu ersetzen ist. Eine Änderung der unteren Grenze t_0 bedingt nur eine Änderung der Integrationskonstanten A und B .

Es empfiehlt sich, die gewonnenen Ausdrücke durch die Substitution $\tau = t - u$ umzuformen; es wird dann nach (19):

$$(25) \quad F = \frac{c}{s} \int_0^{t-t_0} e^{i S k \mathfrak{B}_x(t) - i S k \mathfrak{B}_x(t-\tau)} \sin cs\tau \cdot d\tau + e^{i S k \mathfrak{B}_x(t)} (A \cosin cst + B \sin cst).$$

Der Exponent von e unter dem Integralzeichen ist:

$$S k (\mathfrak{B}_x(t) - \mathfrak{B}_x(t-\tau)) = k \int_{t-\tau}^t v_x(\tau) d\tau + l \int_{t-\tau}^t v_y(\tau) d\tau + m \int_{t-\tau}^t v_z(\tau) d\tau.$$

Setzen wir also zur Abkürzung

$$(26) \quad \xi = \int_{t-\tau}^t v_x(\tau) d\tau, \quad \eta = \int_{t-\tau}^t v_y(\tau) d\tau, \quad \zeta = \int_{t-\tau}^t v_z(\tau) d\tau,$$

so sind ξ, η, ζ die Koordinaten desjenigen Raumpunktes, an welchem sich ein Punkt zur Zeit $t - \tau$ befand, der sich zur Zeit t an der Stelle x, y, z befindet. Nach (17) und (25) wird dann:

$$\varphi_i = \frac{c}{s} \int_0^{t-t_0} e^{i S k (x+\xi)} \sin cs\tau \cdot d\tau + e^{i S k x + i S k \mathfrak{B}_x(t)} (A \cosin cst + B \sin cst).$$

Aus diesem partikulären Integrale φ_i findet man das allgemeine Integral φ' von (11) durch Hinzufügen einer allgemeinen Lösung derjenigen partiellen Gleichung, welche aus (11) entsteht, wenn man die rechte Seite durch Null ersetzt; eine solche Lösung ergibt sich aus der allgemeinen Lösung der Gleichung:

$$\ddot{\Phi} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} \right) = 0,$$

(deren linke Seite mit der linken Seite von (1) identisch ist) indem man die Substitution (4) ausführt, welche eben dazu diente, die Gleichung (1) in die Gleichung (6) zu transformieren; und die linke Seite der letzteren ist mit der linken Seite von (11) identisch, wenn man in ersterer φ durch φ' ersetzt. Die Funktion Φ kann man demnach bekanntlich in folgender Weise darstellen:

$$\Phi = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda, \mu, \nu) \cos(A + B + C) \cos \vartheta t d\lambda d\mu d\nu \\ + \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\lambda, \mu, \nu) \cos(A + B + C) \frac{\sin \vartheta t}{\vartheta} d\lambda d\mu d\nu;$$

hierin bedeuten f_1 und f_2 willkürliche Funktionen von λ, μ, ν und zur Abkürzung ist

$$\vartheta = c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

$$A = \alpha(x' - \lambda), \quad B = \beta(y' - \mu), \quad C = \gamma(z' - \nu)$$

gesetzt worden, wobei x', y', z' mit x, y, z durch die Gleichungen (4) zusammenhängen. Für $t = 0$ wird:

$$(\Phi)_{t=0} = f_1(x, y, z), \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = f_2(x, y, z).$$

Den Anfangspunkt $t = t_0$ unserer Bewegung lassen wir mit der Zeit $t = 0$ zusammenfallen; dann ist die allgemeine Lösung von (11) in der Form:

$$\varphi' = \varphi'_1 + \Phi$$

gegeben und es bestehen die Anfangsbedingungen:

$$(\varphi')_{t=0} = e^{iSkx} A + f_1(x, y, z), \\ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right)_{t=0} = cs e^{iSkx} B + f_2(x, y, z).$$

Aus φ' wird das eigentlich gesuchte Potential φ gemäß der Formel (10) berechnet, vorausgesetzt, daß sich die am Schlusse von § 1 erwähnten Bedenken beseitigen lassen.

Es verschwinden offenbar φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t = 0$, sobald die entsprechenden Ausdrücke φ' und $\frac{\partial \varphi'}{\partial t}$ für $t = 0$ verschwinden. Nun soll das Elektron vor der Zeit $t = 0$ noch in Ruhe sein, und die Bewegung soll im Momente $t = 0$ beginnen. Wir müssen also annehmen, daß die Gleichungen

$$\varphi' = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0$$

für $t = 0$ erfüllt seien und demnach

$$A = 0, \quad B = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0$$

wählen. Für das von uns behandelte Problem genügt es demnach, die Funktion φ' in der folgenden partikulären Form anzunehmen:

$$(27) \quad \varphi'_1 = \frac{c}{s} \int_0^t e^{iSk(x+\xi)} \sin cs\tau \cdot d\tau,$$

worin (wie auch oben) $\mathcal{S} k(x + \xi)$ für die Summe $k(x + \xi) + l(y + \eta) + m(z + \zeta)$ geschrieben ist. Auf eine andere (für die Elektronenhypothese vielleicht näher liegende) Annahme über den Anfangszustand gehen wir unten in § 15 näher ein.

§ 3. Die Hilfsfunktion P .

Das mehrfache Integral P , welches durch Gleichung (8) eingeführt wurde, läßt sich unter besonderen Annahmen über die Gestalt des Elektrons noch näher ausführen. Wir setzen von jetzt an das Elektron als Kugel voraus, die mit einer gleichförmig verteilten Volumladung ε erfüllt sei.¹⁾

Die Hilfsvariablen κ, λ, μ interpretieren wir als Koordinaten eines Punktes in Bezug auf das bewegte (im Elektron feste) Koordinatensystem; den Abstand dieses Punktes vom Anfangspunkte bezeichnen wir mit σ , den Radius der das Elektron bildenden Kugel mit a ; dann ist:

$$(28) \quad \varrho = \text{const} = \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \text{ für } \sigma < a, \\ \varrho = 0 \quad \text{ „ } \sigma > a.$$

Bei Berechnung von ϱ handelt es sich dann um eine Integration über das Innere einer Kugel; wir werden deshalb Polarkoordinaten einführen, die sich auf den Mittelpunkt dieser Kugel (d. i. den Anfangspunkt des bewegten Koordinatensystems) beziehen. Als Achse dieses Systems denken wir uns die Verbindungslinie s des Punktes k, l, m (wobei diese Größen auch als Koordinaten eines Punktes im bewegten Systeme gedeutet werden) mit dem Mittelpunkte. Um diese Achse herum werde der Winkel ψ gemessen, der Winkel ϑ dagegen von dieser Achse aus und zwar so, daß der Strahl s mit dem Strahle σ den Winkel ϑ einschließt und somit die Formel

$$(29) \quad \cos \vartheta = \frac{\mathcal{S} k \kappa}{s \sigma} = \frac{k \kappa + l \lambda + m \mu}{s \sigma}$$

besteht; das Volumelement wird gleich:

$$\sigma^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\sigma d\psi d\vartheta$$

und σ läuft von 0 bis a , ψ von 0 bis 2π , ϑ von 0 bis π . Die Gleichung (8), verbunden mit (28), ergibt somit:

$$P = \frac{3\varepsilon}{32 a^3 \pi^4} \int_0^a \sigma^2 d\sigma \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi e^{-i s \sigma \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta,$$

so daß P als Funktion von s (und a) erscheint.

Die Integration nach ψ kann sofort ausgeführt werden und liefert den Faktor 2π ; die Integration nach ϑ führt auf:

$$\left[\frac{e^{-i s \sigma \cos \vartheta}}{i s \sigma} \right]_0^\pi = \frac{2 \sin s \sigma}{s \sigma};$$

und nach Einsetzen dieses Wertes läßt sich auch die Integration nach σ erledigen; man findet:

¹⁾ Für Oberflächenladung vgl. den später erscheinenden zweiten Teil der vorliegenden Abhandlung.

$$(30) \quad P = \frac{3\varepsilon}{8\pi^3} \cdot \frac{\sin as - as \cdot \cosin as}{a^3 s^3}.$$

Diesen Wert von P und den in (27) gefundenen Wert von φ'_1 führen wir in das durch (10) gegebene Integral ein und finden:

$$(31) \quad \varphi = \frac{3\varepsilon c}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin as - as \cosin as}{a^3 s^4} dk dl dm \int_0^t e^{iskx} \sin cs\tau d\tau,$$

wobei nun s durch (12) definiert war. Auch hier läßt sich das Resultat durch Einführung von Polarkoordinaten vereinfachen; als Achse derselben wählen wir die Richtung R , welche den Punkt $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ mit dem Anfangspunkte des festen Koordinatensystems verbindet; von dieser Achse aus möge der Winkel Θ gezählt werden, d. h. der Winkel zwischen der Richtung R und dem Strahle, der denselben Anfangspunkt mit dem Punkte k, l, m verbindet. Dabei deuten wir jetzt die Integrationsvariablen k, l, m als Koordinaten eines Punktes in Bezug auf das im Raume feste System x', y', z' ; allerdings hatten wir bei Berechnung von P in § 2 dieselben Größen k, l, m auf das im Elektron feste System bezogen; damals ergab sich P als nur von $s = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}$ abhängig; und nachdem dies Resultat gewonnen ist, können wir den Hilfsvariablen k, l, m , denen direkt keine geometrische oder mechanische Bedeutung zukommt, jetzt eine andere Bedeutung beilegen. Um den Radiusvektor R herum zählen wir den von 0 bis 2π laufenden Winkel Ψ . Dann wird:

$$sk(x + \xi) = k(x + \xi) + l(y + \eta) + m(z + \zeta) = s R \cosin \Theta,$$

und:

$$(32) \quad \varphi = \frac{3\varepsilon}{8\pi^3 a^3} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \cosin as}{s^2} \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^t e^{isR \cosin \Theta} \sin cs\tau \cdot d\tau.$$

Auch die Integrationen nach Θ und Ψ lassen sich ebenso, wie oben diejenigen nach ϑ und ψ , ausführen; und so findet man:

$$(33) \quad \varphi = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \cosin as}{s^3} ds \int_0^t \sin cs\tau \cdot \sin Rs \frac{d\tau}{R}.$$

Unter der Voraussetzung, daß auf der rechten Seite die Integrationsordnung trotz der Unendlichkeit der einen Grenze vertauscht werden darf, würde man ferner erhalten:

$$(34) \quad \varphi = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3} \int_0^t \frac{S}{R} d\tau,$$

wenn:

$$(34^a) \quad S = \int_0^\infty \frac{\sin as - as \cosin as}{s^3} \sin cs\tau \cdot \sin Rs \cdot ds,$$

$$(34^b) \quad R^2 = (x + \xi)^2 + (y + \eta)^2 + (z + \zeta)^2$$

gesetzt wird. Wir kommen auf die hiermit berührte Frage sogleich zurück.

§ 4. Berechnung einiger Hilfsintegrale.

Ist die Formel (34) anwendbar, so kommt es zunächst auf die Auswertung des Integrals S an. Differenzieren wir dasselbe nach a und führen die Differentiation unter dem Integralzeichen aus, so wird:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = a \int_0^{\infty} \sin as \cdot \sin cs \cdot \sin Rs \frac{ds}{s}.$$

Das rechts stehende Integral ist aber nur bedingt konvergent, und deshalb ist die Zulässigkeit der Differentiation unter dem Integralzeichen zweifelhaft. Um alle Zweifel zu beseitigen, betrachten wir das allgemeinere Integral, welches entsteht, wenn wir unter dem Integralzeichen den Faktor e^{-ps} hinzufügen und gehen nachträglich zur Grenze $p = 0$ über. Wir beginnen also mit dem Integrale:

$$(35) \quad S_p = \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{\sin ax - ax \cos ax}{x^3} \sin \beta x \sin \gamma x \cdot dx = J_p - a \frac{\partial J_p}{\partial a},$$

wenn:

$$(36) \quad J_p = \int_0^{\infty} e^{-px} \sin ax \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x^3}$$

gesetzt wird. Es wird ferner:

$$\frac{\partial J_p}{\partial a} = \int_0^{\infty} e^{-px} \cos ax \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 J_p}{\partial a^2} = - \int_0^{\infty} e^{-px} \sin ax \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x}.$$

Das letzte Integral ist unmittelbar bekannt, denn setzt man:

$$(37) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= a + \beta - \gamma, & \delta_2 &= a - \beta + \gamma, \\ \delta_3 &= a + \beta + \gamma, & \delta_4 &= a - \beta - \gamma, \end{aligned}$$

so ist:

$$\sin ax \sin \beta x \sin \gamma x = \frac{1}{4} (\sin \delta_1 x + \sin \delta_2 x - \sin \delta_3 x - \sin \delta_4 x)$$

und folglich:

$$\frac{\partial^2 J_p}{\partial a^2} = -\frac{1}{4} \left[\int_0^{\infty} e^{-px} \sin \delta_1 x \frac{dx}{x} + \int_0^{\infty} e^{-px} \sin \delta_2 x \frac{dx}{x} - \int_0^{\infty} e^{-px} \sin \delta_3 x \frac{dx}{x} - \int_0^{\infty} e^{-px} \sin \delta_4 x \frac{dx}{x} \right].$$

Die hier rechts auftretenden Integrale sind bekannt; man hat:

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \sin \delta x \frac{dx}{x} = \arctang \frac{\delta}{p},$$

und somit:

$$(37^a) \quad \frac{\partial^2 J_p}{\partial a^2} = -\frac{1}{4} \left[\arctang \frac{\delta_1}{p} + \arctang \frac{\delta_2}{p} - \arctang \frac{\delta_3}{p} - \arctang \frac{\delta_4}{p} \right].$$

Von hier kehren wir durch zweimalige Integration zu J_1 zurück; zunächst ist:

$$\int \arctang \frac{\delta}{p} \cdot d\alpha = \delta \arctang \frac{\delta}{p} - \frac{p}{2} \log \frac{\delta^2 + p^2}{p^2},$$

wenn δ irgend eine der Zahlen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ bedenkt; folglich:

$$-\frac{\partial J_p}{\partial \alpha} = \frac{\delta_1}{4} \arctang \frac{\delta_1}{p} + \frac{\delta_2}{4} \arctang \frac{\delta_2}{p} - \frac{\delta_3}{4} \arctang \frac{\delta_3}{p} - \frac{\delta_4}{4} \arctang \frac{\delta_4}{p} \\ - \frac{p}{8} \log \left(\frac{(p^2 + \delta_1^2)(p^2 + \delta_2^2)}{(p^2 + \delta_3^2)(p^2 + \delta_4^2)} \right) + \text{const.}$$

Die Konstante bestimmt sich durch die Annahme $\alpha = 0$; dann ist bekanntlich:¹⁾

$$\left(\frac{\partial J_p}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \int_0^\infty e^{-px} \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x^2} \\ = \frac{\beta + \gamma}{2} \arctang \frac{\beta + \gamma}{p} - \frac{\beta - \gamma}{2} \arctang \frac{\beta - \gamma}{p} + \frac{p}{4} \log \frac{p^2 + (\beta - \gamma)^2}{p^2 + (\beta + \gamma)^2},$$

folglich $\text{const} = 0$ und:

$$\frac{\partial J_p}{\partial \alpha} = \int_0^\infty e^{-px} \cos \alpha x \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x^2} \\ (38) \quad = \frac{p}{8} \log \frac{(p^2 + \delta_1^2)(p^2 + \delta_2^2)}{(p^2 + \delta_3^2)(p^2 + \delta_4^2)} - \frac{\delta_1}{4} \arctang \frac{\delta_1}{p} - \frac{\delta_2}{4} \arctang \frac{\delta_2}{p} + \frac{\delta_3}{4} \arctang \frac{\delta_3}{p} \\ + \frac{\delta_4}{4} \arctang \frac{\delta_4}{p}.$$

Für eine nochmalige Integration bedienen wir uns der Hilfsformeln:

$$\int x \arctang x \, dx = \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) \arctang x - x \\ \int \log(p^2 + x^2) \, dx = x \log(x^2 + p^2) + 2p \arctang \frac{x}{p} - 2x$$

und finden:

$$J_p = \int_0^\infty e^{-px} \sin \alpha x \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x^3} \\ (39) \quad = \frac{p}{8} [\delta_1 \log(p^2 + \delta_1^2) + \delta_2 \log(p^2 + \delta_2^2) - \delta_3 \log(p^2 + \delta_3^2) - \delta_4 \log(p^2 + \delta_4^2)] \\ - \frac{1}{8} \left[\delta_1^2 \arctang \frac{\delta_1}{p} + \delta_2^2 \arctang \frac{\delta_2}{p} - \delta_3^2 \arctang \frac{\delta_3}{p} - \delta_4^2 \arctang \frac{\delta_4}{p} \right].$$

Gehen wir nun zur Grenze $p = 0$ über, so ist zu beachten, daß $\arctang \frac{\delta}{p}$ gleich $+\frac{\pi}{2}$ oder gleich $-\frac{\pi}{2}$ wird, je nachdem δ positiv oder negativ ist; demnach haben wir folgende Fälle zu unterscheiden:

¹⁾ Vgl. Meyer-Dirichlet, Vorlesungen über bestimmte Integrale. Leipzig 1871, S. 298.

I. $\alpha > \beta > \gamma$; es ist $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ (δ_3 ist immer > 0 , da natürlich α, β, γ positive Zahlen bezeichnen sollen).

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \delta_4 = \alpha - \beta - \gamma > 0, \\
 & J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 - \delta_4^2) = \frac{\pi}{2}\beta\gamma, \\
 & \left(\frac{\partial J_p}{\partial \alpha}\right)_{p=0} = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4) = 0, \\
 (40) \quad & S_0 = \frac{\pi}{2}\beta\gamma; \\
 2. \quad & \delta_4 = \alpha - \beta - \gamma = 0, \\
 & J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2) = -\frac{\pi}{8}(\beta - \gamma)^2, \\
 & \left(\frac{\partial J_p}{\partial \alpha}\right)_0 = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3) = 0, \\
 (40^a) \quad & S_0 = -\frac{\pi}{8}(\beta - \gamma)^2; \\
 3. \quad & \delta_4 = \alpha - \beta - \gamma < 0, \\
 & J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 + \delta_4^2) = -\frac{\pi}{8}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha), \\
 & \left(\frac{\partial J_p}{\partial \alpha}\right)_0 = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 + \delta_4) = -\frac{\pi}{4}(\alpha - \beta - \gamma), \\
 (40^b) \quad & S_0 = \frac{\pi}{8}[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2].
 \end{aligned}$$

II. $\beta > \alpha > \gamma$; es ist $\delta_1 > 0$ und $\delta_4 < 0$.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \delta_2 = \alpha - \beta + \gamma > 0, \\
 & J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 + \delta_4^2) = -\frac{\pi}{8}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha), \\
 & \left(\frac{\partial J_p}{\partial \alpha}\right)_0 = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 + \delta_4) = -\frac{\pi}{4}(\alpha - \beta - \gamma), \\
 (41) \quad & S_0 = \frac{\pi}{8}[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2]; \\
 2. \quad & \delta_2 = \alpha - \beta + \gamma = 0, \\
 & J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 - \delta_3^2 + \delta_4^2) = -\frac{\pi}{16}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 6\alpha\gamma), \\
 & \left(\frac{\partial J_0}{\partial \alpha}\right)_0 = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 - \delta_3 + \delta_4) = -\frac{\pi}{8}(\alpha - \beta + \gamma), \\
 (41^a) \quad & S_0 = \frac{\pi}{16}[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2 - 8\alpha\gamma];
 \end{aligned}$$

$$3. \quad \delta_2 = a - \beta + \gamma < 0,$$

$$J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2 + \delta_4^2) = \frac{\pi}{2} a \gamma,$$

$$\left(\frac{\partial J_0}{\partial a}\right)_0 = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 + \delta_4) = \frac{\pi}{2} \gamma,$$

$$(41^b) \quad S_0 = 0.$$

III. $\beta > \gamma > a$; es ist $\delta_1 > 0$, $\delta_4 < 0$, während δ_2 positiv oder negativ sein kann; es gelten also die Formeln des vorhergehenden Falles.

IV. $\gamma > a > \beta$ oder $\gamma > \beta > a$; es ist $\delta_2 > 0$, $\delta_4 < 0$, während δ_1 positiv oder negativ sein kann; wir haben im vorigen Falle β und γ zu vertauschen, also:

1. $\delta_1 = a + \beta - \gamma > 0$; es gelten die vorstehenden Formeln unverändert,
2. $\delta_1 = a + \beta - \gamma = 0$; es gelten ebenfalls die Formeln des vorhergehenden Falles,
3. $\delta_1 = a + \beta - \gamma < 0$; es wird:

$$(42) \quad J_0 = \frac{\pi}{2} a \beta, \quad \left(\frac{\partial J_0}{\partial a}\right)_0 = \frac{\pi}{2} \beta; \quad S_0 = 0.$$

Unter Beiseitelassung der Grenzfälle, wo eine der Größen δ verschwindet, können wir diese Resultate in folgender Form zusammenfassen:

Stellt man die drei Zahlen a, β, γ durch Strecken dar, und bezeichnet S_0 das in (34^a) definierte Integral, so ist:

$$(43) \quad S_0 = \frac{\pi}{8} [a^2 - (\beta - \gamma)^2],$$

wenn sich aus den Strecken a, β, γ ein Dreieck bilden läßt, dagegen:

$$(44) \quad S_0 = \frac{\pi}{2} \beta \gamma,$$

wenn sich ein solches Dreieck nicht bilden läßt, weil $a > \beta + \gamma$ ist, und:

$$(45) \quad S_0 = 0,$$

wenn die Bildung des Dreiecks dadurch unmöglich wird, daß $a < \beta - \gamma$ (wenn $\beta > \gamma$) oder $a < \gamma - \beta$ (wenn $\beta < \gamma$) ist.

Es ist von Interesse zu sehen, welches Resultat sich ergibt, wenn man vorstehende Rechnungen durchzuführen versucht, ohne unter dem Integralzeichen den Faktor e^{-px} hinzuzufügen. Zu dem Zwecke geht man von der obigen Gleichung (37^a) aus, welche uns für $p = 0$ sofort lehrt, daß das Integral:

$$(46) \quad j = \int_0^\infty \sin ax \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x}$$

durch die Gleichung:

$$j = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

gegeben ist, wenn $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ sämtlich positiv sind, dagegen durch:

$$j = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4},$$

wenn $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ positiv, δ_4 dagegen negativ ist, wobei $a > \beta > \gamma$ angenommen wurde. Da j in α, β, γ symmetrisch ist, kann man das Resultat in folgender Form aussprechen: Das obige Integral j hat den Wert $\frac{\pi}{4}$ oder 0, je nachdem sich aus den drei Strecken α, β, γ ein Dreieck bilden läßt oder nicht.

Integrieren wir nun j nach α^2 und vertauschen die Integrationsordnung, so wird:

$$\int_0^a j \alpha d\alpha = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x - \alpha \cos \alpha x}{x^2} \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x} = S_0,$$

wo S_0 wieder das in (35) definierte Integral für $p=0$ bezeichnet. Setzt man links den gefundenen Wert (also $\frac{\pi}{4}$ oder 0) für j ein, so ist damit auch S_0 bekannt. Für kleine Werte von α ist sicher $\alpha < \beta + \gamma$ und auch (wenn wir $\beta > \gamma$ voraussetzen) $\alpha < \beta - \gamma$, also ein Dreieck unmöglich und $j=0$, folglich:

$$S_0 = 0 \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < \beta - \gamma, \quad \text{wenn} \quad \beta > \gamma$$

und ebenso:

$$S_0 = 0 \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < \gamma - \beta, \quad \text{wenn} \quad \gamma > \beta.$$

Wird aber $\alpha > \beta - \gamma$ (bzw. $\gamma - \beta$), so wird das Dreieck möglich, falls α den Wert $\beta + \gamma$ nicht überschreitet; es ist folglich:

$$S_0 = \int_{\beta-\gamma}^a \frac{\pi}{4} \alpha d\alpha = \frac{\pi}{8} [\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2] \quad \text{für} \quad 0 < \beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$$

und ebenso:

$$S_0 = \int_{\gamma-\beta}^a \frac{\pi}{4} \alpha d\alpha = \frac{\pi}{8} [\alpha^2 - (\gamma - \beta)^2] \quad \text{für} \quad 0 < \gamma - \beta < \alpha < \beta + \gamma.$$

Wächst die obere Grenze α weiter und geht über den Wert $\beta + \gamma$ hinaus, so ist das Dreieck wieder unmöglich, d. h. $j=0$ und:

$$S_0 = \int_{\beta-\gamma}^{\beta+\gamma} \frac{\pi}{4} \alpha d\alpha = \frac{\pi}{8} [(\beta + \gamma)^2 - (\beta - \gamma)^2] = \frac{\pi}{2} \frac{\beta \gamma}{\alpha^2} \quad \text{für} \quad \beta > \gamma \quad \text{und} \quad \alpha > \beta + \gamma$$

und ebenso:

$$S_0 = \int_{\gamma-\beta}^{\gamma+\beta} \frac{\pi}{4} \alpha d\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{\beta \gamma}{\alpha^2} \quad \text{für} \quad \beta < \gamma \quad \text{und} \quad \alpha > \beta + \gamma.$$

Die hier gefundenen Werte¹⁾ stimmen mit den in (43), (44) und (45) angegebenen vollständig überein; bei diesen Rechnungen ist es also erlaubt, die vorkommenden Vertauschungen der Integrationsordnungen vorzunehmen. Da aber das Integral j bedingt konvergent ist, gibt das hier zuletzt eingeschlagene Verfahren kein sicheres Resultat.

¹⁾ Auf dem hier zuletzt eingeschlagenen Wege hat Sommerfeld a. a. O. (Göttinger Nachrichten 1904) die Werte des Integrals S_0 abgeleitet.

§ 5. Über die Zulässigkeit der vorgenommenen Vertauschungen von Differentiationen und Integrationen.

Die im Vorstehenden aufgestellten Relationen sollen uns noch dazu dienen, die am Schlusse von § 3 aufgeworfene Frage zu beantworten, ob die dort vorkommenden Differentiationen unter dem Integralzeichen erlaubt sind. Wir fragen zu dem Zwecke nach der Bildung der Differentialquotienten von S_0 nach γ , d. h. wir bilden den betreffenden Differentialquotienten von S_p und gehen dann zur Grenze $p = 0$ über.

Es ist nach (38) und (39):

$$(46) \quad S_p = J_p - \alpha \frac{\partial J_p}{\partial \alpha} = \frac{p}{8} \left[(\beta - \gamma) \log \frac{p^2 + \delta_1^2}{p^2 + \delta_2^2} - (\beta + \gamma) \log \frac{p^2 + \delta_3^2}{p^2 + \delta_4^2} \right] \\ + \frac{1}{8} \left[\delta_1 \delta_2 \left(\arctg \frac{\delta_1}{p} + \arctg \frac{\delta_2}{p} \right) - \delta_3 \delta_4 \left(\arctg \frac{\delta_3}{p} + \arctg \frac{\delta_4}{p} \right) \right],$$

folglich:

$$(47) \quad \frac{\partial S_p}{\partial \gamma} = -\frac{p}{8} \left[\log \frac{(p^2 + \delta_1^2)(p^2 + \delta_3^2)}{(p^2 + \delta_2^2)(p^2 + \delta_4^2)} + (\beta - \gamma) \left(\frac{2\delta_1}{p^2 + \delta_1^2} + \frac{2\delta_2}{p^2 + \delta_2^2} \right) + (\beta + \gamma) \left(\frac{2\delta_3}{p^2 + \delta_3^2} + \frac{2\delta_4}{p^2 + \delta_4^2} \right) \right] \\ + \frac{1}{4} \left[(\beta - \gamma) \left(\arctg \frac{\delta_1}{p} + \arctg \frac{\delta_2}{p} \right) + (\beta + \gamma) \left(\arctg \frac{\delta_3}{p} + \arctg \frac{\delta_4}{p} \right) \right] \\ - \frac{p}{8} \left[\frac{\delta_1 \delta_2}{p^2 + \delta_2^2} - \frac{\delta_1 \delta_2}{p^2 + \delta_1^2} - \frac{\delta_3 \delta_4}{p^2 + \delta_3^2} + \frac{\delta_3 \delta_4}{p^2 + \delta_4^2} \right],$$

Für $p = 0$ haben wir wieder die obigen verschiedenen Fälle zu unterscheiden:

I. $\alpha > \beta > \gamma$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$.

1. $\delta_4 = \alpha - \beta - \gamma > 0$,

$$(48) \quad \left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma} \right)_{p=0} = \frac{\pi}{2} \beta = \frac{\partial S_0}{\partial \gamma} \quad \text{in Übereinstimmung mit (40),}$$

2. $\delta_4 = \alpha - \beta - \gamma = 0$,

$$(48^a) \quad \left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma} \right)_{p=0} = \frac{\pi}{8} (3\beta - \gamma) \quad \text{nicht in Übereinstimmung mit (40^a),}$$

3. $\delta_4 = \alpha - \beta - \gamma < 0$,

$$(48^b) \quad \left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma} \right)_{p=0} = \frac{\pi}{4} (\beta - \gamma) = \frac{\partial S_0}{\partial \gamma} \quad \text{in Übereinstimmung mit (40^b).}$$

II. $\beta > \alpha > \gamma$, $\delta_1 > 0$, $\delta_3 > 0$, $\delta_4 < 0$.

1. $\delta_2 = \alpha - \beta + \gamma > 0$,

$$(49) \quad \left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma} \right)_{p=0} = \frac{\pi}{4} (\beta - \gamma) = \frac{\partial S_0}{\partial \gamma} \quad \text{in Übereinstimmung mit (41),}$$

$$(49^a) \quad \begin{aligned} &2. \delta_2 = \alpha - \beta + \gamma = 0, \\ &\left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma}\right)_{p=0} = \frac{\pi}{8}(\beta - \gamma) \quad \text{nicht in Übereinstimmung mit (41}^a\text{),} \end{aligned}$$

$$(49^b) \quad \begin{aligned} &3. \delta_2 = \alpha - \beta + \gamma < 0, \\ &\left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma}\right)_{p=0} = 0 = \frac{\partial S_0}{\partial \gamma} \quad \text{in Übereinstimmung mit (41}^b\text{),} \end{aligned}$$

und analog für III. $\beta > \gamma > \alpha$.

Die Grenzwerte, welche sich für $p = 0$ aus $\frac{\partial S_p}{\partial \gamma}$ ergeben, sind diejenigen Werte, welche man erhält, wenn man in S_0 (also in J_0 und $\frac{\partial J_0}{\partial \alpha}$) die Differentiation nach γ unter dem Integralzeichen ausführt. Die Differentiation von S_0 unter dem Integralzeichen führt daher in allen Fällen zu richtigen Resultaten, allein ausgenommen die Grenzfälle $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_1 = 0$.

Bilden wir auch den zweiten Differentialquotienten nach γ und bezeichnen mit P einen Ausdruck der für $p = 0$ verschwindet und deshalb nicht genauer berechnet zu werden braucht, so wird:

$$\frac{\partial^2 S_p}{\partial \gamma^2} = -\frac{1}{4} \left[\operatorname{arctg} \frac{\delta_1}{p} + \operatorname{arctg} \frac{\delta_2}{p} - \operatorname{arctg} \frac{\delta_3}{p} - \operatorname{arctg} \frac{\delta_4}{p} \right] + P_4.$$

Die hier auftretende eckige Klammer ist dieselbe, welche in (37^a) auftrat und zu dem Integrale (46) führte. Es ist also $\frac{\partial^2 S_p}{\partial \gamma^2}$ für $p = 0$ bis auf das Vorzeichen mit dem Integrale j identisch, und folglich:

$$\left(\frac{\partial^2 S_p}{\partial \gamma^2}\right)_{p=0} = -\frac{\pi}{4},$$

wenn sich aus den drei Strecken α , β , γ ein Dreieck bilden läßt, dagegen:

$$\left(\frac{\partial^2 S_p}{\partial \gamma^2}\right)_{p=0} = 0,$$

wenn sich ein solches Dreieck nicht bilden läßt.

Die erstere Gleichung erhält man ebenso aus (43) bzw. (48^b) und (49^a), die letztere Gleichung aus (44) und (45), bzw. (48) und (49^b), wenn man vor der Differentiation $p = 0$ setzt und unter dem Integralzeichen differenziert. Auch die Bildung der zweiten Differentialquotienten von S_0 nach γ kann daher so geschehen, daß man einfach unter dem Integralzeichen differenziert. Dies Resultat war nicht mit Sicherheit vorauszusehen, da das durch Differentiation unter dem Integralzeichen entstehende Integral j nur bedingt konvergent ist.

Für die Differentiation von S_0 nach β gilt natürlich dasselbe.

Wenn wir jetzt zu unseren Untersuchungen zurückkehren, so haben wir zunächst zu entscheiden, ob das Integral (34) mit (33) wirklich gleichwertig ist; es ist dies sicher der

Fall, wenn es gestattet ist, die in (33) gegebene Funktion φ unter dem Integralzeichen nach t zu differenzieren. Ersetzen wir φ wieder durch φ_p , indem wir unter dem Integralzeichen den Faktor e^{-ps} hinzufügen, so ist:

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial t} = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} \left[\left(\frac{S_p}{R} \right)_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial S_p}{\partial R} \right) \cdot \frac{\partial R}{\partial t} d\tau \right].$$

Nun haben wir soeben gezeigt, daß:

$$(50) \quad \left(\frac{\partial S_p}{\partial R} \right)_{p=0} = \frac{\partial S_0}{\partial R}$$

ist (denn in vorstehenden Formeln ist jetzt a durch a , β durch R und γ durch $c\tau$ zu ersetzen); folglich ist der gefundene Ausdruck für $p=0$ identisch mit dem aus (34) abgeleiteten Werte $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, und demnach ist hier die Vertauschung der beiden Integrationen nach s und nach τ erlaubt, d. h. die Funktionen φ , wie sie in (33) und (34) angegeben wurden, sind miteinander identisch.

Ebenso läßt sich jetzt die Richtigkeit der Relation (16) nachweisen. Es kam darauf an, ob die Funktion φ unter den drei nach k, l, m genommenen Integralzeichen differenziert werden darf, oder ob die in (34) aufgestellte Funktion φ unter dem nach s genommenen Integrale differenziert werden darf. Jedenfalls ist:

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} \int_0^t S_p \frac{\partial R^{-1}}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} d\tau + \int_0^t \frac{\partial S_p}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{d\tau}{R},$$

und aus (50) folgt dann sofort die Zulässigkeit des Verfahrens. Ebenso ist es bei zweimaliger Differentiation. Es besteht daher in der Tat die Gleichung (16); und die in (34) aufgestellte Funktion φ ist als Integral der Differentialgleichung (6) zu betrachten, und zwar für einen Punkt x, y, z , der sich zur Zeit t im Innern des Elektrons befindet, während die rechte Seite von (6) durch Null zu ersetzen ist, wenn x, y, z die Koordinaten eines äußeren Punktes sind.

§ 6. Das skalare Potential φ für Volumladung bei Translation mit Unterlichtgeschwindigkeit.

Es handelt sich nun darum, die Werte von S in den verschiedenen Fällen zur Auswertung des für φ in (34) gefundenen Ausdrucks wirklich zu benutzen. Dabei haben wir zu verfolgen, wie das Elektron allmählich seine Anfangslage verläßt, um dann die ihm durch die Funktionen ξ, η, ζ (bzw. durch die Komponenten v_x, v_y, v_z) vorgeschriebene Bahn zu beschreiben. Dabei ist aber die Variable τ zunächst als Zeitmaß zu denken, und diese Zeit τ wird nach rückwärts gemessen.

Für $\tau=0$ wird nach (26) $\xi=0, \eta=0, \zeta=0$, d. h. das Elektron befindet sich in der zur Zeit t erreichten Endlage, während der Wert $\tau=t$ der ursprünglichen Ruhelage entspricht.

Nach (26) und (34^b) bezeichnet R die Entfernung des Punktes mit den Koordinaten:

$$x + \int_0^t v_x dt, \quad y + \int_0^t v_y dt, \quad z + \int_0^t v_z dt,$$

von dem Punkte mit den Koordinaten:

$$\int_0^{t-\tau} v_x dt, \quad \int_0^{t-\tau} v_y dt, \quad \int_0^{t-\tau} v_z dt,$$

d. h. des Punktes, welchem in Bezug auf das im Elektron feste Koordinatensystem die Koordinaten x, y, z zukommen, von demjenigen Punkte, in welchem sich der Anfangspunkt dieses Koordinatensystems zur Zeit $t - \tau$ befand.

Die geradlinige Entfernung der Anfangspunkte dieser beiden Koordinatensysteme voneinander soll im folgenden mit T bezeichnet werden; es ist also:

$$(51) \quad T^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Um den Wert von φ zu bestimmen, haben wir den ganzen Raum, entsprechend den Ungleichungen, wie sie in § 5 bei Berechnung des Integrales $S_0 (= S)$ benutzt wurden, in verschiedene Gebiete einzuteilen, gleichzeitig aber auch das Anwachsen der Variablen τ zu berücksichtigen. Es sei:

I. $c\tau < a$.

Dann zerfällt der Raum in folgende drei Gebiete:

1. $R < a - c\tau$, eine Kugel mit dem Radius $a - c\tau$ um den Punkt O als Mittelpunkt, in welchem sich der Anfangspunkt des Systems x, y, z zur Zeit $t - \tau$ befand.
2. $a + c\tau > R > a - c\tau$, eine Kugelschale, welche nach innen von der Kugel $R = a - c\tau$, und außen von der konzentrischen Kugel $R = a + c\tau$ begrenzt wird.
3. $R > a + c\tau$, der Raum außerhalb der letzteren Kugel.

