BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE HEFT 82

HEINZ KÖNIG

Multiplikationstheorie der verallgemeinerten Distributionen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt
am 1. Juni 1956

MÜNCHEN 1957
VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C.H.BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG

Diese Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Würzburg als Habilitationsschrift angenommen.

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

VORWORT

In der vorliegenden Arbeit gebe ich eine systematische Darstellung meiner in den Jahren 1953–55 durchgeführten Untersuchungen über das Multiplikationsproblem in der Theorie der Distributionen. Bei diesen Untersuchungen bin ich von vornherein von dem in meiner Dissertation [4]* eingeführten, gegenüber L. SCHWARTZ [8] verallgemeinerten Distributionsbegriff ausgegangen, welcher erst eine befriedigende Formulierung des Multiplikationsproblems gestattet. Das Ergebnis ist eine umfassende Theorie, welche dem (in den Anwendungen seit langem in „naiver" Weise geübten) Umgange mit Produkten von Distributionen dieselbe Sicherheit wie dem mit den Distributionen selbst verleiht.

Die Darstellung der grundlegenden Partien wird beherrscht von dem Begriff des Verallgemeinerten Funktionssystems, dessen Theorie in § 1 vorangestellt ist. Mit diesem Begriff erfasse ich in reiner Form die den lokalen Charakter zum Ausdruck bringenden Eigenschaften des Funktionsbegriffs; ihm müssen sich alle sinnvollen Verallgemeinerungen des Funktionsbegriffes unterordnen. Nach der kurzen Einführung der Funktionenklassen in § 2 gebe ich in § 3 auf dieser Grundlage zum ersten Male eine vollständig zwingende axiomatische Begründung der Distributionentheorie. In ebenso natürlicher Weise definiere ich sodann in § 4 den zentralen Begriff der Multiplikationstheorie und stelle dessen Haupteigenschaften fest. Es erweist sich als sinnvoll, diesen allgemeinen Begriff gewissen Einschränkungen zu unterwerfen, die im Anschluß an die Einführung der lokalen Stufen-Ordungsstruktur erörtert werden. Hierauf wird in § 5 das entscheidende Existenz- und Regularitätsproblem in die Form gebracht, in der es sich, in dem umfangreichen § 6, angreifen und lösen läßt. In § 7 ernte ich schließlich die Früchte des sich so ergebenden Existenz- und Regularitätssatzes. Neben der sog. maximalen strengen Multiplikationstheorie, deren Existenz ich schon früher in [5] nachweisen konnte, wird sich eine Fülle von wichtigen Multiplikationstheorien ergeben, die insbesondere die von Seiten der Anwendungen gestellten Anforderungen weitgehend erfüllen.

Ich möchte nicht versäumen, der vielen Anregungen zu gedenken, die mir während meines Pariser Aufenthaltes im Winter 1953/54 von Herrn Prof. Dr. L. SCHWARTZ und seinem Kreise zuteil wurden. Seine Magnifizenz Herr Prof. Dr. H. L. SCHMID, Würzburg, und die Herren Professoren Dr. H. BILHARZ, Würzburg, und Dr. K. H. WEISE, Kiel, haben meine Arbeit stets freundlich unterstützt. Herrn Prof. Dr. H. SCHMIDT, Würzburg, verdanke ich die Einladung zu einem Vortrag über meine Untersuchungen im Mathematischen Kolloquium der Universität Würzburg. Die Herren Dr. W. GÜTTINGER, z. Z. Sao Paulo, und Dr. F. PENZLIN, Würzburg, gaben mir mannigfache Hinweise über die physikalischen Anwendungen der Distributionentheorie. Die Deutsche Forschungsgemeinschaft ermöglichte mir durch ein Stipendium die Durchführung eines großen Teils der hier dargestellten Untersuchungen. Allen Genannten bin ich herzlichen Dank schuldig.

---

* Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

INHALTSVERZEICHNIS

Zusammenfassung 7

§ 1. Verallgemeinerte Funktionensysteme 9

1. Lokal strukturierte Systeme 9
2. Mengentheoretische Relationen und Operationen 9
3. Verallgemeinerte Funktionensysteme 10
4. Separierende und komplettierende Äquivalenzrelationen 13

§ 2. Das System der Funktionenklassen 15

1. Das System der Funktionenklassen 15
2. Die Differentiation 16
3. Die erweiterte Differentiation 17

§ 3. Das System der Distributionen 18

1. Differentiationstheorien 18
2. Das charakteristische System einer Differentiationstheorie 19
3. Existenz von Differentiationstheorien. Die Distributionentheorie 20
4. Die lokale Ordnungsstruktur der Distributionen 21
5. Beispiele 23

§ 4. Die Systeme der Multiplikationstheorie 24

1. Multiplikationstheorien 24
2. Das charakteristische System einer Multiplikationstheorie 26
3. Die lokale Stufen-Ordnungsstruktur 28
4. Multiplizierbare Distributionen 30
5. Strenge Multiplikationstheorien 32

§ 5. Der Begriff der Basis einer Multiplikationstheorie 36

1. Produktive und streng produktive Teilräume der Tensoralgebra 36
2. Der Begriff der Basis einer Multiplikationstheorie 38

§ 6. Der Existenzsatz 40

1. Hilfsbetrachtungen 41
2. Fortsetzung der Hilfsbetrachtungen 44
3. Existenz des minimalen streng produktiven Teilraumes 48
4. Der Existenzsatz 53
5. Der Regularitätssatz 57

§ 7. Die durch den Existenzsatz erzeugten strengen Multiplikationstheorien 61
1. Formulierung des Existenzsatzes 61
2. Die maximale strenge Multiplikationstheorie 62
3. Erzeugendensysteme 64
4. Die Standard-Multiplikationstheorien 65
5. Der Basissatz 70
6. Folgerungen 74

Literaturverzeichnis 78

Sachverzeichnis 79

ZUSAMMENFASSUNG

Die Theorie der Distributionen ermöglicht eine strenge Einführung der in den Anwendungen seit langem in „naiver" Weise benutzten „uneigentlichen" Funktionen. Sie rechtfertigt das Rechnen mit diesen Größen jedoch nur insoweit, als es sich dabei um wesentlich lineare Prozesse handelt, nicht aber die auftretenden Produktbildungen von weitgehend willkürlichen Distributionen. Es wird nun, um auch diesen Prozessen eine strenge Grundlage zu geben, eine Theorie der Multiplikation von Distributionen entwickelt.

Aus früheren Ergebnissen [7] folgt, daß hierzu eine Erweiterung des Distributionenbereiches notwendig ist. Diese Erweiterung wird in genauer Analogie zu derjenigen durchgeführt, die von den Funktionen zu den Distributionen führt. Die „erzeugende Operation" jener Erweiterung ist die Differentiation, jetzt ist es die Multiplikation.

Von den Funktionen aus gelangt man durch die beiden Forderungen, daß ihre lokale Struktur auf die allgemeineren Größen übertragbar und die Differentiation in deren Bereich unbeschränkt ausführbar werden soll, zu dem Begriff der Differentiationstheorie. Führt man für die Differentiationstheorien eine Ordnungsrelation $D_1 > D_2$ mit der Bedeutung „D_1 ist homomorph (in bezug auf die definierte Struktur) in D_2 abbildbar" ein, so gibt es genau eine maximale Differentiationstheorie. Dies ist die Distributionentheorie.

In derselben Weise gelangt man von den Distributionen aus durch die drei Forderungen, daß ihre lokale Struktur sowie ihre Differentiation auf die allgemeineren Größen übertragbar und daß in deren Bereich eine möglichst universelle, vernünftige Multiplikation erklärbar sein soll, zu dem Begriff der Multiplikationstheorie. Wie oben wird für die Multiplikationstheorien eine Ordnungsrelation $P_1 > P_2$ eingeführt, und es gibt wieder genau eine maximale Multiplikationstheorie.

Bei dieser Erweiterung ist jedoch die Beschränkung auf die maximale Multiplikationstheorie – aus Gründen, die im folgenden angedeutet sind – nicht angemessen. Andererseits ist es aussichtslos, alle Multiplikationstheorien (oder auch alle Differentiationstheorien) überblicken zu wollen. Das Hauptergebnis der Untersuchungen besteht vielmehr in dem Nachweis, daß „hinreichend viele" Multiplikationstheorien existieren und diese außerdem gewisse zusätzliche Eigenschaften besitzen, welche einen abgerundeten Kalkül mit Produkten von Distributionen gewährleisten. Der Ausdruck „hinreichend viele" bezieht sich dabei auf die für die Anwendungen wichtigste Seite der Theorie, das ist die Frage, wann das in einer bestimmten Multiplikationstheorie gebildete Produkt zweier Distributionen wieder eine Distribution ist und welche Distributionen dabei auftreten können. Es zeigt sich nämlich, wenigstens bei Beschränkung auf die in den Anwendungen allein vorkommenden Distributionen mit „isolierten Singularitäten", daß alle Distributionen, welche nach den Gesetzen des Kalküls als Produkt zweier Distributionen auftreten können, in geeigneten Multiplikationstheorien auch wirklich angenommen werden. So gewinnt man etwa die Relationen

$$\delta\delta = c\delta, \quad \delta\left(\mathrm{Pf.}\,\frac{1}{x}\right) = -\delta' + c\delta$$

$\left(\delta = \text{Diracdistribution},\ \mathrm{Pf.}\,\frac{1}{x} = \text{Pseudofunktion}\ \frac{1}{x}\right)$ mit willkürlich wählbarem c als einfachste Spezialfälle.

§ 1. VERALLGEMEINERTE FUNKTIONENSYSTEME

1. Lokal strukturierte Systeme

Definition 1: Es sei X ein topologischer Raum und Ω das System seiner nichtleeren offenen Teilmengen. Jedem $U \in \Omega$ sei eine Menge $A(U)$ zugeordnet, und jedem Paar U, $V \in \Omega$ mit $V \subset U$ eine Abbildung $a(V, U)$ von $A(U)$ in $A(V)$. Wir sagen, das System $a = (a(V, U))$ definiert auf dem System $A = (A(U))$ eine *lokale Struktur*, oder das System A wird durch das System a zu einem *lokal strukturierten System* über $X = (X, \Omega)$, wenn folgendes gilt:

(A_1) Für jedes $U \in \Omega$ ist $a(U, U)$ die identische Abbildung von $A(U)$ auf sich.

(A_2) Für jedes Tripel U, V, $W \in \Omega$ mit $W \subset V \subset U$ gilt die Transitivitätsregel

$$a(W, V) \quad a(V, U) = a(W, U). \tag{1.1}$$

Ein lokal strukturiertes System über X wird nach dieser Definition also durch ein Paar (A, a) gegeben. Wir werden aber im folgenden oft nur kurz von dem „lokal strukturierten System A" sprechen. Das entspricht einer in der Mathematik allgemein üblichen Ausdrucksweise. Hat man etwa, in der allgemeinen Topologie, einer Menge X eine topologische Struktur Ω aufgeprägt, so spricht man, wenn man nicht gerade den Vergleich mehrerer, derselben Menge X aufgeprägter topologischer Strukturen im Auge hat, statt von dem „topologischen Raum (X, Ω)" auch nur kurz von dem „topologischen Raum X".

Beispiele: 1) Es sei X ein beliebiger topologischer Raum, M eine beliebige Menge. Für jedes $U \in \Omega$ sei $A(U) = M$, und für jedes Paar U, $V \in \Omega$ mit $V \subset U$ sei $a(V, U)$ die identische Abbildung von M auf sich. – In dieser trivialen Weise kann man also jede beliebige Menge M als lokal strukturiertes System über jedem topologischen Raum X auffassen.

2) Es folgt ein charakteristisches Beispiel: X sei wieder ein beliebiger topologischer Raum, Y eine beliebige Menge. Für jedes $U \in \Omega$ sei $A(U)$ die Menge $A(U, Y)$ aller Abbildungen f von U in Y, und für jedes Paar U, $V \in \Omega$ mit $V \subset U$ und jedes $f \in A(U)$ sei $a(V, U)f$ die Restriktion von f auf V. Das so definierte lokal strukturierte System nennen wir das *Funktionensystem* $A_\Omega(X, Y)$ der Y-wertigen Funktionen über dem topologischen Raum X.

In Anlehnung an dieses charakteristische Beispiel 2) nennen wir, bei beliebigem lokal strukturiertem System A, das Bild $a(V, U)f$ von $f \in A(U)$ in $A(V)$ die *Restriktion* von f auf V.

2. Mengentheoretische Relationen und Operationen

Es sei A ein lokal strukturiertes System über dem topologischen Raum X. Ein System B von Teilmengen $B(U) \subset A(U)$ nennen wir ein *Teilsystem* von A, wenn die auf A erklärte Restriktion a auch auf B eine lokale Struktur definiert, wenn also für jedes Paar U, $V \in \Omega$ mit $V \subset U$ und jedes $f \in B(U)$ auch $a(V, U)f \in B(V)$ gilt. Wir schreiben in diesem Falle $B \subset A$.

Die Relation $\subset$ definiert eine (teilweise) Ordnung in der Menge aller Teilsysteme von A. Es ist klar, daß jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Teilsystemen $A_i \subset A$ in bezug auf diese Ordnung eine obere Grenze, nämlich die *Vereinigung* $\bigcup_{i \in I} A_i = (\bigcup_{i \in I} A_i(U))$, und eine untere Grenze, nämlich den *Durchschnitt* $\bigcap_{i \in I} A_i = (\bigcap_{i \in I} A_i(U))$ (der evtl. natürlich das leere System $\emptyset$ sein kann), besitzt, und daß Vereinigung und Durchschnitt den üblichen Distributivgesetzen gehorchen.

Es sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von lokal strukturierten Systemen über X. Als *Produktsystem* der A_i definieren wir das lokal strukturierte System $A = \prod_{i \in I} A_i = (\prod_{i \in I} A_i(U))$ mit der, kurz gesagt, komponentenweise erklärten Restriktion: Für jedes Paar $U, V \in \Omega$ mit $V \subset U$ und jedes $f = (f_i)_{i \in I} \in A(U)$, $f_i \in A_i(U)$, sei $a(V, U) f = (a_i(V, U) f_i)_{i \in I}$.

Es sei A ein lokal strukturiertes System über X. Ein System Q von Äquivalenzrelationen $Q(U) \subset A(U) \times A(U)$ auf $A(U)$ nennen wir eine *mit der lokalen Struktur verträgliche Äquivalenzrelation* auf A, wenn für jedes Paar $U, V \in \Omega$ mit $V \subset U$ aus $(f, g) \in Q(U)$ auch $(a(V, U)f, a(V, U)g) \in Q(V)$ folgt, wenn also Q ein Teilsystem des Produktsystems $A \times A$ ist. Das System A/Q der Quotientenmengen $A(U)/Q(U)$, das *Quotientensystem* von A nach Q, wird dann durch die in natürlicher Weise erklärte Restriktion wieder zu einem lokal strukturierten System über X.

Es seien $A = (A, a)$, $B = (B, b)$ zwei lokal strukturierte Systeme über X. Ein System u von Abbildungen $u(U)$ von $A(U)$ in $B(U)$ heißt eine *zulässige Abbildung* von A in B, wenn für jedes Paar $U, V \in \Omega$ mit $V \subset U$ und jedes $f \in A(U)$ die Gleichung $b(V, U)\, u(U) f = u(V)\, a(V, U) f$ gilt, wenn also, kurz gesagt, u mit der Restriktion vertauschbar ist.

Das durch u vermittelte *Bild* uA von A in B ist dann offenbar ein Teilsystem von B. Die Abbildung u heißt *umkehrbar*, wenn für jedes $U \in \Omega$ und jedes Paar $f, g \in A(U)$ aus $u(U)f = u(U)g$ auch $f = g$ folgt. Sie heißt eine Abbildung *auf* B, wenn $uA = B$ ist. Eine umkehrbare zulässige Abbildung u von A auf B schließlich heißt ein *Isomorphismus* der lokalen Strukturen von A, B.

Für die lokale Struktur gilt selbstverständlich ein *Homomorphiesatz*: Ist A ein lokal strukturiertes System über X, Q eine mit der lokalen Struktur verträgliche Äquivalenzrelation auf A, so ist die kanonische Abbildung von A auf A/Q zulässig. Ist umgekehrt u eine zulässige Abbildung von A auf ein lokal strukturiertes System B, so ist B kanonisch isomorph mit A/Q, wo Q die mit der lokalen Struktur verträgliche Äquivalenzrelation auf A ist, für die $Q(U)$ für jedes $U \in \Omega$ aus allen Paaren $(f, g) \in A(U) \times A(U)$ mit $u(U)f = u(U)g$ besteht.

Es sei A ein lokal strukturiertes System über X. Jede zulässige Abbildung von $A \times A$ in A heißt eine *innere Verknüpfung* auf A. Ist B ein zweites lokal strukturiertes System über X, so heißt jede zulässige Abbildung von $B \times A$ in A eine *äußere Verknüpfung* auf A mit dem *Operatorenbereich* B. Eine endliche Familie $u = (u_i)_{i \in I}$ von inneren und äußeren Verknüpfungen auf A definiert auf A eine *algebraische Struktur*.

Wir übertragen die übliche Terminologie der Algebra auf die lokal strukturierten Systeme. Definiert etwa u auf A eine algebraische Struktur, und ist für jedes $U \in \Omega$ die (im üblichen Sinne) durch $u(U)$ auf $A(U)$ definierte algebraische Struktur von derselben wohldefinierten Art (z. B. Gruppe, Ring, Linksmodul über einem Ring), so belegen wir auch die durch u auf A definierte Struktur kurz mit der nämlichen Bezeichnung.

Weiter ist klar, wann wir von einer *Teilstruktur* einer algebraischen Struktur, von einer *mit einer algebraischen Struktur verträglichen Äquivalenzrelation* und von einem *Homomorphismus* bzw. *Isomorphismus* in bezug auf algebraische Strukturen sprechen.

Für die algebraischen Strukturen gilt wieder ein *Homomorphiesatz*. Ist etwa A ein linearer Vektorraum über einem kommutativen Körper K, so ist jedes homomorphe Bild B von A wieder ein solcher. Die zugehörige, mit der lokalen Struktur und der Vektorraumstruktur von A verträgliche Äquivalenzrelation Q auf A wird durch einen linearen Teilraum N von A beschrieben, derart, daß B kanonisch isomorph mit dem Quotientenraum A/N ist. Es ist klar, wie sich alle Aussagen über die Äquivalenzrelation Q in solche über den Teilraum N übersetzen.

3. Verallgemeinerte Funktionensysteme

Definition 2: Ein lokal strukturiertes System A über einem topologischen Raum X heißt ein *verallgemeinertes Funktionensystem* über X, wenn es die folgende Eigenschaft, genannt *Lokalisationsprinzip*, besitzt:

(L) Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $U\in \Omega$ durch offene Teilmengen U_i von U, und für jedes $i\in I$ sei ein $f_i\in A(U_i)$ gegeben mit der Eigenschaft, daß für jedes Paar $i, j\in I$ mit nichtleerem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ die Restriktionen von f_i, f_j auf diesen Durchschnitt übereinstimmen. Dann gibt es *genau* ein $f\in A(U)$ mit der Eigenschaft, daß die Restriktion von f auf U_i für jedes $i\in I$ mit f_i übereinstimmt.

Die Eigenschaft (L) kann offenbar in die beiden folgenden zerlegt werden, von denen die erste eine Eindeutigkeits-, die zweite eine Existenzaussage macht:

(L_1) Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $U\in \Omega$ durch offene Teilmengen U_i von U, und die Restriktionen von $f, g\in A(U)$ auf U_i seien für jedes $i\in I$ einander gleich. Dann stimmen auch f, g überein.

(L_2) Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $U\in \Omega$ durch offene Teilmengen U_i von U, und für jedes $i\in I$ sei ein $f_i\in A(U_i)$ gegeben mit der Eigenschaft, daß für jedes Paar $i, j\in I$ mit nichtleerem Durchschnitt $U_i\cap U_j$ die Restriktionen von f_i, f_j auf diesen Durchschnitt übereinstimmen. Dann gibt es *mindestens* ein $f\in A(U)$ mit der Eigenschaft, daß die Restriktion von f auf U_i für jedes $i\in I$ mit f_i übereinstimmt.

Beispiele: 1) Jedes Funktionensystem $A_\Omega(X, Y)$ ist offensichtlich auch ein verallgemeinertes Funktionensystem.

2) Man belegt leicht durch einfache Beispiele lokal strukturierter Systeme, bei denen X nur aus zwei Elementen besteht, daß keine der Eigenschaften (L_1), (L_2) für alle lokal strukturierten Systeme gilt und beide voneinander unabhängig sind.

Weitere Beispiele wird man in großer Zahl in den folgenden Paragraphen dieser Arbeit finden.

Es sei A ein lokal strukturiertes System über X. Besitzen alle A_i einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilsystemen von A die Eigenschaft (L_1), so auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} A_i$; dasselbe trifft auch für die Eigenschaft (L) zu, nicht aber für (L_2) allein, selbst wenn die Familie $(A_i)_{i\in I}$ endlich ist. Sind die A_i weiter total geordnet und besitzen sie alle die Eigenschaft (L_1), so auch ihre Vereinigung $\bigcup_{i\in I} A_i$; dasselbe gilt aber weder für (L) noch für (L_2) allein.

Jede der Eigenschaften (L_1), (L_2) gilt für das Produkt einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ von lokal strukturierten Systemen A_i genau dann, wenn sie für jeden Faktor A_i gilt.

Mit einem lokal strukturierten System besitzt auch jedes seiner Teilsysteme die Eigenschaft (L_1). Insbesondere kann ein lokal strukturiertes System nur dann Teilsystem eines verallgemeinerten Funktionensystems sein, wenn es diese Eigenschaft (L_1) besitzt. Von grundlegender Bedeutung ist aber die Umkehrung hiervon, der

Satz 1: Zu jedem lokal strukturierten System A über X, das die Eigenschaft (L_1) besitzt, gibt es ein verallgemeinertes Funktionensystem $\bar{A}$ über X, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

(H_1) Das System A ist Teilsystem des Systems $\bar{A}$.

(H_2) Jedes A enthaltende und in $\bar{A}$ enthaltene verallgemeinerte Funktionensystem über X stimmt mit $\bar{A}$ überein.

Durch diese Eigenschaften ist das System $\bar{A}$ bis auf einen kanonischen, A elementweise fest lassenden Isomorphismus der lokalen Struktur eindeutig bestimmt.

Wir nennen $\bar{A}$ das *Hüllensystem* des Systems A. Es stimmt genau dann mit A überein, wenn A selbst ein verallgemeinertes Funktionensystem ist.

Beweis: Es sei A ein die Eigenschaft (L_1) besitzendes lokal strukturiertes System über X. Wir konstruieren zunächst ein A enthaltendes verallgemeinertes Funktionensystem B über X.

Für jedes $x \in X$ sei $K(x)$ die Menge aller Paare (U, f) mit $x \in U \in \Omega$, $f \in A(U)$. Wir nennen zwei Paare (U, f), $(V, g) \in K(x)$ x-äquivalent, wenn es eine in U, V enthaltene Umgebung $W \in \Omega$ von x gibt, so daß die Restriktionen von f, g auf W übereinstimmen. Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und teilt daher $K(x)$ in elementfremde Klassen ein. Es sei $M(x)$ die Menge dieser Klassen. Für jedes $U \in \Omega$ und jedes $f \in A(U)$ sei weiter $u(U)f$ die Abbildung, welche jedem $x \in U$ das Bild von (U, f) bei der kanonischen Abbildung von $K(x)$ auf $M(x)$ zuordnet. Aus (L_1) folgt dann, daß für zwei voneinander verschiedene $f, g \in A(U)$ auch $u(U)f$, $u(U)g$ voneinander verschieden sind.

Für jedes $U \in \Omega$ sei jetzt $B(U)$ die Menge aller Abbildungen p, welche jedem $x \in U$ ein Element $p(x) \in M(x)$ zuordnen, und für jedes Paar $U, V \in \Omega$ mit $V \subset U$ und jedes $p \in B(U)$ sei $b(V, U)p$ die im gewöhnlichen Sinne genommene Restriktion der Abbildung p auf V. Es ist klar, daß das System B durch das System b nicht nur zu einem lokal strukturierten System, sondern sogar zu einem verallgemeinerten Funktionensystem über X wird.

Für jedes $U \in \Omega$ ist nun $u(U)$ eine umkehrbare Abbildung von $A(U)$ in $B(U)$. Dabei gilt für jedes Paar $U, V \in \Omega$ mit $V \subset U$ und jedes $f \in A(U)$ offenbar die Gleichung $b(V, U)$ $u(U)f = u(V)\, a(V, U)f$. Mithin ist u eine umkehrbare zulässige Abbildung von A in B, und wir dürfen A mit $uA \subset B$ identifizieren. B ist also in der Tat ein A enthaltendes verallgemeinertes Funktionensystem über X.

Es sei schließlich $\bar{A}$ der Durchschnitt aller A enthaltenden und in B enthaltenen verallgemeinerten Funktionensysteme. Das System $\bar{A}$, nach dem zu Anfang dieses Abschnittes Gesagten selbst ein verallgemeinertes Funktionensystem, besitzt dann die verlangten Eigenschaften (H_1), (H_2). Der Rest der Behauptung ist nun eine unmittelbare Folgerung aus dem

Satz 2: Es seien A, B zwei lokal strukturierte Systeme über X, die die Eigenschaft (L_1) besitzen, und $\bar{A}$, $\bar{B}$ zwei verallgemeinerte Funktionensysteme über X, die in bezug auf A, B die Eigenschaften (H_1), (H_2) besitzen. Dann läßt sich jede zulässige Abbildung u von A in B auf genau eine Weise zu einer zulässigen Abbildung $\bar{u}$ von $\bar{A}$ in $\bar{B}$ fortsetzen.

Beweis: Für jedes $U \in \Omega$ sei $A'(U)$ die Menge aller $f \in \bar{A}(U)$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von U durch offene Teilmengen U_i von U, so daß die Restriktion von f auf U_i für jedes $i \in I$ in $A(U_i)$ enthalten ist. Man verifiziert ohne Mühe, daß das System A' nicht nur ein Teilsystem von $\bar{A}$ ist und A enthält, sondern sogar selbst ein verallgemeinertes Funktionensystem ist. Nach (H_2) stimmt es also mit $\bar{A}$ überein. Mit anderen Worten: Zu jedem $U \in \Omega$ und jedem $f \in \bar{A}(U)$ gibt es eine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von U durch offene Teilmengen von U_i von U, so daß die Restriktion von f auf U_i für jedes $i \in I$ in $A(U_i)$ enthalten ist.