II. $c\tau > a$.

Dann sind folgende Gebiete zu unterscheiden:

1. $R < c\tau - a$, das Innere der Kugel $R = c\tau - a$.
2. $c\tau + a > R > c\tau - a$, eine Kugelschale, begrenzt von den beiden Kugeln $R = c\tau - a$ und $R = c\tau + a$.
3. $R > c\tau + a$, der Raum außerhalb der Kugel $R = c\tau + a$.

Dementsprechend haben wir folgende Werte von φ :

I. Für $c\tau < a$:

1. $R < a - c\tau$ (also auch $R < a$ und $a > R + c\tau$).

Hier ist (44) anzuwenden, und folglich erhalten wir aus (34):

$$(52) \quad \varphi = \frac{3\epsilon c^2}{4\pi a^3} \int_0^t \tau d\tau = \frac{3\epsilon c^2 \cdot t^2}{8\pi a^3}.$$

Diese Formel gilt, solange t einen gewissen durch die Gleichung $R = a - c\tau$ bestimmten Wert τ' von τ nicht überschreitet. Da R von x, y, z und ξ, η, ζ abhängt, ist dieser Wert τ'

eine Funktion von t und x, y, z ; nur wenn derselbe auch der Bedingung $c\tau' < a$ genügt, ist er hier brauchbar; und diese Ungleichung wird für gewisse Werte von x, y, z und t immer erfüllbar sein.

2. $a - c\tau < R < a + c\tau$; hier ist $a < R + c\tau$, und $a > R - c\tau$ für $R > c\tau$, und da $c\tau < a$ sein soll, auch $a > c\tau - R$ für $R < c\tau$; für $R \geq c\tau$ gilt also nach (43) und (34) die Formel:

$$(52^a) \quad \varphi = \frac{3\epsilon c^2 \tau'^2}{8\pi a^3} + \frac{3\epsilon c}{8\pi a^3} \int_{\tau'}^t [a^2 - (c\tau - R)^2] \frac{d\tau}{R}$$

und zwar, solange t eine gewisse, durch die Gleichung $R = a + c\tau$ bestimmte Größe τ'' nicht überschreitet, welche als Funktion von t, x, y, z erscheint.

3. $a + c\tau < R$, also auch $c\tau < R$ und $a < R - c\tau$, d. h. es ist die Formel (45) für $t > \tau''$ anzuwenden:

$$(52^b) \quad \varphi = \frac{3\epsilon c^2 \tau'^2}{8\pi a^3} + \frac{3\epsilon c}{8\pi a^3} \int_{\tau'}^{\tau''} [a^2 - (c\tau - R)^2] \frac{d\tau}{R}.$$

II. Für $c\tau > a$.

1. $R < c\tau - a$, also auch $R < c\tau$ und $a < c\tau - R$, so daß wieder die Formel (45) zur Anwendung kommt, nach welcher das Intervall $\tau'' < \tau < \tau'''$ keinen Beitrag zu der durch (34) gegebenen Funktion φ liefert, wenn τ''' durch die Gleichung $R = c\tau - a$ bestimmt wird (wobei die Wurzel $\tau''' > \frac{a}{c}$ sein muß, wenn sie brauchbar sein soll); es ist also hier ebenso wie im vorigen Falle:

$$(53) \quad \varphi = \frac{3\epsilon c^2 \tau'^2}{8\pi a^3} + \frac{3\epsilon c}{8\pi a^3} \int_{\tau'}^{\tau''} [a^2 - (c\tau - R)^2] \frac{d\tau}{R} \text{ für } \tau' < t < \tau'''.$$

2. $c\tau - a < R < c\tau + a$, also $a > c\tau - R$; überdies ist die Bedingung $a < c\tau + R$ von selbst erfüllt, da hier $a < c\tau$ vorausgesetzt wird; es kommt also Gleichung (43) zur Anwendung, und es wird nach (34):

$$(53^a) \quad \varphi = \frac{3\epsilon c^2 \tau'^2}{8\pi a^3} + \frac{3\epsilon c}{8\pi a^3} \int_{\tau'}^{\tau''} [a^2 - (c\tau - R)^2] \frac{d\tau}{R} + \frac{3\epsilon c}{8\pi a^3} \int_{\tau''}^t [a^2 - (c\tau - R)^2] \frac{d\tau}{R},$$

wo τ''' definiert ist, wie im vorigen Falle. Die Gleichung hat Gültigkeit für $\tau''' < t < \tau^{IV}$, wenn τ^{IV} als Wurzel der Gleichung $a = c\tau + R$ definiert wird.

3. $c\tau + a < R$, also $a < R - c\tau$ für $c\tau < R$; der Fall $c\tau > R$ kommt hier nicht in Betracht, denn dann wäre $c\tau - R + a < 0$, was nicht sein kann; es ist also Gleichung (45^b) anwendbar, d. h. der Faktor S unter dem Integralzeichen in (34) für dieses Intervall gleich Null und:

$$(53^b) \quad \varphi = \frac{3\epsilon c^2 \tau'^2}{8\pi a^3} + \frac{3\epsilon c}{8\pi a^3} \int_{\tau'}^{\tau''} [a^2 - (c\tau - R)^2] \frac{d\tau}{R} + \frac{3\epsilon c}{8\pi a^3} \int_{\tau''}^{\tau^{IV}} [a^2 - (c\tau - R)^2] \frac{d\tau}{R} \text{ für } t > \tau^{IV}.$$

Es kommt im folgenden auf die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ an; wir haben nach Gleichung (34^b):

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x + \xi}{R};$$

demnach ergibt sich aus (52):

$$(54) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{für } c\tau < a \text{ und } R < a - c\tau,$$

dagegen aus (52^a):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3 \varepsilon c^2 \tau' \partial \tau'}{4 \pi a^3 \partial x} - \frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a^3} \left(\frac{a^2 - (c\tau - R)^2}{R} \right)_{\tau=\tau'} \frac{\partial \tau'}{\partial x} + \frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a^3} \int_{\tau'}^t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a^2 - (c\tau - R)^2}{R} \right) d\tau.$$

Nun war τ' durch die Bedingung $R = a - c\tau$ definiert; es ist also:

$$c \frac{\partial \tau'}{\partial x} = - \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)_{\tau=\tau'} - \left(\frac{\partial R}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau'} \frac{\partial \tau'}{\partial x}$$

und:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial R}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau'} &= \left(\frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial R}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau'} \\ &= \left(\frac{1}{R} [(x + \xi)v_x + (y + \eta)v_y + (z + \zeta)v_z] \right)_{\tau=\tau'} \\ &= v(\tau') \cdot \cos(R, v), \end{aligned}$$

somit:

$$(54^a) \quad \frac{\partial \tau'}{\partial x} = - \left[\frac{x + \xi}{R(c + v \cdot \cos(R, v))} \right]_{\tau=\tau'},$$

und schließlich:

$$(54^b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3 \varepsilon c^2 \tau' \partial \tau'}{4 \pi a^3 \partial x} + \frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a^3} \int_{\tau'}^t (c^2 \tau^2 - a^2 - R^2) \frac{x + \xi}{R^3} d\tau$$

für $c\tau < a$ und $a - c\tau < R < a + c\tau$,

wo für $\frac{\partial \tau'}{\partial x}$ der in (54^a) angegebene Wert einzusetzen ist.

Ebenso erhält man aus (52^b), da τ'' der Gleichung $a = R - c\tau$ genügen sollte:

$$(54^c) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3 \varepsilon c^2 \tau' \partial \tau'}{4 \pi a^3 \partial x} + \frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a^3} \int_{\tau'}^{\tau''} (c^2 \tau^2 - a^2 - R^2) \frac{x + \xi}{R} d\tau,$$

für $c\tau < a$ und $a + c\tau < R$.

Dieselbe Formel bleibt für den in (53) behandelten Fall ($c\tau > a$, $R < c\tau - a$) bestehen.

Aus (53^a) ergibt sich ferner:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{3 \varepsilon c^2 \tau' \partial \tau'}{4 \pi a^3 \partial x} + \frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a^3} \int_{\tau'''}^{\tau''} (c^2 \tau^2 - a^2 - R^2) \frac{x + \xi}{R} d\tau + \frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a^3} \int_{\tau'''}^t (c^2 \tau^2 - a^2 - R^2) \frac{x + \xi}{R} d\tau \\ &\quad \text{für } c\tau - a < R < c\tau + a, \end{aligned}$$

endlich aus (53^b)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3 \varepsilon c^2 \tau'}{4 a^3} \frac{\partial \tau'}{\partial x} + \frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a^3} \int_{\tau'}^{\tau''} (c^2 \tau^2 - a^2 - R^2) \frac{x + \xi}{R} d\tau + \frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a^3} \int_{\tau''}^{\tau^{IV}} (c^2 \tau^2 - a^2 - R^2) \frac{x + \xi}{R} d\tau,$$

denn die durch Differentiation der Grenzen τ''' und τ^{IV} entstehenden Glieder fallen hier infolge der für diese Grenzen geltenden Gleichungen fort.

Im folgenden wird weiters verlangt (und zwar zur Berechnung der auf das Elektron wirkenden Kräfte), diese Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ über das Innere des Elektrons nach x, y, z zu integrieren. Dabei sind die für die verschiedenen Fälle aufgestellten Ungleichungen zu berücksichtigen. Da $\tau', \tau'', \tau''', \tau^{IV}$ nicht näher bekannte Funktionen von x, y, z (und t) sind, so können diese Integrationen im allgemeinen nicht weiter ausgeführt werden. Doch läßt sich durch folgende Überlegung eine Vereinfachung erzielen.

§ 7. Fortsetzung. — Ausführung der Integration über das Volumen des Elektrons.

Die verlangten dreifachen Integrale führen wir auf Doppelintegrale mittelst der bekannten Gauß'schen Formel:

$$(55) \quad \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz = - \iint \varphi \cdot \cos n(x) d\sigma$$

zurück, wo n die nach Innen gerichtete Normale und $d\sigma$ das Flächenelement der das Elektron darstellenden Kugel bezeichnet. In unserem Falle ist die Normale n der Radius der Kugel und

$$\cos n(x) = -\frac{x}{a}, \quad d\sigma = a \sin \Theta d\Theta d\Psi,$$

wenn Ψ und Θ in bekannter Weise Länge und Breite auf der Kugel bezeichnen, also:

$$(56) \quad \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz = \iint \varphi \frac{x}{a} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^\pi \varphi \cdot x \cdot \sin \Theta \cdot d\Theta.$$

Um die Winkel Θ und Ψ analytisch einzuführen, gehen wir von einem rechtwinkligen Hülssysteme x'', y'', z'' aus, dessen Mittelpunkt im Zentrum des Elektrons liegt, und setzen:

$$(57) \quad \begin{aligned} z'' &= r \cos \Theta, \\ x'' &= r \sin \Theta \cdot \cos \Psi, \\ y'' &= r \sin \Theta \cdot \sin \Psi, \end{aligned}$$

wo $r^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 = x^2 + y^2 + z^2$, und wo auf der Oberfläche der Kugel $r = a$ zu nehmen ist.

Die Achse z'' soll mit der Linie $O-M$ zusammenfallen, welche den Anfangspunkt des im Raume festen Koordinatensystems mit dem Zentrum des Elektrons verbindet, die x'' -Achse soll in die x - y -Ebene des im Elektron festen Systems x - y - z fallen; dann ist die Lage des neuen Systems vollständig bestimmt, und man hat in den Substitutionsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 (58) \quad x &= x'' \cdot \cos(x, x'') + y'' \cdot \cos(x, y'') + z'' \cdot \cos(x, z''), \\
 y &= x'' \cdot \cos(y, x'') + y'' \cdot \cos(y, y'') + z'' \cdot \cos(y, z''), \\
 z &= x'' \cdot \cos(z, x'') + y'' \cdot \cos(z, y'') + z'' \cdot \cos(z, z'')
 \end{aligned}$$

noch die Koeffizienten zu berechnen. Jedenfalls ist:

$$(59) \quad \cos(x, z'') = \frac{\xi}{T}, \quad \cos(y, z'') = \frac{\eta}{T}, \quad \cos(z, z'') = \frac{\zeta}{T}.$$

Die x'' -Achse steht zur y'' - und z'' -Achse senkrecht, außerdem aber auch zur z -Achse; es ist also:

$$(60) \quad \cos(x'', z) = 0,$$

und die drei genannten Achsen liegen in einer Ebene, so daß:

$$(61) \quad \cos(x, y'') = \sin(z, y'') = \sin(z, T) = \frac{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}}{T}.$$

Die übrigen Koeffizienten ergeben sich aus den elementaren Formeln der orthogonalen Transformation; man findet so durch leichte Rechnung:

$$\begin{aligned}
 (62) \quad x &= \frac{1}{\varrho T} (-x'' \eta T - y'' \xi \zeta + z'' \xi \varrho), \\
 y &= \frac{1}{\varrho T} (x'' \xi T - y'' \eta \zeta + z'' \eta \varrho), \\
 z &= \frac{1}{\varrho T} (0 + y'' \varrho^2 + z'' \zeta \varrho),
 \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ gesetzt ist, oder nach Einführung von Polarkoordinaten mittelst (57):

$$\begin{aligned}
 (63) \quad x &= \frac{r}{\varrho T} (-\eta T \sin \Theta \cos \Psi - \xi \zeta \sin \Theta \sin \Psi + \xi \varrho \cos \Theta), \\
 y &= \frac{r}{\varrho T} (\xi T \sin \Theta \cos \Psi - \eta \zeta \sin \Theta \sin \Psi + \eta \varrho \cos \Theta), \\
 z &= \frac{r}{\varrho T} (0 + \varrho^2 \sin \Theta \sin \Psi + \zeta \varrho \cos \Theta).
 \end{aligned}$$

Die Koordinaten x, y, z kommen in φ nur vor, insofern sie in R eingehen; man findet sofort aus (63):

$$\begin{aligned}
 (64) \quad R^2 &= (x + \xi)^2 + (y + \eta)^2 + (z + \zeta)^2 \\
 &= r^2 + T^2 + 2(x\xi + y\eta + z\zeta) \\
 &= r^2 + T^2 + 2rT \cos \Theta.
 \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$(64^a) \quad \cos(r, x) = \frac{x}{r} = \frac{1}{\varrho T} (\xi \varrho \cos \Theta - \eta T \sin \Theta \cos \Psi - \zeta \xi \sin \Theta \sin \Psi),$$

und:

$$(64^b) \quad \cos(R, x) = \frac{x + \xi}{R} = \frac{\varrho \xi (r \cos \Theta + T) - \eta r T \sin \Theta \cos \Psi - \zeta \xi r \sin \Theta \sin \Psi}{\varrho T \sqrt{r^2 + T^2 + 2rT \cos \Theta}}.$$

Dieser Formeln werden wir uns sofort zur Ausführung der in (55) verlangten Integrationen bedienen.

Vorweg bemerken wir noch, daß es bei diesem Integrationsgeschäfte notwendig wird, zu unterscheiden, ob die Geschwindigkeit, mit der sich das Elektron bewegt, größer oder kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c ist. Wir nehmen zunächst das letztere an, setzen also zunächst Bewegung mit „Unterlichtgeschwindigkeit“ voraus. Wir definieren dieselbe durch die Bedingung:

$$(65) \quad c\tau > T,$$

welche aussagt, daß der vom Lichte in der Zeit τ zurückgelegte geradlinige Weg stets größer ist, als die durch (51) definierte Entfernung des Anfangspunktes O vom Anfangspunkte des Systems x, y, z . Die Bedingung (65) ist sicher immer erfüllt, wenn die Bewegung des Elektrons mit einer Geschwindigkeit v geschieht, welche kleiner als c ist, denn der vom Elektron beschriebene Weg ist im allgemeinen nicht geradlinig und somit größer als T . Aber auch für $v > c$ kann die Ungleichung (65) noch erfüllt sein; auch derartige Bewegungen sind daher in unsere Bedingung (65) für „Unterlichtgeschwindigkeit“ mit eingeschlossen.

Wir gehen jetzt zur näheren Behandlung der in (56) angedeuteten Integrationen nach Θ und Ψ über. Es war φ selbst nach (34), bzw. (52), (52^a) und (52^b) als ein in Bezug auf die Variable τ gewonnenes Integral gegeben. Die Integration nach τ kann, so lange v_x, v_y, v_z als Funktionen von t ganz allgemein gelassen werden, nicht weiter ausgeführt werden; Vereinfachungen sind also nur durch Vertauschung der Integrationsordnung möglich: wir denken uns zuerst die Integration nach Θ und Ψ , und dann die nach τ ausgeführt. Die dabei zu berücksichtigenden, je nach dem Werte von τ verschieden zu wählenden, Integrationsgebiete, sind uns durch die in § 6 aufgestellten Ungleichungen vollkommen definiert.

Wir haben demgemäß die sukzessiven Lagen des Elektrons im Raume genau zu verfolgen, und zwar zuerst unter Annahme der Ungleichung (65), d. i. für Unterlichtgeschwindigkeit.

Erste Lage. Für $\tau = 0$ ist $T = 0$, und für kleine Werte von τ kann $a > 2c\tau$ und $a > T$ angenommen werden. Der Mittelpunkt des Elektrons befindet sich in der

Entfernung T vom Anfangspunkte O , um den eine Kugel mit dem Radius $c\tau$ gelegt werde; diese Kugel liegt ganz im Innern einer konzentrierten Kugel mit dem Radius $a - c\tau$. Die letztere befindet sich ganz im Innern des Elektrons, d. h. der Kugel mit dem Radius a und mit dem Mittelpunkte M , denn die kürzeste Entfernung $A-B$ (vgl. Fig. 1) zwischen den Peripherien beider Kreise ist gleich:

$$a - T - (a - c\tau) = c\tau - T > 0 \quad \text{nach (65).}$$

Die Kugel mit dem Radius $a - c\tau$ teilt das Innere des Elektrons in zwei Gebiete. In dem einen, das in Fig. 1 vertikal schraffiert ist, haben wir $R < T + a$ ($T + a = OC$ in Fig. 1), also auch $a - c\tau < R < a + c\tau$, wenn wieder R die Entfer-

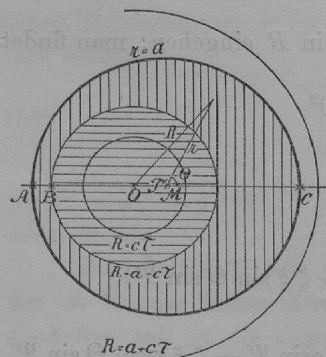


Fig. 1.

nung des Punktes x, y, z vom Punkte O bezeichnet; es ist hier also φ durch (52^a) bestimmt. In dem andern (horizontal schraffierten) Gebiete ist $R < a - c\tau$, also φ durch (52) gegeben.

Im letzteren Gebiete ist φ von x, y, z unabhängig, folglich das über dasselbe erstreckte Integral (55) gleich Null. Das entsprechende, über das erste Gebiet erstreckte Integral ist die Summe zweier Integrale J_1 und J_2 , von denen sich das erste auf die äussere Grenzfläche der Kugelschale, d. i. auf die Oberfläche der Kugel mit dem Radius $r = a$ (Oberfläche des Elektrons) bezieht, das andere auf die Oberfläche der Kugel mit dem Radius $R = a - c\tau$. Es ist also:

$$J_1 = - \iint \varphi \cdot \cos(r, x) \cdot a^2 \cdot \sin \Theta \cdot d\Theta d\Psi,$$

worin $\cos(r, x)$ durch (64^a) bestimmt ist. Wenn man den zu wählenden Wert von φ aus (52^a) entnimmt, ist zu beachten, daß die Grösse τ' jetzt ihre Bedeutung verliert. Früher nämlich handelte es sich darum, für einen gegebenen Wert von R (also auch für gegebene Werte von x, y, z) die Integrationsgrenzen den Ungleichungen gemäß zu bestimmen; jetzt aber (nach Vertauschung der Integrationsordnung) ist ein Wert von τ gegeben, und R soll entsprechend (hier einfach durch die Gleichung $R = a - c\tau$) bestimmt werden. Die früheren Werte $\tau', \tau'', \tau''', \tau^{IV}$ kommen daher jetzt nicht weiter in Betracht; man findet so:

$$J_1 = - \frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a} \int_0^t d\tau \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^\pi [a^2 - (c\tau - R)^2] \cos(n, x) \cdot \sin \Theta \cdot \frac{d\Theta}{R}. \quad (60)$$

Setzt man hier für R und $\cos(n, x) = -\cos(r, x)$ die Werte (64) und (64^a) ein (wobei in ersterem $r = a$ zu nehmen ist), so läßt sich die Integration nach Ψ ausführen, und infolge der Relationen:

$$\int_0^{2\pi} \cos \Psi d\Psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \Psi d\Psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\Psi = 2\pi,$$

ergibt sich:

$$J_1 = \frac{3 \varepsilon c}{4 a} \int_0^t \frac{\xi}{T} d\tau \int_0^\pi \left[\frac{a^2 - c^2 \tau^2}{R} + 2c\tau - R \right] \sin \Theta \cos \Theta d\Theta.$$

Auch die Integration nach Θ ist ausführbar, denn das Glied mit $2c\tau$ fällt ganz heraus, und es ist

$$(66) \quad \int \frac{\sin \Theta \cos \Theta d\Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta}} = \frac{1}{3a^2 T^2} (a^2 + T^2 - aT \cos \Theta) \sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta},$$

$$(66^a) \quad = \frac{1}{15a^2 T^2} (a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta)^{3/2} (a^2 + T^2 - 3aT \cos \Theta)$$

also durch Einsetzen der Grenzen 0 und π :

$$(67) \quad \int_0^\pi \frac{\sin \Theta \cos \Theta d\Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta}} = -\frac{2T}{3a^2},$$

$$(67^a) \quad \int_0^\pi \sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta} \cdot \sin \Theta \cos \Theta d\Theta = \frac{2T}{15a^2} (5a^2 - T^2).$$

Mit Hilfe dieser Formeln drückt sich J_1 durch eine Funktion $\Phi_{1x}(a, t)$ aus, die durch die Gleichung:

$$(68) \quad \Phi_{1x}(a, t) = \frac{\varepsilon c}{10a^3} \int_0^a (T^2 - 10a^2 + 5c^2\tau^2) d\tau$$

definiert sei, wo sich das zweite Argument von Φ_1 darauf bezieht, daß auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen eine Funktion von t steht; es ist:

$$(68^a) \quad J_1 = \Phi_{1x}(t, t).$$

Um das auf die Kugel mit dem Radius $R = a - c\tau$ bezügliche Integral zu behandeln, führen wir Polarkoordinaten R, Θ', Ψ' mit dem Mittelpunkte O ein, und zwar mit Hilfe eines rechtwinkligen Systems, dessen Achsen den oben benutzten Achsen x'', y'', z'' parallel sind; d. h. wir setzen, analog zu (63):

$$(69) \quad \begin{aligned} x + \xi &= \frac{R}{\varrho T} (-\eta T \sin \Theta' \cos \Psi' - \xi \zeta \sin \Theta' \sin \Psi' + \xi \varrho \cos \Theta'), \\ y + \eta &= \frac{R}{\varrho T} (\xi T \sin \Theta' \cos \Psi' - \eta \zeta \sin \Theta' \sin \Psi' + \eta \varrho \cos \Theta'), \\ z + \zeta &= \frac{R}{\varrho T} (0 + \varrho^2 \sin \Theta' \sin \Psi' + \zeta \varrho \cos \Theta'). \end{aligned}$$

Dann ist:

$$(69^a) \quad \cos(R, x) = \frac{x + \xi}{R} = \frac{1}{\varrho T} (-\eta T \sin \Theta' \cos \Psi' - \xi \zeta \sin \Theta' \sin \Psi' + \xi \varrho \cos \Theta')$$

und (da hier $\cos(n, x) = + \cos(R, x)$ zu nehmen ist):

$$(70) \quad \begin{aligned} J_2 &= - \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^\pi \varphi \cdot \cos(R, x) (a - c\tau)^2 \sin \Theta' d\Theta' \\ &= - \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3} \int_0^t d\tau \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^\pi [a^2 - (c\tau - R)^2] \cos(R, x) \cdot (a - c\tau) \sin \Theta' d\Theta', \end{aligned}$$

wo nun $R = a - c\tau$ zu setzen und die Integration nach Ψ auszuführen ist; also:

$$(70^a) \quad J_2 = - \frac{3\varepsilon c}{8a^3} \int_0^t \frac{\xi}{T} d\tau \int_0^\pi 4c\tau (a - c\tau)^2 \sin \Theta' \cos \Theta' d\Theta'.$$

Hier ist auch die Integration nach Θ' ausführbar, und es ergibt sich $J_2 = 0$. Für $t < \frac{a}{2c}$ gilt somit die Relation:

$$(71) \quad \varphi_x = \iiint \varphi dx dy dz = \Phi_{1x}(t, t),$$

wenn die Integration über das Innere des Elektrons ausgedehnt wird, und wenn Φ_{1x} wieder durch (68) definiert ist.

Weitere Entwicklung der ersten Lage. Es ist $c\tau < a < 2c\tau$. In dem horizontal schraffierten Gebiete (Fig. 2) ist wieder φ von x, y, z unabhängig, also das betreffende Raumintegral gleich Null; in dem vertikal schraffierten Gebiete dagegen ist wieder der in (52^a) angegebene Wert von φ zu benutzen, so daß die Formel (71) für das ganze Intervall $0 < t < \frac{a}{c}$ gültig bleibt.

Zweite Lage. Wächst τ weiter, so wird $c\tau > a$, während T (stets $< c\tau$) zunächst noch kleiner, als a bleibt; es ist dann $c\tau - a < a - T$, d. h.:

$$(72) \quad c\tau + T < 2a.$$

Die Kugel mit dem Radius $R = c\tau - a$ liegt also ganz innerhalb der Kugel $R = a - T$ (und letztere berührt die Kugel $r = a$ von innen). Auch hier wird das Elektron durch die Kugel $R = c\tau - a$ in zwei Gebiete getrennt; in dem vertikal schraffierten (vgl. Fig. 3) ist $c\tau - a < R < c\tau + a$, also der entsprechende Beitrag zum Potentiale φ

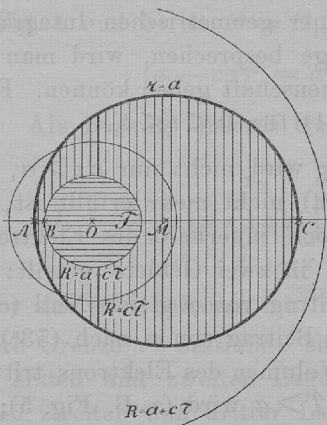


Fig. 2.

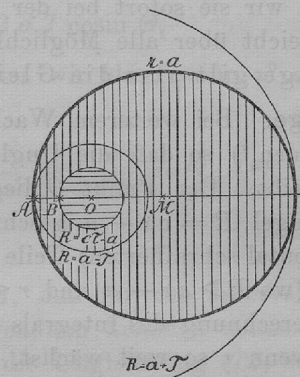


Fig. 3.

durch (53^a) bestimmt; im andern (horizontal schraffierten) Gebiete ist $R < c\tau - a$, also der fragliche Beitrag gemäß (45) unter Berücksichtigung von (53) zu berechnen; dieser Beitrag ist also gleich Null, und es kommt genau wie in der ersten Lage nur auf das Gebiet

$$c\tau - a < R < c\tau + a$$

an, in welchem der Beitrag zum Potentiale φ durch die Gleichung:

$$d\varphi = \frac{3\epsilon c}{8\pi a^3} [a^2 - (c\tau - R)^2] d\tau$$

gemäß (53^a) bestimmt wird, also genau wie in der ersten Lage. Wir erhalten durch Anwendung der Gleichung (55) wieder zwei Oberflächenintegrale J_1 und J_2 . Das eine (J_1) bezieht sich auf die Kugel $r = a$ und ist wieder durch (68) gegeben; für J_2 gilt wieder die Gleichung (70), in der nur jetzt $R = c\tau - a$ (statt früher $a - c\tau$) zu setzen ist; dann aber wird der unter dem Integralzeichen stehende Faktor:

$$[a^2 - (c\tau - R)^2]$$

gleich Null, und folglich $J_2 = 0$. Da nun auch in der ersten Lage $J_2 = 0$ gefunden wurde, so gilt folglich die Formel (71) auch für die jetzt betrachtete zweite Lage.

Der Gültigkeitsbereich dieser zweiten Lage ist durch die Ungleichung (72) definiert; da τ stets an die Bedingung $0 < \tau < t$ gebunden ist, so wird diese Ungleichung so lange bestehen, wie das ganze Intervall $0 < \tau < t$ in den Bereich der Ungleichung (in der T eine Funktion von τ und t ist) fällt; bei wachsendem t wird schließlich nur ein Teil dieses Intervalles brauchbar, letzteres selbst also durch den Wert t^0 , welcher als Wurzel der Gleichung:

$$(72^a) \quad (c\tau + T)_{\tau=t} = 2a$$

bestimmt ist, in zwei Teile geteilt; für $0 < \tau < t^0$ gelten die Resultate der ersten und zweiten Lage; für $t^0 < \tau < t$ kommt die folgende Lage in Betracht. Dabei ist der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß die Gleichung (72^a) nur eine brauchbare Wurzel hat; bei der vollkommenen Unbestimmtheit der Funktion T können hier die verschiedensten Möglichkeiten eintreten; an der Hand einer geometrischen Integration der Gleichung (72^a), wie wir sie sofort bei der dritten Lage besprechen, wird man sich in jedem einzelnen Falle leicht über alle Möglichkeiten Rechenschaft geben können. Für die erste und zweite Lage gilt also die Gleichung (71) für $0 < t < t_0$.

Dritte Lage. Bei weiterem Wachsen von τ wird nicht nur $c\tau > a$, sondern auch $c\tau + T > a$ werden,¹⁾ so daß die Ungleichung (72) nicht mehr erfüllt ist, aber T noch kleiner als a bleibt. Der Punkt O liegt jetzt noch innerhalb des Elektrons. Letzteres wird von der Kugel $R = c\tau - a$ geschnitten und in zwei Gebiete geteilt; in dem einen (in Fig. 4 horizontal schraffierten) Teile ist der Beitrag von φ gleich Null (da $R < c\tau - a$), in dem anderen (wo $R > c\tau - a$ und $r < a$) ist der Beitrag von φ nach (53^a) zu berechnen.

Für die Berechnung des Integrals über das Volumen des Elektrons tritt keine weitere Änderung ein, wenn τ so weit wächst, daß auch $T > a$ wird (z. B. Fig. 5); dann liegt O

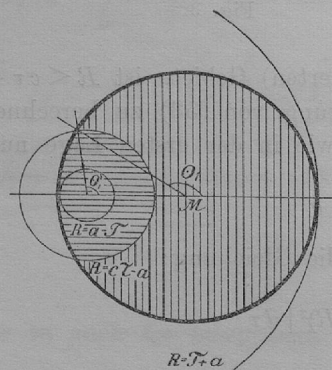


Fig. 4.

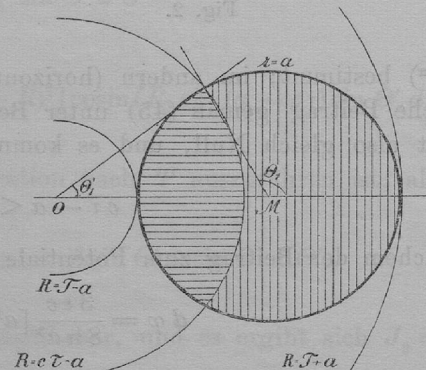


Fig. 5.

¹⁾ Es ist hier vorausgesetzt, daß T mit wachsendem τ im wesentlichen wächst; es wäre denkbar, daß andauernd $T < a$ bleibt, so daß das Elektron sich nie um mehr, als die Länge eines Radius beträgt, von der Anfangslage entfernt; dann gilt die Gleichung (71) unbegrenzt für alle Werte von t .

außerhalb des Elektrons, und die Kugel wird, so lange $c\tau - a < T + a$ bleibt, wieder in zwei Teile zerlegt. In dem vertikal schraffierten Gebiete ist:

$$(73) \quad 0 < c\tau - a < R < T + a < c\tau + a,$$

also φ wieder durch (53^a) bestimmt, wenn das bei der „ersten Lage“ über τ' Gesagte berücksichtigt wird; in dem horizontal schraffierten Gebiete ist $R < c\tau - a$, und demnach φ aus (52^b) zu entnehmen; d. h. dieses letztere Intervall liefert keinen Beitrag zu dem Integrale von φ , und wir haben nur das erstere Gebiet zu berücksichtigen. Dasselbe wird von den Kugeln $R = c\tau - a$ und $r = a$ begrenzt; demnach zerfällt das Integral in die Summe $J_1 + J_2$, wo:

$$J_1 = - \iint \varphi \cdot \cos(n, x) \cdot a^2 \sin \Theta \, d\Theta \, d\Psi \quad \text{für } r = a,$$

$$J_2 = - \iint \varphi \cdot \cos(n, x) \cdot (a - c\tau)^2 \sin \Theta' \, d\Theta' \, d\Psi' \quad \text{für } R = a - c\tau.$$

In J_1 ist $\cos(n, x) = -\frac{x}{a}$ durch (64^a) gegeben; in einem Schnittpunkte beider Kugeln (vgl. Fig. 4 und 5) ist $\Theta = \Theta_1$, wenn Θ_1 durch die Gleichung:

$$(73^a) \quad (a - c\tau)^2 = a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta_1$$

definiert wird. Als Beitrag unseres Gebietes finden wir also, wenn τ^0 entsprechend gewählt wird:

$$J_1 = \frac{3\epsilon c}{8\pi a} \int_{\tau^0}^t d\tau \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^{\Theta_1} [a^2 - (c\tau - R)^2] \frac{x}{aR} \sin \Theta \cdot d\Theta,$$

worin R wieder aus (64) bekannt ist.

Die untere Grenze τ^0 bestimmt sich dadurch, daß für das Intervall $0 < \tau < \tau^0$ die Resultate der ersten und zweiten Lage zur Anwendung kommen müssen. Nun war die Grenze zwischen zweiter und dritter Lage durch die Ungleichung (72) definiert, die für die erste und zweite Lage gelten sollte, während in der dritten Lage:

$$c\tau + T > 2a$$

wird; es ist demnach τ^0 als Wurzel der Gleichung:

$$(73^b) \quad c\tau + T = 2a$$

als Funktion von t zu definieren. Natürlich ist hierbei vorausgesetzt, daß diese Gleichung eine Wurzel τ^0 zuläßt, die kleiner als t ist; darüber verschafft man sich in jedem einzelnen Falle durch eine geometrische Interpretation des zwischen t und τ gemäß (73^b) bestehenden Abhängigkeitsverhältnisses leicht vollkommene Klarheit; wir kommen darauf sogleich bei Betrachtung der Figuren 6 und 7 zurück (vgl. auch unten die Beispiele in § 12, 13 und 14).

Die in J_1 verlangte räumliche Integration ist ganz wie bei der ersten Lage ausführbar. Man hat, indem man den Wert von $\cos \Theta_1$ aus (73^a) einsetzt und die unbestimmten Integrale (66) und (66^a) benutzt:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \int_0^{\Theta_1} \frac{\sin \Theta \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta}} \\
 &= \frac{1}{6a^2 T^2} [\{3(a^2 + T^2) - (a - c\tau)^2\} (a - c\tau) - 2(a + T)(a^2 + T^2 - aT)] \\
 &= \frac{1}{6a^2 T^2} [3(a - c\tau)(T^2 - c^2 \tau^2) - 2T^3],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \int_0^{\Theta_1} \sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta} \cdot \sin \Theta \cos \Theta d\Theta \\
 &= \frac{1}{30a^2 T^2} [\{5(a^2 + T^2) - 3(a - c\tau)^2\} (a - c\tau)^3 - 2(T + a)^3 (a^2 + T^2 - 3aT)],
 \end{aligned}$$

also:

$$(74) \quad J_1 = \frac{3\varepsilon c}{4a} \int_{\tau^0}^t [(a^2 - c^2 \tau^2) U_1 - U_2] \frac{\xi}{T} d\tau.$$

In analoger Weise wird J_2 gefunden, indem man in J_2 , d. i. in (70), die obere Grenze π des nach Θ' genommenen Integrals durch Θ'_1 ersetzt, wobei nach Fig. 4 und 5 der Winkel Θ'_1 aus der Gleichung:

$$(74^a) \quad a^2 = (a - c\tau)^2 + T^2 - 2(a - c\tau)T \cos \Theta'_1$$

zu entnehmen ist. Dabei ist in (70) R gleich $c\tau - a$ zu setzen; dann verschwindet aber der unter dem Integralzeichen stehende Faktor $a^2 - (c\tau - R)^2$; das Integral J'_2 ergibt sich folglich gleich Null. Da die Funktion φ_x gleich dem von 0 bis t genommenen Integrale ist, so ist für das Intervall $0 < \tau < \tau^0$, wo τ^0 durch (73^b) definiert war, die frühere Formel (71) anzuwenden, für das Intervall $\tau^0 < \tau < t$ aber die Funktion (74), d. h.:

$$(75) \quad \Phi_{2x}(a, t) = \frac{3\varepsilon c}{4a} \int_{\tau^0}^t \frac{\xi}{T} [(a^2 - c^2 \tau^2) U_1 - U_2] d\tau.$$

Es wird also für die dritte Lage:

$$(76) \quad \varphi_x = \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(t, t),$$

wobei τ^0 durch (73^b) bestimmt wurde.