Es sei nun $U \in \Omega$ und $f \in \bar{A}(U)$, ferner $(U_i)_{i \in I}$ eine gemäß dem Vorangehenden gewählte Überdeckung von U. Nach (L) gibt es genau ein Element $g \in \bar{B}(U)$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $i \in I$ die Relation $b(U_i, U)g = u(U_i)\, a(U_i, U)f$ gilt, und dieses g ist unabhängig von der speziellen Wahl der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$. Wir setzen $\bar{u}(U)f = g$. Dann ist $\bar{u}$ offenbar eine zulässige Abbildung von $\bar{A}$ in $\bar{B}$ und eine Fortsetzung der Abbildung u. Ist andererseits u' eine beliebige, u fortsetzende zulässige Abbildung

von $\bar{A}$ in $\bar{B}$, so gilt, mit denselben Bezeichnungen wie eben, $b(U_i, U)\, u'(U)f = u(U_i)\, a(U_i, U)f = b(U_i, U)\, \bar{u}(U)f$ für jedes $i \in I$ und daher $u'(U)f = \bar{u}(U)f$. Damit sind die Sätze 1, 2 vollständig bewiesen.

Im Laufe des Beweises von Satz 2 ergab sich außerdem das folgende

Corollar zu Satz 1: Die Eigenschaft (H_2) ist mit der folgenden gleichwertig:

(H_2') Zu jedem $U \in \Omega$ und jedem $f \in \bar{A}(U)$ gibt es eine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von U durch offene Teilmengen U_i von U mit der Eigenschaft, daß die Restriktion von f auf U_i für jedes $i \in I$ in $a(U_i)$ enthalten ist.

Besitzt das System A die Eigenschaft (L_1) und ist B ein Teilsystem von A, so besitzt auch B, wie wir sahen, diese Eigenschaft, und man kann offenbar stets $\bar{B} \subset \bar{A}$ annehmen.

Besitzen alle A_i einer *endlichen* Familie $(A_i)_{i \in I}$ lokal strukturierter Systeme die Eigenschaft (L_1), so besitzt auch ihr Produkt $\prod_{i \in I} A_i$, wie wir sahen, diese Eigenschaft, und man beweist mühelos die Relation $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \bar{A}_i$.

Insbesondere läßt sich also jede auf einem lokal strukturierten System A mit (L_1) definierte algebraische Struktur eindeutig auf sein Hüllensystem fortsetzen.

4. Separierende und komplettierende Äquivalenzrelationen

Es sei A ein lokal strukturiertes System über X. Eine mit der lokalen Struktur verträgliche Äquivalenzrelation Q auf A heißt *separierend*, wenn das Quotientensystem A/Q die Eigenschaft (L_1) besitzt. Hierfür ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

(Q_1) Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von $U \in \Omega$ durch offene Teilmengen U_i von U, und die Restriktionen von $f, g \in A(U)$ auf U_i seien für jedes $i \in I$ äquivalent modulo $Q(U_i)$. Dann gilt auch $(f, g) \in Q(U)$.

Wir können nun jeder mit der lokalen Struktur verträglichen Äquivalenzrelation Q auf A, allgemeiner sogar jedem beliebigen System $Q = (Q(U, x))$ von Äquivalenzrelationen $Q(U, x) \subset A(U) \times A(U)$ auf $A(U)$, $x \in U \in \Omega$, eine mit der lokalen Struktur verträgliche, separierende Äquivalenzrelation $Q^{\S}$ auf A zuordnen. Für jedes $U \in \Omega$ sei $Q^{\S}(U)$ die Menge aller Paare $(f, g) \in A(U) \times A(U)$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $x \in U$ gibt es eine in U enthaltene offene Umgebung U_x von x, so daß für alle $V \in \Omega$ mit $x \in V \subset U_x$ $(a(V, U)f, a(V, U)g) \in Q(V, x)$ gilt. Es ist klar, daß das so definierte System $Q^{\S}$ eine mit der lokalen Struktur verträgliche Äquivalenzrelation auf A ist und die Bedingung (Q_1) erfüllt.

Ist Q insbesondere eine mit der lokalen Struktur verträgliche Äquivalenzrelation auf A, so gilt $Q \subset Q^{\S}$, und jede Q enthaltende, mit der lokalen Struktur verträgliche und separierende Äquivalenzrelation auf A enthält auch $Q^{\S}$. $Q^{\S}$ stimmt also genau dann mit Q überein, wenn Q selbst separierend ist.

Ist auf A eine algebraische Struktur definiert, und ist die Äquivalenzrelation $Q(U, x)$ für alle $x \in U \in \Omega$ mit der auf $A(U)$ erklärten algebraischen Struktur verträglich, so ist auch $Q^{\S}$ mit der algebraischen Struktur von A verträglich.

Ist insbesondere etwa A wieder ein linearer Vektorraum über K und wird Q also durch ein System N von Teilräumen $N(U, x) \subset A(U)$ beschrieben, so wird auch $Q^{\S}$, kurz gesagt, wieder durch einen Teilraum $N^{\S}$ von A beschrieben. Wir nennen auch diesen Teilraum $N^{\S}$ wieder kurz *separierend*.

Eine mit der lokalen Struktur verträgliche Äquivalenzrelation Q auf A heißt *komplettierend*, wenn das Quotientensystem A/Q die Eigenschaft (L_2) besitzt. Hierfür ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

(Q_2) Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $U\in \Omega$ durch offene Teilmengen U_i von U, und für jedes $i \in I$ sei ein $f_i \in A(U_i)$ gegeben mit der Eigenschaft, daß für jedes Paar $i, j \in I$ mit nichtleerem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ die Restriktionen von f_i, f_j auf diesen Durchschnitt äquivalent modulo $Q(U_i \cap U_j)$ sind. Dann gibt es mindestens ein $f \in A(U)$ mit der Eigenschaft, daß die Restriktion von f auf U_i für jedes $i \in I$ mit f_i äquivalent modulo $Q(U_i)$ ist.

Der folgende Satz gibt eine in vielen Fällen anwendbare hinreichende Bedingung dafür, daß eine Äquivalenzrelation komplettierend ist. Der Beweis dieses Satzes beruht wesentlich auf der Verwendung einer sog. Teilung der Einheit (partition de l'unité). – Für alle hierbei auftretenden Begriffe und Sätze aus der allgemeinen Topologie verweisen wir auf [2], insbesondere Seite 91–114, und [3], Seite 27–28, 50–51.

Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen, eine Teilalgebra B der reellen Algebra $A_\Omega(X, R)$ enthält eine *Teilung der Einheit*, wenn es zu jedem $U\in \Omega$ und zu jeder lokal endlichen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von U durch offene Teilmengen U_i von U eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von nichtnegativen reellen Funktionen $f_i \in B(U)$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Für jedes $i \in I$ und jedes $x \in U-U_i$ ist $f_i(x) = 0$, und für jedes $x\in U$ ist die (endliche) Summe aller $f_i(x)$ gleich 1. Es gilt dann der folgende

Satz 3: Es sei X ein lokal kompakter topologischer Raum mit abzählbarer Basis, A ein lokal strukturiertes System über X, welches die Eigenschaft (L_2) besitzt. A sei ferner unitärer Linksmodul über einer eine Teilung der Einheit enthaltenden Teilalgebra B von $A_\Omega(X, R)$. Dann ist jede mit der lokalen Struktur und der Modulstruktur verträgliche, separierende Äquivalenzrelation Q auf A auch komplettierend.

Beweis: Ist X ein lokal kompakter topologischer Raum mit abzählbarer Basis, so gilt dasselbe für alle offenen Teilmengen U von X. Alle diese sind daher „dénombrable à l'infini" und damit parakompakt und normal.

Es sei nun $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $U \in \Omega$ durch offene Teilmengen U_i von U. Es gibt dann eine feinere, lokal endliche offene Überdeckung $(V'_l)_{l\in L}$ von U und eine weitere lokal endliche offene Überdeckung $(V_l)_{l\in L}$ von U mit der Eigenschaft, daß für jedes $l \in L$ die abgeschlossene Hülle $\bar{V}_l$ von V_l in V'_l enthalten ist. Schließlich wählen wir für jedes $x\in U$ eine in U enthaltene offene Umgebung W'_x, die nur von endlich vielen der V'_l getroffen wird. Für fast alle $l \in L$ ist dann W'_x im Komplement $\complement V'_l$ von V'_l bezüglich U, also insbesondere im Komplement $\complement \bar{V}_l$ von $\bar{V}_l$ enthalten. Folglich ist

$$W_x = \bigcap_{\substack{l\in L\\ x\in \bar{V}_l}} V'_l \cap \bigcap_{\substack{l\in L\\ x\notin \bar{V}_l}} (\complement \bar{V}_l \cap W'_x)$$

eine offene, in U enthaltene Umgebung von x.

Es sei weiter $(p_l)_{l\in L}$ eine zur Überdeckung $(V_l)_{l\in L}$ gehörige Teilung der Einheit durch Funktionen $p_l\in B(U)$. Für jedes $x\in U$ und jedes $l\in L$ mit $x \notin \bar{V}_L$ ist dann $b(W_x, U)p_l = 0$, also gilt

$$\sum_{\substack{l\in L\\ x\in \bar{V}_l}} b(W_x, U)\, p_l = 1. \tag{1.2}$$

Für jedes $i \in I$ sei nun ein $f_i \in A(U_i)$ gegeben mit der Eigenschaft, daß für jedes Paar $i, j \in I$ mit nichtleerem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ die Restriktionen von f_i, f_j auf diesen Durchschnitt äquivalent modulo $Q(U_i \cap U_j)$ sind. Zu jedem $l \in L$ gibt es nach Konstruktion

ein $i \in I$, so daß V_l' in U_i enthalten ist. Wir wählen willkürlich ein solches $i \in I$ aus und setzen $g_l = a(V_l', U_i) f_i$. Für jedes $x \in U$ bilden wir auf W_x nun die Linearkombination

$$h_x = \sum_{\substack{l \in L \\ x \in \bar{V}_l}} b(W_x, U)\, p_l \cdot a(W_x, V_l')\, g_l.$$

h_x ist also ein Element von $A(W_x)$. Für jedes Paar $x, y \in U$ mit nichtleerem Durchschnitt $W_x \cap W_y$ stimmen die Restriktionen von h_x, h_y auf diesen Durchschnitt überein. Da die W_x eine offene Überdeckung von U bilden, gibt es nach (L_2) ein Element $f \in A(U)$, dessen Restriktion auf W_x für jedes $x \in U$ mit h_x übereinstimmt.

Wir zeigen, daß das so gewonnene $f \in A(U)$ das in (Q_2) Verlangte leistet. Dazu werde ein $i \in I$ fest gewählt und für jedes $x \in U_i$ der Durchschnitt $W_x \cap U_i$ mit $W_{x,i}$ bezeichnet. Nach Konstruktion stimmen nun die Restriktionen von f, h_x auf $W_{x,i}$ überein. Weiter ist für jedes $l \in L$ mit $x \in \bar{V}_l$ nach Voraussetzung die Restriktion von g_l auf $W_{x,i}$ mit der von f_i äquivalent modulo $Q(W_{x,i})$. Wegen der Verträglichkeit der Relation Q mit der Modulstruktur und wegen (1.2) sind daher auch die Restriktionen von h_x, f_i auf $W_{x,i}$ äquivalent modulo $Q(W_{x,i})$. Insgesamt sind also die Restriktionen von f, f_i auf $W_{x,i}$ äquivalent modulo $Q(W_{x,i})$. Da die $W_{x,i}$ aber eine offene Überdeckung von U_i bilden und die Relation Q nach Voraussetzung separierend ist, ist schließlich die Restriktion von f auf U_i mit f_i äquivalent modulo $Q(U_i)$. Da dies für jedes $i \in I$ gilt, ist Satz 3 damit bewiesen.

Bemerkungen: 1) Eine Analyse des Beweises zeigt, daß von den Strukturgesetzen des unitären Moduls das „assoziative" Gesetz $(pq) \cdot f = p \cdot (q \cdot f)$ nicht benutzt wurde.

2) Wir betonen ausdrücklich, daß wir Satz 3 und damit eine Teilung der Einheit im folgenden nur gelegentlich, zur Abrundung der Ergebnisse oder an Stellen, an denen man leicht auch direkt schließen kann, benutzen werden, nicht aber an Stellen, die für den Aufbau der folgenden Theorie entscheidend sind. In allen wesentlichen Punkten werden wir uns vielmehr entscheidend auf die Sätze 1, 2 stützen.

§ 2. DAS SYSTEM DER FUNKTIONENKLASSEN

1. Das System der Funktionenklassen

Von jetzt ab legen wir allen unseren Betrachtungen als topologischen Raum X die reelle Zahlengerade R, versehen mit der gewöhnlichen topologischen Struktur Ω, zugrunde. Das Funktionensystem $A_\Omega(R, R)$ der reellen Funktionen über R bezeichnen wir kurz mit A^0. A^0 besitzt die algebraische Struktur einer kommutativen, unitären Algebra über R.

Die Beschränkung auf den eindimensionalen Fall geschieht hauptsächlich zur Vereinfachung der Darstellung. Die Hauptergebnisse dieser Arbeit gelten auch über dem n-dimensionalen reellen Zahlenraum R^n.

Für jedes $U \in \Omega$ nennen wir zwei reelle Funktionen $f, g \in A^0(U)$ äquivalent, wenn ihre Funktionswerte fast überall auf U übereinstimmen, wenn sie also höchstens auf einer Teilmenge von U vom Lebesgueschen Maße Null voneinander verschieden sind. Hierdurch wird auf A^0 eine mit der lokalen Struktur und der Algebra-Struktur verträgliche Äquivalenzrelation Q definiert. Das Quotientensystem A^0/Q nennen wir das *System* $F = F^0$ *der reellen Funktionenklassen* über R. F besitzt wieder die Struktur einer kommutativen, unitären Algebra über R. Die Äquivalenzrelation Q ist selbstverständlich separierend. Da

der topologische Raum R weiter lokal kompakt ist und eine abzählbare Basis besitzt, da A^0 ferner eine Teilung der Einheit enthält, ist Q nach § 1, Satz 3 auch komplettierend. Das System F ist also ein *verallgemeinertes Funktionensystem* über R.

Bemerkungen: 1) Wir verzichten auf eine ausführliche Begründung des – aus der reellen Analysis wohlbekannten – Überganges von den Funktionen zu den Funktionenklassen. Eine gewissermaßen „relative" Begründung kann man übrigens unschwer dem folgenden Abschnitt entnehmen: Der Übergang zu den Funktionenklassen ergibt sich von selbst, wenn man die Differentiation, abweichend von dem klassischen Gebrauch, als die genaue Umkehrung einer unbestimmten Integration auffaßt.

2) Statt von der gewöhnlichen Topologie Ω der reellen Zahlengeraden R hätten wir natürlich auch von ihrer diskreten Topologie ausgehen und in derselben Weise ein System der reellen Funktionenklassen definieren können. Die zugehörige Äquivalenzrelation Q wäre dann aber nicht separierend. Das so definierte System der reellen Funktionenklassen wäre also weder selbst ein verallgemeinertes Funktionensystem noch Teilsystem eines solchen.

3) Die Tatsache, daß das von uns definierte System F der reellen Funktionenklassen die Eigenschaft (L_2) besitzt, kann man leicht auch unabhängig von § 1, Satz 3 einsehen.

2. Die Differentiation

Für jedes $U \in \Omega$ nennen wir eine reelle Funktion $f_0 \in A^0(U)$ *differenzierbar*, wenn es eine reelle Funktion $g_0 \in A^0(U)$ gibt, die im Lebesgueschen Sinne über jedes kompakte Teilintervall von U integrierbar ist, so daß f_0 in jedem solchen Teilintervall unbestimmtes Integral von g_0 ist:

$$f_0(x) = \int_{x_0}^{x} g_0(t)\,dt + c. \tag{2.1}$$

Gleichwertig damit ist bekanntlich die Forderung, daß f_0 in jedem kompakten Teilintervall von U totalstetig sein soll. Die Funktion g_0 ist durch f_0 dann bis auf eine evtl. Abänderung auf einer Teilmenge von U vom Maße Null, also bis auf die im vorigen Abschnitt eingeführte Äquivalenz, eindeutig bestimmt. Es sei $A^1(U)$ die Teilalgebra aller differenzierbaren Funktionen $f_0 \in A^0(U)$. Das System A^1 ist dann nicht nur ein Teilsystem von A^0, sondern sogar selbst ein verallgemeinertes Funktionensystem über R im Sinne unserer Definition.

Weiter nennen wir eine Funktionenklasse $f \in F(U)$ *differenzierbar*, wenn sie eine differenzierbare Funktion $f_0 \in A^0(U)$ enthält. f enthält dann genau eine solche Funktion f_0, und nach dem Vorangehenden definiert die Gesamtheit aller zugehörigen Funktionen g_0 eine wohlbestimmte Funktionenklasse $g \in F(U)$, die wir die *Ableitung* der Funktionenklasse f nennen und mit f' bezeichnen. Es sei $F^1(U)$ die Teilalgebra aller differenzierbaren Funktionenklassen $f \in F(U)$. Das System F^1 ist dann wieder ein Teilsystem von F und selbst ein verallgemeinertes Funktionensystem.

Die durch die Differentiation definierte Abbildung $f \to f'$ von F^1 in F ist offenbar zulässig, ein Homomorphismus in bezug auf die linearen Vektorraumstrukturen von F^1, F (kurz: linear), ferner mit der Multiplikation durch die Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg', \qquad f, g \in F^1(U) \tag{2.2}$$

verknüpft.

Wir definieren schließlich rekursiv die *höheren Ableitungen* einer Funktionenklasse: Für $m = 2, 3, \ldots$ sei $F^m(U)$ die Teilalgebra aller Funktionenklassen $f \in F^1(U)$, für die

$f' \in F^{m-1}(U)$ gilt. Für ein $f \in F^m(U)$ kann man die Differentiation m-mal iterieren und erhält so die höheren Ableitungen $f^{(k)} \in F^{m-k}(U)$, $k = 1, \ldots, m$. Alle Teilsysteme F^m von F sind wieder verallgemeinerte Funktionensysteme. Sie bilden eine absteigende Folge:

$$F = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^m \supset F^{m+1} \supset \cdots \supset F^\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} F^m. \tag{2.3}$$

Wir haben gesehen, daß die kanonische Abbildung von A^1 auf F^1 umkehrbar, also ein Isomorphismus von A^1 und F^1 ist. Wir können daher jeder Funktionenklasse $f \in F^1(U)$ in jedem Punkte $x \in U$ einen eindeutig bestimmten „Wert" $f(x)$ zuordnen, und diese Zuordnung ist ein Homomorphismus in bezug auf die lineare Vektorraumstruktur und die Multiplikation.

Allgemeiner können wir jeder Funktionenklasse $f \in F^{m+1}(U)$, $m = 0, 1, 2 \ldots$ eindeutig bestimmte „Werte" $f(x), f'(x), \ldots, f^m(x)$ zuordnen, und dies weiter unter Erhaltung der Linearität und der Produktregel der Differentiation.

3. Die erweiterte Differentiation

Für jedes $x \in U \in \Omega$ und jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ bezeichnen wir mit $F^m(U, x)$ die Teilalgebra aller Funktionenklassen $f \in F(U)$ mit der Eigenschaft, daß die Restriktion von f auf $V = U - (x)$ in $F^m(V)$ enthalten ist. Offenbar ist $F^m(U)$ in $F^m(U, x)$ enthalten, speziell $F^0(U, x) = F(U)$. Die $F^m(U, x)$ bilden eine absteigende Folge; ihr Durchschnitt werde mit $F^\infty(U, x)$ bezeichnet. Das System aller $F^m(U, x)$ ist wieder in dem Sinne lokal strukturiert, daß für jedes Paar $U, V \in \Omega$ mit $x \in V \subset U$ die Restriktion von $F^m(U, x)$ auf V in $F^m(V, x)$ enthalten ist.

Für jedes $U \in \Omega$ und jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ sei weiter $\dot{F}^m(U)$ die Teilalgebra aller $f \in F(U)$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem Punkt $x \in U$ gibt es eine in U enthaltene offene Umgebung U_x, in der die Restriktion von f in $F^m(U_x, x)$ enthalten ist. $\dot{F}^m(U)$ besteht also aus allen denjenigen Funktionenklassen $f \in F(U)$, für die es zu jedem $x \in U$ mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen, sich im Innern von U nicht häufenden Punkten eine in U enthaltene offene Umgebung V_x gibt, in der die Restriktion von f in $F^m(V_x)$ enthalten ist. Insbesondere gilt $F^m(U) \subset \dot{F}^m(U)$ und $F^m(U, x) \subset \dot{F}^m(U)$ für jedes $x \in U$. Die $\dot{F}^m(U)$ bilden wieder eine absteigende Folge, mit dem Durchschnitt $\dot{F}^\infty(U)$. Für jedes $m = 0, 1, 2 \ldots$ ist das System $\dot{F}^m$ eine Teilalgebra von F, sogar ein verallgemeinertes Funktionensystem.

Es sei nun $f \in \dot{F}^1(U)$ und V eine durch Wegnahme von abzählbar vielen, sich im Innern von U nicht häufenden Punkten aus U entstehende offene Punktmenge, in der die Restriktion f_V von f in $F^1(V)$ enthalten ist. Die Ableitung von f'_V von f_V definiert auf U offenbar eine wohlbestimmte Funktionenklasse, unabhängig von der speziellen Wahl von V, die wir die *erweiterte Ableitung* von $f \in \dot{F}^1(U)$ nennen und mit $\dot{f} \in F(U)$ bezeichnen. Die so definierte *erweiterte Differentiation* ist offenbar eine zulässige, lineare und die (eigentliche) Differentiation fortsetzende Abbildung von $\dot{F}^1$ in F, die mit der Multiplikation wieder durch die Produktregel verknüpft ist. In ganz entsprechender Weise definieren wir die *höheren erweiterten Ableitungen* $\dot{f}^{(k)} \in \dot{F}^{m-k}(U)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ einer Funktionenklasse $f \in \dot{F}^m(U)$, $m = 1, 2, \ldots$

Bevor wir diesen Paragraphen abschließen, wollen wir zur Vereinfachung unserer Redeweise die folgende Konvention einführen: Die hier definierten Funktionenklassen werden wir im folgenden kurz nur *Funktionen* nennen; wenn wir ein wohlbestimmtes Funktionssymbol, etwa $\log|x|$, hinschreiben, meinen wir damit immer die in der betrachteten offenen Punktmenge $U \in \Omega$ von dieser Funktion erzeugte Funktionenklasse aus $F(U)$. Die „gebundene Variable" wird dabei stets mit dem Buchstaben x bezeichnet. So gilt für jedes $y \in U \in \Omega$ zum Beispiel $\log|x-y| \in F^\infty(U, y)$. Diese Konvention wird niemals zu Mißverständnissen Anlaß geben.

§ 3. DAS SYSTEM DER DISTRIBUTIONEN

1. Differentiationstheorien

Definition 1: Es sei D ein verallgemeinertes Funktionensystem über R, welches das System F der reellen Funktionenklassen als Teilsystem enthält. Wir nennen D ein *Differentiationssystem*, wenn auf D die folgende Struktur definiert ist:

(D_1) Eine lineare Vektorraumstruktur über R, die auf F mit dessen linearer Vektorraumstruktur über R übereinstimmt.

(D_2) Eine zulässige, lineare Abbildung von D in sich, die auf F^1 mit der Differentiation übereinstimmt.

Wir nennen diese, die Differentiation fortsetzende Abbildung von D in sich wieder kurz die auf D definierte *Differentiation*, ebenso für jedes $U \in \Omega$ das durch sie vermittelte Bild $S' \in D(U)$ von $S \in D(U)$ die *Ableitung* von S, und verfahren entsprechend für die höheren Ableitungen.

Es wird sich bald zeigen, daß es Differentiationssysteme in sehr großer Zahl gibt. Die meisten von ihnen enthalten für unsere Zwecke unnötig viele Elemente, die in keinem Zusammenhange mehr mit den Funktionen stehen. Wir werden diesen Begriff daher sogleich einengen, nämlich durch die folgende

Definition 2: Ein Differentiationssystem D heißt eine *Differentiationstheorie*, wenn D kein echtes Teilsystem enthält, welches in bezug auf die durch D induzierte Struktur ein Differentiationssystem ist.

Es sei D ein beliebiges Differentiationssystem. Ist $(D_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilsystemen D_i von D, von denen jedes in bezug auf die durch D induzierte Struktur ein Differentiationssystem ist, so gilt dasselbe auch für den Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} D_i$ aller D_i. Insbesondere enthält D also genau eine Differentiationstheorie, nämlich den Durchschnitt aller seiner Teil-Differentiationssysteme.

Andererseits sei $E(U)$ für jedes $U \in \Omega$ der Teilraum aller $S \in D(U)$, die in der Form

$$S = \sum_{k=0}^{m} f_k^{(k)} \quad \text{für geeignete } f_0, f_1, \ldots, f_m \in F(U), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

darstellbar sind. Das System E ist offenbar ein gegen die Differentiation abgeschlossener Teilraum von D und enthält F, aber es besitzt im allgemeinen nicht die Eigenschaft (L_2) und ist daher kein Differentiationssystem. Wohl aber besitzt das in D gebildete Hüllensystem $\bar{E}$ von E diese Eigenschaft, und aus § 1, Satz 2 folgt sofort, daß $\bar{E}$ in der Tat ein Differentiationssystem ist. Schließlich ist klar, daß jedes Teil-Differentiationssystem von D mit F auch E und damit auch $\bar{E}$ umfassen muß. $\bar{E}$ ist also nichts anderes als die eindeutig bestimmte, in D enthaltene Differentiationstheorie. Damit haben wir den

Satz 1: Ein Differentiationssystem D ist genau dann eine Differentiationstheorie, wenn D mit dem Hüllensystem $\bar{E}$ übereinstimmt; mit anderen Worten (nach § 1, Corollar zu Satz 1): wenn es zu jedem $x \in U \in \Omega$ und jedem $S \in D(U)$ eine in U enthaltene offene Umgebung V von x gibt mit der Eigenschaft, daß die Restriktion von S auf V in $E(V)$ enthalten ist.