Dieser Ausdruck ist anwendbar, solange das Elektron von der Kugel mit dem Radius $R = c\tau - a$ geschnitten wird, d. h. solange für alle Werte von τ zwischen t^0 und t die Ungleichung $c\tau - a < T + a$ erfüllt ist; der äußerste Wert von τ , bei dem dies noch stattfindet, ist die kleinste Wurzel τ' , welche $\geq t^0$ ist und der Gleichung genügt:

$$(77) \quad c\tau - a = T + a.$$

Ist diese Wurzel τ' , welche selbst im allgemeinen Funktion von t ist, größer als t , so ist dieselbe nicht brauchbar, da die Variable τ notwendig an die Bedingung $\tau \leq t$ gebunden ist; dann gilt die Gleichung (76) für alle Werte von t , die der Ungleichung $t < \tau'$ genügen, und durch die Bedingung:

$$(78) \quad t = \tau' \quad \text{oder} \quad ct = T_{\tau=t} + 2a$$

ist ein Wert t' bestimmt, bis zu welchem t wachsen kann, ohne die Gleichung (76) zu stören.

Für $t > t'$ wird zugleich (vgl. unten Fig. 6 und 7) $\tau' < t$, und es tritt die sogleich zu besprechende vierte Lage ein.

Vierte Lage. Wenn die erwähnte Wurzel τ' kleiner als t ist, so wird für $t > \tau'$ das betreffende Integral wieder gleich Null (indem die Funktion unter dem Zeichen verschwindet, da dann $c\tau - a > R$ für $\tau' < \tau < t$), und wir erhalten:

$$(79) \quad \varphi_x = \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(\tau', t),$$

wo Φ_1 und Φ_2 bzw. durch (68) und (75) definiert sind.

Zusammenfassend haben wir also für das dreifache Integral von $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, erstreckt über das Innere des Elektrons, die Werte:

$$(80) \quad \varphi_x = \Phi_{1x}(t, t) \quad \text{für } 0 < t \leq t^0,$$

$$(81) \quad \varphi_x = \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(t, t) \quad \text{„ } t^0 < t \leq t',$$

$$(82) \quad \varphi_x = \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(\tau', t) \quad \text{„ } t' < t \leq t,$$

wobei vorausgesetzt ist, daß die Kurve so verläuft, wie es in Figur 6 und 7 schematisch dargestellt ist.

Für die Integrale von $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ gelten ganz analoge Formeln; man hat nur ξ bzw. durch η oder ζ zu ersetzen.

Es empfiehlt sich, diese Verhältnisse an einer Figur zu veranschaulichen. Wir wählen die Variablen t und τ als Koordinaten, t als Abszisse, τ als Ordinate, und zeichnen die Gerade $t = \tau$ und die Kurve (77), d. h. $c\tau = T + 2a$, und die Kurve $c\tau + T = 2a$. In dem vertikal schraffierten Teile der Ebene ist $\tau > t$; derselbe kommt daher für die Integration nicht in Betracht. Verläuft die Kurve (77) so, wie in beistehender Figur 6, so ist in den schräg schraffierten Intervallen t selbst als obere Grenze des Integrals Φ_{1x} bzw. Φ_{2x} zu wählen, in dem horizontal schraffierten Intervalle dagegen τ' .

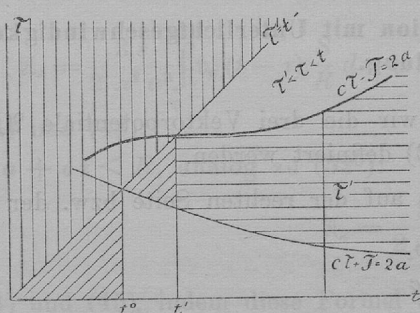


Fig. 6.

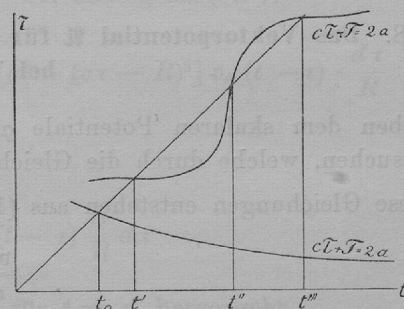


Fig. 7.

Man könnte einen Moment zweifelhaft sein, ob diese Resultate auch gültig bleiben, wenn die Kurve (77), nachdem sie in Fig. 6 die Linie $\tau = t$ an der Stelle $t = t'$ überschritten hat, nicht so verläuft, wie in der Zeichnung angenommen wurde, sondern mit wachsendem t fällt. Wenn nämlich zur Zeit $\tau = t'$ die entsprechende Lage des Elektrons

erreicht ist, so wächst die Variable τ sicher weiter über t' hinaus; fällt also die Kurve mit wachsendem t , so daß $\tau' < t'$ ist für $t > t'$, so können diese Werte τ' unmöglich eine physikalische Bedeutung haben. Diese Überlegung ist aber nur scheinbar berechtigt. Wie nämlich zu Beginn von § 6 hervorgehoben wurde, ist das Elektron zur Zeit t an der durch den Wert $\tau = 0$ gegebenen Stelle und zur Anfangszeit $t = 0$ an der jetzt durch den Wert $\tau = t$ markierten Lage. Ist daher $\tau' < t'$ für $t > t'$, so sagt dies aus, daß der nachwirkende Einfluß der zu Beginn der Bewegung herrschenden Verhältnisse jetzt ein anderer ist, als im Falle $\tau' > t'$, und daß infolgedessen das Intervall $\tau' < \tau < t$ ($t > t'$) keinen Beitrag zum Integrale liefert, indem jetzt τ' die obere Grenze des Integrals wird. Für jeden Wert von t (als Abszisse) ist also die zugeordnete Ordinate zur Darstellung von τ zu benutzen, und der auf ihr liegende Wert von τ' (Schnittpunkt mit der Kurve $c\tau = T + 2a$) kommt für die Rechnung in Gleichung (74) allein in Betracht.

Schneidet also die Kurve (77) die Gerade $t = \tau$ nochmals (in t', t'', t'''), wie in Figur 7, so haben wir:

$$(83) \quad \begin{aligned} \varphi_x &= \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(t, t) & \text{für } t^0 < t < t' \\ \varphi_x &= \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(\tau', t) & \text{„ } t' < t < t'' \\ \varphi_x &= \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(t, t) & \text{„ } t'' < t < t''' \\ \varphi_x &= \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(\tau''', t) & \text{„ } t''' < t \dots \end{aligned}$$

Anders ist es, wenn die Gleichung (77) eine Lösung τ' hat, welche kleiner als $\frac{2a}{c}$ ist; dann ist aber $(T)_{\tau=\tau'} = c\tau' - 2a < 0$; d. h. T würde negativ sein, also T durch 0 hindurchgehen, und das Elektron rückläufig werden. Solche kompliziertere Bewegungen bedürfen einer genaueren Untersuchung in jedem einzelnen Falle.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß entsprechende Formeln und Überlegungen für die dreifachen Integrale φ_y, φ_z der Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ Gültigkeit haben.

§ 8. Das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ für Translation mit Unterlichtgeschwindigkeit bei Volumladung.

Neben dem skalaren Potentiale φ haben wir die drei Vektorpotentiale $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ zu untersuchen, welche durch die Gleichungen (2) definiert werden.

Diese Gleichungen entstehen aus (1), indem auf der rechten Seite bzw. der Faktor:

$$\frac{v_x}{c}, \frac{v_y}{c}, \frac{v_z}{c}$$

hinzugefügt wird, wo v_x, v_y, v_z gegebene Funktionen von x', y', z' und t sind, und nach Einführung der Koordinaten x, y, z nur noch von t abhängen.

Führen wir wieder das mit dem Elektron fest verbundene System x, y, z ein, so genügen also $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ den Gleichungen, welche aus (6) entstehen, wenn man rechts die gleichen Faktoren hinzufügt. An Stelle von $\mathfrak{A}_x$ führen wir eine Hilfsfunktion $\mathfrak{A}'_x$ ein, die der aus (11) in derselben Weise hervorgehenden Gleichung zu genügen hat, nämlich:

$$(84) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial t^2} - S \frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial x} \frac{d v_x}{d t} - 2 S \frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial x \partial t} v_x + S S \frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial x \partial y} v_x v_y - c^2 \Delta^2 \mathcal{U}_x = c v_x e^{i(kx + ly + mz)}.$$

Diese wird wieder auf eine zu (18) analoge Gleichung zurückgeführt; es ist dann in (23) rechts wieder c^2 durch $c v_x$ zu ersetzen, und demnach wird in (27) die rechte Seite in der Form:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S} \int_0^t v_x(u) \cdot e^{i S k(x+z)} \sin c s(t-u) du \\ &= \frac{1}{S} \int_0^t v_x(t-\tau) e^{i S k(x+z)} \sin c s \tau d\tau \end{aligned}$$

erhalten; und schließlich ist (34) zu ersetzen durch:

$$(85) \quad \mathcal{U}_x = \frac{3 \varepsilon}{2 \pi^2 a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) \cdot \frac{S d\tau}{R},$$

wo S und R die früheren Bedeutungen haben; und zwar ist R durch (34^b), S durch (43), (44) bzw. (45) definiert; in v_x ist unter dem Integralzeichen t durch $t-\tau$ zu ersetzen.

Die Einteilung des Raumes in verschiedene Gebiete ist hier, ebenso wie vorhin bei Berechnung von φ , zu berücksichtigen. Man hat folgende Fälle zu unterscheiden:

I. $c\tau < a$.

1. $R < a - c\tau$ (also auch $R < a$) im Intervalle $0 < \tau < t$ für hinreichend kleine Werte von t :

$$(86) \quad \mathcal{U}_x = \frac{3 \varepsilon c}{4 \pi a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) \tau d\tau$$

nach (34) und (44), analog zu (52);

2. $a - c\tau < R < a + c\tau$ im Intervalle $\tau' < \tau < t$, analog zu (52^a):

$$(86^a) \quad \mathcal{U}_x = \frac{3 \varepsilon}{2 \pi^2 a^3} \int_0^{\tau'} v_x(t-\tau) \frac{S}{R} d\tau + \frac{3 \varepsilon}{8 \pi a^3} \int_{\tau'}^t [a^2 - (c\tau - R)^2] v_x(t-\tau) \cdot \frac{d\tau}{R}$$

nach (34) und (43);

3. $a + c\tau < R$, analog zu (52^b):

$$(86^b) \quad \mathcal{U}_x = \frac{3 \varepsilon}{2 \pi^2 a^3} \int_0^{\tau''} v_x(t-\tau) \frac{S}{R} d\tau$$

nach (34) und (45), indem diese Formel aus (86^a) für $t = \tau''$ hervorgeht.

II. $c\tau > a$.

1. $R < c\tau - a$, analog zu (53), ebenso wie im vorigen Falle:

$$(87) \quad \mathcal{U}_x = \frac{3 \varepsilon}{2 \pi^2 a^3} \int_0^{\tau''} v_x(t-\tau) \frac{S}{R} d\tau$$

nach (34) und (45);

2. $c\tau - a < R < c\tau + a$, analog zu (53a):

$$(87^a) \quad \mathfrak{U}_x = \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3} \int_0^{\tau''} v_x(t-\tau) \frac{S}{R} d\tau + \frac{3\varepsilon}{8\pi a^3} \int_{\tau''}^t v_x(t-\tau) [a^2 - (c\tau - R)^2] \frac{d\tau}{R}$$

nach (34) und (43);

3. $c\tau + a < R$, analog zu (30), indem in der vorhergehenden Formel $t = \tau^{\text{IV}}$ gesetzt wird:

$$(87^b) \quad \mathfrak{U}_x = \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3} \int_0^{\tau^{\text{IV}}} v_x(t-\tau) \frac{S}{R} d\tau$$

nach (34) und (45) für $t > \tau^{\text{IV}}$.

Befindet sich die das Elektron darstellende Kugel zur Zeit τ teils in einem teils in einem anderen der hier gekennzeichneten Raumgebiete, oder genügt für einen gegebenen Wert von R ein Teil des Intervalls $0 < \tau < t$ der einen, ein anderer Teil einer anderen Ungleichung, so müssen für diese verschiedenen Teilintervalle verschiedene Werte von $\mathfrak{U}_x$ angesetzt werden. Das ist besonders bei den zu verlangenden Integrationen über das Volumen des Elektrons wichtig.

Es handelt sich aber nicht um die Integration der Funktionen $\mathfrak{U}_x, \mathfrak{U}_y, \mathfrak{U}_z$, sondern um die Auswertung der dreifachen Integrale ihrer partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial y}, \dots$. Dieselbe geschieht in ganz derselben Weise, wie bei der Funktion φ bzw. ihren partiellen Differentialquotienten, und zwar auf Grund der obigen Relation (55); unter dem nach τ genommenen Integrale ist nur überall der Faktor $\frac{v_x(t-\tau)}{c}$ bzw. $\frac{v_y(t-\tau)}{c}$, $\frac{v_z(t-\tau)}{c}$ hinzuzufügen. Die betreffenden Integrale bezeichnen wir mit $A_{xx}, A_{xy}, \dots$, die dabei einzuführenden Funktionen mit $\Psi_{1xx}, \Psi_{1xy}, \dots$. Man erhält so die folgenden Resultate:

Erste und zweite Lage: $0 < t < t^0$, wo t^0 durch (72^a) definiert sei. Es ist, wie in (71):

$$(88) \quad A_{xx} = \iiint \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial x} dx dy dz = \Psi_{1xx}(t, t),$$

wenn analog zu (68):

$$(88^a) \quad \Psi_{1xx}(a, t) = \frac{\varepsilon}{10a^3} \int_0^a v_x(t-\tau) \xi (T^2 - 10a^2 + 5c^2\tau^2) d\tau \quad \text{für } 0 < t < t^0;$$

und ebenso:

$$(89) \quad A_{xy} = \iiint \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial y} dx dy dz = \Psi_{1xy}(t, t),$$

wenn:

$$(89^a) \quad \Psi_{1xy}(a, t) = \frac{\varepsilon}{10a^3} \int_0^a v_x(t-\tau) \eta (T^2 - 10a^2 + 5c^2\tau^2) d\tau.$$

Dritte Lage: $t^0 < t < \tau'$, wenn τ' wieder durch (77) definiert ist:

$$(90) \quad A_{xx} = \Psi_{1xx}(\tau^0, t) + \Psi_{2xx}(t, t),$$

wenn analog zu (75):

$$(90^a) \quad \Psi_{2xx}(a, t) = \frac{3\varepsilon}{4a} \int_{\tau^0}^t v_x(t-\tau) \frac{\xi}{T} [(a^2 - c^2 \tau^2) U_1 - U_2] d\tau,$$

und ebenso:

$$(91) \quad A_{xy} = \Psi_{1xy}(\tau^0, t) + \Psi_{2xy}(t, t),$$

wenn:

$$(91^a) \quad \Psi_{2xy}(a, t) = \frac{3\varepsilon}{4a} \int_{\tau^0}^t v_x(t-\tau) \frac{\eta}{T} [(a^2 - c^2 \tau^2) U_1 - U_2] d\tau.$$

Vierte Lage: $t > \tau'$, analog zu (79):

$$(92) \quad A_{xx} = \Psi_{1xx}(\tau^0, t) + \Psi_{2xx}(\tau', t),$$

$$(93) \quad A_{xy} = \Psi_{1xy}(\tau^0, t) + \Psi_{2xy}(\tau', t).$$

In Betreff der Bedeutung der Größe τ' und anderer damit zusammenhängender Fragen kann auf die früheren Erörterungen (vgl. den Schluß von § 7) verwiesen werden.

Die den bisherigen Rechnungen zu Grunde liegende wichtige Formel (55) ist nicht mehr anwendbar, wenn es sich um die Integration des partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}$ über das Innere des Elektrons handelt; das betreffende dreifache Integral läßt sich deshalb nicht auf ein Doppelintegral zurückführen; es gelingt dies aber teilweise durch die folgenden Erwägungen.

Es hängt $\mathfrak{A}_x$ explizite von R und t ab; in R wiederum geht t dadurch ein, daß R eine Funktion von $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ ist, und daß ξ, η, ζ gemäß (26) von t abhängen. Das von 0 bis t nach der Variablen τ zu nehmende Integral, durch welches $\mathfrak{A}_x$ nach (85) dargestellt ist, zerfällt zufolge der in § 6 für die Funktion φ bei den Gleichungen (52) bis (53^b) angestellten Überlegungen in eine Summe von einzelnen Integralen, deren Grenzen $\tau', \tau'', \dots$ selbst wieder Funktionen von t sind, da sie durch Gleichungen der Form:

$$R = a - c\tau, \quad R = a + c\tau, \quad a = c\tau, \quad R = c\tau$$

bestimmt werden. Auch diese Grenzen sind also Funktionen von t , aber nicht explizite, sondern nur insofern, als sie von R abhängen. Bei der Differentiation aber kommen diese Grenzen nicht in Betracht; denn die Funktion S ist nach (43), (44) und (45) an ihnen stetig. Ist z. B. ein Wert τ_1 durch die Gleichung $R + c\tau = a$ bestimmt, so wird für $\tau = \tau_1$ und $R + c\tau > a$ nach (43):

$$S = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{c\tau R}{a^2} \right)_{\tau=\tau_1},$$

d. h. gleich demselben Werte der sich für $R + c\tau > a$ aus (44) ergeben würde; da nun τ_1 einmal als obere, das anderemal als untere Grenze auftritt, so heben sich die durch Differentiation der Grenzen entstehenden Glieder fort. Ebenso ist für $a > c\tau - R$ und $a = c\tau - R$,

nach (43) $S = 0$, für $a < c\tau - R$ aber nach (45) ebenfalls $S = 0$. Wir brauchen also bei Bildung von $\frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial t}$ nur die obere Grenze t und die Funktion unter dem Integralzeichen zu berücksichtigen. Man erhält aus (85):

$$\frac{2\pi^2 a}{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial t} = v_x(0) \left(\frac{S}{R} \right)_{\tau=t} + \int_0^t v_x(t-\tau) \frac{\partial \left(\frac{S}{R} \right)}{\partial t} d\tau + \int_0^t \frac{S}{R} \frac{\partial v_x(t-\tau)}{\partial t} d\tau,$$

denn für die untere Grenze $\tau = 0$ verschwindet die Funktion S nach (44). Auf das letzte Glied wenden wir die partielle Integration an und erhalten:

$$\int_0^t \frac{S}{R} \frac{\partial v_x(t-\tau)}{\partial t} d\tau = - \int_0^t \frac{S}{R} \frac{\partial v_x(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau = - v_x(0) \left(\frac{S}{R} \right)_{\tau=t} + \int_0^t v_x(t-\tau) \frac{\partial \left(\frac{S}{R} \right)}{\partial \tau} d\tau,$$

also:

$$(94) \quad \frac{2\pi^2 a}{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial t} = \int_0^t v_x(t-\tau) \left[\frac{\partial \left(\frac{S}{R} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{S}{R} \right)}{\partial \tau} \right] d\tau.$$

Hierin ist nach (26):

$$\frac{\partial \left(\frac{S}{R} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{S}{R} \right)}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial \left(\frac{S}{R} \right)}{\partial R} ((x + \xi) v_x + (y + \eta) v_y + (z + \zeta) v_z) \frac{1}{R},$$

wobei mit $\left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)$ dasjenige bezeichnet ist, was man erhält, wenn man bei der Differentiation von S die Größe R als konstant betrachtet.

Was soeben über die Differentiation der Grenzen nach t gesagt wurde, gilt ebenso bei der Differentiation nach x ; es ist also:

$$\frac{2\pi^2 a}{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial x} = \int_0^t v_x(t-\tau) \frac{\partial \left(\frac{S}{R} \right)}{\partial R} \frac{x + \xi}{R} d\tau,$$

und entsprechende Gleichungen gelten bei Differentiation nach y und z . Sonach folgt aus (94) die später wichtige Relation:

$$(95) \quad \frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial x} v_x - \frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial y} v_y - \frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial z} v_z = \frac{\varepsilon}{2\pi^2 a} \int_0^t v_x(t-\tau) \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right) \frac{d\tau}{R},$$

und hierin ist für $\left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)$ einer der aus (43), (44) und (45) sich ergebenden Werte einzusetzen, nämlich:

$$(96) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right) = - \frac{\pi c (c\tau - R)}{4} \quad \text{im Falle (43),} \quad (101)$$

$$(96^a) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right) = \frac{\pi c R}{2} \quad " \quad " \quad (44), \quad (101)$$

$$(96^b) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right) = 0 \quad " \quad " \quad (45). \quad (101)$$

Wenn jetzt das dreifache Integral von $\frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial t}$, genommen über das Innere des Elektrons, zu berechnen ist, so haben wir uns nur noch mit dem Integrale:

$$(97) \quad V_x = \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3} \iiint dx dy dz \int_0^t v_x(t-\tau) \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right) \frac{d\tau}{R}$$

zu beschäftigen, denn es ist das gesuchte Integral:

$$A_{xt} = \iiint \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial t} dx dy dz \quad (102)$$

infolge von (95) gleich:

$$(98) \quad A_{xt} = v_x A_{xx} + v_y A_{xy} + v_z A_{xz} + V_x.$$

Zur Berechnung von V_x haben wir wieder die verschiedenen möglichen Lagen durchzugehen:

Erste Lage: $2c\tau < a$. In Fig. 1 (vgl. oben S. 258) ist dasjenige Gebiet vertikal schraffiert, in welchem:

$$a - c\tau < R < a + c\tau \quad \text{und zugleich} \quad r < a$$

ist, so daß hier die Formeln (43) und (96) anzuwenden sind. Das hierauf bezügliche dreifache Integral, das wir V_x nennen wollen, ist über die Kugelschale auszudehnen, welche nach außen von der Kugelfläche $r=a$, nach innen von der Kugelfläche $R=a-c\tau$ begrenzt wird. Wir führen mittels (69) Polarkoordinaten R, Φ', Ψ' ein; dann variiert (bei gegebenem Werte von Θ') R von $R=a-c\tau$ bis zu einem durch die Gleichung:

$$(99) \quad a^2 = R_1^2 + T^2 - 2 R_1 T \cos \Theta'$$

bestimmten Werte R_1 (und zwar ist das positive Vorzeichen der betreffenden Quadratwurzel zu wählen); Φ' läuft von 0 bis π , Ψ' von 0 bis 2π ; also:

$$(100) \quad \begin{aligned} V'_x &= - \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) d\tau \int_0^\pi \sin \Theta' d\Theta' \int_{a-c\tau}^{R_1} (c\tau - R) R dR \int_0^{2\pi} d\Psi' \\ &= - \frac{3\varepsilon c}{4a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) d\tau \int_0^\pi \sin \Theta' \left[\frac{1}{2} c\tau R^2 - \frac{1}{3} R^3 \right]_{a-c\tau}^{R_1} d\Theta'. \end{aligned} \quad (100)$$

Hierin ist nach (99):

$$R_1^2 = a^2 - T^2 + 2 T^2 \cos^2 \Theta' + 2 T \cos \Theta' \sqrt{a^2 - T^2 \sin^2 \Theta'},$$

also:

$$(101) \quad \int R_1^2 \sin \Theta' d\Theta' = -(a^2 - T^2) \cos \Theta' - \frac{2}{3} T^3 \cos^3 \Theta' - \frac{2}{3} T (a^2 - T^2 \sin^2 \Theta')^{3/2},$$

$$(101^a) \quad \int_0^\pi R_1^2 \sin \Theta' d\Theta' = 2a^2 - \frac{2}{3} T^3;$$

ferner:

$$(102) \quad R_1^3 = 3(a^2 - T^2)T \cos \Theta' + 4T^3 \cos^3 \Theta' + (a^2 - T^2 + 4T^2 \cos^2 \Theta') \sqrt{a^2 - T^2 \sin^2 \Theta'}.$$

Bei der Integration nach Θ' haben wir uns der Formeln

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - T^2 \sin^2 \Theta'} \sin \Theta' d\Theta' &= -\frac{1}{2} \cos \Theta' \sqrt{a^2 - T^2 \sin^2 \Theta'} \\ &\quad - \frac{a^2 - T^2}{2T} \log(T \cos \Theta' + \sqrt{a^2 - T^2 \sin^2 \Theta'}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (102^a) \quad &\int \sqrt{a^2 - T^2 \sin^2 \Theta'} \cos^2 \Theta' \sin \Theta' d\Theta' \\ &= \frac{(a^2 - T^2)^2}{16T^3} \log(a^2 - T^2 + 2T^2 \cos^2 \Theta' + 2T \cos \Theta' \sqrt{a^2 - T^2 \sin^2 \Theta'}) \\ &\quad - \frac{1}{8T^2} (a^2 - T^2 + 2T^2 \cos^2 \Theta') \cos \Theta' \sqrt{a^2 - T^2 \sin^2 \Theta'} \end{aligned}$$

zu bedienen; dieselben ergeben:

$$\begin{aligned} (102^b) \quad &\int_0^\pi \sqrt{a^2 - T^2 \sin^2 \Theta'} \sin \Theta' d\Theta' = a - \frac{a^2 - T^2}{2T} \log \frac{a - T}{a + T}, \\ &\int_0^\pi \sqrt{a^2 - T^2 \sin^2 \Theta'} \cos^2 \Theta' \sin \Theta' d\Theta' = \frac{a(a^2 + T^2)}{4T^2} + \frac{(a^2 - T^2)^2}{8T^3} \log \frac{a - T}{a + T}; \end{aligned}$$

und folglich, indem sich der logarithmische Ausdruck heraushebt:

$$(103) \quad \int_0^\pi R_1^3 \sin \Theta' d\Theta' = 2a^3,$$

sonach schließlich durch Einsetzen in (100):

$$(104) \quad V_x = \frac{\varepsilon c}{4a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) \cdot [T^2 - c^2 \tau^2 + 6(a - c\tau)^2] \cdot c\tau \cdot d\tau.$$

Es bleibt das zweite (in Fig. 1 horizontal schraffierte) Gebiet zu betrachten, das bei Integration von $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ keinen Beitrag lieferte, jetzt aber einen von Null verschiedenen Wert ergibt. In diesem Gebiete ist $R < a - c\tau$; es kommen also die Formeln (44) und (96^a) zur Anwendung; den Beitrag zum Integrale (97) bezeichnen wir mit V_x'' ; dann wird:

$$\begin{aligned}
 (105) \quad V_x'' &= \frac{3}{4} \frac{c \varepsilon}{\pi a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) d\tau \int_0^{a-c\tau} R^2 dR \int_0^\pi \sin \Theta' d\Theta' \int_0^{2\pi} d\Psi \\
 &= \frac{\varepsilon c}{a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) \cdot (a-c\tau)^3 d\tau.
 \end{aligned}$$

In (98) ist schließlich:

$$(106) \quad V_x = V_x' + V_x''$$

unter Benutzung der in (104) und (105) angegebenen Resultate einzusetzen, um den gesuchten Wert von A_{xt} zu erhalten.

Weitere Entwicklung der ersten Lage: $\frac{a}{2c} < t < \frac{a}{c}$. Wie bei den früheren Betrachtungen tritt hier nur eine Änderung in der Zeichnung der zugehörigen Figur ein, nicht eine Änderung der sonstigen Betrachtungen (vgl. oben Fig. 2). Man hat daher:

$$(107) \quad V_x = V_x' + V_x'' = \Psi_{1xt}(t, t) \quad \text{für } 0 < t < \frac{a}{c},$$

wenn die Funktion Ψ gemäß (104) und (105) durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 (108) \quad \Psi_{1xt}(a, t) &= \frac{\varepsilon c}{4 a^3} \int_0^a v_x(t-\tau) \cdot [4(a-c\tau)^3 + 6c\tau(a-c\tau)^2 + c\tau(T^2 - c^2\tau^2)] d\tau \\
 &= \frac{\varepsilon c}{4 a^3} \int_0^a v_x(t-\tau) \cdot [4a^3 - 6a^2c\tau + c^3\tau^3 + c\tau T^2] d\tau
 \end{aligned}$$

definiert wird.

Zweite Lage: $c\tau > a$, $T < a$, $c\tau + T < 2a$, wie oben in (72); vgl. Fig. 3. Das Elektron zerfällt wieder in zwei Gebiete; in dem vertikal schraffierten haben wir ein Integral V_x''' zu bilden, das aus V_x'' entsteht, wenn man in (100) die untere Grenze $a-c\tau$ durch $c\tau-a$ ersetzt, also:

$$V_x''' = -\frac{3}{4} \frac{\varepsilon c}{a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) d\tau \int_0^\pi \sin \Theta' \left[\frac{1}{2} c\tau R^2 - \frac{1}{3} R^3 \right]_{c\tau-a}^{R_1} d\Theta'.$$

Bei der Auswertung bleiben die Formeln (101) bis (103) unverändert anwendbar; und man erhält:

$$V_x''' = \frac{\varepsilon c}{4 a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) [(T^2 + c^2\tau^2 - 6a^2)c\tau + 4a^3] d\tau.$$

Für das andere (horizontal schraffierte) Gebiet, in dem $R < c\tau - a$ ist, hatten wir nach (45) und (53) einen verschwindenden Beitrag für das Potential φ gefunden, so daß jetzt gemäß (96^b) und (97) für die zweite Lage einfach:

$$V_x = V_x''' \quad \text{für } \frac{a}{c} < t < t^0$$

zu setzen ist, wenn wieder t^0 durch (72^a) bestimmt wird. Dieses Integral V_x''' ist aber genau gleich dem für die erste Lage in (108) aufgestellten Integrale. Die Gleichungen (107) und (108) haben daher für die erste und zweite Lage, d. h. für $0 < t < t_0$ gemeinsame Gültigkeit.

Dritte Lage: $0 < c\tau - a < T + a$, $t^0 < t < \tau'$, wenn τ' durch (77) in obiger Weise definiert ist. Wir haben Fig. 4 zu benutzen; in dem vertikal schraffierten Gebiete ist, wie in (73):

$$0 < c\tau - a < R < T + a < c\tau + a,$$

also S durch (43) bestimmt (da $c\tau - R < a < c\tau$ oder $R - c\tau < a < c\tau$ ist), und $\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)$ durch (96). Hier läuft Θ' von $\Theta' = 0$ bis $\Theta' = \Theta'_1$, wenn Θ'_1 durch die Gleichung:

$$(109) \quad 2 R T \cos \Theta'_1 = R^2 + T^2 - a^2$$

als Funktion von R und T (also auch von τ und t) bestimmt wird; R läuft von $R = c\tau - a$ bis $R = T + a$; dieses Gebiet liefert also nach (96) zu dem Integrale V_x den Beitrag:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{2 \pi^2 a} \int_{\tau^0}^t v_x(t - \tau) d\tau \int_{c\tau - a}^{T+a} \left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right) R dR \int_0^{\Theta'_1} \sin \Theta' d\Theta' \int_0^{2\pi} d\Psi' \\ &= -\frac{3 \varepsilon c}{4 a^3} \int_{\tau^0}^t v_x(t - \tau) d\tau \int_{c\tau - a}^{T+a} (c\tau - R) R (1 - \cos \Theta'_1) dR, \end{aligned}$$

oder wenn man den Wert von $\cos \Theta'_1$ aus (109) einsetzt:

$$\begin{aligned} (110) \quad &= -\frac{3 \varepsilon c}{8 a^3} \int_{\tau^0}^t \frac{v_x(t - \tau)}{T} \left[\frac{1}{4} \{ (T + a)^4 - (c\tau - a)^4 \} - \frac{1}{8} (2T + c\tau) \{ (T + a)^3 - (c\tau - a)^3 \} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (T^2 - a^2 + 2c\tau T) \{ (T + a)^2 - (c\tau - a)^2 \} - (T + 2a - c\tau) c\tau (T^3 - a^3) \right] d\tau. \end{aligned}$$

In dem horizontal schraffierten Gebiete (Fig. 4) ist $T - a < R < c\tau - a$, also $R < c\tau$ und $a < c\tau - R$, so daß die Gleichungen (45) und (96^b) zur Anwendung kommen, dieses Gebiet also wie in der zweiten Lage keinen Beitrag zum Integrale liefert. Es wird demnach:

$$(111) \quad V_x = \Psi_{1xt}(\tau^0, t) + \Psi_{2xt}(t, t),$$

wenn Ψ_{2xt} durch die Gleichung:

$$(112) \quad \Psi_{2xt}(a, t) = -\frac{3 \varepsilon c}{8 a^3} \int_{\tau^0}^a \frac{v_x(t - \tau)}{T} G(T, c\tau) d\tau$$

definiert wird, in der mit $G(T, c\tau)$ die ganze Funktion von T und $c\tau$ bezeichnet ist, welche in dem Ausdrucke (110) unter dem Integralzeichen auftritt.

Die **vierte Lage** bedarf keiner neuen Erörterung, da für sie keine neuen Funktionen benötigt werden, sondern nur die Grenzen einer eingehenderen Diskussion bedürfen, die ebenso wie vorhin auszuführen ist.

§ 9. Die von den Potentialen φ und $\mathcal{A}$ bei Unterlichtgeschwindigkeit abhängenden Kräfte.

Durch die berechneten Potentiale φ und $\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \mathcal{A}_z$ läßt sich die auf einen Punkt x, y, z durch die Bewegung des Elektrons ausgeübte Kraft darstellen; es geschieht die durch die Gleichungen:¹⁾

$$(113) \quad \begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial x} v_x \mathcal{A}_x - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial t}, \\ f_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial y} v_x \mathcal{A}_x - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial t}, \\ f_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial z} v_x \mathcal{A}_x - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial t}, \end{aligned}$$

welche die drei Komponenten bestimmen; und es ist wieder:

$$S v_x \mathcal{A}_x = v_x \mathcal{A}_x + v_y \mathcal{A}_y + v_z \mathcal{A}_z,$$

also z. B.:

$$\frac{\partial S v_x \mathcal{A}_x}{\partial x} = v_x \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x}.$$

Die Kraft f bezieht sich auf die Ladungseinheit des Elektrons; für die Gesamtladung ε ergibt sich also durch Integration über das Innere des Elektrons eine Kraft mit den Komponenten:

$$(114) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \iiint f_x dx dy dz, \\ \mathfrak{F}_y &= \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \iiint f_y dx dy dz, \\ \mathfrak{F}_z &= \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \iiint f_z dx dy dz. \end{aligned}$$

Die hier verlangten Integrationen sind in den beiden vorhergehenden Paragraphen bereits ausgeführt. Unter Benutzung der dort angewandten Bezeichnung erhalten wir also:

$$(115) \quad \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = -\varphi_x + \frac{1}{c} (v_x A_{xx} + v_y A_{xy} + v_z A_{xz}) - \frac{1}{c} A_{xt}.$$

Infolge der obigen Gleichung (95) lassen sich diese Relationen sehr vereinfachen; die Gleichungen (113) nämlich werden:

$$(116) \quad f_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2\pi^2 a c} \int_0^t v_x(t-\tau) \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right) \frac{d\tau}{R},$$

worin $\left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)$ durch die Gleichungen (96), (96^a) und (96^b) für die verschiedenen Gebiete definiert ist; entsprechendes gilt für f_y und f_z . Ebenso ist die Gleichung (115) infolge von (98) durch die Relation:

¹⁾ Vgl. Abraham a. a. O.

$$(117) \quad \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = -\varphi_x - \frac{1}{c} V_x$$

(und die entsprechenden für $\mathfrak{F}_y$ und $\mathfrak{F}_z$) zu ersetzen. Wir haben jetzt nur die in § 6 für φ_x und die in § 8 für V_x gewonnenen Resultate bei den verschiedenen Lagen zu verwerten.

Erste und zweite Lage (Fig. 1, 2 und Fig. 3): $0 < t < t^0$; dann ist nach (71) und (107):

$$(118) \quad \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = -\Phi_{1x}(t, t) - \frac{1}{c} \Psi_{1xt}(t, t);$$

hierbei ist Φ_{1x} durch (68), Ψ_{1xt} durch (108) definiert. Da hier $a > c\tau$ und nach (65) $c\tau > T$ sein soll, so ist offenbar Φ_{1x} negativ, wenn v_x positiv ist (da dann auch $\xi > 0$); ebenso ist nach (108) $\Psi_{1xt} < 0$ wegen (72). Die Komponente $\mathfrak{F}_x$ der Kraft ist also in der ersten Lage eine stets positive (und von Null verschiedene) Größe; ebenso ist es in der zweiten Lage. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{F}_y$ und $\mathfrak{F}_z$.

Dritte Lage: $0 < c\tau - a < T + a$, $t^0 < t < \tau'$.