Man darf nun nicht annehmen, daß es im wesentlichen, d. h. bis auf Isomorphie, genau eine, eindeutig bestimmte Differentiationstheorie gibt. Auch hiervon existieren noch, wie sich zeigen wird, unendlich viele, paarweise wesentlich verschiedene. Wir wollen in der Gesamtheit dieser Differentiationstheorien eine Ordnungsrelation definieren. – Zunächst haben wir das folgende, unmittelbar aus § 1, Satz 2 fließende

Corollar zu Satz 1: Es seien D_1, D_2 zwei Differentiationstheorien, u, v zwei zulässige, lineare, mit der Differentiation vertauschbare und F elementweise fest lassende Abbildungen von D_1 in D_2. Dann stimmen u, v vollständig überein.

Wir geben nun die folgende

Definition 3: Es seien D_1, D_2 zwei Differentiationstheorien. Wir nennen D_2 *Verengung* von D_1, in Zeichen $D_1 > D_2$, wenn es eine (und folglich genau eine) zulässige, lineare, mit der Differentiation vertauschbare und F elementweise fest lassende Abbildung u von D_1 in D_2 gibt.

Diese verengende Abbildung u ist natürlich nichts anderes als, in der Terminologie der Algebra, ein Homomorphismus der Differentiationstheorien D_1, D_2 relativ zu F.

Es ist klar, daß die Verengungsrelation in der Gesamtheit aller Differentiationstheorien eine (teilweise) Ordnung definiert. Denn wenn gleichzeitig $D_1 > D_2$ und $D_2 > D_1$ gilt, so besagt das genau, daß die Differentiationstheorien D_1, D_2 isomorph sind.

2. Das charakteristische System einer Differentiationstheorie

Für jedes $U \in \Omega$ sei $M(U)$ der reelle lineare Vektorraum der Polynome in der formalen Unbestimmten z mit Koeffizienten aus $F(U)$:

$$s = \sum_{k=0}^{m} f_k z^k, \quad f_0, f_1, \ldots, f_m \in F(U), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

Den Teilraum $M^0(U)$ der Polynome nullten Grades identifizieren wir mit $F(U)$. Die gliedweise Multiplikation mit z definiert eine lineare Abbildung von $M(U)$ in sich, die wir wieder, rein formal, *Differentiation* nennen.

Das so definierte System M wird durch die, kurz gesagt, komponentenweise erklärte Restriktion zu einem lokal strukturierten System über R. Die lineare Vektorraumstruktur von M ist mit dieser lokalen Struktur verträglich, und die Differentiation wird zu einer zulässigen, linearen Abbildung von M in sich.

Es sei nun D eine Differentiationstheorie und E das zugehörige, im vorigen Abschnitt definierte Teilsystem von D. Wir definieren eine zulässige, lineare, mit der Differentiation vertauschbare und F elementweise fest lassende Abbildung u von M *auf* E, indem wir für jedes $U \in \Omega$ dem Element (3.2) von $M(U)$ das Element (3.1) von $E(U)$ zuordnen. Die dieser Abbildung u entsprechende, mit der lokalen Struktur verträgliche separierende Äquivalenzrelation auf M wird durch einen separierenden linearen Teilraum N von M, den *Kern* der Abbildung u, beschrieben. Für jedes $U \in \Omega$ besitzt der Teilraum $N(U)$ von $M(U)$ die folgenden Eigenschaften:

(CD_1) $N(U)$ ist gegen die Differentiation abgeschlossen.
(CD_2) Für jedes $f \in F^1(U)$ gilt $fz - f' \in N(U)$.
(CD_3) $N(U)$ enthält keine von Null verschiedene Funktion $f \in F(U)$.

Wir nennen u die *charakteristische Abbildung* u_D und N das *charakteristische System* N_D *der Differentiationstheorie* D.

Es sei umgekehrt N ein separierender linearer Teilraum von M, der die Eigenschaften (CD_1) bis (CD_3) besitzt. Das Quotientensystem $E = M/N$ besitzt dann die Eigenschaft (L_1) und enthält F als Teilsystem. Weiter ist auf E eine lineare Vektorraumstruktur über R erklärt, die auf F mit dessen Vektorraumstruktur übereinstimmt, sowie eine zulässige,

lineare Abbildung in sich, die auf F^1 mit der Differentiation übereinstimmt. Diese Abbildung nennen wir wieder *Differentiation*, ebenso für jedes $U \in \Omega$ das durch sie vermittelte Bild $S' \in E(U)$ von $S \in E(U)$ die *Ableitung* von S, und entsprechend für die höheren Ableitungen. Jedes Element $S \in E(U)$ ist dann in der Form (3.1) darstellbar. Die lineare Vektorraumstruktur und die Differentiation sind nun nach § 1, Satz 2 in eindeutiger Weise auf das Hüllensystem $D = \bar{E}$ von E fortsetzbar. Es ist klar, daß das System D in bezug auf diese Struktur nicht nur ein Differentiationssystem, sondern sogar eine Differentiationstheorie ist. Schließlich ist die kanonische Abbildung u von M auf E nichts anderes als die charakteristische Abbildung u_D von D und daher N nichts anderes als das charakteristische System N_D von D.

Noch ein letzter Schluß: Ist die Differentiationstheorie D_2 Verengung der Differentiationstheorie D_1, so ist N_{D_1} offenbar in N_{D_2} enthalten. Ist umgekehrt N_{D_1} Teilraum von N_{D_2}, so kann man die charakteristische Abbildung u_{D_2} aufspalten in die charakteristische Abbildung u_{D_1} und eine zulässige, lineare, mit der Differentiation vertauschbare und F elementweise fest lassende Abbildung von E_1 auf E_2. Diese letztere kann man, wieder nach § 1, Satz 2, zu einer ebensolchen Abbildung von D_1 in D_2 fortsetzen; D_2 ist also Verengung von D_1. Die beiden Relationen $D_1 > D_2$ und $N_{D_1} \subset N_{D_2}$ sind mithin genau gleichbedeutend. Insbesondere besagt die Gleichheit von N_{D_1}, N_{D_2} genau die Isomorphie von D_1, D_2.

Wir fassen zusammen:

Satz 2: Die Zuordnung $D \to N_D$ definiert eine umkehrbar eindeutige und anti-ordnungstreue Korrespondenz zwischen den (Klassen isomorpher) Differentiationstheorien D und den separierenden, die Eigenschaften (CD_1) bis (CD_3) besitzenden Teilräumen N von M.

Es sei nun $(N_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von separierenden, die Eigenschaften (CD_1) bis (CD_3) besitzenden Teilräumen N_i von M. Dasselbe gilt dann offenbar auch für ihren Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} N_i$. Sind die N_i andererseits total geordnet, so ist ihre Vereinigung $\bigcup_{i \in I} N_i$ wieder ein Teilraum von M und besitzt die Eigenschaften (CD_1) bis (CD_3), ist aber im allgemeinen nicht separierend. Man überzeugt sich jedoch mühelos, daß der von dieser Vereinigung erzeugte separierende Teilraum $(\bigcup_{i \in I} N_i)^{\S}$ ebenfalls die Eigenschaften (CD_1) bis (CD_3) besitzt. Die total geordnete Familie $(N_i)_{i \in I}$ besitzt also, nach dem in § 1, Abschnitt 4 Gesagten, auch eine obere Grenze. Damit haben wir das folgende

Corollar zu Satz 2: Jede Familie $(D_i)_{i \in I}$ von Differentiationstheorien D_i besitzt (in bezug auf die Ordnungsrelation $>$) eine obere Grenze $\bigcup_{i \in I} D_i$, jede total geordnete Familie $(D_i)_{i \in I}$ außerdem eine untere Grenze $\bigcap_{i \in I} D_i$. Insbesondere gibt es, falls überhaupt Differentiationstheorien existieren, eine eindeutig bestimmte *maximale* Differentiationstheorie D, aus der alle anderen durch Verengung hervorgehen, und zu jeder Differentiationstheorie gibt es mindestens eine minimale Verengung.

3. Existenz von Differentiationstheorien. Die Distributionentheorie

Wir betrachten nun, für jedes $U \in \Omega$, den von allen Elementen $fz - f'$ mit $f \in F^1(U)$ erzeugten, gegen die Differentiation abgeschlossenen Teilraum $N(U)$ von $M(U)$. $N(U)$ besteht aus allen Elementen $s \in M(U)$ der Form

$$s = \sum_{k=1}^{m} (f_k z - f_k') z^{k-1}, \quad f_1, \ldots, f_m \in F^1(U), \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Man erkennt mühelos, daß $N(U)$ neben (CD_1), (CD_2) auch die Eigenschaft (CD_3) besitzt, ferner, daß das so definierte System N sogar ein separierender Teilraum von M ist. Andererseits ist klar, daß jeder alle diese Eigenschaften besitzende Teilraum N_1 von M den Teilraum N enthalten muß. N ist also nichts anderes als das charakteristische System N_D der maximalen Differentiationstheorie D, deren Existenz damit nachgewiesen ist.

Diese, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte maximale Differentiationstheorie D nennen wir die *Distributionentheorie*, ihre Elemente die *Distributionen*.

Der Genauigkeit halber sei betont, daß es sich hierbei nicht um den ursprünglichen, von L. SCHWARTZ [8] eingeführten Distributionsbegriff handelt, sondern um den allgemeineren, von mir in [4] definierten.

Von allen Differentiationstheorien interessiert uns im folgenden allein die Distributionentheorie. Wir werden daher den Nachweis, daß es außer dieser noch eine Fülle von anderen Differentiationstheorien gibt, nur ganz kurz an Hand eines Beispiels führen.

Dazu wählen wir ein beliebiges, aber weiterhin festes $g \in F(R)$ mit der Eigenschaft, daß für kein $U \in \Omega$ die Restriktion von g auf U in $F^1(U)$ enthalten ist, und ein ganz beliebiges $h \in F(R)$. Für jedes $U \in \Omega$ sei $N(U, h)$, der von dem charakteristischen Teilraum $N_D(U)$ der Distributionentheorie D und von der Restriktion von $gz - h$ auf U erzeugte, gegen die Differentiation abgeschlossene Teilraum von $M(U)$. Man erkennt wieder mühelos, daß das so definierte System $N(h)$ ein von N_D verschiedener separierender Teilraum von M ist und die Eigenschaften (CD_1) bis (CD_3) besitzt. $N(h)$ definiert also eine Differentiationstheorie $D(h)$, die echte Verengung der Distributionentheorie D ist. In $D(R, h)$ gilt offenbar $g' = h$. Daraus folgt weiter, daß zwei zu verschiedenen $h_1, h_2 \in F(R)$ gehörige Differentiationstheorien $D(h_1)$, $D(h_2)$ nicht nur nicht isomorph sind, sondern sogar niemals eine gemeinsame Verengung besitzen können. Wir haben also den

Satz 3: Es gibt unendlich viele, paarweise nicht isomorphe Differentiationstheorien. Genauer: Die Menge aller minimalen Differentiationstheorien besitzt mindestens die Mächtigkeit der Menge $F(R)$ der reellen Funktionenklassen.

Der folgende Satz gibt schließlich eine konkrete Interpretation der die Distributionentheorie charakterisierenden Maximaleigenschaft:

Proposition 1: Unter allen Differentiationstheorien besitzt allein die Distributionentheorie D für jedes $U \in \Omega$ die folgende Eigenschaft:

(D_0) Die Ableitung S' eines Elementes $S \in D(U)$ ist genau dann eine Funktion: $S' \in F(U)$, wenn S eine im gewöhnlichen Sinne differenzierbare Funktion ist: $S \in F^1(U)$.

Der Beweis liegt auf der Hand: Zunächst wird die Aussage von (D_0) nicht geändert, wenn man darin $D(U)$ durch $E(U)$ ersetzt. Aus (3.3) folgt dann sofort die Gültigkeit von (D_0) für die Distributionentheorie. Umgekehrt erkennt man ebenso leicht durch vollständige Induktion nach dem Index m in (3.2), (3.3), daß das charakteristische System einer (D_0) erfüllenden Differentiationstheorie notwendig mit dem der Distributionentheorie übereinstimmt.

Wir betonen, daß Prop. 1 falsch wird, wenn man in (D_0) den Raum $D(U)$ durch $F(U)$ ersetzt.

4. Die lokale Ordnungsstruktur der Distributionen

Von jetzt ab betrachten wir von allen Differentiationstheorien ausschließlich die Distributionentheorie D. E ist wieder der in Abschnitt 1 definierte Teilraum von D, u die charakteristische Abbildung und N das charakteristische System von D.

Für jedes $U \in \Omega$ bezeichnen wir als *Ordnung* $H(s)$ eines Elementes $s \in M(U)$ den Grad m des s definierenden Polynoms (3.2); insbesondere sei $H(o) = 0$. Für $s, t \in M(U)$ gilt dann

$$(3.4) \qquad H(s+t) \leqq \operatorname{Max}(H(s), H(t)), \quad H(s) = \operatorname{Max}(o, H(s') - 1).$$

Für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ sei $M^m(U)$ der Teilraum aller $s \in M(U)$ mit $H(s) \leqq m$. Insbesondere stimmt $M^0(U)$ mit $F(U)$ überein (Abschnitt 2). Bei der Restriktion auf eine offene Teilmenge V von U wird die Ordnung eines Elementes von $M(U)$ nicht vergrößert; mit anderen Worten: Alle Systeme M^m sind Teilräume von M.

Als *Ordnung* $H(S)$ einer Distribution $S \in E(U)$ definieren wir weiter $H(S) = \operatorname{Min} H(s)$, wobei $s \in M(U)$ alle Repräsentanten von S durchläuft. $H(S)$ ist also die kleinste Zahl m, für die S in der Form (3.1) darstellbar ist. Die Relationen (3.4) übertragen sich. Für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ sei $E^m(U)$ der Teilraum aller $S \in E(U)$ mit $\mathrm{H}(S) \leqq m$. Insbesondere stimmt $E^0(U)$ mit $F(U)$ überein. Alle Systeme E^m sind wieder Teilräume von E. Sie bilden eine aufsteigende Folge:

$$F = E^0 \subset E^1 \subset \cdots \subset E^m \subset E^{m+1} \subset \cdots \subset E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E^m.$$

Allgemeiner definieren wir die *totale Ordnung* $\bar{H}(S)$ von $S \in E(U)$ wie folgt: Ist $H(S) > 0$, so setzen wir $\bar{H}(S) = H(S)$. Ist $H(S) = 0$, also $S \in F(U)$, und gibt es eine größte Zahl $m = 0, 1, 2, \ldots$ mit $S \in F^m(U)$, so setzen wir $\bar{H}(S) = -m$, andernfalls $\bar{H}(S) = -\infty$. Dann ist offenbar $H(S) = \operatorname{Max}(0, \bar{H}(S))$, und statt (3.4) gilt für $S, T \in E(U)$ schärfer

$$(3.5) \qquad \bar{H}(S+T) \leqq \operatorname{Max}(\bar{H}(S), \bar{H}(T)), \quad \bar{H}(S') = \bar{H}(S) + 1.$$

Als *Ordnung* $H_x(S)$ bzw. *totale Ordnung* $\bar{H}_x(S)$ *im Punkte* $x \in U$ einer beliebigen Distribution $S \in D(U)$ definieren wir schließlich $H_x(S) = \operatorname{Min} H(S_V)$ und $\bar{H}_x(S) = \operatorname{Min} \bar{H}(S_V)$, wobei V alle in U enthaltenen offenen Umgebungen von x durchläuft, für die die Restriktion S_V von S auf V in $E(V)$ enthalten ist. Nach Satz 1 ist dies für hinreichend kleines V sicher der Fall. Es ist klar, daß $H_x(S)$, $\bar{H}_x(S)$ wirklich nur von dem „Verhalten" von S in einer beliebig klein wählbaren Umgebung von x abhängen. Wieder gilt $H_x(S) = \operatorname{Max}(0, \bar{H}_x(S))$, ferner die Analoga zu (3.4), (3.5).

Zu jedem $S \in D(U)$ und jedem $x \in U$ gibt es eine in U enthaltene Umgebung V von x mit der Eigenschaft, daß für alle $y \in V$ die Ungleichung $H_y(S) \leqq H_x(S)$ gilt. Daraus folgt, daß $H_x(S)$ bei festem S als Funktion von x in jeder relativ zu U kompakten Teilmenge von U beschränkt ist. Im allgemeinen ist $H_x(S)$ aber keineswegs auf ganz U beschränkt. Wir zeigen, daß diese Beschränktheit genau für die Elemente S von $E(U)$ stattfindet, weiter, daß für diese S sogar $H(S) = \operatorname{Max} H_x(S)$ gilt. – Alle diese Tatsachen sind offenbar enthalten in der folgenden

Proposition 2: Für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ ist E^m ein verallgemeinertes Funktionenssystem.

Der Beweis dieses Satzes erfordert die Anwendung des Satzes 3 aus § 1 und damit die einer Teilung der Einheit. Außerdem müssen wir dabei, wenigstens im einfachsten Spezialfall, das innere oder multiplikative Produkt der Distributionen benutzen, das wir erst später, in allgemeinerem Zusammenhange, behandeln wollen. Der Vollständigkeit halber geben wir aber wenigstens eine kurze Beweisskizze.

Wir haben zu zeigen, daß die der kanonischen Abbildung u^m von M^m auf E^m entsprechende, mit der lokalen Struktur von M^m verträgliche Äquivalenzrelation Q^m auf M^m komplettierend ist. Nun ist M^m offenbar ein verallgemeinertes Funktionensystem und Q^m separierend. Ferner enthält F^m, für $m \geqq 1$ nach § 2 isomorph einer Teilalgebra A^m der Funktionenalgebra A^0, nach [8], Seite 23 eine Teilung der Einheit. Es bleibt also zu zeigen, daß wir auf M^m eine Struktur eines unitären Linksmoduls über F^m definieren können, die mit Q^m verträglich ist, d. h. in bezug auf die $N^m = N \cap M^m$ abgeschlossen ist. Dies geschieht, vgl. [4], Seite 144 f. und [5], Seite 426, durch die Formel

$$(3.6) \qquad fs = \sum_{j=o}^{m} \left(\sum_{k=j}^{m} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f^{(k-j)} f_k \right) z^j$$

mit $f \in F^m(U)$ und $s \in M^m(U)$ in der Darstellung (3.2).

Die Elemente des Teilraumes E nennen wir, durch diesen Satz gerechtfertigt, *Distributionen endlicher Ordnung*. Im nächsten Abschnitt werden wir durch Beispiele belegen, daß $E(U)$ für kein $U \in \Omega$ mit $D(U)$ übereinstimmt.

Wir definieren schließlich den Begriff des *Trägers* einer Distribution. Auf Grund von (L_1) gibt es zu jedem $S \in D(U)$ eine (evtl. leere) maximale offene Teilmenge V von U, auf der S die Restriktion Null besitzt. Das in U gebildete Komplement von V heißt der *Träger* $\bar{\bar{S}}$ von S. $x \in \bar{\bar{S}}$ bedeutet also, daß S in keiner in U enthaltenen offenen Umgebung von x die Restriktion Null besitzt.

$\bar{\bar{S}}$ ist seiner Definition nach in U abgeschlossen. Ist $\bar{\bar{S}}$ insbesondere kompakt, so ist S nach Prop. 2 notwendig von endlicher Ordnung. Auf Grund von (L) kann man S dann auf jedes U enthaltene $U_1 \in \Omega$ in eindeutiger Weise zu einer Distribution $S_1 \in E(U_1)$ mit $\bar{\bar{S}}_1 = \bar{\bar{S}}$ und mit $H(S_1) = H(S)$ fortsetzen.

5. Beispiele

Wir schließen diesen Paragraphen mit der Angabe einiger besonders wichtiger spezieller Distributionen, die wir zur Illustrierung der allgemeinen Theorie heranziehen werden.

Für jedes $y \in U \in \Omega$ sei zunächst $Y_y = Y(x - y)$ die *Heavisidefunktion* in bezug auf den Punkt y, definiert durch $Y(t) = 1$ für $t \geqq 0$ und $Y(t) = 0$ für $t < 0$. Offenbar ist Y_y in $F^\infty(U, y)$, nicht aber in $F^1(U)$ enthalten, und es gilt $\dot{Y}_y = 0$. Die Ableitung $\delta_y = Y_y'$ von Y_y heißt die *Diracdistribution* in bezug auf den Punkt y. Der Träger von δ_y besteht nur aus dem Punkt y, und nach Prop. 1 gilt $H_y(\delta_y) = 1$ und damit allgemein

$$(3.7) \qquad H_y(\delta_y^{(m)}) = m + 1, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Diracdistribution in bezug auf den Nullpunkt bezeichnen wir kurz mit δ.

Für jedes $y \in U \in \Omega$ und jedes $k = 1, 2, \ldots$ sei weiter

$$(3.8) \qquad \text{Pf.} \frac{1}{(x-y)^k} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!} (\log |x - y|)^{(k)}.$$

Die Restriktion von Pf. $\frac{1}{(x-y)^k}$ auf $V = U - (y)$ stimmt dort offenbar mit der gewöhnlichen Funktion $\frac{1}{(x-y)^k}$ überein. Nach Prop. 1 gilt jedoch

$$(3.9) \qquad H_y\left(\text{Pf.} \frac{1}{(x-y)^k}\right) = k.$$

Daher ist Pf. $\frac{1}{(x-y)^k}$ in U keine Funktion, insbesondere also von $\frac{1}{(x-y)^k}$ verschieden.

Da wir nun Distributionen $S \in E(U)$ beliebig hoher Ordnung $H(S)$ kennen, können wir leicht auch Distributionen $S \in D(U)$ angeben, welche nicht in $E(U)$ enthalten sind. Dazu werde $U \in \Omega$ beliebig gewählt, ferner eine Folge von paarweise verschiedenen Punkten

$y_1, y_2, \ldots$ von U, welche im Innern von U keinen Häufungspunkt besitzt. In jeder relativ zu U kompakten offenen Teilmenge V von U liegen daher nur endlich viele y_i; durch

$$S_V = \sum_{\substack{i \\ y_i \in V}} \delta_{y_i}^{(i)}$$

wird also jedem solchen V eine Distribution $S_V \in E(V)$ zugeordnet. Nach (L) gibt es dann eine wohlbestimmte Distribution $S \in D(U)$, deren Restriktion auf jedes dieser V mit S_V übereinstimmt. Die Ordnungen $H(S_V)$ sind aber nicht beschränkt, also kann S nicht in $E(U)$ enthalten sein.

§ 4. DIE SYSTEME DER MULTIPLIKATIONSTHEORIE

1. Multiplikationstheorien

Definition 1: Es sei P ein verallgemeinertes Funktionensystem über R, welches das System D der Distribution als Teilsystem enthält. Wir nennen P ein *Multiplikationssystem*, wenn auf P die folgende Struktur definiert ist:

(M_1) Eine lineare Vektorraumstruktur über R, die auf D mit dessen linearer Vektorraumstruktur über R übereinstimmt.

(M_2) Eine zulässige, lineare Abbildung von P in sich, die auf D mit der Differentiation übereinstimmt.

(M_3) Eine zulässige, bilineare Abbildung von $D \times P$ in P, die auf $F \times F$ mit der Multiplikation übereinstimmt und mit der vorgenannten linearen Abbildung durch die *Produktregel*

$$(SA)' = S'A + SA', \qquad S \in D(U),\ A \in P(U),\ U \in \Omega \tag{4.1}$$

verknüpft ist.

Dabei nennen wir die in (M_2) postulierte, die distributionentheoretische Differentiation fortsetzende Abbildung wieder kurz die auf P definierte *Differentiation*, ebenso für jedes $U \in \Omega$ das durch sie vermittelte Bild $A' \in P(U)$ von $A \in P(U)$ die *Ableitung* von A, und verfahren entsprechend für die höheren Ableitungen.

Desgleichen nennen wir die in (M_3) postulierte, die gewöhnliche Multiplikation fortsetzende Abbildung wieder kurz die auf P definierte *Multiplikation*, ebenso für jedes $U \in \Omega$ das durch sie vermittelte Bild $SA \in P(U)$ von $S \in D(U)$, $A \in P(U)$ das *Produkt* von S, A.

Schließlich bezeichnen wir das durch sukzessive Multiplikation von $A \in P(U)$ mit endlich vielen, in bestimmter Reihenfolge gegebenen Distributionen $S_1, \ldots, S_r \in D(U)$ gebildete Element von $P(U)$ statt mit $S_1(S_2(\ldots(S_rA)\ldots))$ kurz nur mit $S_1 \ldots S_r A$.

Unsere Definition 1 zeigt, daß wir die *Produktregel* (4.1) als die fundamentale, Differentiation und Multiplikation miteinander verknüpfende Relation ansehen, ohne die eine sinnvolle, das gewöhnliche Produkt der Funktionen verallgemeinernde Multiplikation nicht denkbar ist.

Bemerkungen: 1) Man wird fragen, warum wir in (M_3) nicht schärfer eine universelle Multiplikation postuliert haben, d. h. eine zulässige, bilineare Abbildung von $P \times P$ in P, die auf $F \times F$ mit der gewöhnlichen Multiplikation übereinstimmt und mit der Differentiation durch die Produktregel verknüpft ist. Der Grund hierfür ist, daß das so formulierte „universelle" Multiplikationsproblem heute völlig unangreifbar erscheint, während sich unser „eingeschränktes" Multiplikationsproblem, wie sich zeigen wird, sehr wohl behandeln läßt. Die gegenüber einer universellen Multiplikation in (M_3) vorgenommene Einschränkung dürfte für die Anwendungen übrigens weitgehend bedeutungslos sein.

2) „Universelle" und „eingeschränkte" Multiplikation fallen zusammen, wenn P mit D übereinstimmt. Ich habe jedoch bewiesen [7], daß es nicht möglich ist, auf D in vernünftiger Weise eine das gewöhnliche Produkt der Funktionen verallgemeinernde und mit der Differentiation durch die Produktregel verknüpfte Multiplikation zu definieren. Es wird sich im folgenden also immer um *echte* Erweiterungen der Distributionentheorie handeln.

3) Auf Grund unserer Definition hat es prinzipiell keinen Sinn, nach der „Assoziativität" des Produktes $S_1 S_2 S_3$ dreier Distributionen $S_1, S_2, S_3 \in D(U)$ zu fragen. Aber selbst dann, wenn alle in $P(U)$ gebildeten Produkte $S_1 S_2$, $(S_1 S_2) S_3$, $S_2 S_3$, $S_1(S_2 S_3) = S_1 S_2 S_3$ wieder Distributionen sind, stimmt $(S_1 S_2) S_3$ im allgemeinen nicht mit $S_1(S_2 S_3) = S_1 S_2 S_3$ überein. Wir geben hierfür ein von L. Schwartz [8], S. 119 herrührendes Beispiel: Es sei $U = R$ und $S_1 = \delta$, Diracdistribution in bezug auf den Nullpunkt, $S_2 = x$, $S_3 = 1/x$. Dann ist offenbar $S_2 S_3 = 1$, also nach der Produktregel $S_1(S_2 S_3) = \delta 1 = Y' 1 = Y' = \delta$, andererseits aber nach derselben Regel $S_1 S_2 = Y' x = (Yx)' - Y = Y - Y = 0$ und daher $(S_1 S_2) S_3 = 0$. Ein von L. Schwartz bewiesener Satz [9] zeigt, daß diese „Nichtassozitivität" mit Sicherheit in der Natur der Sache liegt.

4) Das Produkt cA von $A \in P(U)$ mit der konstanten Distribution c ist wohl zu unterscheiden von der der linearen Vektorraumstruktur von $P(U)$ angehörigen Komposition $c \cdot A$; beide brauchen nach unseren bisherigen Postulaten nicht notwendig übereinzustimmen. Wir kommen hierauf in Abschnitt 5 zurück.

Wir kehren zu unserer Definition 1 zurück. Wie in § 3 ist es auch hier sinnvoll, die folgende, den Begriff des Multiplikationssystems einengende Definition zu geben:

Definition 2: Ein Multiplikationssystem P heißt eine *Multiplikationstheorie*, wenn P kein echtes Teilsystem enthält, welches in bezug auf die durch P induzierte Struktur ein Multiplikationssystem ist.

Die hier anschließenden Betrachtungen stellen, mit lediglich selbstverständlichen Modifikationen, eine direkte Übertragung der in § 3, Abschnitt 1 durchgeführten dar. Wir können uns daher kurz fassen.

Zunächst enthält jedes Multiplikationssystem genau eine Multiplikationstheorie, nämlich den Durchschnitt aller Teil-Multiplikationssysteme von P.

Weiter sei, bei beliebigem Multiplikationssystem P, $Q(U)$ für jedes $U \in \Omega$ der Teilraum aller $A \in P(U)$, die als endliche Summe von Produkten $S_1 \ldots S_r$ von Distributionen *endlicher Ordnung* $S_1, \ldots, S_r \in E(U)$, $r = 1, 2, \ldots$ darstellbar sind. Das System Q ist ein gegen die Differentiation abgeschlossener Teilraum von P, aber im allgemeinen kein Multiplikationssystem. Denn erstens braucht er nicht ganz D zu umfassen und gegen die Multiplikation mit beliebigen Distributionen abgeschlossen zu sein, zweitens nicht die Eigenschaft (L_2) zu besitzen. Wohl aber besitzt das in P gebildete Hüllensystem $\bar{Q}$ von Q, wieder nach § 1, Abschnitt 3, alle diese Eigenschaften, ist mithin ein Multiplikationssystem, und zwar die eindeutig bestimmte, in P enthaltene Multiplikationstheorie. Wir haben also wieder den

Satz 1: Ein Multiplikationssystem P ist genau dann eine Multiplikationstheorie, wenn P mit dem Hüllensystem $\bar{Q}$ übereinstimmt; mit anderen Worten: wenn es zu jedem $x \in U \in \Omega$ und jedem $A \in P(U)$ eine in U enthaltene offene Umgebung V von x gibt mit der Eigenschaft, daß die Restriktion von A auf V in $Q(V)$ enthalten ist.

Wieder gibt es, wie sich zeigen wird, eine große Zahl von paarweise nicht isomorphen Multiplikationstheorien. Wir führen in ihrer Gesamtheit eine entsprechende Ordnungsrelation ein, gestützt auf das folgende

Corollar zu Satz 1: Es seien P_1, P_2 zwei Multiplikationstheorien, u, v zwei zulässige, lineare, mit der Differentiation und der Multiplikation vertauschbare und F elementweise fest lassende Abbildungen von P_1 in P_2. Dann lassen u, v auch D elementweise fest und stimmen vollständig überein.

Definition 3: Es seien P_1, P_2 zwei Multiplikationstheorien. Wir nennen P_2 *Verengung* von P_1, in Zeichen $P_1 > P_2$, wenn es eine (und folglich genau eine) zulässige, lineare, mit der Differentiation und der Multiplikation vertauschbare und F (und folglich auch D) elementweise fest lassende Abbildung u von P_1 in P_2 gibt.

Es ist wiederum klar, daß diese Verengungsrelation in der Gesamtheit aller Multiplikationstheorien eine (teilweise) Ordnung definiert. Die gleichzeitige Gültigkeit von $P_1 > P_2$ und $P_2 > P_1$ besagt nichts anderes als die Isomorphie der Multiplikationstheorien P_1, P_2.

2. Das charakteristische System einer Multiplikationstheorie

Für jedes $U \in \Omega$ und jedes $n = 1, 2, \ldots$ sei $E_n(U) = \overset{n}{\otimes} E(U)$, das n-fache *Tensorprodukt* des reellen Vektorraumes $E(U)$, ferner $\mathsf{E}(U) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n(U)$, die direkte Summe aller $E_n(U)$, die *Tensoralgebra* von $E(U)$. Den Teilraum $E_1(U)$ von $\mathsf{E}(U)$ identifizieren wir mit $E(U)$.

Die fundamentalen Eigenschaften des Tensorproduktes, die wir im folgenden ständig benutzen werden, sind in [1], insbesondere S. 1–20 dargestellt. Man beachte, daß es sich in unserem Falle stets um Tensorprodukte von reellen Vektorräumen handelt.

Die Elemente der Tensorprodukte A_n und der Tensoralgebra A eines Vektorraumes A bezeichnen wir grundsätzlich mit denselben Symbolen wie die von A, nur im Fettdruck.

Durch die tensorielle Multiplikation $\mathsf{S} \otimes \mathsf{T}$ wird $\mathsf{E}(U)$ zu einer reellen Algebra. Wir erklären weiter durch

$$(S_1 \otimes S_2 \otimes \ldots \otimes S_r)' = \sum_{j=1}^{r} S_1 \otimes \ldots \otimes S_j' \otimes \ldots \otimes S_r, \tag{4.2}$$

$$S_1, \ldots, S_r \in E(U), \quad r = 1, 2, \ldots$$

eine lineare Abbildung von $\mathsf{E}(U)$ in sich, die auf $E(U)$ mit der Differentiation übereinstimmt und mit der Multiplikation durch die Produktregel

$$(\mathsf{S} \otimes \mathsf{T})' = \mathsf{S}' \otimes \mathsf{T} + \mathsf{S} \otimes \mathsf{T}', \quad \mathsf{S}, \mathsf{T} \in \mathsf{E}(U) \tag{4.3}$$

verknüpft ist. Diese Abbildung nennen wir wieder kurz *Differentiation.*

Das so definierte System E wird durch die in natürlicher Weise erklärte Restriktion zu einem lokal strukturierten System über R, ebenso alle Teilsysteme E_n. Die reelle Algebra-Struktur von E ist mit dieser lokalen Struktur verträglich, und die Differentiation wird zu einer zulässigen, linearen Abbildung von E in sich.

Wir machen darauf aufmerksam, daß das System E weder die Eigenschaft (L_1) noch (L_2) besitzt.

Es sei nun P eine Multiplikationstheorie und Q das zugehörige, im vorigen Abschnitt definierte Teilsystem von P. Wir definieren eine zulässige, lineare, mit der Differentiation und der Multiplikation vertauschbare und E elementweise fest lassende Abbildung v von

E *auf* Q, indem wir für jedes $U \in \Omega$ dem Element $S_1 \otimes \ldots \otimes S_r \in \mathsf{E}(U)$ das Element $S_1 \ldots S_r \in Q(U)$ zuordnen. Die dieser Abbildung entsprechende, mit der lokalen Struktur verträgliche separierende Äquivalenzrelation auf E wird durch einen separierenden linearen Teilraum C von E, den *Kern* der Abbildung v, beschrieben. Für jedes $U \in \Omega$ besitzt der Teilraum $C(U)$ von $\mathsf{E}(U)$ die folgenden Eigenschaften:

(CM_1) $C(U)$ ist ein gegen die Differentiation abgeschlossenes Linksideal.

(CM_2) Für jedes Paar $f, g \in F(U)$ gilt $f \otimes g - fg \in C(U)$.

(CM_3) $C(U)$ enthält keine von Null verschiedene Distribution endlicher Ordnung $S \in E(U)$.

Wir nennen v die *charakteristische Abbildung* v_P und C das *charakteristische System* C_P *der Multiplikationstheorie* P.

Es sei nun umgekehrt C ein separierender linearer Teilraum von E, der die Eigenschaften (CM_1) bis (CM_3) besitzt. Das Quotientensystem $Q = \mathsf{E}/C$ besitzt dann die Eigenschaft (L_1) und enthält E als Teilsystem. Weiter ist auf Q erstens eine lineare Vektorraumstruktur über R erklärt, die auf E mit dessen Vektorraumstruktur übereinstimmt, zweitens eine zulässige, lineare Abbildung in sich, wieder *Differentiation* genannt, die auf E mit der distributionentheoretischen übereinstimmt, und drittens eine zulässige, bilineare Abbildung von $E \times Q$ in Q, wieder *Multiplikation* genannt, die auf $F \times F$ mit der gewöhnlichen Multiplikation übereinstimmt und mit der Differentiation durch die Produktregel (4.1) verknüpft ist. Jedes Element $A \in Q(U)$ ist dann als endliche Summe von Produkten $S_1 \ldots S_r$ von Distributionen endlicher Ordnung $S_1, \ldots, S_r \in E(U)$ darstellbar. Diese ganze Struktur ist, wieder nach § 1, Abschnitt 3, in eindeutiger Weise auf das Hüllensystem $P = \bar{Q}$ von Q fortsetzbar, und P ist in bezug auf diese Struktur nicht nur ein Multiplikationssystem, sondern sogar eine Multiplikationstheorie. Schließlich ist die kanonische Abbildung v von E auf Q nichts anderes als die charakteristische Abbildung v_P von P, mithin C genau das charakteristische System C_P von P.

Ebenso wie in § 3, Abschnitt 2, zeigt man schließlich, daß die Relationen $P_1 > P_2$ und $C_{P_1} \subset C_{P_2}$ genau gleichwertig sind, daß insbesondere also die Gleichheit von C_{P_1}, C_{P_2} nichts anderes als die Isomorphie der Multiplikationstheorien P_1, P_2 besagt. Wir haben also wieder den

Satz 2: Die Zuordnung $P \to C_P$ definiert eine umkehrbar eindeutige und anti-ordnungstreue Korrespondenz zwischen den (Klassen isomorpher) Multiplikationstheorien P und den separierenden, die Eigenschaften (CM_1) bis (CM_3) besitzenden Teilräumen C von E.

Desgleichen übertragen sich die hieran schließenden Betrachtungen aus § 3, Abschnitt 2 fast wörtlich, wir haben also das

Corollar zu Satz 2: Jede Familie $(P_i)_{i \in I}$ von Multiplikationstheorien P_i besitzt (in bezug auf die Ordnungsrelation $>$) eine obere Grenze $\bigcup_{i \in I} P_i$, jede total geordnete Familie $(P_i)_{i \in I}$ außerdem eine untere Grenze $\bigcap_{i \in I} P_i$. Insbesondere gibt es, falls überhaupt Multiplikationstheorien existieren, eine eindeutig bestimmte *maximale* Multiplikationstheorie P, aus der alle anderen durch Verengung hervorgehen, und zu jeder Multiplikationstheorie gibt es mindestens eine minimale Verengung.

Die Frage nach der Existenz von Multiplikationstheorien aber, deren Analogon für die Differentiationstheorien wir in § 3 fast unmittelbar aus dem damaligen Satz 2 heraus beantworten konnten, ist hier von wesentlich komplizierterer Natur. – Hierfür sind vor allem die beiden folgenden Tatsachen verantwortlich: Erstens ist die „erzeugende Operation" unserer jetzigen Erweiterung, die Multiplikation, im Gegensatz zur damaligen, der Differentiation, eine *zweistellige* Verknüpfung. Zweitens ist hier neben dieser erzeugenden

Operation noch eine zweite, nämlich eben die Differentiation, mit im Spiele. Nicht zuletzt tragen auch die zusätzlichen Postulate, die sich in den nächsten Abschnitten als notwendig erweisen werden, zur Komplizierung des Problems bei.

Wir fahren in den folgenden Abschnitten zunächst mit der Erörterung der Grundbegriffe fort. In den nächsten beiden Paragraphen greifen wir das Existenzproblem und die damit zusammenhängenden Fragen dann in ihrem ganzen Umfange an.

3. Die lokale Stufen-Ordnungsstruktur

Für jedes $U \in \Omega$ definieren wir als *Stufe* $G(\mathsf{S})$ eines Elementes $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$ die kleinste Zahl n ($n = 1, 2, \ldots$), für die S in der direkten Summe $\mathsf{E}_n(U) = \bigoplus_{j=1}^{n} E_j(U)$ enthalten ist, und als *Ordnung* $H(\mathsf{S})$ von S die kleinste Zahl m ($m = 0, 1, 2, \ldots$) mit der Eigenschaft, daß S als endliche Summe von Produkten $S_1 \otimes \cdots \otimes S_r$ von Distributionen $S_1, \ldots, S_r \in E(U)$ mit $\sum_{j=1}^{r} H(S_j) \leqq m$ darstellbar ist. Für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ seien $\mathsf{E}^m(U)$, $\mathsf{E}_n^m(U)$, $E_n^m(U)$ beziehentlich die Teilräume aller $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$, $\mathsf{E}_n(U)$, $E_n(U)$, mit $H(\mathsf{S}) \leqq m$. Offenbar ist nicht nur $\mathsf{E}_1(U) = E_1(U) = E(U)$, sondern auch $\mathsf{E}_1^m(U) = E_1^m(U) = E^m(U)$ für jedes m; d. h. die eben definierte Ordnung stimmt auf $E(U)$ mit der in § 3, Abschnitt 4 eingeführten überein.

Die Ungleichungen

$$G(\mathsf{S} + \mathsf{T}) \leqq \operatorname{Max}\,(G(\mathsf{S}), G(\mathsf{T})), \qquad G(\mathsf{S} \otimes \mathsf{T}) \leqq G(\mathsf{S}) + G(\mathsf{T}) \tag{4.4}$$

für $\mathsf{S}, \mathsf{T} \in \mathsf{E}(U)$ sind wieder trivial, ebenso die entsprechenden für H. Da die Tensoralgebra nullteilerfrei ist, gilt in der zweiten Ungleichung (4.4) für $\mathsf{S}, \mathsf{T} \neq 0$ das Gleichheitszeichen, ebenso, wie man leicht überlegt, auch für H. Bezüglich der Differentiation gilt für $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$

$$G(\mathsf{S}') \leqq G(\mathsf{S}), \qquad H(\mathsf{S}) \geqq \operatorname{Max}\,(0, H(\mathsf{S}') - 1). \tag{4.5}$$

In der ersten dieser Ungleichungen wird das Gleichheitszeichen im allgemeinen, selbst für $\mathsf{S} \neq 0$, natürlich nicht gelten; dagegen überlegt man unschwer (ohne daß wir davon Gebrauch machen werden), daß es in der zweiten Ungleichung stets gilt.

Schließlich werden Stufe und Ordnung eines Elementes von $\mathsf{E}(U)$ bei der Restriktion auf eine offene Teilmenge V von U nicht vergrößert; mit anderen Worten: Alle Systeme E_n, E^m, E_n^m, E_n^m sind Teilsysteme von E. Die gegenseitigen Enthaltenseinsrelationen sind klar.

Es sei nun P eine Multiplikationstheorie. Als *Stufe* $G(A)$ eines Elementes $A \in Q(U)$ definieren wir $G(A) = \operatorname{Min} G(\mathsf{S})$, wobei $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$ alle Repräsentanten von A durchläuft. Aus (4.4) wird dann

$$G(A + B) \leqq \operatorname{Max}\,(G(A), G(B)), \qquad G(SA) \leqq G(A) + 1 \tag{4.6}$$

für $A, B \in Q(U)$, $S \in E(U)$. Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ sei $Q_n(U)$ der Teilraum aller $A \in Q(U)$ mit $G(A) \leqq n$. Insbesondere stimmt $Q_1(U)$ mit $E(U)$ überein. Alle Systeme Q_n sind wieder Teilräume von Q und bilden eine aufsteigende Folge.

Ebenso liegt es nahe, als *Ordnung* $H'(A)$ von $A \in Q(U)$ wieder $H'(A) = \operatorname{Min} H(\mathsf{S})$ zu definieren, wobei $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$ alle Repräsentanten von A durchläuft. Dann gilt wieder

$$H'(A + B) \leqq \operatorname{Max}\,(H'(A), H'(B)), \quad H'(SA) \leqq H(S) + H'(A) \tag{4.7}$$

für $A, B \in Q(U)$, $S \in E(U)$. Für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ seien $Q^m(U)$, $Q_n^m(U)$ wieder die Teilräume aller $A \in Q(U)$, $Q_n(U)$ mit $H'(A) \leqq m$. Insbesondere gilt $Q^0(U) = Q_n^0(U) = F(U)$. Alle Systeme Q^m, Q_n^m sind wieder Teilräume von Q mit evidenten gegenseitigen Enthaltenseinsrelationen.

Schließlich werde die *totale Ordnung* $\bar{H}'(A)$ von $A \in Q(U)$ wieder durch $\bar{H}'(A) = H'(A)$ für $H'(A) > 0$ und $\bar{H}'(A) = \bar{H}(A)$ für $H'(A) = 0$, also $A \in F(U)$ definiert. Die erste der Ungleichungen (4.7) überträgt sich auf $\bar{H}'(A)$.

Bezüglich der Differentiation gilt für jedes $A \in Q(U)$

$$(4.8) \qquad G(A') \leqq G(A), \quad H'(A) \geqq \operatorname{Max}\,(0, H'(A') - 1), \quad \bar{H}'(A') \leqq \bar{H}'(A) + 1.$$

In den beiden letzten dieser Ungleichungen gilt das Gleichheitszeichen offenbar genau simultan.

Als *Stufe* $G_x(A)$, *Ordnung* $H'_x(A)$ und *totale Ordnung* $\bar{H}'_x(A)$ *im Punkte* $x \in U$ eines beliebigen Elementes $A \in P(U)$ definieren wir wieder $G_x(A) = \operatorname{Min} G(A_V)$, $H'_x(A) = \operatorname{Min} H'(A_V)$ und $\bar{H}'_x(A) = \operatorname{Min} \bar{H}'(A_V)$, wobei V alle in U enthaltenen offenen Umgebungen von x durchläuft, für die die Restriktion A_V von A auf V in $Q(V)$ enthalten ist. Wieder gilt $H'_x(A) = \operatorname{Max}\,(0, \bar{H}'_x(A))$, ferner die Analoga zu (4.6), (4.7) und, entsprechend (4.8), für jedes $A \in P(U)$

$$(4.9) \qquad G_x(A') \leqq G_x(A), \quad H'_x(A) \geqq \operatorname{Max}\,(0, H'_x(A') - 1), \quad H'_x(A') \leqq H'_x(A) + 1.$$

Auch hier gilt in den beiden letzten Ungleichungen das Gleichheitszeichen wieder genau simultan.

Wie bei den Distributionen gibt es auch hier zu jedem $A \in P(U)$ und jedem $x \in U$ wieder eine in U enthaltene Umgebung V von x mit der Eigenschaft, daß für alle $y \in V$ die Ungleichungen $G_y(A) \leqq G_x(A)$ und $H'_y(A) \leqq H'_x(A)$ gelten. $G_x(A)$ und $H'_x(A)$ sind also bei festem A als Funktionen von x in jeder relativ zu U kompakten Teilmenge von U beschränkt, aber im allgemeinen keineswegs auf ganz U. Die Gesamtheit aller $A \in P(U)$, für die diese Beschränktheit sowohl für $G_x(A)$ als auch für $H'_x(A)$ stattfindet, enthält offenbar $Q(U)$, braucht aber im allgemeinen nicht mit $Q(U)$ übereinzustimmen.

Das hat, kurz gesagt, den folgenden Grund: Ist für ein $A \in P(U)$ etwa $G_x(A) = 2$ für jedes $x \in U$, ist also A in einer gewissen Umgebung U_x eines jeden Punktes $x \in U$ in der Form $S_1 T_1 + \cdots + S_r T_r$ mit $S_j, T_j \in E(U_x)$ darstellbar, so brauchen die zu allen Punkten x gehörigen Minimalzahlen $r = r(x)$ keine obere Schranke zu besitzen, die natürlich dafür, daß A in $Q(U)$ enthalten ist, notwendig ist.

Auch braucht für ein $A \in Q(U)$ nicht notwendig $G(A) = \operatorname{Max} G_x(A)$ und $H'(A) = \operatorname{Max} H'_x(A)$ zu gelten. Alle diese Tatsachen sind indessen für unsere Theorie nicht sehr bedeutungsvoll.

Bei der Einführung der Stufen-Ordnungsstruktur tritt jedoch eine andere, ernste Schwierigkeit auf: Es ist nach dem bisher Gesagten keineswegs klar, ob für jedes $S \in E(U)$ die Ordnung $H'(S)$ mit der in § 3, Abschnitt 4 definierten $H(S)$ übereinstimmt, ebenso, ob für jedes $S \in D(U)$ und jedes $x \in U$ die Ordnungen $H'_x(S)$ und $H_x(S)$ übereinstimmen.

In der Tat kann man Multiplikationstheorien angeben, in denen beide Ordnungen zuweilen voneinander verschieden sind. Wir werden nur aus Raumgründen auf die Konstruktion eines Beispiels verzichten.

Allgemein kann man nur sagen, daß stets $H'(S) \leqq H(S)$ und daher auch $H'_x(S) \leqq H_x(S)$ gilt. Die Gleichheit von $H'(S)$, $H(S)$ gilt also sicher für $H(S) = 0$, und auch für $H(S) = 1$ kann man sich leicht davon überzeugen. Aber für $H(S) \geqq 2$ ist es sehr wohl denkbar,

daß S einen Repräsentanten $S \in E(U)$ besitzt, der nicht in $E(U)$ enthalten ist und für den $1 = H(S) < H(S)$ gilt. Andererseits ist klar, daß im Rahmen einer sinnvollen Multiplikationstheorie die Gleichungen $H'(S) = H(S)$, $H'_x(S) = H_x(S)$ sicher notwendig sind. Es bleibt uns daher nichts anderes übrig, als diese Gleichheit zu postulieren in der folgenden *Regularitätsforderung* an die Multiplikationstheorie P:

(R_0) Für jedes $x \in U \in \Omega$ und jedes $S \in D(U)$ gilt $H'_x(S) = H_x(S)$.

Diese Forderung (R_0) hat natürlich auch die Gleichheit der totalen Ordnungen $\bar{H}'_x(S)$, $\bar{H}_x(S)$ für jedes $x \in U$ zur Folge. Aus § 3, Prop. 2 folgt weiter, daß dann für jedes $S \in E(U)$ auch die Ordnungen $H'(S)$, $H(S)$ und die totalen Ordnungen $\bar{H}'(S)$, $\bar{H}(S)$ übereinstimmen. Wir haben es jedoch vorgezogen, die Gleichheit für die praktisch wichtigeren Ordnungen $H'_x(S)$, $H_x(S)$ von $S \in D(U)$ im Punkte $x \in U$ zu postulieren.

In einer die Forderung (R_0) erfüllenden Multiplikationstheorie P werden wir im folgenden immer das Zeichen $'$ an den Ordnungen fortlassen.

Wir schließen noch eine weitere, stärkere *Regularitätsforderung* an die Multiplikationstheorie P an, die offensichtlich eine sinngemäße und vernünftige Verallgemeinerung von (R_0) ist:

(R_1) Für jedes $x \in U \in \Omega$ und jedes $A \in P(U)$ gilt in *allen* Ungleichungen (4.9) das Gleichheitszeichen.

Wir wissen aus § 3, Abschnitt 4, daß in den den beiden letzten Ungleichungen (4.9) entsprechenden für die distributionentheoretischen Ordnungen $H_x(S)$, $\bar{H}_x(S)$ stets die Gleichheit gilt. Auf Grund dieser Bemerkung folgt aus (R_1) durch vollständige Induktion nach $H_x(S)$ in der Tat die Übereinstimmung von $H'_x(S)$ und $H_x(S)$ wie die von $\bar{H}'_x(S)$ und $\bar{H}_x(S)$, also die Forderung (R_0).

Wir betonen ausdrücklich, daß aus (R_1) nicht notwendig die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (4.8) für alle $A \in Q(U)$ folgt. Diese Gleichheiten gelten jedoch sicher dann, wenn für jedes $A \in Q(U)$ die Relationen $G(A) = \operatorname{Max} G_x(A)$ und $H'(A) = \operatorname{Max} H'_x(A)$ bestehen.

Schließlich definieren wir wieder den Begriff des *Trägers* eines Elementes $A \in P(U)$. Auf Grund von (L_1) gibt es eine (evtl. leere) maximale offene Teilmenge V von U, auf der A die Restriktion Null besitzt. Das in U gebildete Komplement von V heißt der *Träger* $\bar{\bar{A}}$ von A. Für eine Distribution $S \in D(U)$ stimmt der so definierte Träger offenbar mit dem in § 3 Abschnitt 4 eingeführten überein.

$\bar{\bar{A}}$ ist seiner Definition nach in U abgeschlossen. Ist $\bar{\bar{A}}$ insbesondere kompakt, so sind $\operatorname{Max} G_x(A)$ und $\operatorname{Max} H'_x(A)$ notwendig endlich (man kann in diesem Falle sogar $A \in Q(U)$ beweisen). Auf Grund von (L) kann man A dann auf jedes U enthaltende $U_1 \in \Omega$ in eindeutiger Weise zu einem Element $A_1 \in P(U_1)$ mit $\bar{\bar{A}}_1 = \bar{\bar{A}}$ fortsetzen.

4. Multiplizierbare Distributionen

Es sei P eine Multiplikationstheorie. Für jedes $U \in \Omega$ nennen wir zwei Distributionen $S, T \in D(U)$ (in dieser Reihenfolge!) *multiplizierbar in bezug auf* P, wenn ihr Produkt $ST \in P(U)$ wieder eine Distribution ist. Wir nennen $S, T \in D(U)$ *absolut multiplizierbar*, wenn sie in bezug auf jede Multiplikationstheorie multiplizierbar sind.