Hier folgt aus (117), (79) und (107):

$$(118^a) \quad \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = -\Phi_{1x}(\tau^0, t) - \Phi_{2x}(t, t) - \frac{1}{c} \Psi_{1xt}(\tau^0, t) - \frac{1}{c} \Psi_{2xt}(t, t),$$

wo nun Φ_{2x} durch (75) und Ψ_{2xt} durch (108) definiert ist. Die Funktionen Φ_{1x} und Ψ_{1xt} sind auch hier negativ; ebenso Φ_{2x} , denn nach (74) kann diese Funktion in der Form:

$$\frac{3\varepsilon c}{4a} \int_{\tau^0}^t \frac{d\tau}{T} \int_0^{\Theta_1} \frac{\sin \Theta \cos \Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta}} [a^2 - c^2 \tau^2 - (a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta)] d\Theta$$

geschrieben werden, worin die eckige Klammer unter dem Integralzeichen offenbar negativ ist.

Um Ψ_{2xt} zu beurteilen, zerlegen wir den Ausdruck in die Summe von Ψ' und Ψ'' ; es sei:

$$\Psi' = -\frac{3\varepsilon c}{8a^3} \int_{\tau^0}^t \frac{v_x(t-\tau)}{T} \left[\frac{1}{4} \{ (T+a)^4 - (c\tau-a)^4 \} - \frac{1}{3} (2T+c\tau) \{ (T+a)^3 - (c\tau-a)^3 \} \right] d\tau;$$

dann ist nach (110):

$$\Psi'' = -\frac{3\varepsilon c}{8a^3} \int_{\tau^0}^t \frac{v_x(t-\tau)}{T} d\tau \int_{c\tau-a}^{T+a} [(T^2 - 2c\tau T - a^2) R - c\tau(T^2 - a^2)] dR.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer unter dem Integralzeichen in Ψ' ist gleich:

$$(T+a)^3 \left[\frac{1}{4} (T+a) - \frac{2}{3} T - \frac{1}{3} c\tau \right] - (c\tau-a)^3 \left[\frac{1}{4} (c\tau-a) - \frac{2}{3} T - \frac{1}{3} c\tau \right];$$

hier sind die beiden eckigen Klammern negativ; das erste Glied überwiegt dem absoluten Werte nach; die Differenz ist folglich negativ.

Ebenso ist die eckige Klammer in Ψ'' negativ, denn es ist $T > a$ und:

$$T^2 - 2c\tau T - a^2 = (T - c\tau) T - c\tau T - a^2,$$

d. h. < 0 , da $T < c\tau$ nach (65). Somit ist auch $\Psi_{2xt} < 0$; alle Glieder der rechten Seite von (118^a) sind positiv; auch in der dritten Lage ist daher die Komponente $\mathfrak{F}_x$ der wirkenden Kraft (für positive Werte von v_x) stets positiv.

Die Gleichung (108^a) ist in dem Intervalle $t^0 < t < \tau'$ anwendbar, wenn τ' die kleinste Wurzel der Gleichung (77) bezeichnet, welche größer als t^0 ist; diese Wurzel ist aber (vgl. oben S. 265) nicht immer brauchbar; es greifen dann diejenigen Überlegungen Platz, die oben am Schlusse von § 7 angestellt wurden, und die wir hier nicht zu wiederholen brauchen; wir stellen hier nur nochmals die Resultate zusammen:

Für $0 < t \leq t^0$ gilt obige Formel (118), analog zu (71).

Für $t^0 < t \leq t'$, wo t' durch die Gleichung (78) definiert ist, gilt die Formel (118^a), analog zu (76).

Für $t' < \tau' \leq t$, wo τ' durch (77) definiert ist, haben wir, analog zu (79):

$$(118^b) \quad \frac{4\pi\alpha^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = -\Phi_{1x}(\tau^0, t) - \Phi_{2x}(\tau', t) - \frac{1}{c} \Psi_{1xt}(\tau^0, t) - \frac{1}{c} \Psi_{2xt}(\tau', t).$$

In gleicher Weise haben die früheren Formeln (83) hier ihre Analoga.

Die in Richtung der Tangente der Bahnlinie wirkende Kraft $\mathfrak{F}_v$ findet man schließlich für jeden einzelnen dieser Fälle aus der Relation:

$$(119) \quad v \cdot \mathfrak{F}_v = \mathfrak{F}_x v_x + \mathfrak{F}_y v_y + \mathfrak{F}_z v_z.$$

§ 10. Das Potential φ für Volumladung bei Translation mit Überlichtgeschwindigkeit.

Im Gegensatze zu (65) definieren wir eine „Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit“ durch die Ungleichung:

$$(120) \quad c\tau < T,$$

welche für alle Werte von τ und T erfüllt sein soll; allerdings kann die Geschwindigkeit des Elektrons größer als die Lichtgeschwindigkeit sein, ohne daß diese Bedingung erfüllt ist, z. B. wenn das Elektron eine Spirale um den Anfangspunkt beschreibt, deren Windungen sehr enge sind; eine solche Bewegung fällt unter die Ungleichung (65), ist also nach unserer Definition als eine Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit zu betrachten.

Die oben (§ 6) vorgenommene Einteilung des Raumes in verschiedene Gebiete bleibt hier unverändert bestehen, demnach auch die Gleichungen (52) und (52^a). Die verschiedenen Lagen, welche zu den weiteren Gleichungen führten, bedürfen aber einer erneuten Besprechung.

Beim Potentiale φ kommt es für die Schlußformeln auf die Integrale:

$$\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz, \quad \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy dz, \quad \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx dy dz$$

an; die Berechnung derselben wird wieder mittelst der fundamentalen Formel (55) auf die Berechnung der entsprechenden Oberflächenintegrale zurückgeführt. Wir brauchen deshalb die in § 6 für Unterlichtgeschwindigkeit durchgeführten Überlegungen und Rechnungen hier nicht in entsprechender Weise zu wiederholen, sondern gehen für Überlichtgeschwindig-

$$K_1 = \frac{3}{8} \frac{\varepsilon c}{\pi a} \int_0^t d\tau \int_{\Theta_3}^{\Theta_2} [a^2 - (c\tau - R)^2] \frac{x \sin \Theta}{a R} \frac{d\Theta}{R} \int_0^{2\pi} d\Psi,$$

wenn Θ_2 und Θ_3 bzw. durch die Gleichungen:

$$(125) \quad \begin{aligned} (a + c\tau)^2 &= a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta_3, \\ (a - c\tau)^2 &= a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta_2 \end{aligned}$$

bestimmt werden. In K_1 sind R^2 und $\frac{x}{a}$ gemäß (64) und (64^a) als Funktionen von Θ und Ψ für $r=a$ einzusetzen. Die von $\cos \Psi$ und $\sin \Psi$ abhängenden Glieder fallen durch die Integration nach Ψ zwischen den Grenzen 0 und 2π heraus, und es bleibt, ähnlich wie oben bei J_1 in § 7, nur das von ξ abhängige Glied stehen, so daß:

$$K_1 = \frac{3}{4} \frac{\varepsilon c}{a} \int_0^t \frac{\xi}{T} d\tau \int_{\Theta_3}^{\Theta_2} \left[\frac{a^2 - c^2 \tau^2}{R} - R + 2c\tau \right] \sin \Theta \cos \Theta d\Theta \quad (127)$$

wird. Vermöge der früher bei Ableitung von (74) berechneten Integrale U_1 und U_2 läßt sich die Integration nach Θ durchführen; es wird, wenn man $\cos \Theta_2$ und $\cos \Theta_3$ aus (125) einsetzt:

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{\Theta_3}^{\Theta_2} \frac{\sin \Theta \cos \Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta}} d\Theta = \frac{c\tau}{3a^2 T^2} (c^2 \tau^2 - 3T^2) \\ W_2 &= \int_{\Theta_3}^{\Theta_2} \frac{\sin \Theta \cos \Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta}} d\Theta \\ &= \frac{c\tau}{15a^2 T^2} (3c^4 \tau^4 + 25a^2 c^2 \tau^2 - 15a^2 T^2 - 5c^2 \tau^2 T^2). \end{aligned}$$

Hierzu kommt jetzt das Integral:

$$W_0 = \int_{\Theta_3}^{\Theta_2} \sin \Theta \cos \Theta d\Theta = \frac{c\tau}{a T^2} (c^2 \tau^2 - T^2), \quad (128)$$

und es wird:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{3}{4} \frac{\varepsilon c}{a} \int_0^t \frac{\xi}{T} [(a^2 - c^2 \tau^2) W_1 - W_2 + 2c\tau W_0] d\tau \\ (126) \quad &= \frac{\varepsilon c}{10a^3} \int_0^t \frac{\xi c \tau}{T^3} [6c^4 \tau^4 - 10a^2 c^2 \tau^2 + (c^2 \tau^2 - T^2)(15ac\tau - 4c^2 \tau^2)] d\tau. \end{aligned}$$

Es bleibt K_2 zu berechnen, d. h. das auf die Oberfläche $R = a - c\tau$ bezügliche Doppelintegral, soweit diese Fläche im Innern des Elektrons verläuft; hier ist:

$$\cos(n, x) = \cos(R, x) = \frac{x + \xi}{R},$$

Die Kugel mit dem Radius $R = a - c\tau$ schneidet das Elektron nicht mehr, wenn die Summe der Radien kleiner als die Entfernung der Mittelpunkte, d. h. wenn:

$$a - c\tau + a < T \quad \text{oder} \quad 2a < T + c\tau$$

ist. Dann bleibt aber (wegen $T > c\tau$) noch zunächst $a > c\tau$, so daß die Kugel mit dem Radius $a - c\tau$ noch möglich bleibt. Die Grenze der Anwendbarkeit des in (129) abgeleiteten Resultates ist also durch die Gleichung:

$$(131) \quad 2a = T + c\tau$$

gegeben. Hier aber sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Bezeichnen wir mit τ_1 den Wert von τ , welcher sich aus (131) ergibt und der eine Funktion von t ist, und von dem überdies zunächst vorausgesetzt werden möge, daß er kleiner als $\frac{a}{c}$ sei. Dann ist entweder:

$$(132) \quad \tau_1 > t,$$

oder:

$$(132^a) \quad \tau_1 < t.$$

Die Variable τ ist stets an die Bedingung $0 < \tau < t$ gebunden; im Falle (132) wird daher das Bestehen der Gleichung (129) nicht gestört. Diese Gleichung gilt weiter, bis $\tau_1 = t_1$ wird, wo t_1 die kleinste positive Wurzel ($< \frac{a}{c}$) der Gleichung:

$$(133) \quad 2a = (T + c\tau)_{\tau=t}$$

bedeutet. Die Kurve (131) verläuft in diesem Falle (wenn wieder t als Abszisse und τ als Ordinate betrachtet werden) so, wie es in Fig. 10 angedeutet ist; sie schneidet die Linie $t = \tau$ zum ersten Male, indem sie von oben links kommt, und zwar für $t = \tau_1 = t_1$.

Dritte Lage im Falle (132). Dieselbe tritt ein, wenn $t > t_1$ wird, wo t_1 in der eben angegebenen Weise durch (133) definiert ist. Jetzt ist die Gleichung (131) durch Werte τ_2 befriedigt (vgl. Fig. 10; ob die Kurve mit wachsendem τ steigt oder fällt, ist nach den Erörterungen am Schlusse von § 7 gleichgültig), die $< t$ (und $> t_1$) sind. Es ist für $\tau < \tau_2$:

$$2a > T + c\tau,$$

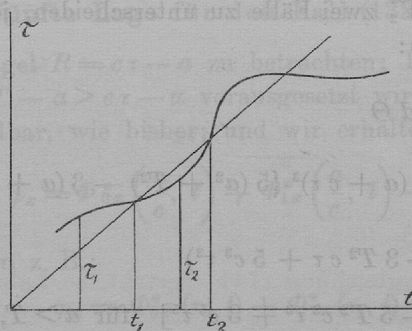


Fig. 10.

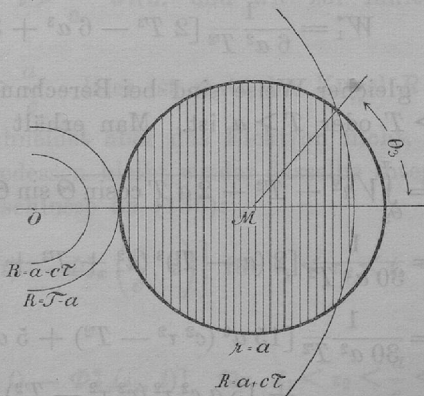


Fig. 11.

so daß für diesen Teil des Integrationsintervalles ($0 < \tau < \tau_2$) die Formel (129) gültig bleibt; aber für $\tau > \tau_2$ wird:

$$2a < T + c\tau,$$

und das Elektron wird wohl noch von der Kugel $a + c\tau$, nicht aber von der Kugel $a - c\tau$ geschnitten. Es kommt nur das Doppelintegral über denjenigen Teil der Kugeloberfläche ($r = a$) in Betracht, auf dem Θ von Θ_3 bis π läuft, wo wieder Θ_3 durch die erste Gleichung (125) definiert ist (vgl. Fig. 11). Der betreffende Beitrag wird durch die Funktion:

$$\Phi_{2x}(a, t) = \frac{3\epsilon c}{4a} \int_{\tau_1}^{\xi} \frac{d\tau}{T} \int_{\Theta_3}^{\pi} [a^2 - (c\tau - R)^2] \sin \Theta \cos \Theta \frac{d\Theta}{R}$$

für $a = t$ dargestellt. Die für (126) aufgestellten Integrale W_0, W_1, W_2 sind jetzt unter Benutzung der in (66) und (66^a) berechneten unbestimmten Integrale bzw. durch W_0^*, W_1^*, W_2^* zu ersetzen; dabei ist:

$$(134) \quad W_0^* = \int_{\Theta_3}^{\pi} \sin \Theta \cos \Theta d\Theta = \frac{c^2 \tau^2 - T^2}{8a^2 T^2} [c^2 \tau^2 - T^2 + 4a^2 + 4ac\tau],$$

$$(134^a) \quad W_1^* = \int_{\Theta_3}^{\pi} \frac{\sin \Theta \cos \Theta d\Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta}} = \frac{1}{6a^2 T^2} [2(a^2 + T^2 + aT) \sqrt{(a - T)^2} - \{3a^2 + 3T^2 - (a + c\tau)^2\} (a + c\tau)].$$

Auf der rechten Seite muß der positive Wert der Quadratwurzel aus $(a - T)^2$ eingesetzt werden. Es ist also zu unterscheiden, ob $a > T$ oder $a < T$ ist. Für kleine Werte von τ ist sicher $a > T$; ob dies aber in unserem Intervalle ($t > t_1$) vorkommen kann, bedarf in jedem Falle der Untersuchung; es möge für $t_1 < \tau < t_1^*$ die Bedingung $a > T$ erfüllt sein, für größere Werte von τ (d. h. $\tau > t_1^*$) nicht; dann ist:

$$(134^b) \quad W_1^* = \frac{1}{6a^2 T^2} [-2T^3 + 3ac^2\tau^2 - 3(a + c\tau)T^2 + c^3\tau^3] \text{ für } t_1 < \tau < t_1^*,$$

dagegen:

$$(134^c) \quad W_1^* = \frac{1}{6a^2 T^2} [2T^3 - 6a^3 + 3ac^2\tau^2 - 3(a + c\tau)T^2 + c^3\tau^3] \text{ für } \tau > t_1^*.$$

In gleicher Weise sind bei Berechnung von W_2^* zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $a > T$ oder $T > a$ ist. Man erhält aus (66^a):

$$\begin{aligned} W_2^* &= \int_{\Theta_3}^{\pi} \sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta} \sin \Theta \cos \Theta d\Theta \\ &= \frac{1}{30a^2 T^2} [2(a - T)^3 (a^2 + T^2 + 3aT) - (a + c\tau)^3 \{5(a^2 + T^2) - 3(a + c\tau)^2\}] \\ (134^d) &= \frac{1}{30a^2 T^2} [15a^3 (c^2\tau^2 - T^2) + 5a^2 (2T^3 - 3T^2 c\tau + 5c^3\tau^3) \\ &\quad + 15ac^2\tau^2 (c^2\tau^2 - T^2) - 2T^5 - 5T^3 c^3\tau^3 + 3c^5\tau^5] \text{ für } a > T, \end{aligned}$$

dagegen:

$$\begin{aligned}
 W_2^* &= \frac{1}{30 a^2 T^2} [2 (T - a)^3 (a^2 + T^2 + 3 a T) - (a + c \tau)^3 \{5 (a^2 + T^2) - 3 (a + c \tau)^2\}] \\
 (134^e) \quad &= \frac{1}{30 a^2 T^2} [-4 a^5 + 5 a^3 (T^2 + 3 c^2 \tau^2) - 5 a^2 (2 T^3 + 3 T^2 c \tau - 5 c^3 \tau^3) \\
 &\quad + 15 a c^2 \tau^2 (c^2 \tau^2 - T^2) + 2 T^5 - 5 T^2 c^3 \tau^3 + 3 c^5 \tau^5] \quad \text{für } a < T.
 \end{aligned}$$

Es wird also:

$$(135) \quad \Phi_{2x}^*(a, t) = \frac{3 \varepsilon c}{4 a} \int_{\tau_1}^a \frac{\xi}{T} [(a^2 - c^2 \tau^2) W_1^* - W_2^* + 2 c \tau W_0^*] d\tau.$$

Dabei ist das Integrationsintervall in zwei Teile (eventuell in mehrere Teile) zu zerlegen; in dem Teilintervalle, in welchem $a > T$ ist, sind W_1^* und W_2^* bzw. durch die Ausdrücke (134^b) und (134^d) zu ersetzen, in dem Teilintervalle, wo $a < T$ ist, dagegen bzw. durch (134^c) und (134^e). Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}
 (135^a) \quad \varphi_x &= \Phi_{0x}^*(t, t) + \Phi_{1x}^*(t, t), \quad \text{wenn } 0 < t < \tau_2 < t_2 \\
 \varphi_x &= \Phi_{0x}^*(\tau_2, t) + \Phi_{1x}^*(\tau_2, t) + \Phi_{2x}^*(t, t) - \Phi_{2x}^*(\tau_2, t), \quad \text{wenn } t_1 < \tau_2 < t < t_2,
 \end{aligned}$$

wo nun t_2 die nächst größere Wurzel der Gleichung (133) bezeichnet, die noch kleiner als $a:c$ ist. (Die Bedingung $t_1 < \tau_2$ entspricht der Figur 11; fällt die Kurve mit wachsendem t , so kann auch $\tau_2 < t_1$ werden.)

Vierte Lage für den Fall (132) und $t_2 < t < \frac{a}{c}$, wenn t_2 ebenso wie im vorstehenden definiert ist. Die Wurzel τ der Gleichung (131) wird hier größer als t ; sie werde mit τ_3 bezeichnet; sonst bleibt alles unverändert; man erhält also:

$$(136) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^*(t, t) + \Phi_{1x}^*(t, t) \quad \text{für } 0 < \tau_2 < t_2 < t < \tau_3 < t_3,$$

wenn t_3 die nächste Wurzel der Gleichung (133) bezeichnet, denn jetzt wird im allgemeinen wieder:

$$2a < T + c\tau \quad \text{für } \tau > t_2,$$

so daß das Elektron hier wieder von der Kugel $R = a - c\tau$ geschnitten wird, und die Funktionen Φ_{0x}^* , Φ_{1x}^* zur Anwendung kommen.

In ähnlicher Weise geht es weiter, bis $t > \frac{a}{c}$ wird, und wir zur fünften Lage kommen.

Fünfte Lage für den Fall (132) und $t > \frac{a}{c}$. Hier ist statt der Kugel $R = a - c\tau$ die Kugel $R = c\tau - a$ zu betrachten; letztere schneidet aber das Elektron nicht, da nach (120) $T - a > c\tau - a$ vorausgesetzt wird. Infolgedessen bleibt wieder dasselbe Integral Φ_{2x} anwendbar, wie bisher; und wir erhalten im Anschlusse an (136):

$$(137) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Phi_{1x}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) + \left[\Phi_{2x}^*(t, t) - \Phi_{2x}^*\left(\frac{a}{c}, t\right)\right] \quad \text{für } t_1 < \tau_2 < t_2 < \frac{a}{c} < t,$$

dagegen z. B.:

$$(137^a) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^*(\tau_2, t) + \Phi_{1x}^*(\tau_2, t) + [\Phi_{2x}^*(t, t) - \Phi_{2x}^*(\tau_2, t)] \quad \text{für } t_1 < \tau_2 < \frac{a}{c} < t < t_2,$$

wie man durch entsprechende Überlegungen leicht findet.

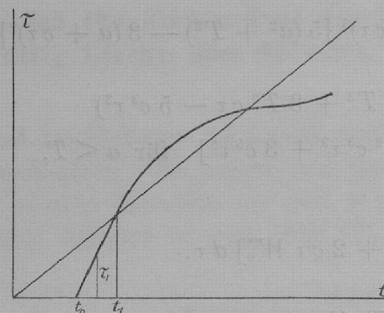


Fig. 12.

Dritte Lage im Falle (132^a). Verläuft die Kurve (131) derartig, wie es in Fig. 12 gezeichnet ist, indem $\tau_1 < t$ ist, so sei mit t_0 der Schnittpunkt der Kurve mit der τ -Achse bezeichnet; dann ist offenbar die Gleichung (129) anwendbar für $0 < t < t_0$. Wird aber $t > t_0$, so ist $t_0 < \tau_1 < t < \frac{a}{c}$; und für das Intervall von τ_1 bis t wird das Elektron von der Kugel $R = a - c\tau$ nicht geschnitten, so daß hier die Funktion Φ_{2x}^* anzuwenden ist; es muß also in Φ_{2x}^* die untere Grenze t_1 durch τ_1 ersetzt werden, d. h. es ist:

$$(138) \quad \begin{aligned} \varphi_x &= \Phi_{0x}^*(t, t) + \Phi_{1x}^*(t, t) \quad \text{für } 0 < t < t_0, \quad \text{und} \\ \varphi_x &= \Phi_{0x}^*(\tau_1, t) + \Phi_{1x}^*(\tau_1, t) + [\Phi_{2x}^*(t, t) - \Phi_{2x}^*(\tau_1, t)] \quad \text{für } t_0 < \tau_1 < t < \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Vierte Lage im Falle (132^a). Wächst t über t_1 hinaus, bleibt aber kleiner als $\frac{a}{c}$, so wird das Elektron von der Kugel $R = a - c\tau$ wieder geschnitten; und wir finden:

$$(139) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^*(t_1, t) + \Phi_{1x}^*(t_1, t) + \Phi_{2x}^*(t, t),$$

und so geht es fort.

Fünfte Lage im Falle (132^a). Es werde $t > \frac{a}{c}$. Dann erhalten wir:

$$(140) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^*(t_1, t) + \Phi_{1x}^*(t_1, t) + \Phi_{2x}^*(t, t) \quad \text{für } \tau_1 < t_1 < \frac{a}{c} < t.$$

Dagegen z. B.:

$$(140^a) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Phi_{1x}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Phi_{2x}^*(t, t) - \Phi_{2x}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) \quad \text{für } \tau_0 < \frac{a}{c} < t < t_1.$$

Und so wird man sich an der Hand einer Figur leicht von allen möglichen Fällen Rechenschaft geben, die hier ebenso wie bei Unterlichtgeschwindigkeit in großer Mannigfaltigkeit auftreten können.

Endlich kann T so weit wachsen, daß auch die Kugel mit dem Radius $c\tau + a$ das Elektron nicht mehr schneidet, dann ist:

$$(141) \quad c\tau + a < T - a \quad \text{oder} \quad 2a < T - c\tau,$$

und wir kommen zur

Sechsten Lage: die durch diese Ungleichung (141) charakterisiert sei. Im ganzen Innern des Elektrons ist jetzt $c\tau + a < R$, also (45) anwendbar, und φ verschwindet im ganzen Integrationsgebiete. Bezeichnet demnach τ_4 die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$(142) \quad 2a = T - c\tau,$$

welche positiv und $> \frac{a}{c}$ und kleiner als t ist, und zwar derart, daß für $\tau < \tau_4$ die

Ungleichung $2a > T - c\tau$, für $\tau > \tau_4$ aber die Ungleichung (141) besteht, so haben wir für $t > \tau_4$ keinen Beitrag zum dreifachen Integrale in Rechnung zu ziehen; es wird z. B. im Anschlusse an (137):

$$(143) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^* \left(\frac{a}{c}, t \right) + \Phi_{1x}^* \left(\frac{a}{c}, t \right) + \left[\Phi_{2x}^*(\tau_4, t) - \Phi_{2x}^* \left(\frac{a}{c}, t \right) \right] \text{ für } t_1 < \tau_1 < t_2 < \frac{a}{c} < \tau_4 < t$$

dagegen im Anschlusse an (137^a):

$$(143^a) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^*(t_2, t) + \Phi_{1x}^*(t_2, t) + [\Phi_{2x}^*(\tau_4, t) - \Phi_{2x}^*(t_2, t)] \text{ für } t_1 < \tau_1 < \frac{a}{c} < t_2 < \tau_4 < t.$$

Ist aber die Wurzel τ_4 der Gleichung (142) größer als t , so ist in vorstehenden beiden Formeln τ_4 durch t zu ersetzen.

Ebenso wird im Anschlusse an (140):

$$(144) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^*(t_1, t) + \Phi_{1x}^*(t_1, t) + \Phi_{2x}^*(\tau_4, t) \text{ für } \tau_1 < t_1 < \frac{a}{c} < \tau_4 < t$$

und im Anschlusse an (140^a):

$$(144^a) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^* \left(\frac{a}{c}, t \right) + \Phi_{1x}^* \left(\frac{a}{c}, t \right) + \left[\Phi_{2x}^*(\tau_4, t) - \Phi_{2x}^* \left(\frac{a}{c}, t \right) \right] \text{ für } \tau_0 < \frac{a}{c} < t_1 < \tau_4 < t.$$

Auch hier ist für $\tau_4 > t$ die obere Grenze τ_4 durch t zu ersetzen.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Ungleichung (141) nur erfüllt sein kann für $c\tau > a$, denn wenn das Elektron ganz außerhalb der Kugel $R = c\tau + a$ liegt, so muß es um so mehr außerhalb der Kugel $R = c\tau - a$ liegen; es muß also der Übergang von $a - c\tau$ zu $c\tau - a$ schon stattgefunden haben.

Hat die Gleichung (142) mehrere Wurzeln, so hat man ganz analoge Überlegungen anzustellen, wie sie im Falle der Unterlichtgeschwindigkeit am Schlusse von § 7 angestellt wurden.

§ 11. Das Potential $\mathfrak{A}$ bei Volumladung und Translation mit Überlichtgeschwindigkeit und die auf das Elektron wirkende Kraft.

Wie in § 8 gezeigt wurde, unterscheidet sich das Potential $\mathfrak{A}$ von dem Potentiale φ hauptsächlich dadurch, daß unter dem Integralzeichen der Faktor:

$$\frac{v_x(t-\tau)}{c} \quad \left(\text{bzw.} \quad \frac{v_y(t-\tau)}{c}, \quad \frac{v_z(t-\tau)}{c} \right) \quad (145)$$

hinzutritt. Die Einteilung des Raumes in verschiedene Gebiete ist aber jetzt eine andere, sie ist durch die für Überlichtgeschwindigkeit ($T > c\tau$) in § 10 angestellten Überlegungen bedingt.

Unabhängig von dieser Einteilung sind die allgemeinen Betrachtungen, welche zu der Relation (95) und weiterhin zu der Gleichung (116) führten. Aus letzterer folgte, daß die Berechnung der Integrale $A_{xx}, A_{xy}, A_{xz}, A_{xt} \dots$ im einzelnen nicht ausgeführt zu werden braucht, denn diese Funktionen heben sich bei Berechnung der Kraftkomponenten $\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z$ heraus; und es wird schließlich gemäß der Formel (117) nur das Integral V_x benötigt, welches durch (97) definiert war:

$$V_x = \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a} \iiint dx dy dz \int_0^t v_x(t-\tau) \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right) \frac{d\tau}{R},$$

worin für $\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)$ die in (96), (96^a), (96^b) angegebenen Werte je nach den betrachteten räumlichen Gebietsteilen einzusetzen sind. Wir beschränken uns daher hier auf Berechnung des dreifachen Integrals V_x für die verschiedenen Lagen.

Erste Lage, charakterisiert durch die Bedingung (121), d. h. $a > c\tau + T$, und veranschaulicht durch Fig. 8. Die Kugel $r = a$ (d. i. das Elektron) wird von den Kugeln $R = a - c\tau$ und $R = a + c\tau$ in drei Gebiete zerlegt. In dem horizontal schraffierten Gebiete ist $a > R + c\tau$, so daß (44) und (96^a) zur Anwendung kommen. Es ist folglich der entsprechende Teil von V_x gleich:

$$V_x = \frac{3 \varepsilon c}{4 \pi a^3} \iiint dx dy dz \int_0^t v_x(t - \tau) d\tau,$$

wobei sich die räumliche Integration auf das von den Kugeln $R = a - c\tau$ und $r = a$ begrenzte Gebiet bezieht. Wir führen wieder mittels (69) Polarkoordinaten R, Θ, Ψ' ein, wobei Ψ' von 0 bis 2π , Θ' von 0 bis π läuft; um also die Grenzen genau anzugeben, zerlegen wir V_x in die Summe W_1 und W_2 .

Es entspreche W_1 dem Innern einer Kugel, die mit dem Radius $a - T$ um den Punkt $R = 0$ konstruiert werde und demnach die Kugel $r = a$ von innen berührt; hier wächst Θ' von Null bis π und R von Null bis $a - T$; es ist folglich:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{3 \varepsilon c}{4 \pi a^3} \int_0^t v_x(t - \tau) d\tau \int_0^{a-T} R^2 dR \int_0^\pi \sin \Theta' d\Theta' \int_0^{2\pi} d\Psi' \\ &= \frac{\varepsilon c}{a^3} \int_0^t v_x(t - \tau) \cdot (a - T)^3 d\tau. \end{aligned}$$

Das Gebiet für W_2 werde begrenzt durch die Kugel $R = a - T$, die Kugel $R = a - c\tau$ und die Kugel $r = a$; für einen gegebenen Wert von R läuft Θ' von Null bis zu dem durch die Gleichung:

$$(145) \quad a^2 = T^2 + R^2 - 2 R T \cos \Theta_0$$

zu berechnenden Werte Θ_0 , so daß:

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{3 \varepsilon c}{4 \pi a^3} \int_0^t v_x(t - \tau) d\tau \int_{a-T}^{a-c\tau} R^2 dR \int_0^{\Theta_0} \sin \Theta' d\Theta' \int_0^{2\pi} d\Psi' \\ &= \frac{3 \varepsilon c}{4 a^3} \int_0^t v_x(t - \tau) \frac{d\tau}{T} \int_{a-T}^{a-c\tau} (2 R T - T^2 - R^2 + a^2) R dR \\ &= \frac{3 \varepsilon c}{4 a^3} \int_0^t v_x(t - \tau) \left[(a^2 - T^2) \frac{R^2}{2} + \frac{2}{3} R^3 T - \frac{1}{4} R^4 \right]_{a-T}^{a-c\tau} \frac{d\tau}{T}. \end{aligned}$$

Es wird demnach:

$$(146) \quad V_x' = W_1 + W_2 = \frac{3 \varepsilon c}{4 a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) \left[\frac{4}{3} (a-T)^3 T + g(a-c\tau, T) - g(a-T, T) \right] \frac{d\tau}{T},$$

wenn die ganze Funktion $g(R, T)$ durch die Gleichung:

$$(146^a) \quad g(R, T) = \frac{1}{2} (a^2 - T^2) R^2 + \frac{2}{3} T R^3 - \frac{1}{4} R^4$$

definiert war.

Das zweite Gebiet liegt zwischen den Kugeln $R = a - c\tau$ und $R = a + c\tau$ und wird seitlich durch die Kugel $r = a$ begrenzt; in ihm ist der Beitrag zum Integrale V_x nach (43) und (96) gleich:

$$V_x'' = -\frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a^3} \iiint dx dy dz \int_0^t v_x(t-\tau) \cdot (c\tau - R) \frac{d\tau}{R}.$$

Für einen gegebenen Wert von R läuft hier Θ' von Null bis zu dem durch die Gleichung (145) bestimmten Wert Θ'_0 , und sodann R von $a - c\tau$ bis $a + c\tau$. Es wird also:

$$\begin{aligned} (147) \quad V_x'' &= -\frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) d\tau \int_{a-c\tau}^{a+c\tau} (c\tau - R) R dR \int_0^{\Theta'_0} \sin \Theta' d\Theta' \int_0^{2\pi} d\psi' \\ &= -\frac{3 \varepsilon c}{8 a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) \frac{d\tau}{T} \int_{a-c\tau}^{a+c\tau} (c\tau - R) (2 R T - T^2 - R^2 + a^2) dR \\ &= -\frac{3 \varepsilon c}{8 a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) \cdot [c\tau \{g_0(a+c\tau, T) - g_0(a-c\tau, T)\} \\ &\quad - g(a+c\tau, T) + g(a-c\tau, T)] \frac{d\tau}{T}, \end{aligned}$$

worin g wieder durch (146^a) und g_0 durch die Gleichung:

$$(147^a) \quad g_0(R, T) = (a^2 - T^2) R + T R^2 - \frac{1}{3} R^3$$

gegeben wird. Für die erste Lage wird so schließlich:

$$\begin{aligned} (148) \quad V_x = V_x' + V_x'' &= \frac{3 \varepsilon c}{8 a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) \left[\frac{8}{3} T (a-T)^3 + g(a+c\tau) + g(a-c\tau) - 2g(a-T) \right. \\ &\quad \left. + c\tau \{g_0(a-c\tau) - g_0(a+c\tau)\} \right] \frac{d\tau}{T}, \end{aligned}$$

wo in g_0 und g das zweite Argument T nicht angegeben wurde, oder ausgerechnet:

$$(148^a) \quad V_x = \frac{3 \varepsilon c}{8 a^3} \int_0^t v_x(t-\tau) \cdot \left[\frac{1}{6} T^4 - 2 a^2 T^2 + \frac{8}{3} a^3 T + c^2 \tau^2 (T^2 - 2 a^2 + \frac{1}{6} c^2 \tau^2) \right] \frac{d\tau}{T}.$$

Zweite Lage, erläutert durch obige Figur 9. Diese neue Figur war nur notwendig wegen der veränderten Lage der Kugel $R = c\tau$; das Elektron wird auch hier

von den beiden Kugeln $R = a - c\tau$ und $R = a + c\tau$ geschnitten, so daß die Gleichung (148) auch für die zweite Lage gültig bleibt; wir setzen:

$$(149) \quad \Psi_{1xt}(a, t) = \frac{\varepsilon c}{16 a^3} \int_0^a v_x(t-\tau) \cdot [T^4 + 16a^3 T + c^4 \tau^4 + 6c^2 \tau^2 T^2 - (12a^3 T^2 + 12a^2 c^2 \tau^2)] \frac{d\tau}{T}$$

also:

$$(150) \quad V_x = \Psi_{1xt}(t, t) \quad \text{für } 0 < t < t_1 \text{ im Falle (132).}$$

$$, \quad 0 < t < \tau_0 , \quad , \quad (132^a).$$

Dritte Lage. Das Elektron wird von der Kugel $R = a - c\tau$ nicht mehr geschnitten; es tritt dies ein, wenn $\tau > \tau_1$ wird, wo τ_1 die kleinste brauchbare Wurzel der in (131) gegebenen Gleichung bezeichnet; und zwar sind zwei Fälle zu unterscheiden, die oben bzw. durch die Ungleichungen (132) und (132^a) gekennzeichnet werden. Für einen gegebenen Wert von R läuft Θ' von Null bis zu dem durch die Gleichung:

$$a^2 = T^2 + R^2 - 2 R T \cos \Theta'_2$$

bestimmten Wert Θ'_2 , R selbst aber läuft von $T - a$ bis $c\tau + a$. Da jetzt Gleichung (96) anzuwenden ist, so wird der dem Gebiete entsprechende Beitrag durch die Funktion:

$$(151) \quad \begin{aligned} \Psi_{2xt}^*(a, t) &= -\frac{3\varepsilon c}{4 a^3} \int_{\tau_1}^a v_x(t-\tau) d\tau \int_{T-a}^{c\tau+a} (c\tau - R) R \int_0^{\Theta'_2} \sin \Theta' d\Theta' \\ &= -\frac{3\varepsilon c}{8 a^3} \int_{\tau_1}^a \frac{v_x(t-\tau)}{T} d\tau \int_{T-a}^{c\tau+a} (c\tau - R) [2 R T - R^2 - T^2 + a^2] dR \\ &= -\frac{3\varepsilon c}{8 a^3} \int_{\tau_1}^a v_x(t-\tau) \cdot [c\tau \{g_0(c\tau + a) - g_0(T - a)\} - g(a + c\tau) + g(T - a)] \frac{d\tau}{T} \end{aligned}$$

dargestellt, und es wird hier g_0 und g wieder bzw. durch (147^a) und (146) gegeben, so daß die in der eckigen Klammer stehende ganze Funktion sich in der Form:

$$(151^a) \quad -\frac{1}{2}(a^2 - T^2 - 2c\tau T)[(c\tau + a)^2 - (T - a)^2] + (a^2 - T^2)c\tau(c\tau - T + 2a) \\ + \frac{1}{4}[(c\tau + a)^4 - (T - a)^4] - \frac{1}{3}(c\tau + 2T)[c\tau + a]^3 - (T - a)_3]$$

schreiben läßt, wodurch die Analogie mit der in (112) auftretenden ganzen Funktion deutlich hervortritt.

Es wird jetzt in der dritten Lage für den Fall (132):

$$(152) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*(t, t), \quad \text{wenn } 0 < t < \tau_2, \\ V_x = \Psi_{1xt}^*(\tau_2, t) + \Psi_{2xt}^*(t, t) - \Psi_{2xt}^*(\tau_2, t), \quad \text{wenn } t_1 < \tau_2 < t < t_2,$$

dagegen für den Fall (132^a):

$$(152^a) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*(\tau_1, t) + \Psi_{2xt}^*(t, t) - \Psi_{2xt}^*(\tau_1, t) \quad \text{für } \tau_0 < \tau_1 < t < t_1 < \frac{a}{c},$$

wobei τ_0 und τ_1 dieselbe Bedeutung haben wie in (135) und (138).

Vierte Lage im Falle (132). Es wird:

$$(153) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*(t, t) \quad \text{für } 0 < \tau_2 < t_2 < t < \tau_3 < t_3 < \frac{a}{c} \quad \text{bzw. } 0 < \tau_2 < t_2 < t < \tau_3 < \frac{a}{c} < t_3.$$

Fünfte Lage für den Fall (132). Es wird analog zu (137):

$$(154) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Psi_{2xt}^*(t, t) - \Psi_{2xt}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) \quad \text{für } t_1 < \tau_2 < t_2 < \frac{a}{c} < t,$$

dagegen analog zu (137^a):

$$(155) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*(\tau_2, t) + [\Psi_{2xt}^*(t, t) - \Psi_{2xt}^*(\tau_2, t)] \quad \text{für } t_1 < \tau_2 < \frac{a}{c} < t < t_2.$$

Dritte Lage im Falle (132^a); dieselbe ist schon oben durch Gleichung (152^a) erledigt.

Vierte Lage im Falle (132^a); es wird analog zu (139):

$$(156) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*(t_1, t) + \Psi_{2xt}^*(t, t) \quad \text{für } \tau_0 < \tau_1 < t_1 < t < \frac{a}{c}.$$

Fünfte Lage im Falle (132^a). Wir haben analog zu (140):

$$(157) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*(t_1, t) + \Psi_{2xt}^*(t, t) \quad \text{für } \tau_0 < \tau_1 < t_1 < \frac{a}{c} < t$$

also dieselbe Formel wie im vorigen Falle; dagegen z. B. analog zu (140^a):

$$(157^a) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Psi_{2xt}^*(t, t) - \Psi_{2xt}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) \quad \text{für } \tau_0 < \frac{a}{c} < t < t_1 \quad \text{u. s. f.}$$

Endlich kann es bei wachsendem t eintreten, daß auch die Kugel mit dem Radius $R = a + c\tau$ das Elektron nicht mehr trifft; wir kommen dann zur sechsten Lage. Es sei wieder τ_4 die kleinste brauchbare Wurzel der Gleichung (142), so wird z. B. im Anschlusse an (154):

$$(158) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Psi_{2xt}^*(\tau_4, t) - \Psi_{2xt}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) \quad \text{für } t_1 < \tau_1 < t_2 < \frac{a}{c} < \tau_4 < t,$$

dagegen im Anschlusse an (154^a):

$$(158^a) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*(t_2, t) + \Psi_{2xt}^*(\tau_4, t) - \Psi_{2xt}^*(t_2, t) \quad \text{für } t_1 < \tau_2 < \frac{a}{c} < t_2 < \tau_4 < t.$$

Ebenso wird z. B. im Anschlusse an (157), analog zu (144):

$$(159) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*(t_1, t) + \Psi_{2xt}^*(\tau_4, t) \quad \text{für } \tau_1 < t_1 < \frac{a}{c} < \tau_4 < t,$$

dagegen im Anschlusse an (157^a):

$$(159^a) \quad V_x = \Psi_{1xt}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Psi_{2xt}^*(\tau_4, t) - \Psi_{2xt}^*\left(\frac{a}{c}, t\right) \quad \text{für } \tau_0 < \frac{a}{c} < t_1 < \tau_4 < t.$$

Bei der Willkürlichkeit der in T vorkommenden Funktionen v_x, v_y, v_z sind natürlich auch andere als die hier betrachteten Fälle möglich; dieselben lassen sich indessen immer in analoger Weise erledigen.

Nach Berechnung der Funktionen φ_x und V_x bietet die Bestimmung der Komponenten $\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z$ infolge der Relation (117) keine Schwierigkeiten mehr. Wir können sofort dazu übergehen, die betreffenden Resultate zusammenzustellen.

Erste und zweite Lage, nach (129) und (150):

$$(160) \quad \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = -\Phi_{0x}^*(t, t) - \Phi_{1x}^*(t, t) - \frac{1}{c} \Psi_{1xt}^*(t, t) \quad \text{für } 0 < t < \tau_2 \text{ im Falle (132)}$$

$$, \quad 0 < t < \tau_0 , \quad , \quad (132^a).$$

Um die Richtung der Kraft zu bestimmen, bemerken wir, daß Φ_{0x}^* nach (126) von den Integralen W_0, W_1 und W_2 abhängt. Hier ist W_0 (wegen $c\tau < T$) negativ; es ist:

$$(a^2 - c^2 \tau^2) W_1 - W_2 = -(c^2 \tau^2 + T^2) W_1 - 2aT \int_{\Theta_3}^{\Theta_2} \frac{\sin \Theta \cdot \cos^2 \Theta}{V a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta} d\Theta.$$

Hier ist $W_1 = \frac{-c\tau}{3a^2 T^2} (3T^2 - c^2 \tau^2)$ negativ, das Integral auf der rechten Seite ist positiv; über die in K_1 vorkommende Kombination $(a^2 - c^2 \tau^2) W_1 - W_2$ ist folglich hinsichtlich des Vorzeichens etwas allgemeines kaum zu sagen. Die Funktion Φ_{1x}^* ist nach der in (127) und (128) gegebenen Definition stets negativ.

In Ψ_{1xt}^* ist:

$$\frac{\partial g_0}{\partial R} = 2RT \cdot (1 - \cos \Theta_0) > 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial R} = Rg_0 > 0,$$

folglich wachsen g_0 und g mit wachsendem R und es sind in dem Ausdrucke (148) für V_x die vier ersten unter dem Integralzeichen in der eckigen Klammer stehenden Glieder positiv, die in der geschweiften Klammer (Faktor von $c\tau$) stehenden Glieder aber geben etwas negatives. Welcher Teil überwiegt, scheint sich allgemein nicht angeben zu lassen, denn auch in dem ausgerechneten Ausdrucke, wie er in (149) unter dem Integralzeichen steht, könnte es sein, daß das positive Glied $a^3 T$ für das Vorzeichen entscheidend wird, und es könnte eintreten, daß ein positiver Wert von Ψ_{1xt}^* auch das Vorzeichen von $\mathfrak{F}_x$ bestimmt, so daß dann die Komponente der Kraft entgegengesetzt der Bewegungsrichtung wirkt.

Dritte Lage im Falle (132). Es wird nach (134) und (152):

$$(161) \quad \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = -\Phi_{0x}^*(\tau_2, t) - \Phi_{1x}^*(\tau_2, t) - [\Phi_{2x}^*(t, t) - \Phi_{2x}^*(\tau_2, t)]$$

$$- \frac{1}{c} \Psi_{1xt}^*(\tau_2, t) - \frac{1}{c} [\Psi_{2xt}^*(t, t) - \Psi_{2xt}^*(\tau_2, t)] \quad \text{für } \tau_1 < \tau_2 < t < t_2.$$

Hier wird die Entscheidung über das Vorzeichen noch umständlicher; denn auf der rechten Seite von (135) zeigt unter dem Integralzeichen die Summe $(a^2 - c^2 \tau^2) W_1 - W_2$ analoges Verhalten wie bei der ersten Lage, aber W_0 ist positiv.

In gleicher Weise kann man die übrigen Lagen durchgehen, indem man gemäß der Relation (117) die Ausdrücke $-\varphi_x$ und $-\frac{1}{c} V_x$ addiert; es ist wohl nicht nötig, die entstehenden Formeln hier zusammenzustellen. Das in § 13 zu behandelnde Beispiel konstanter Überlichtgeschwindigkeit wird überdies die Formeln erläutern.

§ 12. Die translatorische geradlinige Bewegung eines Elektrons bei Volumladung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit, bzw. Lichtgeschwindigkeit.

Bei geradliniger Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vereinfachen sich die gewonnenen Resultate außerordentlich, indem sich alle Integrationen ohne Schwierigkeit durchführen und die Wurzeln der auftretenden Gleichungen leicht bestimmen lassen.

Es sei v die gegebene konstante Geschwindigkeit, und die Bewegung finde in Richtung der X -Achse statt; dann ist nach (26):

$$\xi = v \cdot \tau, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0$$

und nach (51):

$$(162) \quad T = \xi = v \cdot \tau,$$

also T nur von der Hilfsvariablen τ , nicht von t selbst, abhängig. Die Bedingung (65) für Unterlichtgeschwindigkeit wird hier einfach:

$$v < c.$$

Wir haben gemäß § 7 die verschiedenen möglichen Lagen zu besprechen. Für die erste Lage ist die Funktion Φ_{1x} nach (68) zu berechnen. Es wird:

$$(163) \quad \begin{aligned} \Phi_{1x}(a, t) &= \frac{\varepsilon c v}{10 a^3} \int_0^a \tau [(v^2 + 5 c^2) \tau^2 - 10 a^2] d\tau \\ &= \frac{\varepsilon c v}{10 a^3} \left[(v^2 + 5 c^2) \frac{a^4}{4} - 5 a^2 a^2 \right] \end{aligned}$$

und diese Formel ist für $0 < t < \frac{a}{c}$ gültig. Nach Gleichung (108) wird ferner:

$$(163^a) \quad \Psi_{1xt}(a, t) = \frac{\varepsilon c v a}{16 a^3} [16 a^3 - 12 a^2 c a + (c^2 + v^2) c a^3],$$

und somit die in Richtung der x -Achse wirkende Kraft, wenn man nach Potenzen von $\frac{ct}{a}$ (welche Zahl kleiner als Eins ist) entwickelt, und $\omega = \frac{v}{c}$ setzt:

$$(164) \quad \frac{4 \pi a^3}{3 \varepsilon} \mathcal{F}_x = - \Phi_{1x} - \frac{1}{c} \Psi_{1xt} = - \varepsilon v t \left[1 - \frac{5}{4} \frac{ct}{a} + \frac{1}{16} \left(3 + \frac{7}{5} \omega^2 \right) \left(\frac{ct}{a} \right)^3 \right].$$

Diese für die erste Lage abgeleitete Gleichung bleibt nach obigem auch für die zweite Lage gültig, d. h. so lange $t < t^0$ ist, wo t^0 durch obige Gleichung (72^a) bestimmt wird; da jetzt $T = v \tau$ zu nehmen ist, so ergibt sich:

$$(164^a) \quad t^0 = \frac{2 a}{v + c}.$$

In der Gleichung (164) ist also die Variable $\frac{ct}{a}$ an die Bedingung

$$\frac{ct}{a} < \frac{2}{1 + \omega}$$

gebunden, wo nun die rechte Seite (für $\omega < 1$) größer als die Einheit ist.

Für kleine Werte von t ist die Kraft $\mathfrak{F}_x$ negativ, d. h. zu Beginn der Bewegung muß eine beschleunigende Kraft hinzugefügt werden, um die Geschwindigkeit konstant zu erhalten; ohne diese Kraft würde das Elektron verzögernd auf sich selbst wirken. Für größere Werte von t sind die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(165) \quad 1 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{16}\left(3 + \frac{7}{5}\omega^2\right)x^3 = 0$$

zu untersuchen. Die linke Seite ist positiv für $x=0$ und negativ für $x=-\infty$; eine Wurzel ist demnach jedenfalls reell und negativ, kommt also für uns nicht in Betracht. Die anderen beiden Wurzeln sind ebenfalls reell; für $x=0$ nämlich ist der Ausdruck (165) positiv, für $x = \frac{2}{1+\omega}$ aber gleich:

$$\frac{1}{4} \frac{\omega}{(1+\omega)^3} \left(\omega^2 + \frac{6}{5}\omega - 2 \right), \quad \text{somit} = 0 \quad \text{für} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{5}(\sqrt{59} - 3),$$

also für alle Werte von ω , die kleiner als ω_0 sind, negativ. Zwischen 0 und $\frac{2}{1+\omega}$ liegt demnach für $\omega < \omega_0$ immer eine Wurzel der kubischen Gleichung; diese Wurzel bestimmt diejenige Zeit, zu welcher die Kraft $\mathfrak{F}_x$ ihr Vorzeichen ändert, d. h. die Wirkung des Elektrons auf sich selbst aufhört verzögernd zu sein und beschleunigend wird.

Für $t = \frac{a}{c}$, d. h. am Ende der ersten Lage wird:

$$\mathfrak{F}_x\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{3\varepsilon^2\omega}{64a^2}\left(1 - \frac{7}{5}\omega^2\right),$$

und am Ende der zweiten Lage:

$$(166) \quad \mathfrak{F}_x(t^0) = \frac{-3\varepsilon^2\omega^2}{2\pi a^2(1+\omega)^4}(2 - \frac{9}{5}\omega - \omega^2),$$

und dieser Wert ist für $\omega < \omega_0$ stets positiv, dagegen negativ für $\omega > \omega_0$.

Dritte Lage: $t^0 < t < t'$, wo sich t' aus Gleichung (78) bestimmt, nämlich:

$$t' = \frac{2a}{c-v}.$$

Wir haben zuerst die Funktionen Φ_{2x} und Ψ_{2xt} zu berechnen. Für die bei Aufstellung von Gleichung (74) benutzten Integrale U_1 und U_2 findet man in unserem Falle:

$$U_1 = \frac{1}{6a^2v^2} [3a(v^2 - c^2) - \tau(3cv^2 - 3c^3 + 2v^3)]$$

$$U_2 = \frac{1}{30a^2v^3} [15a^3(v^2 - c^2) + a^2(10v^3 + 25c^3 - 15v^2c)\tau + 15ac^2(v^2 - c^2)\tau^2 + (3c^5 - 5c^3v^2 - 2v^5)\tau^3],$$

also:

$$U_1(a^3 - c^3\tau^2) - U_2 = \frac{1}{30a^2v^2} [(10c^3 + 20v^3)a^2\tau + 30(v^2 - c^2)ac^2\tau^2 - (2v^5 + 10v^3c^2 + 20v^2c^3 - 18c^5)\tau^3],$$

also (wenn $\omega = \frac{v}{c}$ gesetzt wird) nach (75):

$$\Phi_{2x} = \frac{\varepsilon a}{40 \omega^2} \left[-\frac{1}{2} + 5 \omega^2 + \frac{15}{2} \omega^3 - \frac{1}{2} \omega^5 - \left(\frac{c t}{a} \right)^2 (5 + 10 \omega^2) - 10 \left(\frac{c t}{a} \right)^3 (\omega^3 - 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{c t}{a} \right)^4 (\omega^5 + 5 \omega^3 + 10 \omega^2 - 9) \right].$$

Ferner wird nach (110) und (112) die dort vorkommende ganze Funktion $G(T, c\tau)$ jetzt gleich:

$$(166^a) \quad G = a^4 (\omega - 1) \left[\frac{4}{3} \frac{c\tau}{a} + (1 - \omega) \left(\frac{c\tau}{a} \right)^2 + \frac{1}{3} (2 - 3 \omega^2 - 2 \omega^3) \left(\frac{c\tau}{a} \right)^3 + \frac{1}{4} (1 + \omega - \omega^2 + 3 \omega^3) \left(\frac{c\tau}{a} \right)^4 \right],$$

und somit, wenn man nach Potenzen von $\frac{c\tau}{a}$ und $\omega = \frac{v}{c}$ ordnet:

$$(167) \quad -\Phi_{2x} - \frac{1}{c} \Psi_{2xt} = \varepsilon a \int_0^t \left[b_0 + b_1 \frac{c\tau}{a} + b_2 \left(\frac{c\tau}{a} \right)^2 + b_3 \left(\frac{c\tau}{a} \right)^3 \right] d \left(\frac{c\tau}{a} \right),$$

wo:

$$(167^a) \quad \begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2} \frac{\omega - 1}{\omega^2}, \quad b_1 = \frac{1}{8} \left(\frac{2}{\omega^2} + 3 + 4 \omega - 3 \omega^2 \right), \\ b_2 &= \frac{1}{8} \left(-\frac{6}{\omega^2} + 4 + 2 \omega + 3 \omega^2 - \omega^3 - 2 \omega^4 \right), \\ b_3 &= \frac{1}{160} \left[-\frac{72}{\omega^2} + 65 + 40 \omega + 30 \omega^2 - 52 \omega^3 + 45 \omega^4 \right]. \end{aligned}$$

Für die dritte Lage wird also gemäß (118^a) die Kraft gleich:

$$(168) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{3 \varepsilon^2 \omega^2}{2 \pi a^2 (1 + \omega)^4} \left(2 - \frac{6}{5} \omega - \omega^2 \right) + \frac{3 \varepsilon^2}{4 \pi a^2} \left[b_0 \frac{c}{a} (t - t^0) + \frac{1}{2} b_1 \left(\frac{c}{a} \right)^2 (t^2 - t^{02}) + \frac{1}{3} b_2 \left(\frac{c}{a} \right)^3 (t^3 - t^{03}) + \frac{1}{4} b_3 \left(\frac{c}{a} \right)^4 (t^4 - t^{04}) \right]$$

und diese Gleichung gilt in dem Intervalle:

$$(t^0 =) \quad \frac{2a}{c+v} < t < \frac{2a}{c-v} \quad (= t'),$$

denn die Gleichung (78) hat, wie schon erwähnt wurde, nur die (von t unabhängige)

$$\text{Wurzel } \tau' = t' = \frac{2a}{c-v}.$$

Will man sich die Intervalle an den Figuren 6 und 7 verdeutlichen, so hat man die Kurven $c\tau + T = 2a$ und $c\tau - T = 2a$ einfach durch zwei Parallele zur Abszissenachse zu ersetzen, und zwar durch die Geraden:

$$\tau = \frac{2a}{c+v} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{2a}{c-v}.$$

Für $t > t'$ (d. h. für die vierte Lage) ist endlich Gleichung (118^b) anzuwenden, d. h. wir haben in (168) den Wert t durch den konstanten Wert $\tau' = \frac{2a}{c+v}$ zu ersetzen; dadurch ergibt sich:

$$(169) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x = & \frac{-\varepsilon^2 \omega^2}{2\pi a^2 (1+\omega)^4} (2 - \frac{6}{5}\omega - \omega^2) \\ & + \frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2} \left[2b_0 \left(\frac{1}{1-\omega} - \frac{1}{1+\omega} \right) + 2b_1 \left\{ \left(\frac{1}{1-\omega} \right)^2 - \left(\frac{1}{1+\omega} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \frac{8}{3}b_2 \left\{ \left(\frac{1}{1-\omega} \right)^3 - \left(\frac{1}{1+\omega} \right)^3 \right\} + 4b_3 \left\{ \left(\frac{1}{1-\omega} \right)^4 - \left(\frac{1}{1+\omega} \right)^4 \right\} \right] \quad \text{für } t > \frac{2a}{c-v}, \end{aligned}$$

wo die eckige Klammer der rechten Seite in der einfacheren Gestalt:

$$4b_0 \frac{\omega}{1-\omega^2} + 8b_1 \frac{\omega}{(1-\omega^2)^2} + \frac{16}{3}b_2 \frac{3\omega + \omega^2}{(1-\omega^2)^3} + 32b_3 \frac{\omega + \omega^3}{(1-\omega^2)^4}$$

geschrieben werden kann.

Die Kraft ist also nach Ablauf der Zeit $\frac{2a}{c-v}$ stationär, d. h. unabhängig von t , geworden.

Da $\omega \left(= \frac{v}{c} \right)$ kleiner als Eins vorausgesetzt ist, so wird man nach Potenzen von ω entwickeln, um eine Näherungsformel zu erhalten. Da in b_1, b_2, b_3 das Quadrat der Geschwindigkeit v im Nenner vorkommt, so wird die Entwicklung mit negativen Potenzen von ω^3 beginnen; man erhält für den stationären Zustand:

$$(169^a) \quad \mathfrak{F}_x = \frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2} \left(-\frac{29}{16} \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} - \frac{3935}{384} - \frac{967}{40} \omega + \dots \right).$$

Die Kraft ist also für kleine Werte von ω negativ, d. h. verzögernd. Es muß also für $\omega < \omega_0$ während der dritten Lage noch ein Vorzeichenwechsel eingetreten sein. Im stationären Zustande ist ferner bei Unterlichtgeschwindigkeit ($v < c$) die Kraft in erster Annäherung dem reziproken Werte des Quadrates von $\frac{v}{c}$ proportional.

Natürlich darf man hieraus nicht auf ein Unendlichwerden der Kraft für $v = 0$ schließen, denn die Ableitung der Formel (169^a) setzt voraus, daß schon eine gewisse Zeit hindurch (und zwar von der Dauer $t = \frac{2a}{c-v}$) eine Bewegung mit der Geschwindigkeit v stattgefunden hat; man darf also nicht nachträglich durch die Annahme $v = 0$ dieser Voraussetzung widersprechen; für die Formel (164), welche bei Beginn der Bewegung gilt, ist es dagegen erlaubt $v = 0$ zu nehmen, und sie ergibt dann in der Tat $\mathfrak{F}_x = 0$.

Für die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit wird die Wurzel $t' = \tau'$ unendlich groß, die Größe $t^0 = \frac{2a}{v+c}$ wird gleich $\frac{a}{c}$, so daß die zweite Lage vollkommen in Wegfall kommt; es gilt also für alle Werte von t , die größer als $\frac{a}{c}$ sind, stets die

Formel (168); die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit bietet demnach keine besonderen Schwierigkeiten. Macht man in b_0, b_1, b_2, b_3 die Substitution $\omega = 1$ (d. h. $v = c$), so ergibt sich:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{3}{4}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{7}{20},$$

also die erzeugte Kraft für die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit wird nach (164):

$$(170) \quad (\mathfrak{F}_x)_{v=c} = -\frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2} \left(\frac{ct}{a} \right) \left[1 - \frac{5}{4} \left(\frac{ct}{a} \right) + \frac{11}{40} \left(\frac{ct}{a} \right)^3 \right] \quad \text{für } t < \frac{a}{c},$$

und nach (168^a):

$$(\mathfrak{F}_x)_{v=c} = \frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2} \left[-\frac{1}{40} + \frac{3}{8} \left\{ \left(\frac{ct}{a} \right)^2 - 1 \right\} + \frac{7}{80} \left\{ \left(\frac{ct}{a} \right)^4 - 1 \right\} \right],$$

oder:

$$(170^a) \quad (\mathfrak{F}_x)_{v=c} = \frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2} \left[-\frac{39}{80} + \frac{3}{8} \left(\frac{ct}{a} \right)^2 + \frac{7}{80} \left(\frac{ct}{a} \right)^4 \right] \\ = -\frac{117\varepsilon^2}{320\pi a^2} \left[1 - \frac{10}{13} \left(\frac{ct}{a} \right)^2 - \frac{7}{39} \left(\frac{ct}{a} \right)^4 \right] \quad \text{für } t > \frac{a}{c}.$$

Im Gegensatz zu den bisher von anderer Seite aufgestellten Formeln (vgl. unten § 16) erkennt man, daß die Kraft bei Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit für jeden endlichen Wert der Zeit endlich bleibt. Sie ist nach (170) gleich Null für $t = 0$, negativ für kleine Werte von t , ebenso für große Werte von t . Um zu untersuchen, ob ein Vorzeichenwechsel eintritt, hat man die kubische Gleichung:

$$40 - 50x + 11x^3 = 0$$

zu betrachten. Eine Wurzel ist reell und negativ, und für uns unbrauchbar, sie liegt zwischen $x = -2$ und $x = -3$; die beiden anderen Wurzeln sind ebenfalls reell und liegen bzw. zwischen $x = 1$ und $x = \frac{6}{5}$ und zwischen $x = \frac{6}{5}$ und $x = 2$. Da aber in der ersten Lage $t < \frac{a}{c}$ sein soll, so ist x an die Bedingung $0 < x < 1$ gebunden; auch die beiden anderen Wurzeln sind also unbrauchbar, d. h. in der ersten Lage tritt kein Vorzeichenwechsel ein. In der zweiten Lage bleibt $\mathfrak{F}_x$ nach (170^a) negativ, denn die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$39 - 30x - 7x^2 = 0$$

sind imaginär. Bei Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit ist die Kraft demnach andauernd negativ, d. h. wirkt verzögernd.

§ 13. Die translatorische Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit (bzw. Lichtgeschwindigkeit) bei Volumladung.

Wir machen jetzt die Voraussetzung $v > c$ und nehmen wieder v als konstant an, so daß T und ξ wieder durch (162) bestimmt werden. Für die „erste und zweite Lage“ kommt es auf Berechnung der in (128) aufgestellten Integrale an. Man findet unter der gemachten Annahme:

$$\Phi_{0x}^*(t) = \frac{\varepsilon c^2}{10 a^3 v^2} \int_0^t [2(c^4 + 2v^2 c^2) \tau^3 + 15 a c (c^2 - v^2) \tau^2 - 10 a^2 c^2 \tau] d\tau,$$

$$\Phi_{1x}^*(t) = \frac{3 \varepsilon c^2}{8 a^3 v^2} (v^2 - c^2) \int_0^t (\tau^3 (v^2 - c^2) + 4 a c \tau^2 - 4 a^2 \tau) d\tau,$$

also:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \Phi_{0x}^*(t) + \Phi_{1x}^*(t) \\ (171) \quad &= \frac{\varepsilon a}{4 \omega^2} \left(\frac{ct}{a} \right)^2 \left[(1 - 3 \omega^2) + \frac{1}{4} (1 - \omega^2) \left(\frac{ct}{a} \right) + \frac{1}{40} (23 - 14 \omega^2 + 15 \omega^4) \left(\frac{ct}{a} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

wenn wieder $\omega = \frac{v}{c}$ gesetzt wird, wobei jetzt $\omega > 1$ ist. Die Grenze der Gültigkeit dieser Formel ist durch die Gleichung (133) gegeben d. h. hier durch die Bedingung:

$$(171^a) \quad t < t_1, \quad \text{wenn} \quad t_1 (= \tau_1) = \frac{2a}{v+c}$$

ist; an der Grenze, d. h. für $t = \frac{2a}{v+c}$, wird

$$(172) \quad \varphi_x \left(\frac{2a}{v+c} \right) = \frac{\varepsilon a}{20 (1+\omega)^4 \omega^2} (-45 \omega^4 - 130 \omega^3 - 64 \omega^2 + 50 \omega + 53).$$

Für die erste Lage berechnen wir sofort auch das Integral V_x gemäß Gleichung (148^a); es wird:

$$\begin{aligned} (173) \quad \Psi_{1xt}^*(t) = V_x &= \frac{3 \varepsilon c}{8 a^3} \int_0^t \left[\tau^3 \left(\frac{1}{6} v^4 + c^2 v^2 + \frac{1}{6} c^4 \right) - 2 a^2 \tau (c^2 + v^2) + \frac{8}{3} a^3 v \right] d\tau \\ &= \frac{3}{8} \varepsilon c a \left[\frac{8}{3} \omega \left(\frac{ct}{a} \right) - (1 + \omega^2) \left(\frac{ct}{a} \right)^2 + \frac{1}{24} (1 + 6 \omega^2 + \omega^4) \left(\frac{ct}{a} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach (160) für die wirkende Kraft in der ersten Lage der Wert:

$$\begin{aligned} (174) \quad \mathfrak{F}_x &= -\frac{3 \varepsilon}{4 \pi a^3} \left(\varphi_x + \frac{1}{c} V_x \right) = -\frac{3 \varepsilon^2}{4 \pi a^2 \omega^2} \left[\omega \left(\frac{ct}{a} \right) - \frac{1}{8} (1 + 9 \omega^2) \left(\frac{ct}{a} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} (1 - \omega^2) \left(\frac{ct}{a} \right)^3 + \frac{1}{320} (51 + 2 \omega^2 + 35 \omega^4) \left(\frac{ct}{a} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

Für kleine Werte von t ist das Vorzeichen der Kraft negativ wie bei Unterlichtgeschwindigkeit; um zu untersuchen, ob sich das Vorzeichen mit wachsendem t ändert, hat man die in $x \left(= \frac{a}{ct} \right)$ kubische Gleichung:

$$\omega x^3 - \frac{1+9\omega^2}{8} x^2 + \frac{5}{16} (\omega^2 - 1) x + \frac{51+2\omega^2+35\omega^4}{320} = 0$$

zu betrachten. Dieselbe enthält zwei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge, hat also jedenfalls eine reelle negative Wurzel (die unbrauchbar ist) und vielleicht zwei positive Wurzeln. Sind letztere vorhanden, so muß der Differentialquotient der linken Seite:

$$3\omega x^2 - \frac{1+9\omega^2}{4}x + \frac{5}{16}(\omega^2-1)$$

reelle lineare Faktoren enthalten; die Diskriminante dieses quadratischen Ausdrucks ist:

$$\frac{1}{64}(81\omega^4 - 60\omega^3 + 60\omega + 1 + 18\omega^2);$$

sie ist für kleine Werte von ω positiv und kann das Zeichen nur wechseln, wenn $60\omega^3 > 81\omega^4$, also auch $\omega < 1$ ist; dann aber ist $60\omega > 60\omega^3$, und sie bleibt positiv; jene linearen Faktoren sind also reell, und es ist in jedem Falle zu untersuchen, ob ihnen reelle Wurzeln der kubischen Gleichung zugehören, d. h. ob die Kraft ihr Zeichen wechseln kann.

Die Gleichung (131) hat in diesem Falle nur die eine Wurzel $t = \frac{2a}{c+v}$, indem die in Fig. 10 gezeichnete Kurve hier eine gerade Linie ist, welche parallel zur Abszissenachse im Abstände $\frac{2a}{v+c}$ verläuft und demnach die Linie $t = \tau$ nur einmal schneidet. Es ist also τ_2 konstant, und zwar gleich $\frac{2a}{v+c}$; und es kommt die Formel (135^a) zur Anwendung, wo der angegebene Wert für τ_2 einzusetzen ist. Die Summe der beiden ersten Glieder Φ_{0x}^* und Φ_{1x}^* entsteht aus (171), wenn dort $t = \tau_2$ genommen wird; d. h. es ist:

$$\begin{aligned} \Phi_{0x}^*(\tau_2, t) + \Phi_{1x}^*(\tau_2, t) &= \frac{\varepsilon a}{(1+\omega)^2} \left[(1-3\omega^2) + \frac{1}{4}(1-\omega^2) + \frac{1}{40} \frac{23-14\omega^2+15\omega^4}{(1+\omega)^2} \right] \\ (175) \quad &= \frac{\varepsilon a}{40(1+\omega)^4} (73 - 104\omega^2 + 12\omega^4). \end{aligned}$$

Wir erhalten ferner nach (135):

$$(175^a) \quad \Phi_{2x}^*(t) - \Phi_{2x}^*(\tau_2) = \frac{3\varepsilon c}{4a} \int_{\tau_2}^t [(a^2 - c^2\tau^2) W_1^* - W_2^* + 2c\tau W_0^*] d\tau.$$

Da die Wurzel t_2 in diesem Falle nicht existiert, so gilt die Gleichung für das ganze Intervall $\tau_2 < t < \frac{a}{c}$, und es kommt die vierte Lage, die durch (136) dargestellt war, hier nicht in Betracht; in dem ganzen Integrationsintervalle ist also $\tau < \frac{a}{c}$, so daß $a - T = a - v\tau$ stets positiv bleibt, und die oben im Anschlusse an (135) gemachte Bemerkung über die Zerlegung des Integrationsintervalles hier (und im folgenden) nicht zur Anwendung kommt, wie aus den Ungleichungen:

$$\frac{a}{v} < \frac{2a}{c+v} < \frac{a}{c} < \frac{a}{v-c}$$

sofort hervorgeht.

Es ist demnach W_1^* durch (134^b), W_2^* durch (134^d) und außerdem W_0^* durch (134) gegeben; und zwar wird:

$$\begin{aligned}
 W_0 &= \frac{1-\omega^2}{8\omega} \left[4 + 4 \frac{c\tau}{a} + (1-\omega^2) \left(\frac{c\tau}{a} \right)^2 \right] \\
 W_1^* &= \frac{1}{6a\omega^2} \left[3(1-\omega^2) + (1-3\omega^2-2\omega^3) \frac{c\tau}{a} \right] \\
 W_2^* &= \frac{a}{30\omega^3} \left[15(1-\omega^2) + (25-15\omega^2+10\omega^3) \frac{c\tau}{a} + 15(1-\omega^2) \left(\frac{c\tau}{a} \right)^2 + (3-5\omega^2-2\omega^3) \left(\frac{c\tau}{a} \right)^3 \right].
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich aus (135):

$$\begin{aligned}
 \Phi_{2x}^*(t) &= \frac{\varepsilon c}{160\omega^2} \int_{t_1}^t \left[-15(1-\omega^2) + 35(1-3\omega^2-2\omega^3) \left(\frac{c\tau}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 15(1-\omega^2) \left(\frac{c\tau}{a} \right)^2 + (13+5\omega^2+68\omega^3) \left(\frac{c\tau}{a} \right)^3 \right] d\tau,
 \end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{2x}^*(t) - \Phi_{2x}^*(\tau_2) &= \frac{\varepsilon a}{160\omega^2} \left[-15(1-\omega^2) \left(\frac{ct}{a} - \frac{2}{1+\omega} \right) \right. \\
 (175^b) \quad &+ \frac{35}{2}(1-3\omega^2-2\omega^3) \left\{ \left(\frac{c\tau}{a} \right)^2 - \left(\frac{2}{1+\omega} \right) \right\} + 5(1-\omega^2) \left\{ \left(\frac{ct}{a} \right)^3 - \left(\frac{2}{1+\omega} \right)^3 \right\} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4}(13+5\omega^2+68\omega^3) \left\{ \left(\frac{ct}{a} \right)^4 - \left(\frac{2}{1+\omega} \right)^4 \right\} \right].
 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Kraft dient ferner der Ausdruck Ψ_{2xt} ; wir haben nach (151):

$$(175^c) \quad \Psi_{2xt}^*(t) = + \frac{\varepsilon a}{2} (\omega - 1) \int_{t_1}^t \left[1 + \frac{3}{4}(\omega - 1) \left(\frac{c\tau}{a} \right) + \frac{1}{8}(\omega^3 + 3\omega^2 - 4) \left(\frac{c\tau}{a} \right)^3 \right] d \left(\frac{c\tau}{a} \right).$$

Die wirkende Kraft wird schließlich nach (161):

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}_x &= - \frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3} \left[\Phi_{0x}^* \left(\frac{2a}{c+v} \right) + \Phi_{1x}^* \left(\frac{2a}{c+v} \right) + \Phi_{2x}^*(t) - \Phi_{2x}^* \left(\frac{2a}{c+v} \right) \right. \\
 (176) \quad &\left. + \frac{1}{c} \Psi_{1xt}^* \left(\frac{2a}{c+v} \right) + \frac{1}{c} \Psi_{2xt}^*(t) - \frac{1}{c} \Psi_{2xt}^* \left(\frac{2a}{c+v} \right) \right] \quad \text{für } \frac{2a}{v+c} < t < \frac{a}{c},
 \end{aligned}$$

wo nun die einzelnen Werte aus (175), (175^b), (173), (175^c) einzusetzen sind.

Für das nächste Intervall ist Gleichung (137^a) anzuwenden, d. h. es bleibt dieselbe Formel (176) auch für $t > \frac{a}{c}$ gültig, und zwar so lange, bis die obere Grenze t des nach τ genommenen Integrals gleich einer Wurzel der Gleichung (142) wird; diese Gleichung lautet hier:

$$(177) \quad 2a = (v - c)\tau;$$

die Wurzel:

$$(177^a) \quad \tau = \frac{2a}{v-c}$$

ist also wieder von t unabhängig. Ist endlich $t > \frac{2a}{v-c}$, so wird die Kraft stationär,

indem alle Integrale Φ_{2x} und Ψ_{2xt} sich nicht mehr ändern, wenn t über diese Grenze hinaus wächst. Diese stationäre Kraft ist also für die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit gleich:

$$(178) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{3 \varepsilon c}{4 \pi a^3} \left[\Phi_{0x}^* \left(\frac{2a}{v+c} \right) + \Phi_{1x}^* \left(\frac{2a}{v+c} \right) + \Phi_{2x}^* \left(\frac{2a}{v-c} \right) - \Phi_{2x}^* \left(\frac{2a}{v+c} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \Psi_{1xt}^* \left(\frac{2a}{v+c} \right) + \frac{1}{c} \Psi_{2xt}^* \left(\frac{2a}{v-c} \right) - \frac{1}{c} \Psi_{2xt}^* \left(\frac{2a}{v+c} \right) \right].$$

Die rechte Seite ist eine rationale Funktion von ω , deren Nenner sich aus Potenzen von ω , $1 - \omega$ und $1 + \omega$ zusammensetzt. Diese Glieder werden also für $\omega = 1$ (d. h. für Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit) sehr groß. Trotzdem bleibt die stationäre Kraft $\mathfrak{F}_x$ immer endlich, denn die Formel (178) ist nur anwendbar für $t > \frac{2a}{v-c}$; wird also $v = c$, so gibt es keine Werte der Zeit t , die dieser Bedingung genügen; und folglich ist dann für alle Werte von $t \left(> \frac{a}{c} \right)$ die frühere Formel (176) anzuwenden.