Ist die Multiplikationstheorie P_2 Verengung der Multiplikationstheorie P_1 und sind $S, T \in D(U)$ in bezug auf P_1 multiplizierbar, so sind sie es offenbar auch in bezug auf P_2, und die in $P_1(U)$ und in $P_2(U)$ gebildeten Produktdistributionen ST stimmen überein. Insbesondere sind $S, T \in D(U)$ genau dann absolut multiplizierbar, wenn sie in bezug auf die maximale Multiplikationstheorie P multiplizierbar sind, und in allen Multiplikationstheorien besitzen sie dasselbe Produkt.

Es ist aber, natürlich, sehr wohl denkbar, daß S, T in bezug auf mehrere Multiplikationstheorien P_i multiplizierbar sind, von denen keine Verengung der anderen ist, und

daß die in den $P_i(U)$ gebildeten Produktdistributionen ST alle voneinander verschieden sind.

Proposition 1: Zwei Distributionen $S, T \in D(U)$ sind sicher dann absolut multiplizierbar, wenn für jedes $x \in U$ die Ungleichung

$$\bar{H}_x(S) + \bar{H}_x(T) \leqq 0 \tag{4.10}$$

besteht. Die beiden Produkte ST, $TS \in D(U)$ stimmen dann überein.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der sog. *Leibniz*schen *Regel*, die, als einfache Folgerung aus der Produktregel, in jeder Multiplikationstheorie P gilt:

$$(SA)^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} S^{(m-j)} A^{(j)} \tag{4.11}$$

für jedes $m = 1, 2, \ldots$ und alle $S \in D(U)$, $A \in P(U)$. Nur andere Formulierungen von (4.11) sind die beiden folgenden Gleichungen:

$$SA^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} (S^{(m-j)} A)^{(j)}, \tag{4.12}$$

$$S^{(m)} A = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} (S A^{(m-j)})^{(j)} \tag{4.13}$$

Durch diese Formeln (4.12), (4.13) wird das Produkt zweier Distributionen $S, T \in D(U)$, welche die Ungleichung (4.10) erfüllen, nun vollständig auf das gewöhnliche Produkt von Funktionen zurückgeführt. Zu jedem $x \in U$ gibt es dann nämlich eine in U enthaltene offene Umgebung V und eine Zahl $m = 0, 1, 2, \ldots$ mit der Eigenschaft, daß für die Restriktionen S_V, T_V von S, T auf V entweder $S_V \in F^m(V)$, $T_V \in E^m(V)$ oder das Umgekehrte gilt. Betrachten wir etwa den ersten Fall, in dem also

$$S_V = f \in F^m(V), \quad T_V = \sum_{i=0}^{m} g_i^{(i)} \in E^m(V), \qquad g_i \in F(V) \tag{4.14}$$

gilt. Auf Grund von (4.12), (4.13) hat man dann, bei beliebiger Multiplikationstheorie P, in $P(V)$

$$S_V T_V = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} (f^{(i-j)} g_i)^{(j)}, \tag{4.15}$$

$$T_V S_V = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} (g_i f^{(i-j)})^{(j)}. \tag{4.16}$$

In diesen beiden Gleichungen steht wegen (4.14) auf der rechten Seite beide Male dieselbe Distribution. Auf Grund der Eigenschaft (L) der Distributionentheorie sind also auch ST, $TS \in P(U)$ Distributionen und stimmen miteinander überein.

Durch eine leichte Rechnung mit Binomialkoeffizienten erhält man aus diesen Formeln weiter die Assoziativrelation

$$fgS = (fg)S \quad \text{für } \operatorname{Max}(\bar{H}_x(f), \bar{H}_x(g)) + H_x(S) \leqq 0. \tag{4.17}$$

Schließlich gilt für jedes $S \in D(U)$ offenbar $1S = S$.

Wie wir später sehen werden, gibt es außer den in Prop. 1 angegebenen keine weiteren Paare von absolut multiplizierbaren Distributionen.

Die Multiplikation dieser speziellen Distributionenpaare kann man offenbar untersuchen, ohne dabei den Rahmen der Distributionentheorie zu überschreiten. Man gelangt so zu dem sog. *multiplikativen Produkt* (produit multiplicatif) von L. SCHWARTZ ([8], Seite 114 ff.) bzw. zu dem von mir eingeführten *inneren Produkt* ([5], Seite 426, 446). Die geringfügigen Abweichungen beider voneinander beruhen auf der unterschiedlichen Definition und Auffassung der Distributionen.

Wir geben einige (wohlbekannte) **Beispiele:** 1) Für jedes $y \in U \in \Omega$ und jedes $f \in F^{m+1}(U)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ gilt

$$f\delta_y^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f^{(m-j)}(y)\delta_y^{(j)}. \tag{4.18}$$

Ist insbesondere, für $m \geqq 1, f(y) = 0$, so folgt $\frac{f}{x-y} \in F^m(U)$, und aus (4.18) folgt

$$f\delta_y^{(m)} = -m \frac{f}{x-y} \delta_y^{(m-1)}. \tag{4.19}$$

Speziell gilt nach (4.18) für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$(x-y)^n \delta_y^{(m)} = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{m!}{(m-n)!} \delta_y^{(m-n)} & \text{für } m \geqq n, \\ 0 & \text{für } m < n. \end{cases} \tag{4.20}$$

2) Für alle $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt

$$(x-y)^n \left(\text{Pf.} \frac{1}{(x-y)^m}\right) = \begin{cases} \text{Pf.} \dfrac{1}{(x-y)^{m-n}} & \text{für } m > n, \\ (x-y)^{n-m} & \text{für } m \leqq n. \end{cases} \tag{4.21}$$

5. Strenge Multiplikationstheorien

Es sei wieder P eine beliebige Multiplikationstheorie. Wir gehen von der in Abschnitt 1 gemachten Bemerkung aus, daß das Produkt cA eines beliebigen Elementes $A \in P(X)$ mit der konstanten Distribution c im allgemeinen nicht mit der der Vektorraumstruktur angehörigen Komposition $c \cdot A$ übereinzustimmen braucht.

In der Tat ist das, wie man allem Folgenden entnehmen kann, für die maximale Multiplikationstheorie P nicht allgemein der Fall.

Notwendig und hinreichend dafür, daß für alle c die Gleichheit $cA = c \cdot A$ besteht, ist offenbar $1A = A$. Diese Gleichung gilt nun, wie wir gesehen haben, speziell für alle Distributionen $S \in D(U)$, und es ist äußerst wünschenswert, sie für alle $A \in P(U)$ gültig zu wissen. Hierfür bedarf es aber, wie gesagt, eines zusätzlichen Postulates.

Das Bestreben aber, für den Kalkül mit Produkten von Distributionen möglichst umfassende Rechengesetze zu schaffen, legt es nahe, nicht nur die bloße Gleichheit $1A = A$ zu fordern, sondern danach zu trachten, sie als einfachsten Spezialfall einer umfassenden Relation zu gewinnen.

Es ist von vornherein sehr unklar, wie eine solche Relation beschaffen sein könnte, zumal wir, wie es die „Assoziativbetrachtung" in Abschnitt 1 zeigt, sehr vorsichtig sein müssen. Einen Hinweis aber gibt uns die folgende

Proposition 2: In einer Multiplikationstheorie P gilt genau dann für alle $U \in \Omega$ und alle $A \in P(U)$ die Gleichheit $1A = A$, wenn für alle $U \in \Omega$ und alle $g \in F(U)$, $A \in P(U)$ die Relation $1gA = g1A$ besteht.

Beweis: Es ist klar, daß die genannte Bedingung notwendig ist. Zum Beweise, daß sie hinreicht, brauchen wir $1A = A$ nur für alle $A \in Q(U)$ oder auch nur für alle $A \in Q(U)$ der Form $A = S_1 \ldots S_r$ mit $S_1, \ldots, S_r \in E(U)$, $r = 1, 2, \ldots$ nachzuweisen. Hierfür genügt es aber wegen $1S_r = S_r$ zu wissen, daß unsere Bedingung für jedes $S \in E(U)$, $A \in Q(U)$ auch $1SA = S1A$ zur Folge hat. Dabei dürfen wir $S = g^{(m)}$ mit $g \in F(U)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ annehmen. Für $m = 0$ ist die Behauptung dann klar, und wenn wir sie für ein $m \geqq 0$ als richtig annehmen, haben wir nach der Produktregel sofort

$$1g^{(m+1)}A = (1g^{(m)}A)' - 1g^{(m)}A' = (g^{(m)}1A)' - g^{(m)}1A' = g^{(m+1)}1A.$$

Damit ist alles bewiesen.

Die Gleichung $1A = A$ erscheint hiernach als Spezialfall der allgemeinen Kommutativitätsrelation

$$fgA = gfA \qquad \text{für } f, g \in F(U),\ A \in P(U), \tag{4.22}$$

und zwar für beliebige g, A und $f = 1$.

Diese Relation gilt ferner sicher dann, wenn A eine Funktion $A \in F(U)$ ist, für beliebige f, g. Aus Abschnitt 4, (4.17) sind uns weitere Fälle ihrer Gültigkeit bekannt, nämlich für $f, g \in F^m(U)$ und $A \in E^m(U)$, $m = 1, 2, \ldots$

Es liegt daher nahe, die Kommutativitätsrelation (4.22) unter möglichst schwachen Voraussetzungen über f, g und A zu postulieren.

Wir überzeugen uns zunächst davon, daß es untunlich ist, Gleichung (4.22) ohne jede Einschränkung für f, g und A zu postulieren.

Aus der unbeschränkten Gültigkeit von (4.22) würde nämlich, wie man an Hand der Produktregel sofort sieht, auch

$$fSa = SfA \qquad \text{für } f \in F^1(U),\ S \in E^1(U),\ A \in P(U)$$

folgen, und hieraus, unter Berücksichtigung von Prop. 1 und (4.17) weiter

$$fgST = (fg)ST \qquad \text{für } f, g \in F^1(U),\ S, T \in E^1(U).$$

Nun wäre aber im allgemeinen

$$fgR \neq (fg)R \qquad \text{für } f, g \in F^1(U),\ R \in E^2(U);$$

für $f = x \log |x|$, $g = 1/\log |x|$ und $R = \delta' - c\delta$ würde aus (4.22) und (4.18) zum Beispiel

$$fgR = f(g\delta)' - fg'\delta = -g'f\delta = 0,$$

$$(fg)R = x\delta' = -\delta$$

folgen. Dieses $R = \delta' - c\delta$ wäre also sicher nicht in der Form $R = ST$ mit $S, T \in E^1(U)$ darstellbar. Es könnte also insbesondere keine der Gleichungen

$$\delta\,(\mathrm{Pf.}\ 1/x) = -\delta' + c\delta, \quad (\mathrm{Pf.}\ 1/x)\,\delta = -\delta' + c\delta, \tag{4.23}$$

die in den Anwendungen eine große Rolle spielen und die man bisher durch „Division" aus (4.20), (4.21) zu „beweisen" pflegte, gelten.

Aus diesen und ähnlichen Gründen erscheint es nicht ratsam, eine so starke Forderung wie die nach unbeschränkter Gültigkeit der Kommutativitätsrelation (4.22) zu stellen.

Wir schlagen nun vor, diese Relation (4.22) wenigstens für alle diejenigen $f, g \in F(U)$ und $A \in P(U)$ zu postulieren, bei denen in einer gewissen Umgebung eines jeden Punktes $x \in U$ mindestens eine der Funktionen f, g so oft im gewöhnlichen Sinne differenzierbar ist, wie die Ordnung von A in diesem Punkte angibt, für die also für jedes $x \in U$ die Ungleichung

$$\mathrm{Min}\,(\bar{H}_x(f), \bar{H}_x(g)) + H'_x(A) \leqq 0 \tag{4.24}$$

gilt. Es wird sich zeigen, daß wir so zu einer befriedigenden Theorie gelangen werden. Insbesondere ist (4.24) stets erfüllt, wenn $f = 1$ ist.

Definition 4: Eine Multiplikationstheorie P heißt eine *strenge* Multiplikationstheorie, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

(MK) Für jedes $U \in \Omega$ gilt die Kommutativitätsrelation

$$fgA = gfA \tag{4.22}$$

für alle $f, g \in F(U)$, $A \in P(U)$, welche in jedem Punkte $x \in U$ die Ungleichung

$$\mathrm{Min}\,(\bar{H}_x(f), \bar{H}_x(g)) + H'_x(A) \leqq 0 \tag{4.24}$$

erfüllen.

Proposition 3: Eine Multiplikationstheorie P ist genau dann eine strenge Multiplikationstheorie, wenn ihr charaktaristisches System C_P für jedes $U \in \Omega$ die folgende Eigenschaft besitzt:

(CMK) Für alle $f, g \in F(U)$ und $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$ mit $\mathrm{Min}\,(\bar{H}(f), \bar{H}(g)) + H(\mathsf{S}) \leqq 0$ gilt $f \otimes g \otimes \mathsf{S} - g \otimes f \otimes \mathsf{S} \in C(U)$.

Hiermit ist die folgende Eigenschaft gleichwertig:

(CMK′) Für alle $f \in F(U)$ und $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$ mit $\bar{H}(f) + H(\mathsf{S}) \leqq 0$ gilt $f \otimes \mathsf{S} - \mathsf{S} \otimes f \in C(U)$.

Es ist klar, daß (CMK) genau dann erfüllt ist, wenn P eine strenge Multiplikationstheorie ist. Ebenso ist (CMK) eine triviale Folgerung aus (CMK′). Es bleibt also nur zu zeigen, daß (CMK′) aus (CMK) folgt. Hierzu brauchen wir, ähnlich wie beim Beweis von Prop. 2, aus (CMK) nur zu schließen, daß für alle $f \in F(U)$, $S \in E(U)$, $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$ mit $\bar{H}(f) + H(S) + H(\mathsf{S}) \leqq 0$ stets $f \otimes S \otimes \mathsf{S} - S \otimes f \otimes \mathsf{S} \in C(U)$ gilt. Dabei können wir $f \in F^{m+n}(U)$, $S = g^{(m)}$, $H(\mathsf{S}) = n$ mit $g \in F(U)$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ annehmen. Für $m = 0$ ist die Behauptung dann mit (CMK) identisch, und wenn wir sie für ein $m \geqq 0$ als richtig annehmen, so haben wir für $f \in F^{m+n+1}(U)$, $S = g^{(m+1)}$, $H(\mathsf{S}) = n$ nach der Produktregel

$$f \otimes g^{(m+1)} \otimes S - g^{(m+1)} \otimes f \otimes S = (f \otimes g^{(m)} \otimes S - g^{(m)} \otimes f \otimes S)' -$$
$$- (f' \otimes g^{(m)} \otimes S - g^{(m)} \otimes f' \otimes S) - (f \otimes g^{(m)} \otimes S' - g^{(m)} \otimes f \otimes S'),$$

also wieder die Behauptung. Damit ist Prop. 3 bewiesen.

Corollar zu Proposition 3: Jede Verengung P_2 einer strengen Multiplikationstheorie P_1 ist wieder eine strenge Multiplikationstheorie. Insbesondere ist die untere Grenze $\bigcap_{i \in I} P_i$ einer total geordneten Familie $(P_i)_{i \in I}$ strenger Multiplikationstheorien P_i wieder eine strenge Multiplikationstheorie. Ebenso ist die obere Grenze $\bigcup_{i \in I} P_i$ einer beliebigen Familie $(P_i)_{i \in I}$ strenger Multiplikationstheorien P_i wieder eine strenge Multiplikationstheorie. Insbesondere gibt es, falls überhaupt strenge Multiplikationstheorien existieren, eine eindeutig bestimmte *maximale* strenge Multiplikationstheorie $\mathring{P}$, aus der alle anderen durch Verengung hervorgehen.

Eine unmittelbare Folgerung aus Prop. 3 ist auch die folgende, für die Anwendungen besonders handliche

Proposition 4: Eine Multiplikationstheorie P ist genau dann eine strenge Multiplikationstheorie, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

(MK′) Für jedes $U \in \Omega$ gilt

$$f S_1 \dots S_r = S_1 \dots S_r f \tag{4.25}$$

für alle $f \in F(U)$, $S_1, \dots, S_r \in D(U)$, $r = 1, 2, \dots$ mit

$$\bar{H}_x(f) + \sum_{j=1}^{r} H_x(S_j) \leqq 0 \tag{4.26}$$

für alle $x \in U$.

Aus Prop. 4 gewinnt man, in Verbindung mit Prop. 1 aus Abschnitt 4, mühelos die wichtigsten, in einer strengen Multiplikationstheorie P geltenden Rechengesetze. So haben wir, in Verallgemeinerung von (4.17), bei beliebigem $A \in P(U)$ die Assoziativrelation

$$fgA = (fg)A \quad \text{für } \operatorname{Max}(\bar{H}_x(f), \bar{H}_x(g)) + H'_x(A) \leqq 0. \tag{4.27}$$

Wir nennen zwei Distributionen $S, T \in D(U)$ *absolut streng multiplizierbar*, wenn sie in bezug auf jede strenge Multiplikationstheorie multiplizierbar sind. Das ist natürlich genau dann der Fall, wenn S, T in bezug auf die maximale strenge Multiplikationstheorie $\mathring{P}$ multiplizierbar sind. Wir werden später sehen, daß S, T dann auch absolut multiplizierbar und daher, wie schon in Abschnitt 4 angekündigt, von der in Prop. 1 beschriebenen Art sind.

Corollar zu Proposition 4: Ist P eine strenge Multiplikationstheorie, so gilt für alle $x \in U \in \Omega$ und alle $S \in D(U)$, $A \in P(U)$ mit $\bar{H}_x(S) + \bar{H}'_x(A) \leqq 0$ statt $G_x(SA) \leqq G_x(A) + 1$ die schärfere Ungleichung $G_x(SA) \leqq G_x(A)$.

Beispiel: Ist P eine strenge Multiplikationstheorie, so gilt auf Grund von (4.20), (4.21) für alle $y \in U \in \Omega$, $S \in D(U)$, $m, n = 0, 1, 2 \dots$ in $P(U)$

$$(x-y)^n S \delta_y^{(m)} = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{m!}{(m-n)!} S \delta_y^{(m-n)} & \text{für } m \geqq n, \\ 0 & \text{für } m < n, \end{cases} \tag{4.28}$$

$$(4.29) \qquad (x-y)^n S \text{ Pf. } \frac{1}{(x-y)^m} = \begin{cases} S\left(\text{Pf. } \dfrac{1}{(x-y)^{m-n}}\right) & \text{für } m > n, \\ S(x-y)^{n-m} & \text{für } m \leqq n. \end{cases}$$

Insbesondere kann, auf Grund von (4.28) für $n = 1$, $m = 0$, in keiner strengen Multiplikationstheorie die zweite der Gleichungen (4.23) gelten. Wir werden aber sehen, daß die erste dieser Gleichungen sehr wohl gelten kann.

Bemerkungen: 1) Durch Anwendung von Satz 3 aus § 1 und Berücksichtigung der im Anschluß an diesen Satz gemachten Bemerkung 1 gewinnt man die folgende

Proposition 5: Es sei P_1 eine strenge Multiplikationstheorie und P_2 Verengung von P_1 (also nach Prop. 3, Cor. selbst eine strenge Multiplikationstheorie). Dann ist die verengende Abbildung von P_1 in P_2 sogar eine Abbildung *auf* P_2.

In der Tat folgt aus Satz 3, daß das durch diese verengende Abbildung vermittelte Bild von P_1 in P_2 die Eigenschaft (L) besitzt, also eine Multiplikationstheorie und damit mit P_2 identisch ist.

2) Mit Hilfe desselben Satzes kann man zeigen, daß in einer strengen Multiplikationstheorie P für jedes $U \in \Omega$ und jedes $A \in Q(U)$ die Gleichungen $G(A) = \text{Max } G_x(A)$ und $H'(A) = \text{Max } H'_x(A)$ gelten. Erfüllt P also die Regularitätsforderung (R_1), so gilt auch in allen Ungleichungen (4.8) stets das Gleichheitszeichen.

§ 5. DER BEGRIFF DER BASIS EINER MULTIPLIKATIONSTHEORIE

1. Produktive und streng produktive Teilräume der Tensoralgebra

Das Ziel dieses Paragraphen ist, kurz gesagt, die Elimination der lokalen Struktur der Multiplikationstheorie aus den Untersuchungen des folgenden Paragraphen. Der Sinn dieser Andeutung wird alsbald klar werden.

Dabei müssen wir uns gegenüber früher in einigen Punkten wiederholen, werden dies aber so kurz wie möglich abtun.

Definition 1: Es sei $U \in \Omega$ eine offene Punktmenge. Wir nennen einen Teilraum K der Tensoralgebra $\mathsf{E}(U)$ *produktiv*, wenn er die Eigenschaften (CM_1) bis (CM_3) aus § 4, Abschnitt 2 besitzt:

(CM_1) K ist ein gegen die Differentiation abgeschlossenes Linksideal.
(CM_2) Für jedes Paar $f, g \in F(U)$ gilt $f \otimes g - fg \in K$.
(CM_3) K enthält keine von Null verschiedene Distribution endlicher Ordnung $S \in E(U)$.

Ein produktiver Teilraum K von $\mathsf{E}(U)$ heißt *streng produktiv*, wenn er eine (und folglich jede) der beiden äquivalenten Eigenschaften (CMK), (CMK′) aus § 4 Abschnitt 5 besitzt:

(CMK) Für alle $f, g \in F(U)$ und $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$ mit $\text{Min } (\bar{H}(f), \bar{H}(g)) + H(\mathsf{S}) \leqq 0$ gilt $f \otimes g \otimes \mathsf{S} - g \otimes f \otimes \mathsf{S} \in K$.
(CMK′) Für alle $f \in F(U)$ und $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$ mit $\bar{H}(f) + H(\mathsf{S}) \leqq 0$ gilt $f \otimes \mathsf{S} - \mathsf{S} \otimes f \in K$.

Es ist nach dem bisher Gesagten übrigens nicht ganz selbstverständlich, daß die Eigenschaften (*CMK*), (*CMK′*) für einen *einzelnen* produktiven Teilraum K einer Tensoralgebra $\mathsf{E}(U)$ äquivalent sind. Sie sind es

aber deshalb, weil wir bei dem in § 4, Abschnitt 5 gegebenen Äquivalenzbeweis von der *lokalen Struktur* des charakteristischen Systems einer Multiplikationstheorie keinen Gebrauch gemacht haben.

Es sei K ein produktiver Teilraum von $\mathsf{E}(U)$. Der Quotientenraum $L = \mathsf{E}(U)/K$ enthält dann den Vektorraum $E(U)$ der Distributionen endlicher Ordnung über U als Teilraum. Weiter sind auf L erklärt: Eine lineare Abbildung in sich, wieder *Differentiation* genannt, die auf $E(U)$ mit der distributionentheoretischen Differentiation übereinstimmt, und eine bilineare Abbildung von $E(U) \times L$ in L, wieder *Multiplikation* genannt, die auf $F(U) \times F(U)$ mit der gewöhnlichen Multiplikation übereinstimmt und mit der Differentiation durch die Produktregel

$$(5.1) \qquad (Sa)' = S'a + Sa', \qquad S \in E(U),\ a \in L$$

verknüpft ist.

Es gelten wieder die Leibnizschen Regeln (4.11) bis (4.13). Das Produkt zweier Distributionen $S, T \in E(U)$ mit $\bar{H}(S) + \bar{H}(T) \leqq 0$ ist daher eine Distribution $ST = TS \in E(U)$, und wir haben die Assoziativregel $fgS = (fg)S$ für alle $f, g \in F(U)$, $S \in E(U)$ mit $\operatorname{Max}(\bar{H}(f), \bar{H}(g)) + H(S) \leqq 0$ sowie die Gleichheit $1S = S$ für alle $S \in E(U)$.

Desgleichen ist auf L wieder eine *Stufen-Ordnungsstruktur* erklärt, nämlich durch $\tilde{G}(a) = \operatorname{Min} G(\mathsf{S})$ und $\tilde{H}(a) = \operatorname{Min} H(\mathsf{S})$, wobei $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$ alle Repräsentanten von $a \in L$ durchläuft, sowie durch das wie üblich erklärte $\bar{\tilde{H}}(a)$. Es gelten die Analoga zu (4.6) bis (4.8), insbesondere also für jedes $S \in E(U)$ und $a \in L$

$$(5.2) \qquad \tilde{G}(Sa) \leqq \tilde{G}(a) + 1, \qquad \tilde{H}(Sa) \leqq H(S) + \tilde{H}(a),$$

$$(5.3) \qquad \tilde{G}(a') \leqq \tilde{G}(a),\ \tilde{H}(a) \geqq \operatorname{Max}(0, \tilde{H}(a') - 1), \qquad \bar{\tilde{H}}(a') \leqq \bar{\tilde{H}}(a) + 1.$$

Die Teilräume L_n, L^m, L_n^m von L für $n = 1, 2, \ldots$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ werden wie früher erklärt; insbesondere ist $L_1 = E(U)$ und $L^0 = L_n^0 = F(U)$.

Wieder können wir für eine beliebige Distribution $S \in E(U)$ allgemein nur $\tilde{H}(S) \leqq H(S)$ aussagen und müssen die Gleichheit beider Ordnungen postulieren in der *Regularitätsforderung*

(r_0) Für jedes $S \in E(U)$ gilt $\tilde{H}(S) = H(S)$ (damit auch $\bar{\tilde{H}}(S) = \bar{H}(S)$)

Stärker ist die *Regularitätsforderung*

(r_1) Für jedes $a \in L$ gilt in *allen* Ungleichungen (5.3) das Gleichheitszeichen.

Ist schließlich K ein streng produktiver Teilraum von $\mathsf{E}(U)$, so gelten in L wieder die Kommutativitätsrelationen

$$(5.4) \qquad fga = gfa \qquad \text{für } \operatorname{Min}(\bar{H}(f), \bar{H}(g)) + \tilde{H}(a) \leqq 0$$

$$(5.5) \qquad fS_1 \ldots S_r = S_1 \ldots S_r f \qquad \text{für } \bar{H}(f) + \sum_{j=1}^{r} H(S_j) \leqq 0,$$

einschließlich der früher angezeigten Konsequenzen

$$(5.6) \qquad fga = (fg)a \qquad \text{für } \operatorname{Max}(\bar{H}(f), \bar{H}(g)) + \tilde{H}(a) \leqq 0$$

$$(5.7) \qquad \tilde{G}(Sa) \leqq \tilde{G}(a) \qquad \text{für } \bar{H}(S) + \bar{\tilde{H}}(a) \leqq 0,$$

mit $f, g \in F(U)$, $S_1, \ldots, S_r \in E(U)$, $a \in L$.