Damit sind wir schon in die Diskussion des Falles $v = c$ eingetreten. Dieser Fall ist bereits oben als Grenzfall der Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit (§ 12) eingehend behandelt, so daß es kaum nötig ist, hier darauf zurückzukommen. Immerhin mag man sich davon überzeugen, daß die jetzt für die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit entstehenden Resultate mit den früheren vollständig übereinstimmen.

Zunächst nämlich ist das zuerst in Betracht kommende Intervall (171^a) mit dem früheren Intervalle $0 < t < \frac{a}{c}$ im Falle $\omega = 1$ (d. h. $v = c$) vollkommen identisch. Die für dieses Intervall abgeleitete Kraft $\mathfrak{F}_x$, wie sie in (170) berechnet war, ergibt sich jetzt genau ebenso aus (174). In der Tat wird das in § 10 behandelte Integral K_1 mit dem in § 7 behandelten Integrale J_1 identisch, indem sich aus (125) jetzt (d. i. für $v = c$, $T = cv$) $\Theta_3 = 0$, $\Theta_2 = \pi$ ergibt, so daß die Grenzen beider Integrale übereinstimmen; ebenso wird in dem durch (100) gegebenen Integrale V'_x das Integrationsgebiet jetzt identisch mit dem Integrationsgebiete des Integrals V'_x in § 11; die Übereinstimmung ist nur nicht so unmittelbar einleuchtend, weil früher (§ 8) erst nach R und dann nach Θ' , später (§ 11) erst nach Θ' und dann nach R integriert wurde; die Übereinstimmung tritt aber im Resultate hervor, indem der in (148^a) für V_x gefundene Ausdruck jetzt (d. i. für $v = c$) in den Ausdruck (107) bzw. (108) direkt übergeht. Die Identität der beiden in (170) und (174) für den Fall $v = c$ erhaltenen Ausdrücke der Kraft $\mathfrak{F}_x$ gibt überdies eine nützliche Kontrolle der Rechnung.

Das zweite Intervall $\frac{2a}{c+v} < t < \frac{a}{c}$ kommt für $v = c$ nicht in Betracht, da hier obere und untere Grenze zusammenfallen; die Formeln (174), (175) und (176) gelten aber auch im nächsten Intervalle, dessen obere Grenze $\frac{2a}{v-c}$ hier unendlich groß wird, wo wir diese Formeln für:

$$\frac{a}{c} < t < \infty$$

anzuwenden haben. Das Integral W_0 wird gleich Null für $T = c\tau$, das Integral W_1 mit dem früheren Integrale U_1 in (74) identisch, nämlich $= -\frac{2c\tau}{3a^2}$, denn es wird jetzt $\Theta_1 = \pi$ und $\Theta_3 = 0$; ebenso wird W_2 mit dem früheren U_2 identisch, nämlich $= \frac{2c\tau}{15}(5a^2 - c^2\tau^2)$; für $v = c$ fällt also in der Tat die jetzige Funktion Φ_{2x} mit der früheren Funktion Φ_{2x} zusammen.

Ebenso wird endlich das in (112) aufgestellte Integral Ψ_{2xt} mit dem jetzt in (151) auftretenden Integrale $\Psi_{2xt}(t) - \Psi_{2xt}\left(\frac{2a}{c+v}\right)$ für $v = c$ und $T = c\tau$ identisch, indem dann sowohl die Grenzen als die Funktionen unter dem Integralzeichen übereinstimmen; in der Tat wird auch nach (166^a) die frühere ganze Funktion G jetzt gleich Null, und derselbe Wert ergibt sich für die in Ψ_{2xt} auftretende ganze Funktion, wie sie oben in (151^a) angegeben wurde. Es ergibt sich hierbei also, daß der durch das skalare Potential gegebene Teil der Kraft $\mathfrak{F}_x$ bei Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit schon nach der Zeit $t = \frac{a}{c}$ stationär wird, während der durch das Vektorpotential gegebene Teil der Kraft stets von t abhängig bleibt.

§ 14. Die geradlinige, gleichförmig beschleunigte (bzw. verzögerte) Bewegung eines Elektrons mit Volumladung. — Übergang von Unterlichtgeschwindigkeit zu Überlichtgeschwindigkeit.

Das Beispiel der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit (§ 12 und 13) war zu einfach, um das Wesen der aufgestellten allgemeinen Formeln ganz erkennen zu lassen; es ist deshalb nützlich, auch noch das nächst einfache Beispiel, d. h. die gleichförmig beschleunigte Bewegung, kurz durchzugehen. Es sei demnach:

$$v_x = v + qt, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0,$$

so daß die Bewegung wieder in der x -Achse stattfindet und mit der Geschwindigkeit v beginnt. Wir erhalten aus (26):

$$(179) \quad \xi = T = \int_{t-\tau}^t v_x d\tau = (v + qt)\tau - \frac{q}{2}\tau^2, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Ist $v < c$, so ist jedenfalls zu Anfang der Bewegung, d. i. für kleine Werte von t , Unterlichtgeschwindigkeit vorhanden; bei wachsendem t wird dieselbe aber allmählich in Überlichtgeschwindigkeit übergehen. Die Grenze zwischen beiden Geschwindigkeiten wird durch die Gleichung $c\tau = T$, d. h. nach Absonderung des Faktors τ , durch die folgende Gleichung gegeben:

$$(180) \quad qt - \frac{q}{2}\tau + v - c = 0.$$

Wählen wir wieder t als Abszisse, τ als Ordinate, so stellt diese Gleichung eine gerade Linie (L in Fig. 13) dar, welche die Achse $\tau = 0$ im Punkte $t = \frac{c-v}{q}$ (Punkt A in Fig. 13) und die Achse $t = 0$ im Punkte $\tau = 2 \frac{c-v}{q}$ (Punkt B) schneidet. Für alle Punkte rechts von dieser ziemlich steil verlaufenden Geraden ist $T > c\tau$, links von ihr ist $T < c\tau$. Da τ an die Bedingung $\tau < t$ gebunden ist, so kommen für die Formeln der Unterlichtgeschwindigkeit nur die Punkte t, τ des Dreiecks OAC in Betracht. In Figur 13 ist das oberhalb der Linie $\tau = t$ liegende Gebiet (das für uns keine Bedeutung hat) vertikal schraffiert, das Gebiet der Überlichtgeschwindigkeit horizontal, das Gebiet der Unterlichtgeschwindigkeit schräge.

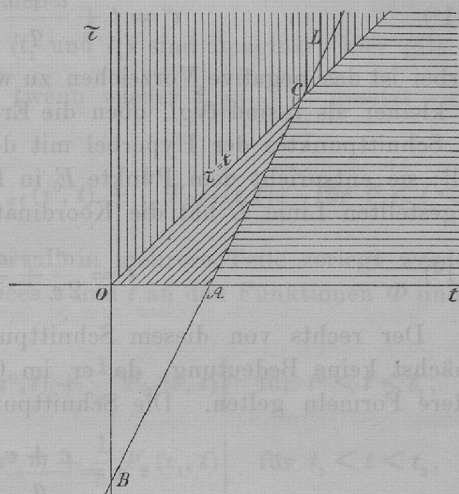


Fig. 13.

Für die erste und zweite Lage gemeinsam gilt die Formel (118), d. h. es ist hier:

$$(181) \quad \delta_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} [\Phi_{1x}(t, t) + \Psi_{1xt}(t, t)] \quad \text{für } 0 < t < t^0,$$

dabei ist t^0 durch die Gleichung (72^a) definiert, welche hier nach (179) die Gestalt:

$$q t^2 + 2(c+v)t - 4a = 0$$

annimmt, so daß:

$$(181^a) \quad t^0 = -\frac{c+v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c+v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}}$$

wird (also für positive Werte von q auch stets reell ist). In (181) sind die Funktionen Φ und Ψ durch die obigen Gleichungen (68) und (108) definiert; man sieht, daß diese Integrale infolge von (179) rationale ganze Funktionen von t (also nirgends unendlich) werden.

Für $t > t^0$ haben wir die Gleichung (118^a) anzuwenden; in ihr ist τ^0 durch die Gleichung (73^b) als Funktion von t definiert; diese Gleichung lautet hier:

$$(181^b) \quad q\tau^2 - 2q\tau t - 2(c+v)\tau + 4a = 0.$$

Nimmt man wieder t als Abszisse, τ als Ordinate, so ist dies die Gleichung einer Hyperbel; ihr Mittelpunkt M' liegt an der Stelle:

$$t = -\frac{c+v}{q}, \quad \tau = 0;$$

ihre Asymptoten haben die Gleichungen:

$$\tau = 2t + \frac{c+v}{q} \quad \text{und} \quad \tau = 0.$$

Die Lage der Hyperbel ist in Fig. 14 veranschaulicht; sie ist dort mit H_1 bezeichnet. Durch Auflösung von (181^b) findet man für τ^0 den Wert:

$$(181^0) \quad \tau^0 = t + \frac{c+v}{q} - \sqrt{\left(t + \frac{c+v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}};$$

hierbei ist das negative Vorzeichen zu wählen, da nur solche Werte τ^0 in Betracht kommen, die kleiner als t sind (vgl. oben die Erörterungen bei Einführung von τ^0). Die Abszisse t^0 des Schnittpunktes der Hyperbel mit der Linie $\tau = t$ ist durch (181^a) gegeben, also stets reell; sie entspricht dem Punkte E in Figur 14. Der Schnittpunkt F mit der durch (180) dargestellten Linie L hat die Koordinaten:

$$(181^a) \quad t = \frac{a}{2c} + \frac{c-v}{q} \quad (=t_3), \quad \tau = \frac{a}{c}.$$

Der rechts von diesem Schnittpunkte gelegene Teil der Hyperbel H_1 hat für uns zunächst keine Bedeutung, da er im Gebiete der Überlichtgeschwindigkeit liegt, in dem andere Formeln gelten. Die Schnittpunkte mit der Achse $t=0$ haben die Koordinaten:

$$\tau = \frac{c+v}{q} \pm \sqrt{\left(\frac{c+v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}},$$

können also reell oder imaginär sein; da sie oberhalb der Linie $\tau = t$ liegen, kommen sie für uns nicht in Betracht.

Für $t > t^0$ zerfällt das Integrationsintervall der Variablen τ in zwei Teile, wie früher erörtert wurde (vgl. oben S. 263 f.), das eine geht von $\tau = 0$ bis $\tau = \tau^0$, das andere von $\tau = \tau^0$ bis zu einer Grenze, die durch die Gleichung (77) bestimmt wird. Letztere ist hier:

$$(182) \quad q\tau^2 - 2qt\tau + 2(c-v)\tau - 4a = 0.$$

Sie stellt also in der t - τ -Ebene eine Hyperbel dar. Ihr Mittelpunkt ist durch die Gleichungen:

$$(182^a) \quad t = \frac{c-v}{q} (=t_2), \quad \tau = 0$$

bestimmt, liegt demnach im Punkte A (Fig. 14); Asymptoten sind die t -Achse und die durch (180) dargestellte Linie L . Die Hyperbel ist in Fig. 14 mit H_2 bezeichnet. Nur diejenigen Punkte derselben haben für uns Bedeutung, für welche $\tau < t$ ist; es müssen deshalb ihre Schnittpunkte mit der Geraden $t = \tau$ gesucht werden; diese sind:¹⁾

$$(183) \quad \begin{aligned} t_1 &= \frac{c-v}{q} - \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}} \quad (\text{Punkt } G \text{ in Fig. 14}), \\ t_4 &= \frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}} \quad (\quad H \quad \text{Fig. 14}). \end{aligned}$$

¹⁾ In Fig. 14 ist vorausgesetzt, daß $t_1 > t^0$ sei; das tritt ein, wenn $4aq > c(3c+4v)$ ist; andernfalls sind noch weitere Fälle zu unterscheiden.

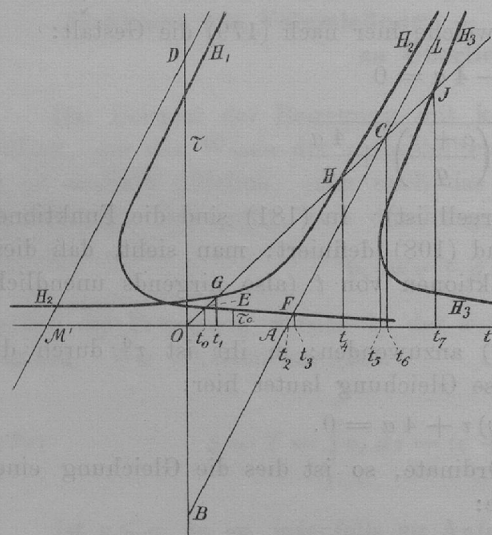


Fig. 14.

Wir haben demnach zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es ist $(c-v)^2 < 4aq$, die Schnittpunkte (t_1 und t_2) sind imaginär; hier gilt die Formel (118^a) in dem ganzen Intervalle $t_1 < t < t_2$ (wenn wieder $t_2 = \frac{c-v}{q}$ gesetzt wird); es ist also:

$$(184) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[\Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_{1xt}(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_{2xt}(t, t) \right] \quad \text{für } t^0 < t < t_2.$$

b) Es ist $(c-v)^2 > 4aq$; hier muß das Intervall in mehrere Teile zerlegt werden; man hat (indem wir hier und im folgenden die Indices x und t an den Funktionen Φ und Ψ der Kürze wegen fortlassen):

$$(184^a) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[\Phi_1(\tau^0, t) + \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_1(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(t, t) \right] \quad \text{für } t^0 < t < t_1,$$

$$(184^b) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[\Phi_1(\tau^0, t) + \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c} \Psi_1(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(\tau_1, t) \right] \quad \text{für } t_1 < t < t_2,$$

wobei τ_1 die positive Wurzel der Gleichung (182) bedeutet:

$$(184^c) \quad \tau_1 = t - \frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(t - \frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}}$$

und an Stelle des in (79) und (118^b) gebrauchten Zeichens τ' steht, während t^0, t_1, t_2 wieder bzw. durch (181^a), (183), (182^a) gegeben werden.

Wächst t über t_2 hinaus, so treten wir in das Gebiet ein, in welchem die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit erfolgt, und das rechts von der Linie L liegt. Die allgemeine Formel (34) behält ihre Gültigkeit; das Integrationsintervall ist nur in verschiedene Teile zu zerlegen, nämlich:

$0 < \tau < \tau^*$, wo die Formeln für Unterlichtgeschwindigkeit anzuwenden sind,

$\tau^* < \tau < t$, wo die Formeln für Überlichtgeschwindigkeit in Betracht kommen.

Dabei bedeutet τ^* die Ordinate des Schnittpunktes der durch (180) dargestellten Linie L mit der Parallelen zur τ -Achse, welche in der Entfernung t von derselben gezogen wird, d. h. es ist:

$$(185) \quad \tau^* = 2t - 2\frac{v-c}{q}.$$

Da aber $\tau < t$ sein muß, so gilt diese Zerlegung:

$$(186) \quad \varphi = \frac{3\varepsilon c}{2a^3\pi^3} \left[\int_0^{\tau^*} \frac{S}{R} d\tau + \int_{\tau^*}^t \frac{S}{R} d\tau \right]$$

nur, solange auch $\tau^* < t$ bleibt, d. h. für:

$$(187) \quad \frac{v-c}{q} < t < 2\frac{v-c}{q}; \quad \text{d. h. } t_2 < t < t_6,$$

wenn t_6 die Abszisse des Punktes C in Fig. 14 bezeichnet, d. i. des Punktes, in dem die Linie L von der Linie $\tau = t$ geschnitten wird.

Man erkennt hieraus, daß der allmähliche Übergang von Unter- zu Überlichtgeschwindigkeit keinen Schwierigkeiten begegnet; insbesondere wird die Kraft nicht unendlich groß (wie von anderer Seite behauptet wurde), denn die Integrale Φ_2 und Ψ_2 bleiben durchaus endlich; in der Tat tritt in Φ_2 nach (75) nur die Funktion T im Nenner unter dem Integralzeichen auf; es verschwindet aber T nur für $\tau = 0$, und dieser Wert liegt außerhalb der für (184), (184^a) und (184^b) vorausgesetzten Intervalle; und außerdem ist $T = 0$ nur für:

$$\tau = 2t + 2\frac{v}{q},$$

und dieser Wert ist größer als t , wenn q (wie wir jetzt annehmen) positiv ist, kommt also auch nicht in Betracht.

Für das Gebiet der Überlichtgeschwindigkeit müssen wir zunächst die kritischen Kurven (131) und (142) untersuchen; die erstere wird hier durch die Gleichung gegeben:

$$\tau^2 - 2t\tau - 2\frac{v+c}{q}\tau + \frac{4a}{q} = 0,$$

also mit der obigen Hyperbel (181^b) identisch, die in Fig. 14 durch H_1 dargestellt war, und deren rechts von der Linie L verlaufender Zweig nunmehr auch für uns Bedeutung gewinnt.

Wir finden demnach für das nächste Intervall und für den obigen Fall a) nach (129) und (186):

$$\begin{aligned} (188) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^*, t) + \Phi_1^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^*, t) \\ &+ [\Phi_1(\tau^0, t) - \Phi_1(\tau^*, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_1(\tau^0, t) - \Psi_1(\tau^*, t)] \\ &+ \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(t, t) \quad \text{für } t_2 < t < t_3 \text{ im Falle a).} \end{aligned}$$

Im Falle b) dagegen sind wieder zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

b_a) Es ist $t_4 > t_3$, d. h. $\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 > \frac{4a}{q} + \left(\frac{a}{2c}\right)^2$; dann gilt im ganzen Intervalle die Gleichung:

$$\begin{aligned} (188^a) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^*, t) + \Phi_1^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^*, t) \\ &+ [\Phi_1(\tau^0, t) - \Phi_1(\tau^*, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_1(\tau^0, t) - \Psi_1(\tau^*, t)] \\ &+ \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(\tau_1, t) \quad \text{für } t_2 < t < t_3; \end{aligned}$$

dieser Fall entspricht der Zeichnung in Fig. 14.

b_β) Es ist $t_4 < t_3$, d. h. $\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 < \frac{4a}{q} + \left(\frac{a}{2c}\right)^2$; dann muß das Intervall in zwei Teile zerspalten haben, und wir erhalten die Gleichung (188^a) für das Intervall $t_2 < t < t_4$; dagegen:

$$\begin{aligned}
 (188_b) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^*, t) + \Phi_1^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^*, t) \\
 &+ [\Phi_1(\tau^0, t) - \Phi_1(\tau^*, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_1(\tau^0, t) - \Psi_1(\tau^*, t)] \\
 &+ \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(t, t) \quad \text{für } t_4 < t < t_3.
 \end{aligned}$$

Die Kurve (142) ist hier durch die Hyperbel H_3 , d. i. durch die Gleichung:

$$(189) \quad \tau^2 - 2\tau t + 2\frac{c-v}{q}\tau + \frac{4a}{q} = 0$$

gegeben; ihr Mittelpunkt fällt mit demjenigen der Hyperbel H_2 zusammen; auch die Asymptoten sind beiden Kurven gemeinsam; die letzteren liegen aber in verschiedenen Winkelräumen zwischen den Asymptoten. Löst man die Gleichung (189) auf, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (190) \quad \tau_3 &= t - \frac{c-v}{q} - \sqrt{\left(t - \frac{c-v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}}, \\
 \tau_4 &= t - \frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(t - \frac{c-v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}}.
 \end{aligned}$$

Die für uns in Betracht kommende vertikale Tangente ist also durch die Gleichung:

$$(190^a) \quad t = \frac{c-v}{q} + 2\sqrt{\frac{a}{q}} \quad (=t_5)$$

bestimmt. Durch diesen Wert t_5 ist ein weiteres Intervall abgegrenzt. Der Schnitt J der Hyperbel (189) mit der Linie $\tau = t$ liefert den Wert:

$$(191) \quad t = \frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}} \quad (=t_7)$$

und es ist $t_7 > t_5$, so daß durch t_5 und t_7 dann ein weiteres Intervall abzugrenzen ist. Dazwischen schaltet sich als zu beachtender Punkt noch der Schnittpunkt C der Linie L mit der Linie $\tau = t$ ein:

$$(192) \quad t = \tau = 2\frac{c-v}{q} \quad (=t_6);$$

dieser Wert ist stets kleiner als t_7 ; er liegt zwischen t_5 und t_7 in obigem Falle b), dagegen zwischen t_4 und t_5 in obigem Falle a); demgemäß ist die Unterscheidung dieser Fälle auch im folgenden beizubehalten. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 (193) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\
 &+ \Phi_2^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau^*, t) \\
 &+ [\Phi_2(t, t) - \Phi_2(\tau^*, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2(t, t) - \Psi_2(\tau^*, t)] \quad \text{für } t_3 < t < t_6,
 \end{aligned}$$

wobei als untere Grenze der Integrale Φ_2^* und Ψ_2^* der Wert τ^0 zu nehmen ist; dieselbe untere Grenze ist im folgenden für diese Integrale zu wählen; das Einsetzen einer anderen unteren Grenze ist durch entsprechende Differenzbildung (in den eckigen Klammern) angedeutet. Ferner:

$$(193^a) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau_0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\ + \Phi_2^*(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(t, t) \quad \text{für } t_6 < t < t_5.$$

Für $t > t_5$ ist zu beachten, daß die beiden Schnittpunkte einer Parallelen zur τ -Achse mit der Hyperbel H_3 verschiedene Intervalle ergeben, in denen das Integral Φ_2 von Null verschieden ist, während dazwischen (d. h. für $\tau_3 < \tau < \tau_4$) die Integrale Φ_2 und Ψ_2 verschwinden. Weiter wird:

$$(193^b) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\ + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\ + [\Phi_2^*(t, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2^*(t, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \quad \text{für } t_5 < t < t_7.$$

In (193^a) und (193^b) hat der Einfluß der früheren Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit ganz aufgehört (also nach Ablauf der Zeit $t_6 = 2 \frac{c-v}{q}$); und endlich:

$$(193^c) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau^0, t) \\ + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \quad \text{für } t > t_7.$$

Je mehr t wächst, um so mehr nähern sich die Werte τ^0 und τ_3 einander und der Null; bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung (mit Überlichtgeschwindigkeit) nimmt also die von dem Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft bei hinreichend großen Werten von t scheinbar andauernd ab; da aber t auch in den Funktionen unter den Integralzeichen vorkommt, so kann doch der Wert der Integrale bei wachsendem t alle Grenzen übersteigen; jedenfalls läßt sich ohne genauere Untersuchung hierüber nichts aussagen.

Im Falle b) ist zu beachten, daß das Auftreten der reellen Schnittpunkte der Geraden $t = \tau$ mit der Hyperbel H_1 (die den Abszissen t_1 und t_4 entsprechen) eine andere Abgrenzung der Intervalle bedingt. Man hat zunächst für $t_2 < t < t_3$ obige Gleichung (188^a) für den Fall b_a), dagegen für den Fall b_β) die Gleichung (188^a) nur im Intervalle $t_2 < t < t_4$ und (188^b) im Intervalle $t_4 < t < t_3$. Für $t > t_3$ sind wieder die beiden Unterabteilungen zu unterscheiden; aber es tritt noch eine weitere Unterscheidung hinzu, je nachdem $t_4 < t_5$ oder $t_4 > t_5$ ist. Wir haben also:

$$b_{aa}) \quad t_4 > t_3 \text{ wie oben in } b_a) \text{ und dazu } t_5 > t_4, \text{ d. h. } \frac{8a}{q} > \left(\frac{c-v}{q}\right)^2; \text{ dann ist:}$$

$$\begin{aligned}
 (194) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\
 &+ \Phi_2^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau^*, t) \\
 &+ \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c} \Psi_1(\tau_1, t) \quad \text{für } t_3 < t < t_4
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (194^a) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\
 &+ \Phi_2^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau^*, t) \\
 &+ \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(t, t) \quad \text{für } t_4 < t < t_5.
 \end{aligned}$$

Für $t > t_5$ kommt wieder der Umstand in Betracht, daß eine Parallele zur τ -Achse die Hyperbel H_3 in zwei Punkten (τ_3 und τ_4) schneidet; demnach wird:

$$\begin{aligned}
 (194^b) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\
 &+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\
 &+ [\Phi_2^*(\tau^*, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2^*(\tau^*, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \\
 &+ [\Phi_2(t, t) - \Phi_2(\tau^*, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2(t, t) - \Psi_2(\tau^*, t)] \quad \text{für } t_5 < t < t_6.
 \end{aligned}$$

Für $t > t_6$ kommt das Gebiet links von der Linie L (d. h. der Einfluß der zu Anfang bestehenden Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit) nicht mehr in Betracht, und es wird:

$$\begin{aligned}
 (194^c) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^*, t) \\
 &+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\
 &+ [\Phi_2^*(t, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2^*(t, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \quad \text{für } t_6 < t < t_7.
 \end{aligned}$$

Endlich, nachdem die Hyperbel H_3 die Linie $\tau = t$ in J überschritten hat:

$$\begin{aligned}
 (194^d) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Psi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\
 &+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \quad \text{für } t > t_7.
 \end{aligned}$$

$b_{a\beta})$ $t_4 > t_3$, wie vorhin, aber $t_5 < t_4$, d. h. $\frac{8a}{q} < \left(\frac{c-v}{q}\right)^2$; dann ist:

$$(195) \quad \text{Gleichung (194) gültig für das Intervall } t_3 < t < t_5.$$

Für $t > t_5$ kommen jetzt die Punkte τ_3 und τ_4 auf der Hyperbel H_3 in Betracht; also:

$$\begin{aligned}
-\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\
&+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\
(195^a) \quad &+ [\Phi_2^*(\tau^*, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2^*(\tau^*, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \\
&+ [\Phi_2^*(\tau_1, t) - \Phi_2^*(\tau^*, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2^*(\tau_1, t) - \Psi_2^*(\tau^*, t)] \quad \text{für } t_5 < t < t_4.
\end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned}
(195^b) \quad &\text{Gleichung (194}^b\text{) für das Intervall } t_4 < t < t_6, \\
(195^c) \quad &\text{" (194}^c\text{) " " " } t_6 < t < t_7, \\
(195^d) \quad &\text{" (194}^d\text{) " " " } t > t_7.
\end{aligned}$$

b_β) Es ist $t_4 < t_3$, wie oben. Die folgenden Gleichungen schließen sich also an Gleichung (188^b) an; hier ist immer $t_6 < t_3$, d. i. $\frac{c-q}{q} < 2\sqrt{\frac{a}{q}}$; wir haben also keine weiteren Unterabteilungen, und erhalten:

$$(196) \quad \text{Gleichung (194}^a\text{) für das Intervall } t_3 < t < t_5.$$

Ferner:

$$(196^a) \quad \text{" (194}^b\text{) " " " } t_5 < t < t_6,$$

wie oben und ebenso:

$$(196^b) \quad \text{Gleichung (194}^c\text{) " " " } t_6 < t < t_7,$$

$$(196^c) \quad \text{" (194}^d\text{) " " " } t > t_7.$$

Hiermit ist die gleichförmig beschleunigte Bewegung vollständig behandelt; die Auswertung der auftretenden Integrale bietet im einzelnen kaum größeres Interesse.

Ist q sehr klein, so liegt der Punkt $t_2 = \frac{c-v}{q}$ sehr weit nach rechts entfernt; dann nennt man die Bewegung quasistationär. Für diese quasistationäre Bewegung gilt also die Gleichung (184^b), in der nur die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2$ vorkommen (die sich also nur auf Unterlichtgeschwindigkeit bezieht), für ein sehr weites Intervall. Das Interesse, welches sich an diese Bewegungsform knüpfte, beruht wesentlich darauf, daß die gleichförmige Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit bisher als „kräftefrei“ (unter der Bedingung $\mathfrak{F}_x = 0$ erfolgend) betrachtet wurde; es kam deshalb darauf an, den einfachsten Fall der nicht kräftefreien Bewegung näherungsweise zu behandeln. Nachdem aber obige genauere Behandlung gezeigt hat, daß auch die gleichförmige Bewegung nicht kräftefrei ist, können wir eine eingehendere Behandlung der quasistationären Bewegung zunächst übergehen.

In ganz analoger Weise läßt sich die gleichmäßig verzögerte Bewegung behandeln. Es genügt, für diesen Fall die verschiedenen Hyperbeln zu zeichnen; aus der Figur entnimmt man leicht die zu unterscheidenden Intervalle. Jetzt ist die Beschleunigung q negativ; wir setzen sie gleich $-z$. Die Gerade (180) wird dann:

$$2\kappa t - \kappa\tau - (v - c) = 0;$$

sie trennt in der t - τ -Ebene wieder das Gebiet der Überlichtgeschwindigkeit von dem der Unterlichtgeschwindigkeit. Sie liegt so, wie in Fig. 13 die Linie L , wenn:

$$OA = \frac{v - c}{2\kappa}, \quad OB = \frac{v - c}{\kappa}$$

gewählt wird, wobei jetzt $v > c$ sei, so daß die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit beginnt; aber jetzt entspricht das schräg schraffierte Gebiet der Überlichtgeschwindigkeit, das horizontal schraffierte (rechts von L gelegene) Gebiet der Unterlichtgeschwindigkeit.

Die durch (181^b) dargestellte Hyperbel H_1 hat hier die Gleichung:

$$\kappa\tau^2 - 2\kappa\tau t + 2(c + v)\tau - 4a = 0.$$

Ihr Mittelpunkt M' hat die Koordinaten:

$$t = \frac{c + v}{\kappa}, \quad \tau = 0;$$

er liegt also rechts vom Punkte A (vgl. Figur 15); die Asymptoten sind die Linien:

$$\tau = 2t - 2\frac{c + v}{\kappa} \quad \text{und} \quad \tau = 0.$$

Erstere Linie geht durch M' und ist parallel zu L ; die Lage der Kurve H_1 ist in Figur 15 schematisch angegeben. Die Hyperbel H_2 ist nach (182):

$$\kappa\tau^2 - 2\kappa t\tau + 2(v - c)\tau + 4a = 0;$$

sie hat den Mittelpunkt:

$$t = \frac{v - c}{\kappa}, \quad \tau = 0;$$

derselbe liegt also in A ; die Asymptoten sind die Linie L und die Achse $\tau = 0$; die Kurve liegt also so, wie die Hyperbel H_3 in Figur 14. Umgekehrt liegt jetzt (in Fig. 15) die Hyperbel H_3 , d. i. nach (189) die Kurve:

$$\kappa(\tau^2 - 2\tau t) + 2(v - c)\tau - 4a = 0$$

so, wie früher die Hyperbel H_2 ; sie hat Mittelpunkt und Asymptoten mit H_2 gemeinsam.

Die Hyperbeln H_1 und H_2 schneiden sich in einem Punkte mit den Koordinaten:

$$t = \frac{a}{c} + \frac{v}{\kappa}, \quad \tau = \frac{2a}{c}.$$

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob dieser Schnittpunkt einen störenden Einfluß auf die Bestimmung der einzelnen Intervalle habe; tatsächlich ist das aber nicht

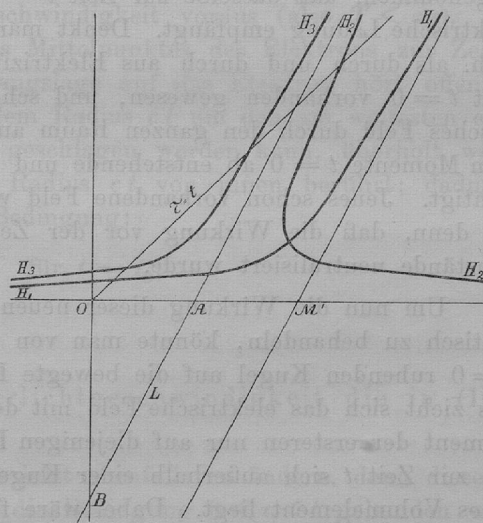


Fig. 15.

der Fall; denn zur Zeit $t = \frac{v}{\kappa}$ ist die Geschwindigkeit des bewegten Elektrons gleich Null geworden, und dieser Zeitpunkt liegt immer vor demjenigen, welcher dem erwähnten Schnittpunkte entspricht. Sobald aber nun die Geschwindigkeit negativ wird, hat man den Anfangspunkt der Zeit zu verlegen, d. h. eine neue Zeit t^* einzuführen, so daß:

$$t^* = \frac{v}{\kappa} - t, \quad v_x = \kappa t^*$$

wird, und für die neue Zeit t^* eine neue Figur zu entwerfen; dabei darf man natürlich nicht versäumen, die im Intervalle $0 < t < \frac{v}{\kappa}$ gewonnenen Beiträge zur Kraft $\mathfrak{F}_x$ auch für die weitere rückläufige Bewegung zu berücksichtigen. Auch der allmähliche Übergang von Überlichtgeschwindigkeit auf Unterlichtgeschwindigkeit bereitet demnach keine Schwierigkeit.

§ 15. Ergänzende Betrachtung über den Anfangszustand der Bewegung, insbesondere bei gleichförmiger und bei gleichförmig beschleunigter Bewegung des Elektrons.

Bei der bisherigen Behandlung der Bewegung eines elektrischen Teilchens haben wir angenommen, daß dasselbe zur Zeit $t = 0$ seine Bewegung beginnt und gleichzeitig seine elektrische Ladung empfängt. Denkt man sich aber das bewegte Teilchen als ein Elektron, d. h. als durch und durch aus Elektrizität bestehend, so ist die Ladung schon vor der Zeit $t = 0$ vorhanden gewesen, und schon vor Beginn der Bewegung hat sich ein elektrisches Feld durch den ganzen Raum ausgebreitet, während unsere Behandlung nur das vom Momente $t = 0$ ab entstehende und vom bewegten Elektron mitgeführte Feld berücksichtigt. Jenes schon vorhandene Feld wird natürlich die Bewegung mit beeinflussen, es sei denn, daß die Wirkung vor der Zeit $t = 0$ durch andere Elektronen und sonstige Umstände neutralisiert wurde.

Um nun die Wirkung dieser neuen Voraussetzung über den Anfangszustand mathematisch zu behandeln, könnte man von dem elektrostatischen Potentiale der vor der Zeit $t = 0$ ruhenden Kugel auf die bewegte Kugel ausgehen. Von jedem Punkte der ersteren aus zieht sich das elektrische Feld mit der Geschwindigkeit c zurück, so daß jedes Volumenelement der ersteren nur auf diejenigen Punkte der bewegten Kugel eine Wirkung ausübt, die zur Zeit t sich außerhalb einer Kugel mit dem Radius ct befinden, in deren Zentrum jenes Volumelement liegt. Dabei wäre ferner zu berücksichtigen, daß die bewegte Kugel eine gewisse Zeit hindurch die feste Kugel schneidet, daß daher ein Teil der ersteren im Innern der ruhenden Kugel sich befindet, ein anderer Teil außerhalb dieser Kugel, und daß für beide Teile verschiedene Werte des Potentials zu benützen sind. Einfacher kommt man indessen durch folgende Betrachtung zum Ziel.

Unsere allgemeinen Formeln gelten bei ganz beliebigen Annahmen über die Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z , z. B. also auch dann, wenn die Bewegung durch eine Ruhezeit unterbrochen und dann wieder fortgesetzt wird. Legen wir nun eine solche Ruhezeit in den Anfang der Bewegung, so kommt dies darauf hinaus, daß wir:

1. die am Schlusse von § 3 in den Moment $t=0$ verlegte Anfangszeit durch einen negativen Wert $t=-t_0$ ersetzen, d. h. in den allgemeinen Formeln t_0 durch $-t_0$ ersetzen, so daß die Bewegung zur Zeit $t=0$ beginnt, wie bisher;
2. für die Zeit von $t=-t_0$ bis $t=0$ die Werte der Funktionen $v_x(\tau)$, $v_y(\tau)$, $v_z(\tau)$ gleich Null annehmen, so daß die Ausdrücke für die in (26) gegebenen Funktionen ξ , η , ζ und für T in (51) vollständig ungeändert bleiben;
3. den Anfangspunkt $t=-t_0$ so bestimmen, daß die vor Beginn der Bewegung vom Elektron ausgehenden Kraftwirkungen volle Berücksichtigung finden.

Die allgemeine Formel (34) wird jetzt:

$$(197) \quad \varphi = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} \int_0^{t+t_0} \frac{S}{R} d\tau,$$

wo wieder S durch (34^a), R durch (34^b) gegeben sind. Der einzige Unterschied gegen früher besteht darin, daß die Variable τ (welche die Zeit von dem Momente t aus rückwärts mißt, so daß $\tau=0$ dem gerade betrachteten Endpunkte der Bahn, $\tau=t$ dem Anfangspunkte entspricht) jetzt für das erweiterte Intervall von $\tau=0$ bis $\tau=t+t_0$ in Betracht kommt. Die Bestimmung von t_0 ist für Unter- und Überlichtgeschwindigkeit naturgemäß eine verschiedene.

Wir setzen zunächst wieder Unterlichtgeschwindigkeit voraus (also $T < c\tau$). Sei $T_0 = (T)_{\tau=t}$, so bedeutet T_0 die Entfernung des Mittelpunktes des Elektrons zur Zeit t von seiner Anfangslage. Die Wirkung der Anfangslage auf das Elektron hört offenbar auf, wenn dasselbe von der Kugel, welche mit dem Radius ct um den am weitesten entfernten Punkt der anfänglichen Lage der Kugel geschlagen werden kann, überholt wird, d. h. wenn das Elektron diese Kugel mit dem Radius ct von innen berührt; dadurch ist die Zeit $t=-t_0$ bestimmt; dies ergibt die Bedingung:

$$ct = T_0 + 2a \quad \text{für } t = t_0,$$

oder:

$$(198) \quad (T_0)_{t=t_0} + 2a = ct_0.$$

Durch diese Gleichung ist bei Unterlichtgeschwindigkeit die in (197) einzusetzende Größe t_0 bestimmt.

Die Abgrenzung der einzelnen Intervalle ist jetzt ebenfalls zu ändern, denn dieselbe beruht wesentlich darauf, daß die Variable τ an die Bedingung $0 < \tau < t$ gebunden war, während dies Intervall jetzt auf:

$$(199) \quad 0 < \tau < t + t_0$$

erweitert ist. Die sonstigen Überlegungen bleiben indessen ungeändert. Demgemäß bleibt das in § 7 besprochene erste und zweite Intervall ($0 < \tau < t_0$) ungeändert, insoweit die Variable τ in Betracht kommt; die obere Grenze des zweiten ist jetzt durch die Gleichung, welche aus (72^a) hervorgeht, indem man τ durch $t+t_0$ ersetzt, d. h. durch:

$$(200) \quad (c\tau + T)_{\tau=t+t_0} = 2a$$

definiert. Die Größe τ^0 bleibt aber untere Grenze der Integrale Φ_{2x} und Ψ_{2x} ; indessen ist die obere Grenze des zweiten Intervalls nicht mehr durch (77) gegeben; es behält nämlich die Kurve (73^b) ihre Bedeutung, aber die Grenze der Anwendbarkeit ist nicht mehr durch die Bedingung $\tau = t$, sondern durch die Bedingung $\tau = t + t_0$ gegeben, so daß (77) durch die Gleichung:

$$(201) \quad c(t + t_0) = (T)_{\tau=t+t_0} + 2a$$

zu ersetzen ist. Bei der im Anschlusse an die Figuren 6 und 7 angestellten geometrischen Diskussion ist also die Gerade $\tau = t$ durch die Gerade:

$$(202) \quad \tau = t + t_0$$

zu ersetzen, um dem jetzt vorausgesetzten Anfangszustande gerecht zu werden; im übrigen bleibt dieselbe unverändert anwendbar.

Wir nehmen als Beispiel wieder die geradlinige Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit. Hier war $T = v\tau$ (vgl. § 12); somit erhalten wir aus (198):

$$(203) \quad t_0 = + \frac{2a}{c-v}.$$

Die Gleichung (200) gibt infolgedessen für die obere Grenze des ersten Intervalls den Wert:

$$(204) \quad t = t_0 - t^0 = \frac{2a}{c+v} - \frac{2a}{c-v} = - \frac{a}{c} \frac{4}{1-\omega^2},$$

und die Gleichung (164) für die wirkende Kraft im ersten Intervalle würde ergeben:

$$(205) \quad \mathfrak{F}_x = - \frac{3\varepsilon^2\omega}{4\pi a^2} \left(\frac{ct}{a} - \frac{4}{1-\omega^2} \right) \left[1 - \frac{5}{4} \frac{c}{a} \left(\frac{ct}{a} - \frac{4}{1-\omega^2} \right) + \frac{1}{16} \left(3 + \frac{7}{2}\omega^2 \right) \left(\frac{ct}{a} - \frac{4}{1-\omega^2} \right)^3 \right].$$

Da aber die obere Grenze des zugehörigen Intervalles nach (204) negativ ist, das Intervall selbst also ganz im Negativen liegt, so hat diese Gleichung für uns keine Bedeutung; denn ihrer Ableitung nach stellt sie die Kraft nur nach dem Beginne der Bewegung (d. h. für $0 < v < c$) dar; für $t < 0$ wäre auch $\omega = 0$ zu setzen, und dann resultiert in der Tat der richtige Wert $\mathfrak{F}_x = 0$: die Kraft der elektrischen Vollkugel auf sich selbst.

Die Gleichung (201) liefert jetzt für die früher benutzte Größe $\tau' = t'$ (obere Grenze des zweiten Intervalles) die Relation:

$$(206) \quad c(\tau' + t_0) = v(\tau' + t_0) + 2a \quad \text{oder} \quad t' = \frac{2a}{c-v} - t_0 = 0.$$

Auch dieses Intervall liegt also ganz im Negativen und kommt nicht in Betracht, so daß die Gleichung (168) hier zu keiner entsprechenden Gleichung führt. Die Bewegung beginnt also im vierten Intervalle, für welches die Gleichung (169) aufgestellt wurde, d. i. die Gleichung der stationären Kraft. Die Gleichung (169) für den Wert $\mathfrak{F}_x$ der

Kraft im stationären Zustande gilt also jetzt ebenso wie früher; dieser Zustand tritt aber schon bei Beginn der Bewegung ein.

Bei Überlichtgeschwindigkeit befindet sich das Elektron nach einer gewissen Zeit t_0^* dauernd im elektrischen Felde, das von ihm selbst in seiner Ruhelage erzeugt wurde; diese Zeit t_0^* wird wieder durch den Moment bestimmt, wo die Kugel mit dem Radius ct_0^* , welche den vom Elektron entferntesten Punkt der Ruhelage zum Mittelpunkt hat, mit dem Elektron eine Berührung (aber jetzt von außen) eingeht, d. h. durch die zu (198) analoge Gleichung:

$$(207) \quad (T_0)_{t=t_0^*} - 2a = ct_0^*.$$

Dieselbe Überlegung kann man für einen beliebigen Zeitpunkt τ anstellen (von der Zeit t nach rückwärts gerechnet); es bestimmt die Gleichung:

$$(207^a) \quad (T)_{t=t_0^*} - 2a = ct_0^*$$

diejenige Zeit t_0^* , während welcher die zur Zeit τ vom Elektron ausgehende Kraftwirkung noch auf die Bewegung des Elektrons von Einfluß ist. Diese Zeit t_0^* ist im Sinne der wachsenden Größe τ gemessen, also vom zur Zeit t (d. h. $\tau = 0$) erreichten Endpunkte nach rückwärts. Setzen wir nun $\tau = t$, d. h. betrachten wir den Anfangspunkt der Bewegung, und ist dann $t = t_0^*$ die kleinste brauchbare Lösung von (207^a), d. h. von der für $\tau = t$ aus ihr hervorgehenden Gleichung (207), so muß die gesuchte Zeit t_0 durch die Gleichung:

$$(208) \quad t_0 = +t_0^*$$

bestimmt werden; denn wir hatten die Anfangszeit mit $-t_0$ bezeichnet, so daß t_0 in der gleichen Richtung von t_0^* gemessen wird. Dieser Wert ist für die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit in die obere Grenze des auf der rechten Seite von (197) auftretenden Integrals einzusetzen, um der jetzigen Annahme über den Anfangszustand zu entsprechen.

Die dadurch notwendige Abänderung der früheren Formeln tritt besonders bei Bestimmung der zu berücksichtigenden Intervalle hervor. Zunächst sind die Ungleichungen (132) und (132^a) bzw. durch die Bedingungen:

$$\tau_1 > t + t_0 \quad \text{und} \quad \tau_1 < t + t_0$$

zu ersetzen; alsdann tritt an Stelle der Gleichung (133) die Gleichung:

$$(209) \quad 2a = (T + c\tau)_{\tau=t+t_0},$$

während die Gleichung (131) und die entsprechende Kurve ihre Bedeutung behalten; der sich hieraus ergebende Wert von t ist aber in Φ_{2x}^* und Ψ_{2xi}^* nicht als untere Grenze einzusetzen, als solche ist vielmehr der frühere Wert τ_1 beizubehalten; es tritt eine allgemeine Verschiebung der Intervallgrenzen gegen die Integralgrenzen ein (wie bei Unterlichtgeschwindigkeit). Die zweite kritische Gleichung, nämlich (142), oder:

$$2a = T - c\tau$$

definiert wieder τ_3 als Funktion von t ; aber die Grenze der Anwendbarkeit ist verschoben und jetzt durch die Gleichung:

$$(210) \quad 2a = (T - c\tau)_{\tau=t+t_0}, \text{ also durch } \tau_3 = t + t_0$$

festgelegt (während früher $\tau_3 = t$ zu setzen war).

Es möge dies wieder durch das Beispiel der Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit erläutert werden (vgl. § 13). Die Formel (174) bleibt im ersten Intervalle gültig, wenn man dort t durch $t + t_0$ ersetzt, wobei t_0 gemäß (207) und (208) zu berechnen ist; es ergibt sich:¹⁾

$$(211) \quad t_0 = \frac{2a}{v - c}.$$

Für das erste Intervall erhalten wir dann aus (174):

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_x = & -\frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2 \omega^2} \left(\frac{ct}{a} + \frac{2}{\omega - 1} \right) \left[1 - \frac{1 + 9\omega^2}{8} \left(\frac{ct}{a} + \frac{2}{\omega - 1} \right) - \frac{5}{16} (1 - \omega^2) \left(\frac{ct}{a} + \frac{2}{\omega - 1} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{320} (51 + 2\omega^2 + 35\omega^4) \left(\frac{ct}{a} + \frac{2}{\omega - 1} \right)^3 \right], \end{aligned}$$

und diese Gleichung würde anwendbar sein in dem Intervalle:

$$0 < t + t_0 < \frac{2a}{c + v},$$

oder:

$$-\frac{2a}{c - v} < t < \frac{2a}{c + v} - \frac{2a}{v - c}.$$

Dieses ganze Intervall liegt aber im Negativen; da die Variable τ nur positive Werte annehmen kann ($0 < \tau < t + t_0$), so hat dieses ganze Intervall und die zugehörige letzte Formel für $\mathfrak{F}_x$ für die Bewegung des Elektrons keine Bedeutung mehr. Will man die Formel für $\mathfrak{F}_x$ dennoch anwenden, so muß man bedenken, daß v für negative Werte von t gleich Null ist, wodurch auch $\mathfrak{F}_x$ gleich Null wird. Wir haben demnach sogleich mit dem nächsten Intervalle zu beginnen, für das die Formel (176) abgeleitet wurde, und das nach obigem durch den Wert (177^a) begrenzt wurde. Letzterer ist nach (211) jetzt durch die Gleichung:

$$(t + t_0)(v - c) = 2a,$$

oder:

$$t = \frac{2a}{v - c} - t_0 = 0$$

bestimmt. Auch dieses Intervall hat also keine Bedeutung mehr, und ebenso der zugehörige Wert von $\mathfrak{F}_x$, und wir kommen sofort zum dritten Intervalle; in ihm war die Bewegung stationär und die Kraft $\mathfrak{F}_x$ durch (178) bestimmt. Diese Gleichung ist ebenso wie im Falle der Unterlichtgeschwindigkeit unverändert anwendbar, da ja nur die Intervallgrenzen, nicht die Integralgrenzen gegen früher geändert werden. Bei der jetzigen Voraussetzung über den Anfangszustand ist daher die Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit von Anfang an stationär.

¹⁾ Bezeichnet AB einen in Richtung der Bewegung des Elektrons von A nach B gezogenen Durchmesser desselben, so ist t_0 die Zeit, welche die von B ausgehende elektrische Kraft gebraucht, um sich rückwärts bis A fortzupflanzen.

Besonderes Interesse bietet die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit ($\omega = 1$, $v = c$). Geht man von der Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit aus, so werden die entsprechenden Formeln (205), (168) und (169) scheinbar unbrauchbar, indem sie unendlich große Werte von $\mathfrak{F}_x$ ergeben. Tatsächlich aber darf keine dieser Formeln für den Fall $\omega = 1$ angewandt werden; denn wir haben gesehen, daß die den Gleichungen (205) und (168) entsprechenden Intervalle jetzt zu negativen Werten der Zeit gehören, also keine Bedeutung haben; die Gleichung (169) aber entspricht dem stationären Zustande, und der ihm zugehörige Wert der Kraft wird gewonnen, indem man in den Ausdruck der Kraft für das zuletzt vorhergehende Intervall die Zeit t (sofern sie in der oberen Grenze des Integrals (197) erscheint, und bei konstanter Geschwindigkeit kommt sie unter dem Integralzeichen nicht vor) durch die obere Grenze dieses vorhergehenden Intervalles ersetzt, also hier durch Null ersetzt. Nun war aber jene Kraft im vorhergehenden Intervalle ($t < 0$) gleich Null; folglich bleibt sie gleich Null im stationären Zustande, d. h. das Integral (197) ist für $v = c$ bei jedem Werte von t gleich Null (indem der Wert von τ , der den stationären Zustand liefert, hier mit der unteren Grenze Null zusammenfällt). Bei unserer jetzigen Voraussetzung über den Anfangszustand der Bewegung (wo das Elektron nach unendlich langer Ruhe die Bewegung plötzlich mit Lichtgeschwindigkeit beginnt) ist die geradlinige gleichförmige Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit „kräftefrei.“ Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man von Überlichtgeschwindigkeit ausgeht, denn auch bei dieser kommt nur das dem stationären Zustande entsprechende Intervall in Betracht, dessen untere Grenze ebenfalls an der Stelle $t = 0$ liegt.

Drittens betrachten wir das in § 14 behandelte Beispiel der gleichmäßig beschleunigten Bewegung unter den jetzigen Voraussetzungen. Die zur Bestimmung von t_0 dienende Gleichung (198) wird hier gemäß (179):

$$\frac{q}{2} t^2 - (c - v) t - 2a = 0;$$

sie hat eine negative und eine positive Wurzel; nur die letztere ist für uns brauchbar, also:

$$(212) \quad t_0 = \frac{c - v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c - v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}}.$$

Die frühere Gleichung (180), welche in der t - τ -Ebene das Gebiet der Unterlichtgeschwindigkeit durch die Linie L von dem Gebiete der Überlichtgeschwindigkeit trennte (vgl. Fig. 13), bleibt hier unverändert bestehen. Das erste Intervall ($0 < t < t_0$), für welches Gleichung (181) aufgestellt war, wird hier:

$$(212^a) \quad 0 < t < t_0 - t_0 = -\frac{2c}{q} + \sqrt{\left(\frac{c + v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}} - \sqrt{\left(\frac{c - v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}}.$$

Die rechte Seite kann positiv oder negativ sein; nehmen wir das letztere an, so kommt das ganze Intervall für uns nicht in Betracht.

Es handelt sich weiter um die Hyperbel (182); jetzt ist aber die Linie $\tau = t$ durch die Gerade $\tau = t + t_0$ zu ersetzen; die Wurzel τ_1 der genannten Gleichung (wie sie in (184^c) angegeben wurde) ist nur brauchbar, wenn sie kleiner als $t + t_0$ ausfällt. Wir müssen also die Linie $\tau = t + t_0$ mit der Hyperbel (182) zum Schnitt bringen; das gibt die beiden Wurzeln:

$$t_1^* = -\left(t_0 - \frac{c-v}{q}\right) - \sqrt{\left(t_0 - \frac{c-v}{q}\right)^2 + 2\frac{c-v}{q}t_0 - \frac{4a}{q}}$$

$$= -\sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}} - \sqrt{\frac{c-v}{q}\left[3\frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}}\right]}$$

und:

$$(213) \quad t_1^* = -\sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}} + \sqrt{\frac{c-v}{q}\left[3\frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}}\right]},$$

welche an Stelle der früheren Größen t_1 und t_4 treten; diese Wurzeln sind immer reell; die erste aber ist negativ und kommt nicht in Betracht; die zweite ist positiv und größer als $t_2 \left(= \frac{c-v}{q}\right)$, auch größer als $t_3 \left(= \frac{a}{2c} + \frac{c-v}{q}\right)$.

Der früher mit a) bezeichnete Fall, in dem t_1 und t_4 imaginär waren, scheidet hier ganz aus; es kommt nur die Möglichkeit b), bzw. ihr jetziges Analogon, in Betracht; wir erhalten also nach (184^b):

$$(214) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[\Phi_1(\tau^0, t) + \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c} \Psi_1(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(\tau_1, t) \right] \quad \text{für } 0 < t < t_2,$$

wobei τ_1 wieder durch (184^c) definiert ist.

Für $t > t_2$ geschieht die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit; hierdurch ist die obere Grenze des zuletzt betrachteten Intervalles festgelegt; diese Grenze ist unabhängig von t_0 . Das nächste Intervall erstreckt sich von t_2 bis t_3 und wir erhalten, analog zu (188^a):

$$(215) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t)$$

$$+ \left[\Phi_1\left(\frac{a}{c}, t\right) - \Phi_1(\tau^*, t) \right] + \frac{1}{c} \left[\Psi_1\left(\frac{a}{c}, t\right) - \Psi_1(\tau^*, t) \right]$$

$$+ \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(\tau_1, t) \quad \text{für } t_2 < t < t_3.$$

Man macht sich die Abgrenzung der einzelnen Intervalle wieder durch nebenstehende Figur 16 leicht klar (eine analoge Zeichnung hätte auch für den obigen Fall der gleichförmigen Bewegung mit Vorteil benutzt werden können).

Das nächste Intervall erstreckt sich von t_3 bis t_5 , wo t_5 wieder die vertikale Tangente der Hyperbel H_3 bestimmt und durch (190^a) gegeben ist; t_4 ist hier stets größer als t_5 , kommt also noch nicht in Betracht.

$$(216) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t)$$

$$+ \Phi_2^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau^*, t)$$

$$+ \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(\tau_1, t) \quad \text{für } t_3 < t < t_5.$$

Da t_4^* zwischen $t_5 = t_5^*$ und t_6^* liegt, so erhalten wir im nächsten Intervalle, indem nun auch die Hyperbel H_3 in Betracht kommt:

$$\begin{aligned}
 -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = & \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\
 & + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\
 (217) \quad & + [\Phi_2^*(\tau^*, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2^*(\tau^*, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \\
 & + [\Phi_2(\tau_1, t) - \Phi_2(\tau^*, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2(\tau_1, t) - \Psi_2(\tau^*, t)] \quad \text{für } t_5 < t < t_4^*.
 \end{aligned}$$

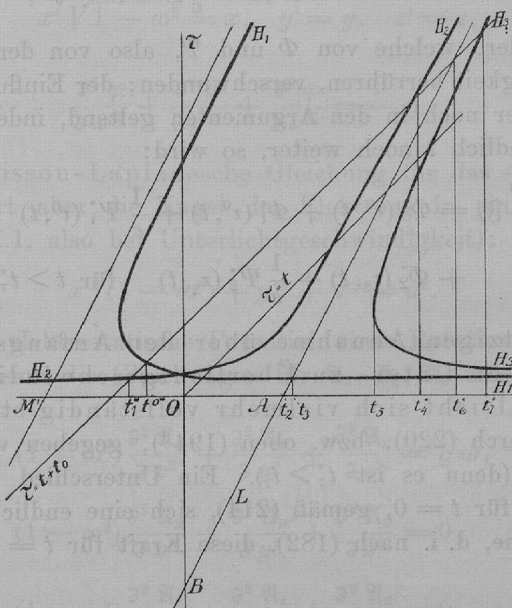


Fig. 16.

An der Stelle t_4^* wird die Hyperbel H_3 von der Linie $\tau = t + t_0$ geschnitten, so daß jetzt der Hyperbelzweig durch diese Linie zu ersetzen ist; wir erhalten demnach:

$$\begin{aligned}
 -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = & \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\
 (218) \quad & + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\
 & + [\Phi_2^*(\tau^*, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2^*(\tau^*, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \\
 & + [\Phi_2(t + t_0, t) - \Phi_2(\tau^*, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2(t + t_0, t) - \Psi_2(\tau^*, t)] \\
 & \quad \text{für } t_4 < t < t_6^*;
 \end{aligned}$$

dabei bestimmt t_6^* den Schnittpunkt der Linie L , die durch (180) gegeben war, mit der Linie $\tau = t + t_0$; es ist also:

$$t_6^* = 2 \frac{c-v}{q} + t_0.$$

Endlich bezeichne t_7^* den Schnittpunkt der durch (189) dargestellten Hyperbel H_3 mit der Geraden $\tau = t + t_0$; dann wird:

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\ (219) \quad &+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\ &+ [\Phi_2^*(t + t_0, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c} [\Psi_2^*(t + t_0, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \quad \text{für } t_6^* < t < t_7^*. \end{aligned}$$

Hier sind die Glieder, welche von Φ und Ψ , also von der anfänglichen Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit herrühren, verschwunden; der Einfluß des anfänglichen Ruhezustandes macht sich aber noch in den Argumenten geltend, indem $t + t_0$ an Stelle von t getreten ist. Wächst endlich t noch weiter, so wird:

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) \\ (220) \quad &+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \quad \text{für } t > t_7^*. \end{aligned}$$

Auch bei der jetzigen Annahme über den Anfangszustand macht hier-nach der Übergang von Unter- zu Überlichtgeschwindigkeit durchaus keine Schwierigkeit; er vollzieht sich vielmehr vollständig stetig; der nahezu stationäre Zustand, wie er durch (220), bzw. oben (194^d), gegeben wird, stellt sich nur erst nach längerer Zeit her (denn es ist $t_7^* > t_7$). Ein Unterschied macht sich ferner darin geltend, daß jetzt schon für $t = 0$, gemäß (214), sich eine endliche Kraft ergibt, während bei der früheren Annahme, d. i. nach (182), diese Kraft für $t = 0$ gleich Null war.

§ 16. Vergleichung mit anderen Bearbeitungen der behandelten Probleme.

Im Laufe der Untersuchung ist wiederholt hervorgehoben worden, daß unsere Resultate mit den von anderer Seite erhaltenen nicht übereinstimmen. Es ist daher notwendig, die Gründe dieser Divergenz klarzulegen.

Von Lorentz, Searle und Abraham wurde die Bewegung eines Elektrons mit konstanter Geschwindigkeit behandelt, besonders von letzterem auf Grund seiner allgemeinen Formeln zur Dynamik des Elektrons, und zwar unter der Annahme, daß diese Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit schon unendlich lange Zeit angehalten habe, so daß sich ein stationärer Zustand herausgebildet hat, d. h. ein Zustand, der für einen mit dem Elektron fest verbundenen Punkt von der Zeit unabhängig geworden ist. Es ist dann (bei gleichförmiger Bewegung, nach unendlich langer Zeit) in jedem Momente die Vorgeschichte des Problems dieselbe; mithin ist das Feld des skalaren Potentials φ und des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$, bezogen auf ein translatorisch mitbewegtes Achsenkreuz, konstant. Wir haben zu untersuchen, inwieweit dieser Schluß mit unseren Formeln übereinstimmt.

Für den Fall der Translation mit konstanter Geschwindigkeit v , geht unsere Differentialgleichung (6), die auf das im Elektron feste Koordinatensystem bezogen ist, in die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = c^2 \varrho$$

über. Für den stationären Zustand $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \right)$ wird also:

$$(221) \quad (1 - \omega^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\varrho,$$

d. h. in der Tat dieselbe Gleichung, welche Abraham zu Grunde legt. Durch die Transformation:

$$(222) \quad x' \sqrt{1 - \omega^2} = x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

wird dieselbe:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = -\varrho,$$

d. h. die gewöhnliche Poisson-Laplacesche Gleichung für das elektrostatische Potential. Jene Transformation führt aber die Kugel des Elektrons in ein verlängertes Rotationsellipsoid über (wenn $\omega < 1$, also bei Unterlichtgeschwindigkeit):

$$x'^2 (1 - \omega^2) + y'^2 + z'^2 = a^2.$$

Es ist also φ das elektrostatische Potential eines Rotationsellipsoides in Variablen x', y', z' . Ebenso lassen sich die Gleichungen für $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ transformieren; wir erhalten aus (2):

$$(1 - \omega^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z'^2} = \varrho \omega,$$

$$(1 - \omega^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial z'^2} = 0,$$

$$(1 - \omega^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial z'^2} = 0,$$

so daß $\mathfrak{A}_x = \omega \cdot \varphi$ wird, während $\mathfrak{A}_y$ und $\mathfrak{A}_z$ in den Ausdrücken für die Kraftkomponenten bzw. mit $v_y (= 0)$ und $v_z (= 0)$ multipliziert erscheinen und ganz herausfallen.

Die Komponenten der wirkenden Kraft werden dann nach (113):

$$f_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} = -(1 - \omega^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\sqrt{1 - \omega^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x'},$$

$$(222^a) \quad f_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} = -(1 - \omega^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -(1 - \omega^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y'},$$

$$f_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} = -(1 - \omega^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -(1 - \omega^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z'}.$$

Die auf das Elektron wirkenden Kraftkomponenten werden durch Integration über das Innere desselben gewonnen; sie sind nach (114), wenn ϱ im Innern konstant ist:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}_x &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2) \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2) \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x'} dx' dy' dz', \\
 (223) \quad \mathfrak{F}_y &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2) \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy dz = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2) \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dx' dy' dz', \\
 \mathfrak{F}_z &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2) \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx dy dz = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2) \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial z'} dx' dy' dz'.
 \end{aligned}$$

Die Integrationen nach x', y', z' beziehen sich auf das Innere des Rotationsellipsoids, welches aus dem kugelförmigen Elektron durch die Transformation (222) entsteht. Diese Integrale sind bekanntlich gleich Null, da die Kraft, die das Ellipsoid auf sich selbst ausübt, verschwindet, und so ergibt sich scheinbar das von den genannten Forschern erhaltene Resultat, daß die stationäre Bewegung eines Elektrons „kräftefrei“ sei. Trotzdem sind diese Schlüsse nicht einwurfsfrei.

Zunächst könnte man zweifeln, ob die Annahme, daß das Potential φ nach unendlich langer Zeit von t unabhängig werde, d. h. daß sich $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t = \infty$ der Grenze Null und φ einer bestimmten endlichen Grenze nähere, berechtigt ist. Dieses Verhalten von φ ist aber in der Tat eine Folge unserer allgemeinen Formeln. Bei gleichförmiger Bewegung ist nämlich $\xi = v\tau$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, folglich:

$$R^2 = (x + v\tau)^2 + y^2 + z^2,$$

und wenn man diesen Wert von R in die Gleichung (53^b) einsetzt, so wird die rechte Seite der letzteren in der Tat unabhängig von t , indem die Grenzen $\tau', \tau'', \tau''', \tau^{IV}$ bzw. durch die Gleichungen:

$$R = a - c\tau, \quad R = a + c\tau \quad (c\tau < a); \quad R = c\tau - a, \quad R = a + c\tau \quad (c\tau > a),$$

als Funktionen von x, y, z definiert werden. Es wird also φ schon für endliche Werte von t stationär, um so mehr für unendlich große Werte von t , wie vorausgesetzt wurde; dasselbe gilt für das Vektorpotential $\mathfrak{A}$. Der in (53^b) gegebene Ausdruck φ ist übrigens für den Fall der gleichförmigen Bewegung auf elementare Funktionen zurückführbar, indem sich die Integrationen ausführen lassen; er muß eine von der gewöhnlichen abweichende Form für das elektrostatische Potential des Ellipsoids darstellen, wenn man in ihm die Transformation (222) ausführt.

Die Schwierigkeit liegt demnach an einer andern Stelle. Wenn man den stationären Zustand der Bewegung beurteilen will, so kommt es nicht so sehr auf den Grenzwert des Potentials für $t = \infty$, sondern auf den Grenzwert der Kraft an. Die Formeln (223) entstehen, wenn man, ausgehend von den Gleichungen (113) und (114) den folgenden Grenzprozeß macht:

$$(224) \quad \lim \mathfrak{F}_x = - \iiint \lim_{t=\infty} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t} \right] dx dy dz,$$

und die Integration rechts über das ganze Volumen des Elektrons ausdehnt. Zur Darstellung des stationären Zustandes benötigt man aber den Grenzwert:

$$(225) \quad \lim_{t=\infty} \mathfrak{F}_x = - \lim_{t=\infty} \iiint \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t} \right] dx dy dz;$$

und dabei ist die Integration rechts nicht über das ganze Volumen auszudehnen, sondern nur über den Teil, welcher zwischen den Kugeln mit den Radien $R - c\tau$ und $R + c\tau$ sich befindet, wie in § 7 und 8 näher ausgeführt wurde, wenigstens für $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, während für $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}$ noch andere Gebiete im Innern in Betracht kommen, nicht aber das ganze Volumen der Kugel. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Integration nach τ zuletzt, die Integration über das Volumen zuerst ausgeführt werde; eine solche Vertauschung der Integrationsordnung ist ja bei endlichen Grenzen und endlichen Funktionen stets erlaubt (und in obigen Rechnungen durchgeführt). Auf der rechten Seite von (225) hängen also die Grenzen des Volumintegrals (nach der Vertauschung) von τ , und somit auch von t ab, woraus hervorgeht, daß eine Identität der beiden Grenzprozesse (224) und (225) nicht zu erwarten ist; in der Tat ist ja schon in einem einfachen Beispiele:

$$\int_0^a \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} = 0 \quad \text{dagegen} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} = \infty.$$

Für die Lösung des physikalischen Problems, das uns beschäftigt, kommt es aber auf den zweiten, durch (225) gekennzeichneten Grenzübergang ausschließlich an; diesen haben wir in unseren Entwicklungen durchgeführt; die letzteren geben daher die einzig brauchbare Lösung der Aufgabe. Sie lautete dahin (vgl. § 12 und § 15), daß bei geradliniger Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit nach einer gewissen endlichen Zeit die Kraft stationär (aber nicht gleich Null) wird.

Daß andauernd eine Kraft nötig ist, um die konstante Geschwindigkeit aufrecht zu erhalten, kann man auch durch folgende Überlegung einsehen. Es sei AB ein Durchmesser des Elektrons, der von A nach B in Richtung der Bewegung weist. Von B und von der Umgebung des Punktes B gehen in jedem Momente elektrische Wirkungen aus, und zwar auch rückwärts in Richtung auf den Punkt A und dessen Umgebung. Diese Kräfte muß das Elektron in jedem Momente überwinden, und nur in der Ruhe werden sie durch die entgegengesetzt wirkenden Kräfte aufgehoben. Daran wird nichts geändert, wie lange auch die Bewegung gedauert hat; auch nach unendlich langer Zeit wird daher eine Kraft aufzuwenden sein, und die Zeit, während welcher diese von jedem Momente ab wirkt, ist gleich der Zeit, welche die elektrische Kraft braucht, um sich rückwärts von B nach A mit der Geschwindigkeit c fortzupflanzen, also (da das Elektron sich mit der Geschwindigkeit v in entgegengesetzter Richtung bewegt) gleich $\frac{2a}{c-v}$. So wird es verständlich, daß die benötigte Kraft durch ein zwischen den Grenzen 0 und $\frac{2a}{c-v}$ genommenes Integral dargestellt wird, dessen Variable τ die Zeit von der augenblicklichen (d. h. zur Zeit t erreichten) Lage des Elektrons nach rückwärts mißt.

Andererseits beruht die Lorenz-Abrahamsche Lösung des Problems der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit sicher auf einer unter der Annahme $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ zulässigen Lösung der zu Grunde liegenden partiellen Differentialgleichung; daß dieselbe trotzdem

im vorliegenden Falle nicht anwendbar ist, erkennt man ohne Hilfe der obigen ausführlichen Rechnungen durch folgende Überlegung. Wenn man ein mit dem Elektron fest verbundenes Koordinatensystem eingeführt hat, so denkt man sich selbst mit diesem Systeme (und mit dem Elektron) in starrer Verbindung; das Elektron wird also als ruhend betrachtet, während der ganze Raum sich mit der Geschwindigkeit $-v$ vom Elektron fortbewegt. Die Formel (221) Abrahams ist anwendbar auf alle Punkte bzw. Körper, die sich mit dem Elektron ebenfalls in starrer Verbindung befinden. Das hier zu behandelnde Problem verlangt aber, die Wirkung des Elektrons auf seine früheren Lagen (bzw. die Wirkung der letzteren auf das Elektron) zu berechnen; die früheren Lagen sind aber mit dem Raume, nicht mit dem Elektron starr verbunden; man hat also die Wirkung des letztern auf diese früheren Lagen, d. h. auf kongruente Elektronen zu berechnen die sich mit der Geschwindigkeit $-v$ vom Elektron fort (also nach rückwärts) bewegen und diese früheren Lagen markieren. In den Gleichungen (223) ist also nicht über das Innere des (jetzt ruhend gedachten) Rotationsellipsoides zu integrieren, sondern über das Innere anderer Ellipsoide, die sich vom gegebenen aus nach rückwärts bewegen; und dann kommt auch die Zeit in die Resultate hinein, und man erkennt, daß es auf die Variable τ ankommt, welche oben eingeführt wurde und die Zeit vom (ruhenden) Elektron aus nach rückwärts mißt. Zur weiteren Durchführung der Integration hätte man die verschiedenen Lagen genau so studieren müssen, wie wir es getan haben, und es wird kaum möglich sein, hier wesentliche Vereinfachungen zu erzielen.

Allerdings war Sommerfeld¹⁾ durch seine Bearbeitung des allgemeinen Problems der Elektronenbewegung auch zu dem Resultate gekommen, daß die gleichförmige Bewegung des Elektrons mit Unterlichtgeschwindigkeit kräftefrei sei; aber die dahin führenden mathematischen Entwicklungen unterliegen gewissen Bedenken, die hier dargelegt werden mögen. Sommerfeld hat den allgemeinen Ansatz gegeben, der die Lösung des Problems ermöglicht; wir haben uns ihm in den ersten Paragraphen (§ 1 bis 3), wie dort schon hervorgehoben wurde, ziemlich enge angeschlossen. Der Unterschied beginnt bei der Gleichung (25) bez. (27); dort kommt die Anfangszeit t_0 vor, die wir der Einfachheit halber an die Stelle $t=0$ legten; Sommerfeld nimmt dagegen $t_0 = -\infty$, so daß die obere Grenze $t-t_0$ durch ∞ ersetzt wird, und ebenso alle folgenden Integrationen nach τ von $\tau=0$ bis $\tau=\infty$, statt von $\tau=0$ bis $\tau=t$ ausgeführt werden. Er begründet die Annahme $t_0 = -\infty$ damit, daß im Laufe der Entwicklung die unendliche Grenze doch wieder durch eine endliche Grenze ersetzt wird (wie auch wir es fanden, vgl. Gleichung (79), (118^b) und viele andere, insbesondere den stationären Zustand in § 12, 13 und 15); das ist allerdings richtig, aber diese endliche Grenze ist dann im allgemeinen eine Funktion von t (Wurzel der Gleichung (78) oder (133) bzw. (142)); dasselbe gilt für die Potentiale $\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \mathcal{A}_z$; bei Berechnung der Kraft werden die letzteren gemäß den Formeln (113) nach der Zeit t differenziert; da nun $\mathcal{A}_x$ bei uns durch das Integral (85) dargestellt war, in dessen oberer Grenze die Zeit (später eine Funktion der Zeit) vorkommt, so entstehen durch Differentiation nach der oberen Grenze Glieder, die fortfallen, wenn man diese Grenze konstant (nämlich gleich ∞) gesetzt hat; diese Glieder sind von uns in § 7 bzw. § 11 berücksichtigt. Überdies aber gab gerade das Auftreten der Veränderlichen in der oberen Grenze uns die

¹⁾ Göttinger Nachrichten, a. a. O., Jahrgang 1904.

Veranlassung, die verschiedenen Fälle zu unterscheiden, die z. B. in § 7 (d. h. für Unterlichtgeschwindigkeit) eingehend diskutiert sind; die Unterscheidung dieser Fälle brachte es mit sich, daß im ersten Intervalle $0 < t < \frac{a}{c}$ eine Funktion unter dem Integralzeichen auftritt, die für $\tau = 0$ nicht unendlich wird, während die einzelnen Sommerfeldschen Integrale für $\tau = \infty$ unendlich groß werden, und dieses Unendlichwerden erst in der Schlußformel wieder herausfällt.

Nur bei gleichförmiger Bewegung tritt im stationären Zustande (der der Annahme $t_0 = -\infty$ entsprechen würde) eine konstante obere Grenze in den Integralen für φ_x und $\mathfrak{A}_x$ auf (vgl. § 12); diesen Fall der geradlinigen stationären Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit müßten daher die Sommerfeldschen Formeln richtig darstellen. Aber auch hier sind die Resultate dadurch entstellt, daß das bei Ausführung der Volumintegrationen angewandte Verfahren nicht einwandfrei ist.