Zum Abschluß beweisen wir noch einen Satz über die starke Regularitätsforderung (r_1), der es uns ermöglichen wird, diese Forderung in den im folgenden Paragraphen auftretenden Fällen verhältnismäßig einfach zu verifizieren. Es handelt sich um die folgende

Proposition 1: Es sei K ein produktiver Teilraum von $\mathsf{E}(U)$. Der Quotientenraum $L = \mathsf{E}(U)/K$ erfüllt sicher dann die Regularitätsforderung (r_1), wenn er die folgende Eigenschaft besitzt:

(r_2) Es sei $a \in L$ mit $\tilde{H}(a) > 0$, und die Ableitung a' von a sei in der Form

$$a' = b_1 + c_1 \quad \text{mit } \tilde{G}(b_1) < \tilde{G}(a),\ \tilde{H}(c_1) \leqq \tilde{H}(a) \tag{5.8}$$

darstellbar. Dann ist a darstellbar in der Form

$$a = b + c \quad \text{mit } \tilde{G}(b) < \tilde{G}(a),\ \tilde{H}(c) < \tilde{H}(a). \tag{5.9}$$

Beweis: Wir beweisen zunächst, durch vollständige Induktion nach $\tilde{H}(a)$, daß aus (r_2) für jedes $a \in L$ die Gleichung $\tilde{G}(a') = \tilde{G}(a)$ folgt. Für $\tilde{H}(a) = 0$, also $a \in F(U)$, ist das klar; wir machen also die Induktionsvoraussetzung, daß die Behauptung für alle $c \in L$ mit $\tilde{H}(c) \leqq m$, $m \geqq 0$, gilt, und nehmen $\tilde{H}(a) = m + 1$ an. Für $\tilde{G}(a) = 1$ ist dann nichts zu beweisen, es sei also $\tilde{G}(a) = n + 1$ mit $n \geqq 1$. Wäre nun $\tilde{G}(a') < \tilde{G}(a)$, d. h. $\tilde{G}(a') \leqq n$, so wäre (5.8) mit $b_1 = a'$, $c_1 = 0$ erfüllt. Aus (r_2) folgte also eine Darstellung $a = b + c$ mit $\tilde{G}(b) \leqq n$ und mit $\tilde{H}(c) \leqq m$, folglich mit $\tilde{G}(c) = \tilde{G}(a) = n + 1$. Alsdann hätte man

$$\tilde{G}(c') \leqq \operatorname{Max}\left(\tilde{G}(a'), \tilde{G}(b')\right) \leqq n < n + 1 = \tilde{G}(c),$$

wegen $\tilde{H}(c) \leqq m$ also einen Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Es genügt weiterhin, die Gültigkeit der zweiten Gleichung (5.3) nachzuweisen. Für $\tilde{H}(a') = 0$ ist nach dem eben Bewiesenen $\tilde{G}(a) = \tilde{G}(a') = 1$, also $a \in F^1(U)$ und folglich $\tilde{H}(a) = 0$. Wir haben also nur noch unter der Voraussetzung $\tilde{H}(a') = m + 1$ mit $m \geqq 0$ zu zeigen, daß in der Ungleichung $\tilde{H}(a) \geqq \tilde{H}(a') - 1 = m$ stets das Gleichheitszeichen gilt. Dies geschieht durch vollständige Induktion nach $\tilde{G}(a)$. Ist zunächst $\tilde{G}(a) = 1$, so folgt die behauptete Gleichheit unmittelbar aus (r_2). Wir machen also die Induktionsvoraussetzung, daß die Behauptung für alle $b \in L$ mit $\tilde{G}(b) \leqq n$, $n \geqq 1$ gilt, und nehmen $\tilde{G}(a) = n + 1$ an. Dann ist notwendig $\tilde{H}(a) > 0$. Wäre nun $\tilde{H}(a') \leqq \tilde{H}(a)$, so wäre (5.8) mit $b_1 = 0$, $c_1 = a'$ erfüllt. Aus (r_2) folgte also eine Darstellung $a = b + c$ mit $\tilde{G}(b) \leqq n$ und $\tilde{H}(c) < \tilde{H}(a)$, folglich mit $\tilde{H}(b) = \tilde{H}(a)$ und mit $\tilde{H}(c') \leqq \tilde{H}(a)$. Dann hätte man aber

$$\tilde{H}(b') \leqq \operatorname{Max}\left(\tilde{H}(a'), \tilde{H}(c')\right) \leqq \tilde{H}(a) = \tilde{H}(b),$$

und das wäre wegen $\tilde{G}(b) \leqq n$ ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. Damit ist Prop. 1 vollständig bewiesen.

2. Der Begriff der Basis einer Multiplikationstheorie

Es sei $K = (K(U, x))$ ein System von Teilräumen $K(U, x)$ der Tensoralgebren $\mathsf{E}(U)$ für $x \in U \in \Omega$. Nach § 1, Abschnitt 4 ist der von K erzeugte *separierende* Teilraum $K^{\S}$ von E wie folgt erklärt: Für jedes $U \in \Omega$ besteht $K^{\S}(U)$ aus allen denjenigen $S \in \mathsf{E}(U)$, für die zu jedem $x \in U$ eine in U enthaltene offene Umgebung U_x existiert mit der Eigenschaft, daß

die Restriktion von S auf jedes $V \in \Omega$ mit $x \in V \subset U_x$ in $K(V, x)$ enthalten ist. Ist K insbesondere ein *Teilraum* von E, also ein lokal strukturiertes System von Teilräumen $K(U)$, unabhängig von x, so ist K in $K^{\S}$ enthalten, und beide stimmen genau dann überein, wenn K selbst separierend ist.

Proposition 2: Es sei K ein System von produktiven Teilräumen $K(U, x)$ von $\mathsf{E}(U)$ für $x \in U \in \Omega$. Dann besteht auch der von K erzeugte separierende Teilraum $K^{\S}$ von E aus produktiven Teilräumen $K^{\S}(U)$ von $\mathsf{E}(U)$. Sind alle $K(U, x)$ streng produktiv, so auch alle $K^{\S}(U)$.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus den Definitionen und der Eigenschaft (L_1) von E.

Wir geben die folgende

Definition 2: Es sei P eine Multiplikationstheorie. Ein System K von produktiven Teilräumen $K(U, x)$ von $\mathsf{E}(U)$ für $x \in U \in \Omega$ heißt eine *Basis* von P, wenn der von K erzeugte separierende Teilraum $K^{\S}$ von E mit dem charakteristischen System C_P von P übereinstimmt. Sind alle $K(U, x)$ streng produktiv (und folglich P eine strenge Multiplikationstheorie), so heißt K eine *strenge Basis* von P.

Eine Basis K von P heißt eine *eigentliche Basis* von P, wenn $K(U, x)$ für jedes $x \in U \in \Omega$ in $K^{\S}(U) = C_P(U)$ enthalten ist.

Eine Basis K von P ist insbesondere sicher dann eigentlich, wenn K ein *Teilraum* von E ist.

So ist z. B. die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} C_{P_i}$ der charakteristischen Systeme C_{P_i} einer total geordneten Familie $(P_i)_{i \in I}$ von Multiplikationstheorien P_i eine Basis der unteren Grenze $\bigcap_{i \in I} P_i$ der P_i. Die Existenz dieser unteren Grenze ist daher im Grunde ein Spezialfall unserer jetzigen Prop. 2.

Durch Prop. 2 wird die lokale Struktur in der Tat gewissermaßen aus dem Problem der Existenz von Multiplikationstheorien eliminiert: Die Existenz der maximalen Multiplikationstheorie P ist damit gleichbedeutend, daß das von allen Elementen $f \otimes g - fg \in \mathsf{E}(U)$ mit $f, g \in F(U)$ in $\mathsf{E}(U)$ erzeugte, gegen die Differentiation abgeschlossene Linksideal $K(U)$ die Eigenschaft (CM_3) besitzt, d. h. keine von Null verschiedene Distribution $S \in E(U)$ enthält. Ebenso ist die Existenz der maximalen strengen Multiplikationstheorie $\overset{\circ}{P}$ gleichbedeutend damit, daß das von allen Elementen $f \otimes g - fg \in \mathsf{E}(U)$ mit $f, g \in F(U)$ und allen Elementen $f \otimes \mathsf{S} - \mathsf{S} \otimes f \in \mathsf{E}(U)$ mit $f \in F(U)$, $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(U)$, $\bar{H}(f) + H(\mathsf{S}) \leqq 0$ in $\mathsf{E}(U)$ erzeugte, gegen die Differentiation abgeschlossene Linksideal $\overset{\circ}{K}(U)$ keine von Null verschiedene Distribution $S \in E(U)$ enthält.

Dasselbe gilt für die Existenz von Multiplikationstheorien mit anderen, speziellen Eigenschaften. Dabei wird es sich später als außerordentlich nützlich erweisen, daß wir bei der Definition einer Basis von vornherein eine zusätzliche Abhängigkeit des Teilraumes $K(U, x)$ von $x \in U$ zugelassen haben. Wir werden viele wichtige Multiplikationstheorien durch Basen dieser Art definieren.

Proposition 3: Es sei P eine Multiplikationstheorie und K eine Basis von P. Erfüllt der Quotientenraum $L(U, x) = \mathsf{E}(U)/K(U, x)$ für jedes $x \in U \in \Omega$ die Regularitätsforderung (r_0), so erfüllt P die Regularitätsforderung (R_0).

Zum Beweise zeigen wir allgemeiner folgendes: Zu jedem $x \in U \in \Omega$ und jedem $S \in D(U)$ gibt es eine beliebig klein wählbare, in U enthaltene offene Umgebung V von x

mit der Eigenschaft, daß die im Quotientenraum $L(V, x)$ gebildete Ordnung $\tilde{H}(S_V)$ der Restriktion S_V von S auf V der Ungleichung $\tilde{H}(S_V) \leqq H'_x(S)$ genügt. – Es ist evident, daß Prop. 3 hieraus folgt.

Hierzu sei W eine in U enthaltene offene Umgebung von x mit der Eigenschaft, daß S_W in $E(W)$ enthalten ist und $H'(S_W) = H'_x(S)$ gilt. Es sei weiter $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(W)$ ein Repräsentant von S_W mit $H(\mathsf{S}) = H'(S_W)$. Nach der Definition einer Basis gibt es eine in W enthaltene offene Umgebung V von x, so daß $\mathsf{S}_V - S_V \in K(V, x)$ gilt. Dann ist notwendig $\tilde{H}(S_V) \leqq H(\mathsf{S}_V) = H(\mathsf{S}) = H'_x(S)$, wie behauptet wurde.

Proposition 4: Es sei P eine Multiplikationstheorie und K eine *eigentliche* Basis von P. Erfüllt der Quotientenraum $L(U, x)$ für jedes $x \in U \in \Omega$ die Regularitätsforderung (r_1), so erfüllt P die Regularitätsforderung (R_1).

Beweis: Es sei $x \in U \in \Omega$ und $A \in P(U)$. Wir wählen eine in U enthaltene offene Umgebung W von x mit der Eigenschaft, das A_W in $Q(W)$ enthalten ist und die Gleichungen $G(A_W) = G_x(A)$, $G(A'_W) = G_x(A')$ gelten. Es sei weiter $\mathsf{S} \in \mathsf{E}(W)$ ein Repräsentant von A_W mit $G(\mathsf{S}) = G(A_W)$ und $\mathsf{T} \in \mathsf{E}(W)$ ein Repräsentant von A'_W mit $G(\mathsf{T}) = G(A'_W)$. Nach der Definition einer Basis gibt es eine in W enthaltene offene Umgebung V von x, so daß $\mathsf{S}'_V - \mathsf{T}_V \in K(V, x)$ gilt. Dann haben wir zunächst wieder $G(\mathsf{S}_V) = G(\mathsf{S}) = G_x(A)$ und $G(\mathsf{T}_V) = G(\mathsf{T}) = G_x(A')$. Da K nun eine eigentliche Basis von P ist, gilt für das durch S_V definierte Element $a \in L(V, x)$ nicht nur $\tilde{G}(a) \leqq G(\mathsf{S}_V)$ und $\tilde{G}(a') \leqq G(\mathsf{T}_V)$, sondern sogar jedesmal die Gleichheit. Aus $\tilde{G}(a') = \tilde{G}(a)$ folgt mithin $G_x(A') = G_x(A)$. – Der Beweis der zweiten Gleichung (4.9) verläuft ganz entsprechend.

Alle diese Sätze zeigen in charakteristischer Weise, wie man von der Struktur einer Basis K, der Teilräume $K(U, x)$ und der Quotientenräume $L(U, x)$, auf die Struktur der von ihr erzeugten Multiplikationstheorie P schließen kann. Die Untersuchung einer solchen Basis K bedeutet andererseits nichts anderes als die Untersuchung von *einzelnen*, durch keine lokale Struktur miteinander verknüpften produktiven Teilräumen von $\mathsf{E}(U)$ und von deren Quotientenräumen. Wir sind daher in der Tat berechtigt, wie wir es zu Beginn dieses Paragraphen angekündigt haben, die grundlegenden Existenz- und Regularitätsprobleme der Multiplikationstheorie zunächst unabhängig von ihrer lokalen Struktur anzugreifen.

§ 6. DER EXISTENZSATZ

Nach den Ausführungen der vorangehenden Paragraphen stehen wir jetzt vor der entscheidenden Frage nach der Existenz und der Mannigfaltigkeit von produktiven und streng produktiven Teilräumen der Tensoralgebra $\mathsf{E}(U)$. Diese Frage werden wir im vorliegenden Paragraphen weitgehend beantworten. Wir werden einen allgemeinen Existenzsatz beweisen, aus dem wir im folgenden Paragraphen eine große Zahl von wichtigen strengen Multiplikationstheorien gewinnen werden.

Die Existenz produktiver Teilräume der Tensoralgebra $\mathsf{E}(U)$ ließe sich an und für sich verhältnismäßig schnell beweisen. Wir greifen das Problem jedoch sogleich für die streng produktiven Teilräume an. Hierzu sind umfangreiche Hilfsbetrachtungen notwendig.

Zur Erleichterung der Lektüre stellen wir die in diesem Paragraphen gewonnenen Hauptergebnisse zu Beginn des folgenden noch einmal vollständig zusammen. Der an den Beweismethoden weniger interessierte Leser kann diesen Paragraphen daher ohne Beeinträchtigung des Verständnisses der ganzen Arbeit überschlagen.

In diesem ganzen Paragraphen sei $U \in \Omega$ eine beliebige, aber stets fest bleibende offene Punktmenge. Statt $F(U)$, $E(U)$, ... schreiben wir kurz nur F, E, ... (ohne daß eine Verwechslung mit den hier nicht auftretenden gleichnamigen Systemen zu befürchten ist).

1. Hilfsbetrachtungen

Wir rekapitulieren in diesem Abschnitt kurz einige in [5] eingeführte Hilfsbegriffe und abgeleitete Hilfssätze, die wir auch im folgenden benötigen werden. Auf die Beweise, die sich durchweg durch einfache Betrachtungen ergeben, gehen wir nicht noch einmal ein.

1. *Das Zerlegungslemma in Tensorprodukten.* Es seien $A^1, \ldots, A^p$ Teilräume eines linearen Vektorraumes A, ferner $k_1, \ldots, k_p$ ganze positive Zahlen mit $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_p \leqq n$, schließlich $\mathfrak{a}^1, \ldots, \mathfrak{a}^p$ Elemente des n-fachen Tensorproduktes A_n von A mit

$$\sum_{j=1}^{p} \mathfrak{a}^j = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}^j \in A_{k_j-1} \otimes A^j \otimes A_{n-k_j}, \qquad j = 1, \ldots, p.$$

Dann sind die $\mathfrak{a}^j$ darstellbar in der Form

$$\mathfrak{a}^j = \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{a}^{j,i}$$

mit $\mathfrak{a}^{j,i} + \mathfrak{a}^{i,j} = 0$ und mit

$$\mathfrak{a}^{i,j} \in A_{k_i-1} \otimes A^i \otimes A_{k_j-k_i-1} \otimes A^j \otimes A_{n-k_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, p.$$

2. *Hilfsbetrachtungen über Polynomialkoeffizienten.* Wir fassen n ganze Zahlen $p_1, \ldots, p_n \geqq 0$ zu einem n-Tupel $p = (p_1, \ldots, p_n)$ zusammen und setzen $|p| = p_1 + \cdots + p_n$ sowie $p^j = (p_1, \ldots, p_{j-1}, 0, p_{j+1}, \ldots, p_n)$ und $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ mit einer an j-ter Stelle stehenden 1. Alle n-Tupel p mit festem $|p| = m$ werden lexikographisch geordnet, indem p genau dann q vorangeht, wenn die erste der von Null verschiedenen Differenzen $p_j - q_j$ positiv ist. Wir werden häufig n durch $n+1$ ersetzen; dann soll $p' = p^{n+1}$ bedeuten.

Für jedes n-Tupel p sei

$$J_p = \frac{|p|!}{p_1! \ldots p_n!}.$$

Diese sog. Polynomialkoeffizienten, bekanntlich ganze Zahlen, genügen für $p \neq 0$ dem Additionstheorem

$$J_p = \sum_{j=1}^{n} J_{p-e_j}. \tag{6.1}$$

Hierin ist natürlich (wie immer im folgenden, wenn analoge Verhältnisse vorliegen) nur über diejenigen j zu summieren, für die $p_j \neq 0$ ist.

Für alle $(n+1)$-Tupel p, q mit gleichem $|p| = |q| = m$ sei weiter

$$\bar{J}_{p,q} = (-1)^{|p'-q'|} J_{p-q'}. \tag{6.2}$$

Ordnet man alle diese p, q lexikographisch, so sind $(J_{p-q'})$, $(\bar{J}_{p,q})$ quadratische Matrizen in Halbdiagonalgestalt, mit Determinanten 1 und zueinander invers:

$$\sum_r \bar{J}_{p,r} J_{r-q'} = \sum_r J_{p-r'} \bar{J}_{r,q} = \delta_{p,q}. \tag{6.3}$$

Es sei A ein linearer Vektorraum, und jedem n-Tupel p mit $|p| = m$, m fest $\geqq 1$, sei ein Element $a_p \in A$ zugeordnet. Es sei ferner k eine beliebige ganze Zahl mit $1 \leqq k \leqq n$. Dann kann man genau dann jedem n-Tupel r mit $|r| = m - 1$ ein Element $b_r \in A$ so zuordnen, daß für alle p mit $|p| = m$

$$a_p = \sum_{j=1}^{n} b_{p-e_j} \tag{6.4}$$

gilt, wenn für alle diese p mit $p_k = 0$ die Relation

$$a_p = \sum_{\substack{r \\ |r| = m-1}} (-1)^{r_k} J_{p-r^k} a_{r+e_k} \tag{6.5}$$

besteht. In diesem Falle sind die b_r eindeutig bestimmt und werden gegeben durch

$$b_r = \sum_{\substack{q \\ |q| = m-1}} (-1)^{q_k - r_k} J_{(r-q)^k} a_{q+e_k}. \tag{6.6}$$

Ein analoger Satz: Jedem $(n+1)$-Tupel p mit $|p| = m$, m fest $\geqq 1$, sei ein Element $a_p \in A$ zugeordnet, und k eine beliebige ganze Zahl mit $1 \leqq k \leqq n$. Dann kann man genau dann jedem $(n+1)$-Tupel r mit $|r| = m - 1$ ein Element $b_r \in A$ so zuordnen, daß für alle p mit $|p| = m$

$$a_p = \sum_{j=1}^{n} b_{p-e_j} - b_{p-e_{n+1}} \tag{6.7}$$

gilt, wenn für alle diese p mit $p_k = 0$ die Relation

$$a_p = \sum_{\substack{r \\ |r| = m-1}} (-1)^{r_k + r_{n+1} - p_{n+1}} J_{p-r^k} a_{r+e_k} \tag{6.8}$$

besteht. In diesem Falle sind die b_r eindeutig bestimmt und werden gegeben durch

$$b_r = \sum_{\substack{q \\ |q| = m-1}} (-1)^{q_k - r_k + q_{n+1} - r_{n+1}} J_{(r-q)^k} a_{q+e_k}. \tag{6.9}$$

3. *Die Tensorprodukte F_n und M_n.* Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ sei F_n das n-fache Tensorprodukt des Funktionenraumes F, für jedes n-Tupel p ferner $F_n^p = F^{p_1} \otimes \ldots \otimes F^{p_n}$. Das durch Differentiation aller j-ten Faktoren aus $f \in F_n^{p+e_j}$ entstehende Element von F_n^p bezeichnen wir mit $(f)_j'$. Für jedes $(n+1)$-Tupel p und jedes $j = 1, \ldots, n+1$ sei schließlich

$$F_{n+1}^{p;j} = \begin{cases} F_{j-1} \otimes F^{p_{j+1} + \cdots + p_n} \otimes F_{n+1-j} & \text{für } j \neq n+1, p_j = 0, \\ F_{n+1}^{e_j} & \begin{cases} \text{für } j \neq n+1, p_j \neq 0 \\ \text{und für } j = n+1. \end{cases} \end{cases} \tag{6.10}$$

Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ sei weiter M_n das n-fache Tensorprodukt des Raumes M der Polynome $s = \sum_{k=0}^{m} f_k z^k$ mit Koeffizienten $f_k \in F$, also der Vektorraum der Polynome

$$\mathsf{s} = \sum_{p_1, \ldots, p_n} \mathsf{f}_{p_1, \ldots, p_n} z_1^{p_1} \ldots z_n^{p_n} = \sum_p \mathsf{f}_p \mathsf{z}^p \tag{6.11}$$

mit Koeffizienten $\mathsf{f}_p \in F_n$. Wieder werden wir oft n durch $n+1$ ersetzen und die Elemente von M_{n+1} dann als Polynome in $Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n$, $Z_{n+1} = z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}$ schreiben:

$$\mathsf{s} = \sum_{q_1, \ldots, q_{n+1}} \mathsf{f}^{q_1, \ldots, q_{n+1}} Z_1^{q_1} \ldots Z_{n+1}^{q_{n+1}} = \sum_q \mathsf{f}^q Z^q \tag{6.12}$$

mit $\mathsf{f}^q \in F_{n+1}$. Dabei berechnen sich die f_p, f^q für alle $(n+1)$-Tupel p, q mit gleichem $|p| = |q| = m$ auseinander durch

$$\mathsf{f}_p = \sum_q J_{p-q'} \mathsf{f}^q, \quad \mathsf{f}^q = \sum_p \bar{J}_{q,p} \mathsf{f}_p. \tag{6.13}$$

Wir setzen weiter die auf M definierte formale Differentiation, analog zu (4.2), zu einer linearen und der Produktregel genügenden Abbildung von M_n in sich, wieder *Differentiation* genannt, fort. Die Ableitung s' des Elementes (6.11), (6.12) wird dann durch

$$\mathsf{s}' = \sum_p \left(\sum_j \mathsf{f}_{p-e_j} \right) \mathsf{z}^p = \sum_q \mathsf{f}^{q-e_{n+1}} Z^q \tag{6.14}$$

gegeben. Schließlich definieren wir, analog zu § 4, Abschnitt 3, die *Ordnung* $H(\mathsf{s})$ von $\mathsf{s} \in M_n$. $H(\mathsf{s})$ ist natürlich nichts anderes als der Grad der Polynome (6.11), (6.12), und es gilt wieder (3.4).

Die charakteristische Abbildung u von M auf den Raum E der Distributionen endlicher Ordnung läßt sich in natürlicher Weise zu einer linearen, mit der Differentiation und der Multiplikation vertauschbaren Abbildung u_n von M_n auf E_n fortsetzen. Für jedes $\mathsf{S} \in E_n$ gilt offenbar $H(\mathsf{S}) = \operatorname{Min} H(\mathsf{s})$, wobei $\mathsf{s} \in M_n$ alle Repräsentanten von S durchläuft.

Der Kern $(M, N)_n$ der Abbildung u_n besteht bekanntlich aus allen endlichen Summen von Produkten $s_1 \otimes \cdots \otimes s_n \in M_n$ mit der Eigenschaft, daß mindestens eines der $s_j \in M$ in N enthalten ist.

Die Koeffizienten f_p der Darstellung (6.11) eines Elementes $\mathsf{s} \in (M, N)_n$ sind von der Form

$$\mathsf{f}_p = \sum_j (\mathsf{g}_{p;j})'_j - \sum_j \mathsf{g}_{p-e_j;j}, \qquad \mathsf{g}_{p;j} \in F_n^{e_j}. \tag{6.15}$$

Nach (6.3), (6.13) sind die Koeffizienten f_q der Darstellung (6.12) eines Elementes $\mathsf{s} \in (M, N)_{n+1}$ daher von der Form

$$\mathsf{f}^q = \sum_j (\mathsf{g}^{q;j})'_j - \sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} \mathsf{g}^{p-e_j;j} + \left(\sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} \mathsf{g}^{q-e_j;n+1} - \mathsf{g}^{q-e_{n+1};n+1} \right), \quad \mathsf{g}^{q;j} \in F_{n+1}^{e_j}. \tag{6.16}$$

Nach 2. ist damit gleichbedeutend die Form

$$(6.17)\qquad f^q = \dot{h}^q + \sum_{\substack{j \\ q_j \neq 0 \text{ für} \\ j \neq n+1}} h^{q;j}, \qquad h^{q;j} \in F^{e_j}_{n+1};$$

dabei erfüllen die $h^{q;n+1}$ für alle q mit festem $|q| = m$ die Gleichung (6.8), und nach (6.9) (etwa für $k = n$) gilt für $|q| = m$

$$(6.18)\qquad \dot{h}^q = -\sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} (h^{q+e_j;j})'_j + \sum_{\substack{p \\ |p| = m}} (-1)^{p_n - q_n + p_{n+1} - q_{n+1}} J_{(p-q)^n} (h^{p+e_n;n+1})'_{n+1}.$$

Besitzt $s \in (M, N)_n$ die Ordnung $H(s) = m$, so sind seine Koeffizienten f_p in der Weise in der Form (6.15) darstellbar, daß alle $g_{p;j}$ mit $|p| \geqq m$ einzeln verschwinden. Analoges gilt für die Darstellungen (6.16), (6.17).

Schärfer gilt sogar folgendes, etwa für die Darstellung (6.16): Aus

$$(6.19)\qquad -\sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} g^{q-e_j;j} + \left(\sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} g^{q-e_j;n+1} - g^{q-e_{n+1};n+1} \right) = 0, \qquad g^{r;j} \in F^{e_j}_{n+1}$$

für alle q mit $|q| = m$ und alle r mit $|r| = m - 1$ folgt

$$(6.20)\qquad \sum (g^{r;j})'_j = -\sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} \tilde{g}^{r-e_j;j} + \left(\sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} \tilde{g}^{r-e_j;n+1} - \tilde{g}^{r-e_{n+1};n+1} \right),$$

$$(6.21)\qquad \sum_j (\tilde{g}^{p;j})'_j = 0 \qquad \tilde{g}^{p;j} \in F^{e_j}_{n+1}$$

für alle r mit $|r| = m-1$ und (falls $m \geqq 2$) für alle p mit $|p| = m-2$. – Es ist klar, wie sich diese Tatsache auf die Darstellung (6.17) überträgt; wir kommen sogleich darauf zurück.

2. Fortsetzung der Hilfsbetrachtungen

Es sei jedem $(n+1)$-Tupel p mit festem $|p| = m$ und jedem $j = 1, \ldots, n+1$ ein Element $h^{p;j} \in F^{p;j}_{n+1}$ zugeordnet, außerdem seien die $h^{p;n+1}$ durch die Gleichungen (6.8) miteinander verknüpft. Wir nennen $(h^{p;j})$ dann kurz ein (zu n, m gehöriges) *Hauptsystem*. Insbesondere heißt $(h^{p;j})$ ein *spezielles* Hauptsystem, wenn für $j \neq n+1$, $p_j = 0$ stets $h^{p;j} = 0$ gilt. Ist $m \geqq 1$, so bezeichnen wir als *Rückbild* eines Hauptsystems $(h^{p;j})$ die Gesamtheit $(\dot{h}^r)$ der allen $(n+1)$-Tupeln r mit $|r| = m-1$ nach (6.18) zugeordneten Elemente

$$(6.22)\qquad \dot{h}^r = -\sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} (h^{r+e_j;j})'_j + \sum_{\substack{q \\ |q| = m-1}} (-1)^{q_n - r_n + q_{n+1} - r_{n+1}} J_{(r-q)^n} (h^{q+e_n;n+1})'_{n+1}.$$

Schließlich nennen wir ein Hauptsystem $(h^{p;j})$ *trivial*, wenn sein Rückbild Null ist: $\dot{h}^r = 0$ für alle r mit $|r| = m-1$.

Mit diesen Bezeichnungen können wir den letzten Satz des vorangehenden Abschnittes folgendermaßen formulieren: Es sei $(h^{p;j})$ ein zu n, m gehöriges spezielles Hauptsystem,

und für jedes p sei $\sum_j h^{p;j} = 0$. Dann wird das Rückbild $(\dot{h}^r)$ von $(h^{p;j})$ durch ein triviales, zu n, $m-1$ gehöriges spezielles Hauptsystem $(\tilde{h}^{r;j})$ dargestellt: $\dot{h}^r = \sum_j \tilde{h}^{r;j}$ für alle r.

Diese Tatsache, eine einfache Folgerung aus dem Zerlegungslemma aus Abschnitt 1, 1), beweisen wir jetzt auch für beliebige Hauptsysteme:

Proposition 1: Es sei $m \geqq 2$ und $(h^{p;j})$ ein zu n, m gehöriges Hauptsystem mit

$$\sum_j h^{p;j} = 0 \tag{6.23}$$

für jedes p. Dann gibt es ein zu n, $m-1$ gehöriges triviales Hauptsystem $(\tilde{h}^{r;j})$, welches das Rückbild $(\dot{h}^r)$ von $(h^{p;j})$ darstellt:

$$\dot{h}^r = \sum_j \tilde{h}^{r;j} \tag{6.24}$$

für jedes r.

Beweis: Wir wenden zunächst auf die Gleichungen (6.23) für alle p mit $p_n \neq 0$ das Zerlegungslemma an. Dann folgt für diese p

$$h^{p;j} = \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} h^{p;j,i}, \quad h^{p;j,i} + h^{p;i,j} = 0 \tag{6.25}$$

mit

$$h^{p;i,j} \in F_{n+1}^{p;i} \cap F_{n+1}^{p;j} = F_{n+1}^{p;i,j}. \tag{6.26}$$

Für jedes p mit $p_n = 0$ und jedes $j \neq n+1$ setzen wir weiter

$$h^{p;n+1,j} = \sum_{\substack{r \\ |r| = m-1}} (-1)^{r_n + r_{n+1} - p_{n+1}} J_{p-r^n} h^{r+e_n;n+1,j}, \tag{6.27}$$

$$h^{p;j,n+1} = -h^{p;n+1,j}. \tag{6.28}$$

Für diese p ist dann auf Grund von (6.25)

$$h^{p;n+1} = \sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} h^{p;n+1,j}, \tag{6.29}$$

und wir überlegen schnell, daß wieder $h^{p;n+1,j} \in F_{n+1}^{p;n+1,j}$ gilt: Für $j = n$ ist das wegen $F_{n+1}^{p;n} = F_{n+1}$ klar; für $j \neq n$ kommen in der rechten Summe (6.27) nur solche r vor, für die $p_1 + \cdots + p_j + p_{n+1} \geqq r_1 + \cdots + r_j + r_{n+1}$, also $r_{j+1} + \cdots + r_n + 1 \geqq$ $\geqq p_{j+1} + \cdots + p_n$ und folglich $F_{n+1}^{r+e_n;j} \subset F_{n+1}^{p;j}$ gilt. – Weiter setzen wir für $p_n = 0$ für alle $j \neq n, n+1$

$$h^{p;j,n} = h^{p;j} - h^{p;j,n+1}, \qquad h^{p;n,j} = -h^{p;j,n}, \tag{6.30}$$

schließlich $h^{p;i,j} = 0$ für alle $i \neq j$ mit $i, j \neq n, n+1$. Damit haben wir, wie man sofort nachrechnet, die Zerlegung (6.25), (6.26) auch auf alle $h^{p;j}$ mit $p_n = 0$ ausgedehnt, und

zwar in der Weise, daß die Gleichungen (6.8) nicht nur (voraussetzungsgemäß) für die $h^{p;\,n+1}$, sondern auch für die $h^{p;\,n+1,j}$ bei beliegigem $j \neq n+1$ gelten.

Es gilt daher bei beliebigen j, $k \neq n+1$ für alle p mit $p_k = 0$

$$h^{p;\,n+1,j} = \sum_{\substack{r \\ |r|=m-1}} (-1)^{r_k+r_{n+1}-p_{n+1}} J_{p-r^k}\, h^{r+e_k;\,n+1,j}. \tag{6.31}$$

Hierin nehmen wir speziell $j \neq k$ (dann muß natürlich $n \geqq 2$ sein) und $p_j = 0$ an; dann treten auch auf der rechten Seite nur Glieder $h^{r+e_k;\,n+1,j}$ mit $(r+e_k)_j = 0$ auf. Wenden wir also unser Resultat aus Abschnitt 1, 2) auf die Gesamtheit aller p mit $p_j = 0$ an, so folgt die Darstellbarkeit aller dieser $h^{p;\,n+1,j}$ in der Form

$$h^{p;\,n+1,j} = \sum_{\substack{i \\ i \neq j,\, n+1}} g^{p-e_i;\,j} - g^{p-e_{n+1};\,j}, \qquad p_j = 0. \tag{6.32}$$

Und dabei wird, für ein beliebiges $k \neq j$, $n+1$, $g^{r;\,j}$ für $|r| = m-1$ gegeben durch

$$g^{r;\,j} = \sum_{\substack{q \\ q_j=0}} (-1)^{q_k-r_k+q_{n+1}-r_{n+1}} J_{(r-q)^k}\, h^{q+e_k;\,n+1,j}, \qquad r_j = 0. \tag{6.33}$$

Wir setzen noch $g^{r;\,j} = 0$ für $r_j \neq 0$. – Für diese $g^{r;\,j}$ gilt nun

$$g^{r;\,j} \in F_{n+1}^{r+e_n;\,j,\,n+1}. \tag{6.34}$$

Für $j \neq n$ bestätigt man das wie oben, und für $j = n$ folgt es daraus, daß nach (6.27) für alle p (auch für die mit $p_n = 0$) $h^{p;\,n+1,n} \in F_{n+1}^{e_n}$ gilt. Daher gilt insbesondere in jedem Falle $g^{r;\,j} \in F_{n+1}^{e_j}$. Aus (6.32) folgt endlich, wenn wir auch die p mit $p_j \neq 0$ zulassen,

$$\sum_{\substack{i \\ i \neq n+1}} g^{p-e_i;\,j} - g^{p-e_{n+1};\,j} = \begin{cases} h^{p;\,n+1,j} & \text{für } p_j = 0, \\ g^{p-e_j;\,j} & \text{für } p_j = 1, \\ 0 & \text{für } p_j \neq 0, 1. \end{cases} \tag{6.35}$$

Für $n = 1$ sind die bisherigen Überlegungen trivial: Hier ist nämlich $h^{p;\,i,j} = h^{p;\,i}$ und, wenn wir $g^{(m-1)e_2;\,1} = h^{me_2;\,1}$ setzen, gilt wieder (6.32), (6.34), (6.35).

Weiter gilt für die $h^{p;\,n+1}$ selbst

$$h^{p;\,n+1} = \sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} f^{p-e_j} - f^{p-e_{n+1}} \tag{6.36}$$

mit

$$f^r = \sum_{\substack{q \\ |q|=m-1}} (-1)^{q_n-r_n+q_{n+1}-r_{n+1}} J_{(r-q)^n}\, h^{q+e_n;\,n+1}. \tag{6.37}$$

Daraus folgt $f^r \in F_{n+1}^{e_n+1}$, aus (6.22) ferner

$$\dot{h}^r = -\sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} (h^{r+e_j;\,j})'_j + (f^r)'_{n+1}. \tag{6.38}$$

Wir werden diesen Ausdruck in eine andere Form bringen.

Dazu sei für jedes r und $j \neq n+1$

$$f^{r;j} = g^{r;j} + h^{r+e_j;j} + \sum_{\substack{i \\ i \neq j, n+1 \\ r_i = 0}} h^{r+e_j;i,j}, \tag{6.39}$$

ferner

$$f^{r;n+1} = \sum_{\substack{i \\ i \neq n+1}} g^{r;i} - f^r. \tag{6.40}$$

Dann gilt für jedes j offenbar $f^{r;j} \in F^{e_j}_{n+1}$. Weiter folgt aus (6.35), (6.36), (6.39), (6.40)

$$-\sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} f^{p-e_j;j} + \left(\sum_{\substack{j \\ j \neq n+1}} f^{p-e_j;n+1} - f^{p-e_{n+1};n+1} \right) = 0. \tag{6.41}$$

Nach dem zu Anfang dieses Abschnittes Gesagten gibt es also ein zu n, $m-1$ gehöriges triviales, spezielles Hauptsystem $(\tilde{g}^{r;j})$, so daß für jedes r

$$\sum_j (f^{r;j})'_j = \sum_j \tilde{g}^{r;j} \tag{6.42}$$

gilt.

Jetzt ist der Beweis von Prop. 1 schnell erbracht. Durch Einsetzen von (6.39), (6.40), (6.42) in (6.38) folgt

$$\dot{h}^r = -\sum_j \tilde{g}^{r;j} + \sum_{\substack{j \\ j \neq n+1 \\ r_j = 0}} \tilde{f}^{r;j} \tag{6.43}$$

mit

$$\tilde{f}^{r;j} = (g^{r;j})'_j + (g^{r;j})'_{n+1} - \sum_{\substack{i \\ i \neq j, n+1}} (h^{r+e_i;i,j})'_i, \quad j \neq n+1, \quad r_j = 0. \tag{6.44}$$

Auf Grund von (6.26), (6.34) gilt weiter $\tilde{f}^{r;j} \in F^{r;j}_{n+1}$, und schließlich ist nach (6.22) $\dot{\tilde{f}}^q = 0$ für jedes q mit $|q| = m-2$. Damit ist Prop. 1 bewiesen.

Corollar zu Proposition 1: Es sei $(h^{p;j})$ ein zu n, $m \geqq 1$ gehöriges Hauptsystem mit (6.23). Dann gibt es Elemente

$$h^{p;i,j} \in F^{p;i}_{n+1} \cap F^{p;j}_{n+1} = F^{p;i,j}_{n+1}, \quad h^{p;i,j} + h^{p;j,i} = 0 \tag{6.45}$$
$$\text{für } i, j \neq n+1, \quad i \neq j, \quad p_i = p_j = 0$$

mit der Eigenschaft, daß für jedes $j \neq n+1$ das durch

$$h_0^{p;j} = \begin{cases} h^{p;j} - \sum\limits_{\substack{i \\ i \neq j, n+1 \\ p_i = 0}} h^{p;j,i} & \text{für } p_j = 0 \\ 0 & \text{für } p_j \neq 0 \end{cases} \tag{6.46}$$

erklärte System $(h_0^{p;j})$ durch ein *spezielles* zu n, m gehöriges Hauptsystem $(h_0^{p;j,i})$ darstellbar ist:

$$h_0^{p;j} = \sum_i h_0^{p;j,i} \tag{6.47}$$

für jedes p, für dessen Rückbild $(\dot{h}_0^{r;j})$ wieder

$$\dot{h}_0^{r;j} \in F_{n+1}^{r;j} \text{ für } r_j = 0, \quad \dot{h}_0^{r;j} = 0 \text{ für } r_j \neq 0 \tag{6.48}$$

gilt.

Für $n = 1$ ist das evident. Für $n \geqq 2$ hat man mit den in (6.26) gewonnenen $h^{p;i,j} \in \in F_{n+1}^{p;i,j}$ nach (6.35)

$$h_0^{p;j} = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{i \\ i \neq j, n+1 \\ p_i \neq 0}} h^{p;j,i} - \left(\sum\limits_{\substack{i \\ i \neq j, n+1}} g^{p-e_i;j} - g^{p-e_{n+1};j} \right) & \text{für } p_j = 0 \\ g^{p-e_j;j} - \left(\sum\limits_{\substack{i \\ i \neq j, n+1}} g^{p-e_i;j} - g^{p-e_{n+1};j} \right) & \text{für } p_j \neq 0 \end{cases}$$

und damit die behauptete Darstellung (6.47). Nach (6.22) gilt für $r_j \neq 0$ sicher $\dot{h}_0^{r;j} = 0$, für $r_j = 0$ weiter

$$\dot{h}_0^{r;j} = - \sum_{\substack{i \\ i \neq j, n+1}} (h^{r+e_i;j,i})_i' - (g^{r;j})_j' - (g^{r;j})_{n+1}'$$

und damit (6.48).

3. Existenz des minimalen streng produktiven Teilraumes

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel bereit, um die Existenz streng produktiver Teilräume der Tensoralgebra E zu beweisen.

Nach § 5 wird der Durchschnitt aller die Eigenschaften (CM_1), (CM_2), (CMK') besitzenden Teilräumen von E durch das von allen Elementen $f \otimes g - fg \in \mathsf{E}$ mit $f, g \in F$ und allen Elementen $f \otimes \mathsf{S} - \mathsf{S} \otimes f \in \mathsf{E}$ mit $f \in F$, $\mathsf{S} \in E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $\bar{H}(f) + H(\mathsf{S}) \leqq 0$ in E erzeugte, gegen die Differentiation abgeschlossene Linksideal $\overset{0}{K}$ gegeben. Mit Hilfe der Produktregel erkennt man mühelos, daß $\overset{0}{K}$ auch das von allen Elementen

$$f \otimes \mathsf{S} \otimes g - \mathsf{S} \otimes fg \in \mathsf{E} \qquad \text{mit } f, g \in F, \ \mathsf{S} \in E_{n-1}, \ n = 1, 2, \ldots \tag{6.50}$$
$$\bar{H}(f) + H(\mathsf{S}) \leqq 0$$

in E erzeugte, gegen die Differentiation abgeschlossene Linksideal ist. Für $n = 1$ ist (6.50) natürlich (wie auch im folgenden immer dann, wenn formal ein E_0 oder eine ähnliche Bildung auftritt) so zu interpretieren, als ob S in den Formeln nicht vorhanden wäre. Wir zeigen, daß $\overset{0}{K}$ keine von Null verschiedene Distribution $S \in E$ enthält, also streng produktiv und mithin der Durchschnitt aller streng produktiven Teilräume von E ist.

Dazu sei $K_{n+1;j}$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$ und jedes $j = 1, \ldots, n$ der aus allen endlichen Summen von Elementen

$$(6.51) \qquad (\mathsf{R} \otimes f \otimes \mathsf{S} \otimes g)^{(l)} \in E_{n+1} \qquad \text{mit } f, g \in F,\ \mathsf{R} \in E_{j-1},\ \mathsf{S} \in E_{n-j},$$
$$l = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\bar{H}(f) + H(\mathsf{S}) \leqq 0$$

bestehende, offenbar gegen die Differentiation abgeschlossene Teilraum von E_{n+1}. Weiter sei

$$(6.52) \qquad K_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} K_{n+1;j}.$$

Insbesondere ist also $K_2 = K_{2;1}$ der von F_2 in E_2 erzeugte, gegen die Differentiation abgeschlossene Teilraum von E_2.

Wir beweisen zunächst die folgende

Proposition 2: Die gewöhnliche Multiplikation, d. h. die durch $w_{1;1}(f \otimes g) = fg$ definierte lineare Abbildung $w_{1;1}$ von F_2 auf F, läßt sich zu einer linearen, mit der Differentiation vertauschbaren und folglich durch

$$(6.53) \qquad \bar{w}_{1;1}(f \otimes g)^{(l)} = (fg)^{(l)}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

eindeutig bestimmten Abbildung $\bar{w}_{1;1}$ von $K_2 = K_{2;1}$ auf E fortsetzen.

Zum Beweis haben wir lediglich zu zeigen, daß aus

$$(6.54) \qquad \sum_{l=0}^{m} \mathsf{f}_l^{(l)} = 0, \qquad \mathsf{f}_l \in F_2,\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

in E_2 auch

$$(6.55) \qquad \sum_{l=0}^{m} f_l^{(l)} = 0, \qquad f_l = w_{1;1}\,\mathsf{f}_l \in F$$

in E folgt. Für $m = 0$ ist das klar; wir machen also die Induktionsvoraussetzung, daß die Behauptung für ein $m - 1 \geqq 0$ richtig ist, und nehmen (6.54) mit m an. Das bedeutet nach Abschnitt 1, 3)

$$\sum_{l=0}^{m} \mathsf{f}_l\, \mathsf{Z}^{le_2} \in (M, N)_2.$$

Nach (6.17) und dem darauf folgenden gibt es also ein zu $1, m$ gehöriges Hauptsystem $(h^{p;j})$ mit (6.23) und mit $h^{me_2;1} = \mathsf{f}_m$. Benutzen wir nun Prop. 1 mit den beim Beweis eingeführten Bezeichnungen, so folgt zunächst $\mathsf{f}_m = h^{me_2;1} = \mathsf{g}^{(m-1)e_2;1} \in F_2^{e_1+e_2}$, ferner die Existenz eines zu $1, m-1$ gehörigen speziellen Hauptsystems $(\tilde{\mathsf{g}}^{r;j})$, welches Null für $m = 1$ und trivial für $m \geqq 2$ ist, so daß nach (6.43), (6.44) für jedes r mit $|r| = m - 1$

$$\dot{h}^r = -\sum_j \tilde{\mathsf{g}}^{r;j} + \begin{cases} (\mathsf{f}_m)_1' + (\mathsf{f}_m)_2' & \text{für } r_1 = 0, \\ 0 & \text{für } r_1 \neq 0 \end{cases}$$

gilt. Alsdann haben wir

$$\sum_{=0}^{m-1} \mathsf{f}_l Z^{le_2} + ((\mathsf{f}_m)_1' + (\mathsf{f}_m)_2') Z^{(m-1)e_2}$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \mathsf{f}_l Z^{le_2} + \sum_{\substack{p \\ |p| = m \\ p_1 \neq 0}} h^{p;1} Z^p + \sum_{\substack{p \\ |p| = m}} h^{p;2} Z^p$$

$$+ \sum_{\substack{r \\ |r| = m-1}} \dot{h}^r Z^r + \sum_{\substack{r,j \\ |r| = m-1}} \dot{g}^{r;j} Z^r \in (M, N)_2 .$$

Folglich gilt in E_2

$$\sum_{l=0}^{m-1} \mathsf{f}_l^{(l)} + ((\mathsf{f}_m)_1' + (\mathsf{f}_m)_2')^{(m-1)} = 0$$

und daher wegen $f_m = w_{1;1} \mathsf{f}_m \in F^1$ nach Induktionsvoraussetzungen in E

$$\sum_{l=0}^{m-1} f_l^{(l)} + (f_m')^{(m-1)} = \sum_{l=0}^{m} f_l^{(l)} = 0. \tag{6.55}$$

Damit ist Prop. 2 bewiesen.

Aus Prop. 2 folgt allgemeiner die Existenz einer linearen, mit der Differentiation vertauschbaren und durch

$$\overline{w}_{n;j}(\mathsf{R} \otimes f \otimes \mathsf{S} \otimes g)^{(l)} = (\mathsf{R} \otimes \mathsf{S} \otimes fg)^{(l)}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.56}$$

eindeutig bestimmten Abbildung $\overline{w}_{n;j}$ von $K_{n+1;j}$ auf E_n.

Für jedes $n = 2, 3, \ldots$ sei nun $\overset{0}{K}_n$ der Teilraum aller $\mathsf{T} \in K_n$ mit der Eigenschaft, daß für geeignete $\mathsf{T}_j \in K_{n;j}$, $j = 1, \ldots, n-1$

$$\mathsf{T} = \sum_{j=1}^{n-1} \mathsf{T}_j, \qquad \sum_{j=1}^{n-1} \overline{w}_{n-1;j} \mathsf{T}_j = 0 \tag{6.57}$$

gilt. Außerdem sei $\overset{0}{K}_1 = (0)$. Weiter sei W_n für $n = 1, 2, \ldots$ der Teilraum aller $\mathsf{T} \in E_n$ mit der Eigenschaft, daß für geeignete $\mathsf{S}_j \in K_{n+1;j}$, $j = 1, \ldots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathsf{S}_j = 0, \qquad \mathsf{T} = \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_{n;j} \mathsf{S}_j \tag{6.58}$$

gilt. Dann folgt offenbar $\overset{0}{K}_n \subset W_n$. Für $n = 1$ ist das evident, und für $n \geqq 2$ und $\mathsf{T} \in \overset{0}{K}_n$ mit (6.57) braucht man nur $\mathsf{S}_1 = 1 \otimes \mathsf{T}$ und $\mathsf{S}_j = -1 \otimes \mathsf{T}_{j-1}$ für $j = 2, \ldots, n$ zu setzen. Wir wollen zeigen, daß hiervon auch die Umkehrung gilt: $W_n \subset \overset{0}{K}_n$ und damit $W_n = \overset{0}{K}_n$. Für $n = 1$ ist dies wieder evident, wir können beim Beweise also $n \geqq 2$ annehmen.

Es sei also $\mathsf{T} \in W_n$, und wir denken uns die $\mathsf{S}_j \in K_{n+1;j}$ gemäß (6.58) gewählt. Nach der Definition von $K_{n+1;j}$ besitzt jedes S_j für ein geeignetes $m \geqq H(\mathsf{T})$ einen Repräsentanten $s_j \in M_{n+1}^m$ der Form

$$s_j = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ |\mathfrak{p}| \leq m \\ \mathfrak{p}_j = 0}} h^{\mathfrak{p};j} Z^{\mathfrak{p}}, \qquad h^{\mathfrak{p};j} \in F_{n+1}^{\mathfrak{p};j}. \tag{6.59}$$

Die Behauptung ist nun mühelos einzusehen, wenn wir hierbei $m = 0$ wählen dürfen. Wir werden daher, als Induktionsvoraussetzung, die Richtigkeit der Behauptung in dem Falle annehmen, daß wir für ein $m - 1 \geqq 0$ Repräsentanten $s_j \in M_{n+1}^{m-1}$ der S_j der Form (6.59) finden können, und werden sie daraus für $m \geqq 1$ erschließen:

Wegen (6.58) können wir die in (6.59) gegebenen $h^{\mathfrak{p};j}$ für $|\mathfrak{p}| = m$ zu einem zu n, m gehörigen Hauptsystem $(h^{\mathfrak{p};j})$ mit (6.23) ergänzen. Wir benutzen nun das Corollar zu Prop. 1 und die dort eingeführten Bezeichnungen. Dann haben wir für jedes $j \neq n + 1$

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ |\mathfrak{p}| = m \\ \mathfrak{p}_j = 0}} h^{\mathfrak{p};j} Z^{\mathfrak{p}} = \sum_{\substack{i \\ i \neq j, n+1}} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ |\mathfrak{p}| = m \\ \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j = 0}} h^{\mathfrak{p};j,i} Z^{\mathfrak{p}} + \sum_{\substack{r \\ |r| = m-1 \\ r_j = 0}} \dot{h}_0^{r;j} Z^r + r_j \tag{6.60}$$

mit $r_j \in (M, N)_{n+1}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \overset{0}{s}_j &= \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ |\mathfrak{p}| < m \\ \mathfrak{p}_j = 0}} h^{\mathfrak{p};j} Z^{\mathfrak{p}} + \sum_{\substack{r \\ |r| = m-1 \\ r_j = 0}} \dot{h}^{r;j} Z^r, \\ \overset{+}{s}_j &= \sum_{\substack{i \\ i \neq j, n+1}} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ |\mathfrak{p}| = m \\ \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j = 0}} h^{\mathfrak{p};j,i} Z^{\mathfrak{p}} \end{aligned} \tag{6.61}$$

und bezeichnen die durch $\overset{0}{s}_j$, $\overset{+}{s}_j$ definierten Elemente von E_{n+1} mit $\overset{0}{S}_j$, $\overset{+}{S}_j$. Dann gilt nach (6.60), (6.61)

$$\overset{0}{S}_j, \overset{+}{S}_j \in K_{n+1;j}, \quad S_j = \overset{0}{S}_j + \overset{+}{S}_j, \quad \sum_{j=1}^{n} \overset{+}{S}_j = \sum_{j=1}^{n} \overset{0}{S}_j = 0.$$

Entsprechend sei

$$\overset{0}{T} = \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_{n;j} \overset{0}{S}_j, \quad \overset{+}{T} = \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_{n;j} \overset{+}{S}_j, \quad T = \overset{0}{T} + \overset{+}{T}.$$

Alsdann gilt nach Induktionsvoraussetzung $\overset{0}{T} \in \overset{0}{K}_n \cdot \overset{+}{T}$ aber ist zerlegbar in

$$\overset{+}{T} = \sum_{i=1}^{n-1} T_i,$$

und dabei besitzt T_i den Repräsentanten

$$t_i = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ |\mathfrak{p}| = m \\ \mathfrak{p}_i = 0}} \sum_{\substack{j = i+1 \\ \mathfrak{p}_j = 0}}^{n} w_{n;j} h^{\mathfrak{p};j,i} Z^{\overset{0j}{\mathfrak{p}}} + \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ |\mathfrak{p}| = m \\ \mathfrak{p}_{i+1} = 0}} \sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{p}_j = 0}}^{i} w_{n;j} h^{\mathfrak{p};j,i+1} Z^{\overset{0j}{\mathfrak{p}}},$$

$$\overset{0j}{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{j-1}, \mathfrak{p}_{j+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n+1}).$$

Mithin gilt $T_i \in K_{n;i}$, und $\sum_{i=1}^{n-1} \overline{w}_{n-1;i}\, T_i$ besitzt den Repräsentanten

$$\sum_{\substack{p \\ |p|=m \\ p_i=p_j=0}} \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} w_{n-1;i}\, w_{n;j}\, h^{p;j,i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j<i}}^{n} w_{n-1;i-1}\, w_{n;j}\, h^{p;j,i} \right) \overset{0}{Z}{}^{p;j,i} = 0.$$

Es gilt also auch $\overset{+}{T} \in \overset{0}{K}_n$ und daher $T \in \overset{0}{K}_n$, wie behauptet wurde.