Es handelte sich in § 7 um Ausführung des Integrals:

$$K = \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz = \frac{3 \varepsilon c}{4 \pi a^3} \int_0^t d\tau \iiint \frac{\partial \left(\frac{S}{R} \right)}{\partial x} dx dy dz,$$

wo nach (34^a):

$$(226) \quad S = \int_0^\infty \frac{\sin as - as \cos as}{s^3} \sin cs \tau \cdot \sin Rs \cdot ds.$$

Da x, y, z nur in R , d. h. in der Verbindung $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$ vorkommen, so ist:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{S}{R} \right).$$

Dem entsprechend setzt Sommerfeld, bei dem (wie schon erwähnt) die obere Grenze t des nach τ genommenen Integrals durch ∞ ersetzt wird, jenes Integral gleich:

$$\frac{3 \varepsilon c}{4 \pi a^3} \int_0^\infty d\tau \frac{\partial}{\partial \xi} \iiint \frac{S}{R} dx dy dz = K'.$$

Dabei ist das dreifache Integral wieder über das ganze Innere des Elektrons zu erstrecken; nun hat aber die Funktion S die Eigenschaft, in einem Teile dieses Innern zu verschwinden, und nur im andern Teile (dessen genauere Begrenzung von T abhängt, wie aus obigen Entwicklungen in § 4 hervorgeht, wie wir auch sogleich noch sehen werden) von Null verschieden ist; es bezeichne $d' \omega$ das Volumelement in demjenigen Teile, wo S von Null verschieden ist; dann würde:

$$K' = \frac{3 \varepsilon c}{4 \pi a^3} \int_0^\infty d\tau \frac{\partial}{\partial \xi} \iiint \frac{S}{R} d' \omega;$$

und wenn wir mit ∂' die Differentiation nach ξ , in den Grenzen des Raumintegrals bezeichnen:

$$K' = \frac{3 \varepsilon c}{4 \pi a^3} \int_0^\infty \left[\frac{\partial'}{\partial \xi} \iiint \frac{S}{R} d' \omega + \iiint \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{S}{R} \right) d' \omega \right] d\tau.$$

Da aber $\frac{\partial S}{\partial \xi}$ in demselben Gebiete verschwindet, in welchem S gleich Null ist, so ist andererseits:

$$K = \frac{3 \varepsilon c}{4 \pi a^3} \int_0^i d\tau \iiint \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{S}{R} \right) d' \omega,$$

und so ist es evident, daß die Integrale K und K' sich wesentlich voneinander unterscheiden. Was die Abhängigkeit der genaueren Begrenzung von T (und somit von ξ, η, ζ) angeht, so sei z. B. auf obige Gleichung (74) verwiesen, wo Θ_1 durch (73^a) als Funktion von T und τ definiert ist; ebenso ist es bei Sommerfeld, in dessen Gleichungen (19) die Werte von S für die verschiedenen Intervalle als Funktionen von R angegeben sind; bei der Integration nach R kommen so auch bei ihm unter Berücksichtigung dieser Intervalle Funktionen von T in die Grenzen des dreifachen Integrals. Trotzdem kann allerdings unter besonderen Verhältnissen eine Identität beider Operationen eintreten.

Es ist leicht, diese allgemeinen Überlegungen durch ein Beispiel zu erläutern, das alle wesentlichen Momente der vorstehenden Erörterungen deutlich hervortreten läßt, aber sehr viel einfacher ist. Wir betrachten das Integral:

$$L = \int_0^a dx \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(x + a\xi) \int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cdot \cos x s}{s} ds \right],$$

wo $0 < \xi < a$ sei. Das nach s genommene Integral ist der Dirichletsche Diskontinuitätsfaktor, also:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cdot \cos x s}{s} ds = \frac{\pi}{2} \quad \text{für } x < \xi, \\ = 0 \quad \text{„ } x > \xi.$$

Folglich wird:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (x + a\xi) \int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cdot \cos x s}{s} ds = a \frac{\pi}{2} \quad \text{für } x < \xi, \\ = 0 \quad \text{„ } x > \xi,$$

und:

$$L = \frac{\pi}{2} a \int_0^\xi dx = \frac{\pi}{2} \xi a.$$

Damit vergleichen wir das Integral:

$$L' = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^a \left[(x + a\xi) \int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cdot \cos x s}{s} ds \right] dx.$$

Dasselbe ist:

$$L' = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\xi (x + a\xi) \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{2} (1 + a) \xi + \int_0^\xi \frac{\pi}{2} a dx = (1 + 2a) \frac{\pi}{2} \xi.$$

Es entstehen also in der Tat ganz verschiedene Werte bei verschiedener Anordnung der Operation des Differenzierens und des Integrierens. Nur für $a = -1$ geben beide Integrale denselben Wert $-\frac{\pi}{2} \xi$.

Fassen wir die Sommerfeldschen Formeln zusammen, bevor die betreffenden Integrale ausgewertet sind, so läßt sich sein Ausdruck für die Kraftkomponente $\mathfrak{F}_x$ in der folgenden Form schreiben:

$$-\frac{9 \varepsilon^2 c}{8 \pi^3 a^4} \left[\int_0^\infty d\tau \frac{\partial}{\partial \xi} \iiint \left(1 - \frac{1}{c^2} S v_x(t) v_x(t-\tau) \right) \cdot \left(\frac{S}{R} \right) dx dy dz \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty v_x(t-\tau) d\tau \iiint \frac{S}{R} dx dy dz \right],$$

wobei unter S wieder das obige Integral (226) verstanden werde. Zuzufolge der von uns erlangten Resultate würde dagegen die entsprechende Formel lauten:

$$(227) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{9 \varepsilon^2 c}{8 \pi^3 a^4} \left[\int_0^t d\tau \iiint \left(1 - \frac{1}{c^2} S v_x(t) v_x(t-\tau) \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{S}{R} \right) dx dy dz \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t v_x(t-\tau) \frac{S}{R} d\tau \right\} dx dy dz \right],$$

und hierin treten die von uns besprochenen Unterschiede deutlich hervor (Wahl der oberen Grenze für das Integral nach τ und Vertauschung verschiedener Integrationen und Differentiationen). Allerdings haben wir die Kraft $\mathfrak{F}_x$ oben nicht in dieser Form gegeben, teils weil wir die einzelnen Bestandteile gesondert auswerteten, teils weil wir das Glied $S v_x(t) v_x(t-\tau)$ im ersten Gliede der rechten Seite von (227) zuvor mittelst der Relation (95) fortschafften, so daß sich das Resultat auf Grund der Gleichungen (94), (114) und (116) in der einfacheren Form darbot:

$$(228) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{9 \varepsilon^2 c}{8 \pi^3 a^4} \left[\int_0^t d\tau \iiint \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{S}{R} \right) dx dy dz \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \iiint dx dy dz \int_0^t v_x(t-\tau) \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right) \frac{d\tau}{R} \right].$$

Wir hatten ferner weitere Vereinfachungen erzielt, indem wir in § 7 auf Grund der Gleichung (55) das erste Integral der rechten Seite auf die folgende Form brachten:

$$(228^a) \quad \int_0^t d\tau \iiint \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{S}{R} \right) dx dy dz = - \int_0^t d\tau \iint \frac{S}{R} \cos(n, r) d\sigma \\ = - \int_0^t d\sigma \int \frac{S}{R} \cos(n, r) d\tau,$$

wobei n die innere Normale der Kugel des Elektrons und $d\sigma$ das Flächenelement desselben bezeichnete. Durch diese Umformungen wird der direkte Vergleich unserer Formeln mit den bisherigen erschwert, weshalb obige Zusammenfassung in der Form (227) nützlich sein dürfte.

Sommerfeld sucht die notwendige (und von uns durchgeführte) Diskussion der einzelnen Fälle durch ein anderes Integrationsverfahren zu umgehen; nachdem das Integral von $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ durch den angegebenen (nicht zulässigen) Ansatz auf den Differentialquotienten des Integrals:

$$P = \int_0^t d\tau \iiint \frac{S}{R} dx dy dz = \int_0^t d\tau \iiint \chi dx dy dz$$

nach ξ zurückgeführt ist, kommt es noch auf Behandlung dieses letzteren Integrals an (nur daß bei Sommerfeld als obere Grenze nicht t , sondern ∞ steht). Setzt man zur Abkürzung:

$$u = \frac{\sin Rs}{R},$$

so ist:

$$\chi = \int_0^\infty u \frac{\sin as - as \cos as}{s^3} \sin cs \tau \cdot ds.$$

Es genügt u bekanntlich der partiellen Gleichung:

$$(229) \quad \Delta^2 u + s^2 \cdot u = 0;$$

es ist also:

$$\iiint u dx dy dz = -\frac{1}{s^2} \iiint \Delta^2 u dx dy dz = -\frac{1}{s^2} \iint \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma,$$

wenn $d\sigma$ das Flächenelement des Elektrons bezeichnet. Nun ist bekanntlich:¹⁾

$$(230) \quad \iint \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = -4\pi \frac{\sin Ts}{T} \cdot \frac{\sin as - as \cos as}{s},$$

und folglich wird:

$$\iiint \chi dx dy dz = \frac{4\pi}{T} \int_0^\infty \left(\frac{\sin as - as \cos as}{s^2} \right)^2 \sin cs \tau \cdot \sin Ts \cdot \frac{ds}{s^2}.$$

Die Auswertung des obigen Integrals P ist also auf die Berechnung des Integrals Q zurückgeführt, wo:

$$Q = \int_0^\infty \left(\frac{\sin as - as \cos as}{s^2} \right)^2 \sin cs \tau \cdot \sin Ts \cdot \frac{ds}{s^2}.$$

Diese Berechnung kann in analoger Weise geschehen, wie die Berechnung anderer Integrale oben in § 4; die Sonderung der verschiedenen Fälle wird dann nachträglich bei

¹⁾ Vgl. Pockels: Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig 1891, Seite 217.

Ausführung dieser Integration notwendig, während sie bei unserem obigen Verfahren vorher geschah. Dieses von Sommerfeld für das Integral Q eingeschlagene Verfahren wäre übrigens für uns auch anwendbar gewesen; allerdings kommt es, wie schon gesagt, nicht auf das Integral P an, sondern auf dasjenige Integral, welches aus P entsteht, wenn man u durch $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ ersetzt. Die obige Hilfsformel (230) gilt allgemein für jede Funktion u , welche der Differentialgleichung (229) genügt; da nun auch:

$$\Delta^2 \frac{\partial u}{\partial x} + s^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ist, so wird nach (230):

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz = -\frac{1}{s^2} \iint \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) d\sigma = 4\pi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sin Ts}{T} \right) \cdot \frac{\sin as - as \cosin as}{s^3}.$$

Wir hätten also nach der Methode von § 7 das Integral:

$$(231) \quad 4\pi \int_0^\infty \left(\frac{\sin as - as \cosin as}{s^2} \right)^2 \cdot \frac{\sin cs}{s^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sin Ts}{T} \right) \cdot ds$$

auszuwerten gehabt, um dann nachträglich die Diskussion der verschiedenen Fälle durchzuführen, wie sie auf anderem Wege oben in § 7 gegeben wurde. Es dürfte allerdings kaum eine wesentliche Vereinfachung dadurch erzielt werden; überdies läßt sich gegen dies Verfahren noch ein Einwand erheben. Dasselbe setzt nämlich voraus, daß die Integration zwischen den Grenzen 0 und ∞ noch mit der dreifachen Integration über das Volumen des Elektrons vertauscht wird; ob aber diese Vertauschung gestattet ist, bedarf erst der Untersuchung; ohne weiteres würde sie gestattet sein, wenn in dem Integrale (231) unter dem Integralzeichen die vierte Potenz von s im Nenner stände an Stelle der tatsächlich (durch Differentiation nach ξ) vorkommenden dritten Potenz.

Es muß noch bemerkt werden, daß die Berechnung des von Sommerfeld benutzten Hilfsintegrals Q von ihm nicht korrekt durchgeführt ist. Bezeichnen wir wieder mit S das in § 4 eingehend behandelte Integral:

$$S = \int_0^\infty \frac{\sin ax - ax \cosin ax}{x^3} \sin \beta x \cdot \sin \gamma x \cdot dx,$$

so ist zunächst:

$$Q = \frac{1}{2} \int_{c\tau-T}^{c\tau+T} d\gamma \int_0^a S \cdot \beta \cdot d\beta,$$

es kommt also darauf an, das Integral:

$$\Omega = \int_0^a S \cdot \beta \cdot d\beta$$

zu berechnen; dabei sind die Gleichungen (40) bis (42) von § 7 zu Rate zu ziehen.

Lassen wir a von 0 ab allmählich wachsen, so ist zunächst das Intervall $0 < a < \frac{\gamma}{2}$ zu betrachten, in dem während der Integration $0 < \beta < a$ ist; wir haben hier $a < \gamma - \beta$; ersetzen wir also a durch a , so ist $0 < \beta < a < \gamma$ und $\delta_1 = a + \beta - \gamma < 0$, d. h. es kommen die Gleichungen (42) zur Anwendung, nach denen S gleich Null zu nehmen ist. Somit ergibt sich das erste Resultat:

$$(232) \quad \Omega = 0 \quad \text{für} \quad 0 < a < \frac{\gamma}{2}.$$

Im nächsten Intervalle $\frac{\gamma}{2} < a < \gamma$ ist $\frac{\gamma}{2} < \beta < a$, also $\beta < a < \gamma$ und $a > \gamma - \beta$; hier haben wir den Fall IV) von § 4, und zwar ist $\delta_1 > 0$, folglich nach (41):

$$(233) \quad \begin{aligned} \Omega = \Omega_1 &= \frac{\pi}{8} \int_{\frac{\gamma}{2}}^a [a^2 - (\beta - \gamma)^2] \beta d\beta = \frac{\pi}{8} \left[\frac{1}{2} a^2 \beta^2 - \frac{1}{3} \beta (\beta - \gamma)^3 + \frac{1}{12} (\beta - \gamma)^4 \right]_{\frac{\gamma}{2}}^a \\ &= \frac{\pi}{8} \left[\frac{a^4}{4} + \frac{2}{3} a^3 \gamma - \frac{5}{8} a^2 \gamma^2 + \frac{5}{64} \gamma^4 \right] \quad \text{für} \quad \frac{\gamma}{2} < a < \gamma. \end{aligned}$$

Alsdann möge a den Wert γ überschreiten, aber β während der Integration zunächst kleiner als $a - \gamma$ bleiben; hier ist $a > \beta > \gamma$ und $\delta_4 = a - \beta - \gamma > 0$, also nach (40):

$$S = \frac{\pi}{2} \beta \gamma.$$

Überschreitet dagegen β den Wert $a - \gamma$, so wird $\delta_4 < 0$ und nach (40^b):

$$S = \frac{\pi}{8} [a^2 - (\beta - \gamma)^2],$$

also:

$$(234) \quad \begin{aligned} \Omega = \Omega_2 &= \frac{\pi}{8} \int_{\frac{\gamma}{2}}^{\gamma} [a^2 - (\beta - \gamma)^2] \beta d\beta + \frac{\pi}{2} \int_{\gamma}^{a-\gamma} \beta^2 \gamma d\beta + \frac{\pi}{8} \int_{a-\gamma}^a [a^2 - (\beta - \gamma)^2] \beta d\beta \\ &= \frac{\pi}{8} \frac{67}{192} \gamma^4 + \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{3} (a - \gamma)^3 \gamma - \frac{1}{3} \gamma^4 \right] + \frac{\pi}{8} \left[\frac{1}{2} a^2 \beta^2 - \frac{1}{3} \beta (\beta - \gamma)^3 + \frac{1}{12} (\beta - \gamma)^4 \right]_{a-\gamma}^a \\ &= \frac{\pi}{16} \left[\frac{1}{2} a^4 + 4 a^3 \gamma - 9 a^2 \gamma^2 + 8 a \gamma^3 - \frac{175}{32} \gamma^4 \right] \quad \text{für} \quad a > \gamma. \end{aligned}$$

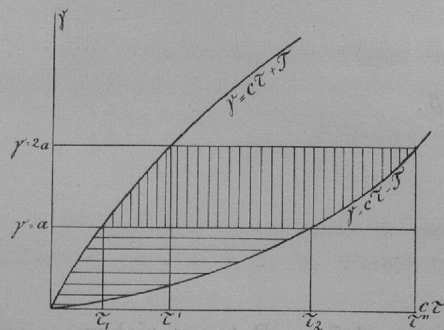


Fig. 17.

Dieses Resultat ist von dem bei Sommerfeld gegebenen verschieden; bei ihm wird nämlich die obige Gleichung (40) für das ganze Intervall $0 < \beta < a - \gamma$ in Anspruch genommen, während wir oben das Intervall $0 < \beta < \frac{\gamma}{2}$ abtrennen mußten, in dem die Formel (42) anzuwenden ist. Infolgedessen ändert sich auch sein Resultat für das Integral Q . Nehmen wir die Größe $c\tau$ als Abszisse, γ als Ordinate eines rechtwinkligen Systems, und zeichnen die Kurven $\gamma = c\tau - T$ und $\gamma = c\tau + T$, wie es in Figur 17 geschehen ist, und seien $\tau_1, \tau', \tau_2, \tau''$ bzw. durch folgende Gleichungen definiert:

$$\tau_1 \text{ durch die Gleichung } a = c\tau + T,$$

$$\tau' \quad \quad \quad 2a = c\tau + T,$$

$$\tau_2 \quad \quad \quad a = c\tau - T,$$

$$\tau'' \quad \quad \quad 2a = c\tau - T;$$

ziehen wir ferner die Linien $\gamma = a$ und $\gamma = 2a$, so ist in dem horizontal schraffierten Teile der Figur:

$$c\tau - T < \gamma < c\tau + T \quad \text{und} \quad \gamma < a,$$

in dem vertikal schraffierten Teile:

$$c\tau - T < \gamma < c\tau + T \quad \text{und} \quad 2a > \gamma > a.$$

Nehmen wir ferner der Einfachheit wegen an, es sei $\tau_1 < \tau' < \tau_2 < \tau''$ (andernfalls wären leichte Modifikationen nötig, ebenso wenn obige Gleichungen mehrere Wurzeln haben). Dann ist:

$$1. \text{ für } 0 < \tau < \tau_1, \quad Q = \frac{1}{2} \int_{c\tau-T}^{c\tau+T} \Omega_2 d\gamma, \quad \text{wenn } \Omega_2 \text{ durch (234) definiert ist,}$$

$$2. \text{ für } \tau_1 < \tau < \tau', \quad Q = \frac{1}{2} \int_{c\tau-T}^a \Omega_2 d\gamma + \frac{1}{2} \int_a^{c\tau+T} \Omega_1 d\gamma, \quad \text{wenn } \Omega_1 \text{ durch (233) gegeben ist,}$$

$$3. \text{ für } \tau' < \tau < \tau_2, \quad Q = \frac{1}{2} \int_{c\tau-T}^a \Omega_2 d\gamma + \frac{1}{2} \int_a^{2a} \Omega_1 d\gamma,$$

$$4. \text{ für } \tau_2 < \tau < \tau'', \quad Q = \frac{1}{2} \int_{c\tau-T}^{2a} \Omega_1 d\gamma,$$

$$5. \text{ für } \tau > \tau'', \quad Q = 0.$$

Wir haben somit fünf verschiedene Fälle zu unterscheiden, während bei Sommerfeld nur drei unterschieden werden. Obgleich also die Grenzen des Integrals Q scheinbar von T unabhängig (nämlich gleich 0 und ∞) sind, erweisen sie sich tatsächlich doch als Funktion von $T = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, und somit (auch bei Sommerfeld) als Funktionen von ξ, η, ζ , wodurch es nach Obigem bedingt ist, daß die Integrale K und K' (auch abgesehen von der oberen Grenze ∞ statt t) voneinander verschieden sind. Wie wir in § 7 sahen, sind die Wurzeln τ' und τ_2 für die schließliche Auswertung unserer früheren Integrale nicht von wesentlicher Bedeutung.

In einer späteren Arbeit¹⁾ hat Sommerfeld seine Resultate auf anderem Wege abgeleitet, wobei er die Einführung des Fourierschen Integrals (vgl. § 1) vermeidet und statt dessen den Greenschen Satz wiederholt benutzt; er kommt so für das Potential φ zu dem Resultate:

¹⁾ Simplified deduction of the field and the forces of an electron, moving in any given way; Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, December 1904.

$$\varphi = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} \int_0^\infty \frac{S}{R} d\tau,$$

d. h. zu derselben Formel, die er auch in seiner ersten Mitteilung gewonnen hatte und die sich von unserer Gleichung (34) dadurch wesentlich unterscheidet, daß in der oberen Grenze t durch ∞ ersetzt ist. Weshalb aber nach τ zwischen den Grenzen 0 und ∞ integriert wird, geht aus der a. a. O. gegebenen neueren Darstellung nicht hervor. In Betreff der weiteren Folgerungen gelten dieselben Bedenken, die wir soeben erörtert haben. Diese Folgerungen beziehen sich hauptsächlich auf die Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit; doch werden auch einige andere Resultate der früheren Arbeiten erneut abgeleitet.

In etwas modifizierter Weise leitet Abraham¹⁾ die Sommerfeldschen Formeln für konstante Geschwindigkeit ab; doch wird auch hier nach τ zwischen den Grenzen 0 und ∞ ohne weitere Begründung integriert, während die Zeit t als obere Grenze in dem betreffenden Integrale auftreten sollte.

Auffällig ist es, daß Herglotz²⁾ auf ganz anderem Wege die Sommerfeldschen Resultate bestätigte; derselbe geht von einer partikulären Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta^2 \varphi = 0$$

aus, indem er diese Gleichung als Differentialgleichung eines Potentials φ im Raume von vier Dimensionen auffaßt, wobei die vier Variablen x, y, z und ict in Betracht zu ziehen sind. Jedes Integral der Form:

$$\iiint \frac{\varrho(k, l, m, \tau) dk dl dm d\tau}{(x-k)^2 + (y-l)^2 + (z-m)^2 - c^2(t-\tau)^2}$$

ist dann eine allgemeine Lösung der Gleichung, und Herglotz bestimmt nun die Integration nach τ , indem er diese Variable als komplex auffaßt und dann über einen gewissen Weg in der komplexen Ebene integriert; er findet so in der Tat einen Ausdruck, der sich als identisch mit dem betreffenden Ausdrucke Sommerfelds erweist; indessen bleibt es bei den Entwicklungen von Herglotz zweifelhaft, ob seine Formeln wirklich zur Darstellung des physikalischen Problems brauchbar sind; erstens ist durch das Operieren mit imaginären Zeiten τ der Zusammenhang gestört, dann aber ist nicht gezeigt, daß die angegebene Lösung im Innern des bewegten Elektrons auch der geforderten Bedingung (1):

$$\ddot{\varphi} - c^2 \Delta^2 \varphi = c^2 \varrho$$

wirklich genügt; denn der übliche Beweis hierfür, wie er sich in der gewöhnlichen Potentialtheorie gestaltet, läßt die unmittelbare Übertragung auf den Fall, wo ein Quadrat im Nenner der partikulären Lösung mit negativem Vorzeichen unter den Integralzeichen auftritt, nicht zu.

¹⁾ Elektromagnetische Theorie der Strahlung (Theorie der Elektrizität Bd. 2). Leipzig 1905, S. 238.

²⁾ Über die Berechnung retardierter Potentiale. Göttinger Nachrichten, Dezember 1904.

Ausgehend von der Vorstellung, daß die Röntgenstrahlen durch plötzliche Hemmungen der Elektronen an der Antikathode entstehen, hat Paul Hertz¹⁾ solche plötzliche Änderungen in der Geschwindigkeit der Elektronen und deren Einfluß auf die Ausstrahlung studiert. Die Behandlung dieses Problems kann selbstverständlich auf Grund unserer allgemeinen Formeln geschehen, denn in dem Sommerfeldschen Ansatz sind die Geschwindigkeitskomponenten ganz willkürliche, also z. B. auch unstetige Funktionen der Zeit. Hertz stützt sich dabei teils auf die allgemeinen Formeln Abrahams für die Dynamik des Elektrons, teils auf dessen besondere Resultate für das konstante Feld bei stationärer Bewegung; die wirkenden Kräfte werden auf indirektem Wege (durch Vermittlung der Energie des stationären Feldes) berechnet, und die Resultate stimmen mit den unsrigen nicht überein, und zwar, soviel ich sehe, deshalb, weil die Abrahamsche Formel für die Energie im stationären Felde vorausgesetzt wird, und aus ihr rückwärts die Energie vor Eintritt des stationären Zustandes abgeleitet wird, während auch für die Berechnung der Ausstrahlung und der Energie unsere Formeln von den bisher benutzten abweichen (vgl. den folgenden Paragraphen). Hervorzuheben ist aber, daß die verschiedenen Stadien, für welche Hertz jeweils verschiedene Formeln aufstellt, mit den von uns betrachteten Lagen (§ 7) übereinstimmen (für den Fall konstanter Unterlichtgeschwindigkeit), und daß Hertz den Grenzfall der Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit ebenso beurteilt, wie wir es taten, indem auch nach ihm in diesem Grenzfalle der stationäre Zustand niemals erreicht wird und die Kraft für jede endliche Zeit endlich bleibt. Trotz dieser qualitativen Übereinstimmung sind die Hertzschen Schlußresultate von den unsrigen verschieden.

In einer späteren Arbeit hat Paul Hertz²⁾ die Frage untersucht, welche Bewegung von einer gegebenen Kraft hervorgerufen wird; insbesondere wird ein Beweis dafür erbracht, daß dieses Problem in gewissen einfachen Fällen lösbar und eindeutig bestimmt ist. Alle diese Entwicklungen knüpfen an die Sommerfeldschen Formeln an, werden also einer Revision bedürfen.

§ 17. Weitere Folgerungen.

Nach den bisherigen Anschauungen galt das Gallileische Prinzip, nach welchem ein Punkt sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, wenn keine Kraft wirkt, für eine elektromagnetische Masse ebenso wie für einen Massenpunkt der Mechanik; auf Grund dessen konnte man den Versuch machen, die Mechanik auf elektromagnetischer Grundlage aufzubauen, indem man nur elektrische Massen als vorhanden annahm. Nachdem aber gezeigt ist, daß eine elektrische Masse auch bei gleichförmiger Bewegung eine Kraft erfordert, welche diese Bewegung aufrecht erhält, fällt die Analogie zwischen Mechanik und Elektrodynamik fort, wenn man sie vielleicht auch durch Hinzufügung weiterer Voraussetzungen wieder einführen kann. Insbesondere wird auch der Begriff der elektromagnetischen Masse hinfällig; als solche bezeichnet man (nach Analogie mit der gewöhnlichen Mechanik) den Quotienten von Kraft und Beschleunigung (nach Lorentz und

¹⁾ Untersuchungen über unstetige Bewegungen eines Elektrons, Inauguraldissertation, Göttingen 1904.

²⁾ Die Bewegung eines Elektrons unter dem Einfluß einer longitudinal wirkenden Kraft. Göttinger Nachrichten, 1906, S. 229.

Abraham); derselbe ist abhängig von der Geschwindigkeit und von der Richtung, in welcher die betreffende Komponente der Kraft gemessen wird. Insbesondere bezeichnet man diesen Quotienten als longitudinale Masse, wenn die Kraft in Richtung der Bewegung gemessen wird. Da nun bei gleichförmiger Bewegung die Beschleunigung verschwindet, und dennoch die Kraft von Null verschieden ist, so würde sich eine unendlich große Masse ergeben. Schon in diesem einfachsten Falle wäre also die Analogie gestört.

Von Interesse ist ferner die Berechnung der Energie und der Strahlung des bewegten Elektrons. Nach Abraham besteht allgemein die Gleichung:¹⁾

$$(235) \quad \frac{dA_i}{dt} + \iint \mathfrak{S} d\sigma = - \frac{dW}{dt},$$

wenn W die elektromagnetische Energie des betrachteten Raumteiles bezeichnet:

$$(236) \quad W = \frac{1}{8\pi} \iiint \{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\} dx dy dz,$$

und wenn A_i die Arbeit der inneren Kräfte bezeichnet:

$$(237) \quad \frac{dA_i}{dt} = \frac{1}{4\pi} \iiint \varrho (\mathfrak{S} v_x f_x) dx dy dz = - \frac{1}{4\pi} \mathfrak{S} v_x \mathfrak{F}_x,$$

wobei f_x durch (113) gegeben ist.

Hierbei ist ferner:

$$(238) \quad \mathfrak{E}^2 = \mathfrak{f}_x^2 + \mathfrak{f}_y^2 + \mathfrak{f}_z^2,$$

und

$$\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{h}_x^2 + \mathfrak{h}_y^2 + \mathfrak{h}_z^2,$$

$$\mathfrak{h}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}, \quad \mathfrak{h}_y = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \quad \mathfrak{h}_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}.$$

Endlich bedeutet $\mathfrak{S}$ den Poyntingschen Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= (\mathfrak{f}_y \mathfrak{h}_z - \mathfrak{f}_z \mathfrak{h}_y)^2 + (\mathfrak{f}_z \mathfrak{h}_x - \mathfrak{f}_x \mathfrak{h}_z)^2 + (\mathfrak{f}_x \mathfrak{h}_y - \mathfrak{f}_y \mathfrak{h}_x)^2 \\ &= \mathfrak{S} \mathfrak{f}_x^2 - (\mathfrak{S} \mathfrak{f}_x \mathfrak{h}_x)^2 \\ &= \mathfrak{E}^2 \cdot \mathfrak{H}^2 \cdot \sin^2(\mathfrak{E}, \mathfrak{H}), \end{aligned}$$

und auf der linken Seite von (235) steht das über die Oberfläche des betreffenden Raumteiles genommene Doppelintegral über $\mathfrak{S}$. Dieses Doppelintegral bestimmt die Ausstrahlung aus dem Raumteile, und Gleichung (235) sagt uns, daß innere Arbeit und Ausstrahlung auf Kosten der elektromagnetischen Energie erfolgen. Auf Grund unserer Formeln kann diese Strahlung in jedem Falle berechnet werden, indem man die dreifachen Integrale A_i und W über das Innere des Elektron ausdehnt.

Im einfachsten Falle der gleichförmigen Bewegung war nach den bisherigen Formeln W von der Zeit unabhängig (nur eine Funktion der Geschwindigkeit), also $\frac{dW}{dt} = 0$;

¹⁾ Vgl. Abraham, Annalen der Physik und Chemie, Bd. 315, 1903, Gleichung (IV); dabei ist das dortige $4\pi\varrho$ durch ϱ zu ersetzen, sodann $\mathfrak{E}_x$ durch $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{H}_x$ durch $\mathfrak{h}_x$.

ebenso war $\frac{dA_i}{dt}$ gleich Null zu setzen, denn die Bewegung war kräftefrei ($\mathfrak{F}_x = v$, $\mathfrak{F}_y = v$, $\mathfrak{F}_z = v$); infolge dessen war auch keine Ausstrahlung vorhanden.

Auf Grund unserer Resultate ist aber die rechte Seite von Gleichung (237) von Null verschieden; es muß also $\frac{dA_i}{dt}$ aus (237), W aus (236) berechnet werden, und dann ergibt sich die Strahlung des Elektrons aus (235). Dabei ist zu beachten, daß in der Formel

$$4\pi A_i = - \int_0^t \mathcal{S} v_x \cdot \mathfrak{F}_x \cdot dt = - \mathcal{S} \int_0^t v_x \cdot \mathfrak{F}_x \cdot dt$$

für die Funktionen $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ in den verschiedenen Abschnitten des Intervalles von 0 bis t nach obigen Resultaten verschiedene Funktionen von t einzusetzen sind.

Handelt es sich z. B. wieder um die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v längs der x -Achse, so ist nach (238) und (222^a)

$$\mathfrak{E}^2 = (1 - \omega^2)^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

ferner:

$$\mathfrak{H}_y = -\omega \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \mathfrak{H}_z = +\omega \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}^2 = \omega^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Wendet man den in obiger Gleichung (55) enthaltenen Gaus'schen Satz an, so wird:

$$\begin{aligned} W &= \frac{(1-\omega^2)^2}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \frac{\omega^2}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= -\frac{1-\omega^2+\omega^4}{8\pi} \iiint \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \varphi dx dy dz - \iint \left[\frac{1-\omega^2+\omega^4}{8\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\omega^2}{8\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n, x) \right] \varphi d\sigma, \end{aligned}$$

wo wieder $d\sigma$ das Flächenelement des Elektrons und n die Richtung der inneren Normale bezeichnet. Es ist ferner:

$$\mathfrak{E}^2 = \omega^2 (1 - \omega^2)^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Bei Auswertung desselben sind ebenso wie bei Auswertung des in der letzten Gleichung auftretenden Oberflächenintegrals die verschiedenen Lagen zu berücksichtigen, wie sie für Unterlichtgeschwindigkeit in § 7, für Überlichtgeschwindigkeit in § 10 betrachtet wurden. Auf die nähere Ausführung der Integrale gehen wir hier nicht ein.

Den Ausdruck für die Energie benutzt man, um die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen im elektrostatischen Felde zu berechnen. Sei φ das Potential dieses Feldes, so ist der Zuwachs der Energie des Elektrons gleich der geleisteten Arbeit¹⁾:

$$W - W_0 = e(\varphi - \varphi_0),$$

wenn $-e$ die negative Ladung des Elektrons bezeichnet. Da man annehmen darf, daß

¹⁾ Vgl. Abraham: a. a. O. Bd. 2, S. 195.

die Zeit t größer als $\frac{2a}{c-v}$ ist, so ist $W - W_0$ eine Funktion von ω , für die man einen dem stationären Zustande entsprechenden Ausdruck aus obigen Formeln zu berechnen hat. Aus dieser Gleichung läßt sich dann die Endgeschwindigkeit ω berechnen; doch wird die Art der Abhängigkeit zwischen ω und φ eine ganz andere sein, als man auf Grund der bisherigen Formeln anzunehmen berechtigt war. Das Resultat wird wesentlich verschieden sein, je nachdem man (konstante) Über- oder Unter-Lichtgeschwindigkeit voraussetzt, sowie je nach den Vorstellungen, die man sich über den Anfangszustand bildet, wobei unsere Erörterungen in § 15 zu berücksichtigen sind.

Um die Ablenkung der Kathodenstrahlen im magnetischen oder elektrischen Felde zu beurteilen, ist es nötig, den Begriff der „transversalen elektromagnetischen Masse“ zuvor zu erörtern. Das ist aber kaum möglich, ohne daß vorher das bei der Translation entstehende Drehmoment berechnet und die Rotationsbewegung der Elektronen behandelt wäre; diese Fragen sind in obigen Entwicklungen noch nicht berücksichtigt, doch hoffe ich darauf demnächst in einer Fortsetzung dieser Untersuchungen zurückzukommen.

Dann werden wir auch auf die Herglotzschen Untersuchungen¹⁾ einzugehen haben, die sich auf die Kräfte rotirender Elektronen beziehen und in besonderen Fällen von jenen kräftefreien Schwingungen handeln, die oben in der Einleitung erwähnt wurden.

¹⁾ Zur Elektronentheorie. Göttinger Nachrichten, 1903, S. 1.

Berichtigungen.

Seite 256 Zeile 2 v. o. muß es heißen: $\frac{3 \varepsilon c^2 \tau'}{4 \pi a^3}$ statt $\frac{3 \varepsilon c^2 \tau'}{4 a^3}$.

„ 260 In Gleichung (71) muß es heißen: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ statt φ .

„ 262 Zeile 18 v. u. muß es heißen: t^0 statt t_0 .

„ 276 „ 11 v. o. Für die zweite Lage ist über das Vorzeichen der Kraft $\mathfrak{F}_x$ allgemein kaum etwas auszusagen.

Dasselbe gilt dann für die dritte Lage.

„ 288 „ 9 v. u. muß es heißen: $(T - a)^3$ statt $(T - a)_3$.

„ 302 In Figur 14 „ „ „ t^0 statt t_0 .

Ueber die Bewegung der Elektronen.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	235
§ 1. Das elektromagnetische Feld eines bewegten Elektrons	237
§ 2. Das Hilfspotential φ'	240
§ 3. Die Hilfsfunktion P	243
§ 4. Berechnung einiger Hilfsintegrale	245
§ 5. Über die Zulässigkeit der vorgenommenen Vertauschungen von Differentiationen und Integrationen	250
§ 6. Das skalare Potential φ für Volumladung bei Translation mit Unterlichtgeschwindigkeit	252
§ 7. Fortsetzung. — Ausführung der Integration über das Volumen des Elektrons	256
§ 8. Das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ für Translation mit Unterlichtgeschwindigkeit bei Volumladung	266
§ 9. Die von den Potentialen φ und $\mathfrak{A}$ bei Unterlichtgeschwindigkeit abhängenden Kräfte	275
§ 10. Das Potential φ für Volumladung bei Translation mit Überlichtgeschwindigkeit	277
§ 11. Das Potential $\mathfrak{A}$ bei Volumladung und Translation mit Überlichtgeschwindigkeit und die auf das Elektron wirkende Kraft	285
§ 12. Die translatorische geradlinige Bewegung eines Elektrons bei Volumladung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit bzw. Lichtgeschwindigkeit	291
§ 13. Die translatorische Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit (bzw. Lichtgeschwindigkeit) bei Volumladung	295
§ 14. Die geradlinige, gleichförmig beschleunigte (bzw. verzögerte) Bewegung eines Elektrons mit Volumladung. — Übergang von Unterlichtgeschwindigkeit zu Überlichtgeschwindigkeit	300
§ 15. Ergänzende Betrachtung über den Anfangszustand der Bewegung, insbesondere bei gleichförmiger und bei gleichförmig beschleunigter Bewegung des Elektrons	310
§ 16. Vergleichung mit anderen Bearbeitungen der behandelten Probleme	318
§ 17. Weitere Folgerungen	331