Eine einfache Konsequenz aus dem eben Bewiesenen ist die folgende: Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ hat $1 \otimes T \in \overset{0}{K}_{n+1}$, $T \in E_n$ auch $T \in \overset{0}{K}_n$ zur Folge. Denn aus

$$1 \otimes T - \sum_{j=1}^{n} T_j = 0, \qquad T_j \in K_{n+1;j}, \quad \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_{n;j}\, T_j = 0$$

und $\overline{w}_{n;1}\,(1 \otimes T) = T$ folgt $T \in W_n$ und damit $T \in \overset{0}{K}_n$. – Aus $T \in \overset{0}{K}_n$ folgt umgekehrt sofort $1 \otimes T \in \overset{0}{K}_{n+1}$.

Es sei jetzt K die Menge aller $S \in E$ mit der Eigenschaft, daß für ein geeignetes $n \geqq G(S)$ das aus $S = \sum_{k=1}^{n} S_k$, $S_k \in E_k$ durch $(n-k)$malige linksseitige Multiplikation von S_k mit 1 gebildete Element $\sum_{k=1}^{n} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes S_k \in E_n$ in $\overset{0}{K}_n$ enthalten ist. Dann ist klar, daß K ein gegen die Differentiation abgeschlossener Teilraum von E ist. Weiter ergibt die die übliche Anwendung der Produktregel $1 \otimes S - S \otimes 1 \in \overset{0}{K}_{n+1}$ für beliebiges $S \in E_n$. Hieraus folgt durch sukzessive Anwendung, daß K ein Linksideal ist. Ferner enthält K offensichtlich alle Elemente (6.50). Mithin gilt $\overset{0}{K} \subset K$. Umgekehrt folgt aus (6.50) $\overset{0}{K}_n \subset \overset{0}{K} \cap E_n$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$ und daher, weil für jedes $S \in E$ bekanntlich $1 \otimes S - S \in \overset{0}{K}$ gilt, auch $K \subset \overset{0}{K}$. Also stimmt K mit dem eingangs definierten $\overset{0}{K}$ überein.

Es sei schließlich $S \in \overset{0}{K} \cap E_n = K \cap E_n$. Dann gibt es nach der Definition von K ein $k \geqq 0$, so daß das durch k-malige linksseitige Multiplikation von S mit 1 entstehende Element $1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes S \otimes E_{n+k}$ in $\overset{0}{K}_{n+k}$ enthalten ist. Nach dem im vorigen Absatz Gesagten folgt hieraus aber – und in diesem Schluß gipfeln alle unsere bisherigen Bemühungen in diesem Paragraphen – sofort $S \in \overset{0}{K}_n$. Mithin gilt $\overset{0}{K} \cap E_n \subset \overset{0}{K}_n$ und folglich

$$\overset{0}{K} \cap E_n = \overset{0}{K}_n, \quad \text{insbesondere} \quad \overset{0}{K} \cap E = (0). \tag{6.62}$$

Damit haben wir endlich den

Satz 1: Der Teilraum $\overset{0}{K}$ von E ist streng produktiv.

Wir wissen aus den vorangehenden Paragraphen, daß damit die Existenz der maximalen strengen Multiplikationstheorie $\overset{0}{P}$ gesichert ist. Wir werden uns aber mit diesem Resultat keineswegs begnügen, sondern im nächsten Abschnitt einen wesentlich umfassenderen Satz beweisen, aus dem wir im folgenden Paragraphen die Existenz einer großen Zahl von strengen Multiplikationstheorien erschließen werden.

Durch die Existenz von Multiplikationstheorien wird insbesondere das in § 4, Abschnitt 4 betrachtete sog. *innere* Produkt zweier absolut multiplizierbarer Distributionen zu einem legitimen Begriff. Wir dürfen daher im folgenden das innere Produkt $ST \in E$ zweier Distributionen $S, T \in E$ mit $\bar{H}(S) + \bar{H}(T) \leqq 0$ und dessen aus der Produktregel fließende Eigenschaften benutzen. Aus (6.50) oder aus (CMK′) folgt dann

$$f \otimes \mathsf{S} \otimes S - \mathsf{S} \otimes fS \in \overset{0}{K} \qquad \text{für } f \in F,\ S \in E,\ \mathsf{S} \in \mathsf{E},\ \bar{H}(f) + H(\mathsf{S}) + H(S) \leqq 0. \tag{6.63}$$

Auf diese Formel werden wir uns im folgenden in allen den Fällen stützen können, in denen wir bisher auf die Produktregel selbst verwiesen haben.

4. Der Existenzsatz

Wir machen in diesem Abschnitt die folgende

Voraussetzung: Es seien zwei absteigende Folgen $A = (A^m)$, $B = (B^m)$ von Teilräumen A^m, B^m von F gegeben:

$$\begin{aligned} F = A^0 \supset A^1 \supset \cdots \supset A^m \supset A^{m+1} \supset \ldots, \\ F = B^0 \supset B^1 \supset \cdots \supset B^m \supset B^{m+1} \supset \ldots, \end{aligned} \tag{6.64}$$

welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

(V_1) Aus $f \in A^{m+1}$, $f \in F^1$ folgt $f' \in A^m$.

(V_2) Aus $g \in B^{m+1}$, $g \in F^1$ folgt $g' \in B^m$.

(V_3) Aus $g \in B^m$, $h \in F^m$ folgt $hg \in B^m$.

Es sei ferner eine Folge $v = (v^m)$ von bilinearen Abbildungen v^m von $A^m \times B^m$ in E^m gegeben, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

(V_0') Für $m = 0$, also $f, g \in F$, gilt $v^0(f, g) = fg$.

(V_1') Für $f \in A^{m+1} \cap F^1$, $g \in B^{m+1}$ gilt $v^{m+1}(f, g) = v^m(f', g)$.

(V_2') Für $g \in B^{m+1} \cap F^1$, $f \in A^{m+1}$ gilt $v^{m+1}(f, g) = (v^m(f, g))' - v^m(f, g')$.

(V_3') Für $f \in A^m$, $g \in B^m$, $h \in F^m$ gilt $v^m(f, hg) = hv^m(f, g)$.

Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz 2: Erfüllen die Folgen A, B, v die eben gemachte Voraussetzung, so gibt es einen streng produktiven Teilraum K von E, welcher alle Elemente

$$f^{(m)} \otimes g - v^m(f, g) \in \mathsf{E} \quad \text{mit } f \in A^m,\ g \in B^m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.65}$$

enthält.

Es sei $K = K(A, B, v)$ das von allen Elementen (6.50), (6.65) in E erzeugte, gegen die Differentiation abgeschlossene Linksideal. Dann besagt Satz 2 offenbar genau, daß dieses K keine von Null verschiedene Distribution $S \in E$ enthält. Setzt man speziell $A^1 = A^2 = \cdots = (0)$, $B^1 = B^2 = \cdots = (0)$, so kommt man auf den im vorigen Abschnitt bewiesenen Satz 1 zurück.

Umgekehrt ist evident, daß $K = K(A, B, v)$ für zwei die Eigenschaften (V_0) bis (V_3) besitzende Folgen A, B auch nur dann streng produktiv sein kann, wenn v die Eigenschaften (V_0') bis (V_3') besitzt.

Die Eigenschaften (V_1'), (V_2') entsprechen der Produktregel, die Eigenschaft (V_3') der Formel (6.63). Aus (V_0') bis (V_2') folgt mühelos, daß für zwei Funktionen $f \in A^m$, $g \in B^m$ mit $\bar{H}(f^{(m)}) + \bar{H}(g) \leqq 0$ stets $v^m(f, g)$ gleich dem inneren Produkt $f^{(m)}\, g$ ist.

Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ sei nun $\bar{K}_{n+1}$ der Teilraum aller Elemente $\mathsf{S} \in \mathsf{E}_{n+1}$ der Form

$$\mathsf{S} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=0}^{L} \left(\sum_{k=1}^{K_{i,l}} \mathsf{R}_{i,l;k} \otimes (f_{i,l;k}^{(i)} \otimes g_{i,l;k} - v^i(f_{i,l;k}, g_{i,l;k})) \right)^{(l)} \tag{6.66}$$

$$\text{mit } \mathsf{R}_{i,l;k} \in E_{n-1}, \quad f_{i,l;k} \in A^i, \quad g_{i,l;k} \in B^i,$$

$$\mathrm{I} = 1, 2, \ldots, \quad L = 0, 1, 2, \ldots, \quad K_{i,l} = 1, 2, \ldots.$$

Ferner sei $\bar{\bar{K}}_{n+1}$ der Teilraum aller $\mathsf{T} \in E_{n+1}$ der Form

$$\mathsf{T} = \mathsf{S} + \mathsf{S}_0 \quad \text{mit } \mathsf{S} \in \bar{K}_{n+1}, \ \mathsf{S}_0 \in \overset{0}{K} \cap E_{n+1}. \tag{6.67}$$

Nach den Ausführungen der vorigen Abschnittes besteht $\overset{0}{K} \cap \mathsf{E}_{n+1}$ aus allen $\mathsf{S}_0 \in \mathsf{E}_{n+1}$ der Form

$$\mathsf{S}_0 = \mathsf{R} + \sum_{k=1}^{n} (1 \otimes \mathsf{S}_k - \mathsf{S}_k) \quad \text{mit} \quad \mathsf{R} \in \overset{0}{K}_{n+1}, \ \mathsf{S}_k \in E_k. \tag{6.68}$$

Außerdem sei $\bar{K}_1 = \bar{\bar{K}}_1 = (0)$. Alle $\bar{K}_n$, $\bar{\bar{K}}_n$ sind offenbar gegen die Differentiation abgeschlossen. Schließlich habe K immer die Bedeutung $K(A, B, v)$.

Es ist klar, daß für jedes $n = 1, 2, \ldots$

$$\bar{\bar{K}}_n \subset K \cap \mathsf{E}_n \tag{6.69}$$

gilt. Umgekehrt gibt es zu jedem $\mathsf{T} \in K$ offenbar ein $n \geqq G(\mathsf{T})$, so daß $\mathsf{T} \in \bar{\bar{K}}_n$ gilt; denn es bedeutet wegen der Zusatzglieder (6.68) keine Einschränkung, daß wir die Faktoren $\mathsf{R}_{i,l;k}$ in (6.66) als „homogen", d. h. in E_{n-1} enthalten angenommen haben, ebenso, daß wir die über i erstreckte Summe erst mit $i = 1$ begonnen haben. – Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ gilt weiter, mit derselben Begründung,

$$\bar{\bar{K}}_n \subset \bar{\bar{K}}_{n+1} \cap \mathsf{E}_n. \tag{6.70}$$

Wenn nun hierin stets das Gleichheitszeichen gilt, so ist, nach dem eben Gesagten, dasselbe auch in (6.69) der Fall; insbesondere folgt dann für $n = 1$ die Behauptung des Satzes 2. Wir werden jetzt zeigen, daß in (6.70) in der Tat stets das Gleichheitszeichen gilt.

Wir können auch hier wieder einen Induktionsschluß durchführen. Ist nämlich ein $\mathsf{T} \in \bar{\bar{K}}_{n+1}$ gegeben, so setzen wir

$$\overset{0}{H}(\mathsf{T}) = \operatorname{Min} \operatorname{Max} (H(\mathsf{R}_{i,l;k}) + i + l); \tag{6.71}$$

dabei soll das Minimum in bezug auf alle Zerlegungen (6.67) von T und in bezug auf alle Darstellungen (6.66) des dabei auftretenden $\mathsf{S} \in \bar{\bar{K}}_{n+1}$ genommen werden, das Maximum

dagegen in bezug auf alle Summanden $(i, l; k)$ einer festen solchen Darstellung (6.66). Ist nun $\overset{0}{H}(T) = 0$, so gilt hiernach $T \in \overset{0}{K} \cap E_{n+1}$, aus $T \in E_n$ folgt also $T \in \overset{0}{K} \cap E_n \subset \bar{\bar{K}}_n$. In diesem Falle ist die Behauptung also trivial. Wir werden daher als Induktionsvoraussetzung die Richtigkeit der Behauptung für alle $T \in \bar{\bar{K}}_{n+1} \cap E_n$ mit $\overset{0}{H}(T) \leqq m - 1$, $m \geqq 1$ annehmen und sie daraus für $\overset{0}{H}(T) \leqq m$ erschließen. Wir führen diesen Induktionsschritt zunächst unter der Voraussetzung $n \geqq 2$ durch und geben am Schluß die für $n = 1$ nötigen Modifizierungen an.

Es sei also ein $T \in \bar{\bar{K}}_{n+1}$ mit $\overset{0}{H}(T) \leqq m$ gegeben, und wir denken uns die Darstellung (6.66), (6.67) mit der eben beschriebenen Minimaleigenschaft gewählt. Auf Grund der Eigenschaften (V_0') bis (V_2') können wir diese Darstellung, ohne daß dabei die Minimaleigenschaft verlorengeht, in evidenter Weise so abändern, daß für jedes feste Paar i, l alle vorkommenden $f_{i,l;k} \in A^i$ linear unabhängig über F^1 werden, ebenso alle $g_{i,l;k} \in B^i$. Diese Abänderung denken wir uns bereits ausgeführt.

Mit der so gewonnenen Darstellung (6.66), (6.67) von $T \in \bar{\bar{K}}_{n+1}$ bilden wir nun das Element

$$T_0 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=0}^{L} \left(\sum_{k=1}^{K_{i,l}} R_{i,l;k} \otimes f_{i,l;k}^{(l)} \otimes g_{i,l;k} \right)^{(l)} \tag{6.72}$$

von E_{n+1}. Dann gilt $H(T_0) \leqq m$, und die Voraussetzung $T \in E_n$ hat offenbar $T_0 \in K_{n+1}$ zur Folge. Die in Abschnitt 2 bewiesene Prop. 1 aber besagt unmittelbar, daß ein Element $T_0 \in K_{n+1}$ mit $H(T_0) \leqq m$ in der Weise in der Form $T_0 = \sum_{j=1}^{n} T_j$ mit $T_j \in K_{n+1;j}$ darstellbar ist, daß jedes T_j sogar endliche Summe von Elementen (6.51) mit $H(R) + H(S) + 1 \leqq m$ ist. T_0 besitzt also einen Repräsentanten $t \in M_{n+1}^m$ der Form

$$t = \sum_{\substack{p,j \\ |p| \leqq m \\ p_j = 0,\, j \neq n+1}} h^{p;j} Z^p, \qquad h^{p;j} \in F_{n+1}^{p;j}. \tag{6.73}$$

Andererseits besitzt jedes $R_{i,l;k} \in E_{n-1}$ einen Repräsentanten

$$r_{i,l;k} = \sum_{\substack{q \\ |q| \leqq m-i-l}} g_{(k)}^{q,i,l} z^q, \qquad g_{(k)}^{q,i,l} \in F_{n-1}, \tag{6.74}$$

wobei die q natürlich $(n-1)$-Tupel sind. T_0 besitzt also nach (6.72) den Repräsentanten

$$t_0 = \sum_{\substack{p \\ |p| \leqq m \\ p_n \neq 0}} \sum_{k=1}^{K_{p_n, p_{n+1}}} g_{(k)}^{p} \otimes f_{p_n, p_{n+1};k} \otimes g_{p_n, p_{n+1};k} Z^p, \tag{6.75}$$

wobei genauer nur über die p mit $1 \leqq p_n \leqq I$, $0 \leqq p_{n+1} \leqq L$ zu summieren ist.

Der Vergleich von (6.73), (6.75) ergibt nun, wie beim Beweis von Satz 1 nach (6.17) und den Schlußsätzen von Abschnitt 1, daß wir für $|p| = m$ die in (6.73) gegebenen $h^{p;j}$ so zu einem zu n, m gehörigen Hauptsystem $(h^{p;j})$ ergänzen können, daß für diese p

$$(6.76)\qquad \sum_j h^{p;j} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{K_{p_n,p_n+1}} \mathsf{g}^p_{(k)} \otimes f_{p_n,p_n+1;k} \otimes g_{p_n,p_n+1;k} & \text{für } p_n \neq 0 \\ 0 & \text{für } p_n = 0 \end{cases}$$

gilt. Da nun die $f_{p_n p_n+1;k}$ und die $g_{p_n,p_n+1;k}$ bei festem p linear unabhängig über F^1 gewählt waren, da ferner $h^{p;n+1} \in F^{e_n+1}_{n+1}$ und für $p_n = 0$ auch $h^{p;n} \in F^{e_n}_{n+1}$ gilt, folgt aus (6.76) für jedes p und jedes $k = 1, \ldots, K_{p_n,p_n+1}$

$$(6.77)\qquad \mathsf{g}^p_{(k)} = \sum_{j=1}^{n-1} \mathsf{g}^{p;j}_{(k)}, \quad \mathsf{g}^{p;j}_{(k)} \in F_{j-1} \otimes F^{p_j+1+\cdots+p_n} \otimes F_{n-1-j}.$$

Wir setzen nun

$$(6.78)\qquad \overset{+}{\mathsf{t}} = \sum_{\substack{p \\ |p|=m \\ p_n \neq 0}} \sum_{k=1}^{K_{p_n,p_n+1}} \sum_{\substack{j=1 \\ p_j=0}}^{n-1} \mathsf{g}^{p;j}_{(k)} \otimes f_{p_n,p_n+1;k} \otimes g_{p_n,p_n+1;k}\, \mathsf{Z}^p,$$

$$\overset{0}{\mathsf{t}} = \sum_{\substack{p \\ |p|<m \\ p_n \neq 0}} \sum_{k=1}^{K_{p_n,p_n+1}} \mathsf{g}^p_{(k)} \otimes f_{p_n,p_n+1;k} \otimes g_{p_n,p_n+1;k}\, \mathsf{Z}^p +$$

$$+ \sum_{\substack{r \\ |r|=m-1 \\ r_n \neq 0}} \sum_{k=1}^{K_{r_n,r_n+1}} \sum_{j=1}^{n-1} (\mathsf{g}^{r+e_j;j}_{(k)})'_j \otimes f_{r_n,r_n+1;k} \otimes g_{r_n,r_n+1;k}\, \mathsf{Z}^r$$

und bezeichnen die durch $\overset{+}{\mathsf{t}}, \overset{0}{\mathsf{t}}$ definierten Elemente von E_{n+1} mit $\overset{+}{T}, \overset{0}{T}$. Sodann gilt zunächst $T_0 = \overset{+}{T} + \overset{0}{T}$. Weiter haben wir für $\overset{+}{T}$

$$(6.79)\qquad \overset{+}{T} = \sum_{j=1}^{n-1} T_j$$

mit

$$(6.80)\qquad T_j = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=0}^{L} \left(\sum_{k=1}^{K_{i,l}} R^j_{i,l;k} \otimes f^{(i)}_{i,l;k} \otimes g_{i,l;k} \right)^{(l)} \in K_{n+1;j},$$

$$(6.81)\qquad {}'T_j = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=0}^{L} \left(\sum_{k=1}^{K_{i,l}} R^j_{i,l;k} \otimes v^i(f_{i,l;k}, g_{i,l;k}) \right)^{(l)} \in K_{n;j},$$

und schließlich nach (V'_3) und nach (6.63) mit

$$(6.82)\qquad \bar{w}_{n;j}\, T_j - \bar{w}_{n-1;j}\, {}'T_j \in \bar{K}_n.$$

Weiter haben wir für $\overset{0}{T}$ und das analog zu (6.81) gebildete $'\overset{0}{T}$

$$\overset{0}{T} - '\overset{0}{T} \in \bar{K}_{n+1}, \quad \overset{0}{H}(\overset{0}{T} - '\overset{0}{T}) \leqq m - 1, \tag{6.83}$$

und schließlich gilt insgesamt für das wieder analog gebildete

$$'T_0 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=0}^{L} \left(\sum_{k=1}^{K_{i,l}} R_{i,l;k} \otimes v^i(f_{i,l;k}, g_{i,l;k}) \right)^{(l)}$$

die Gleichheit

$$'T_0 = \sum_{j=1}^{n-1} 'T_j + '\overset{0}{T}. \tag{6.84}$$

Jetzt sind wir fast fertig: Nach Voraussetzung war

$$'T = T_0 - 'T_0 + S_0 \in E_n, \quad S_0 \in \overset{0}{K} \cap E_{n+1}, \tag{6.85}$$

Hieraus erhalten wir nach (6.79) bis (6.84) für das Element

$$R = T - \sum_{j=1}^{n-1} (\bar{w}_{n;j} T_j - \bar{w}_{n-1;j} 'T_j) \tag{6.86}$$

zugleich

$$R = \overset{0}{T} - '\overset{0}{T} + \sum_{j=1}^{n-1} (T_j - \bar{w}_{n;j} T_j) - \sum_{j=1}^{n-1} ('T_j - \bar{w}_{n-1;j} 'T_j) + S_0. \tag{6.87}$$

Wegen (6.86) gilt $R \in E_n$, und wegen (6.87) $R \in \bar{\bar{K}}_{n+1}$ und $\overset{0}{H}(R) \leqq m - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir also $R \in \bar{\bar{K}}_n$, und nach (6.86), (6.82) endlich $T \in \bar{\bar{K}}_n$.

Für $n = 1$ ergibt sich sogar ein viel einfacherer Schluß: Hier sind, gemäß unserer Verabredung in Abschnitt 3, die $R_{i,l;k}$ – kurz gesagt – aus den Formeln fortzudenken. Dann folgt aus (6.76) statt (6.77) ein Widerspruch zu der Annahme, daß die $f_{i,l;k}$ und die $g_{i,l;k}$ linear unabhängig über F^1 gewählt waren, der sich nur durch $T_0 = 'T_0 = 0$ löst. Gleichung (6.85) lautet daher einfach $T \in \overset{0}{K} \cap E_1$. Hier müssen wir nun Satz 1 anwenden und erhalten $T = 0$ oder $T \in \bar{\bar{K}}_1$.

Damit ist der Satz 2 bewiesen, zugleich allgemeiner in (6.69) die Gleichheit:

$$\bar{\bar{K}}_n = K \cap E_n \tag{6.90}$$

für jedes $n = 1, 2, \ldots$

5. Der Regularitätssatz

Es seien wieder zwei Folgen A, B von Teilräumen A^m, B^m von F und eine Folge v von Abbildungen v^m von $A^m \times B^m$ in E^m gegeben, welche die Voraussetzung des vorangehen-

den Abschnittes erfüllen. Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß der Quotientenraum $L = L(A, B, v)$ von E nach $K = K(A, B, v)$ die in § 5, Abschnitt 1 formulierte Regularitätsforderung (r_2) erfüllt.

Zunächst gilt die folgende

Proposition 3: Unter der Voraussetzung des vorangehenden Abschnittes besitzt jedes Element $a \in L$ einen Repräsentanten $\mathsf{S} \in \mathsf{E}$, für den *zugleich* $G(\mathsf{S}) = \tilde{G}(a)$ und $H(\mathsf{S}) = \tilde{H}(a)$ gilt.

Beweis: Die Behauptung ist für $\tilde{H}(a) = 0$ trivial. Wir nehmen daher $\tilde{H}(a) = m \geqq 1$ an. Es sei $\mathsf{T} \in \mathsf{E}$ ein Repräsentant von a mit $H(\mathsf{T}) = \tilde{H}(a) = m$. Ist $G(\mathsf{T}) = \tilde{G}(a)$, so ist nichts zu beweisen. Wir nehmen daher $\tilde{G}(a) \leqq n$ und $\mathsf{T} \in \mathsf{E}_{n+1}$ oder, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $\mathsf{T} \in E_{n+1}$ an. Nach (6.66) bis (6.68) und nach (6.90) ist T dann von der Form

$$\mathsf{T} = \mathsf{T}_0 - \mathsf{S}_0 \tag{6.91}$$

mit

$$\mathsf{T}_0 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=0}^{L} \left(\sum_{k=1}^{K_{i,l}} \mathsf{R}_{i,l;k} \otimes f_{i,l;k} \otimes g_{i,l;k} \right)^{(l)}, \tag{6.92}$$

$$\mathsf{R}_{i,l;k} \in E_{n-1}, f_{i,l;k} \in A^i, g_{i,l;k} \in B^i$$

und mit

$$\mathsf{S}_0 \in K_{n+1}, \quad \mathsf{S}_0 = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{S}_j, \quad \mathsf{S}_j \in K_{n+1;j}. \tag{6.93}$$

Wir haben nun lediglich zu zeigen, daß diese Darstellung (6.91) bis (6.93) schon in der Weise möglich ist, daß in (6.92) stets $H(\mathsf{R}_{i,l;k}) + i + l \leqq m$ gilt und alle S_j sogar als endliche Summen von Elementen (6.51) mit $H(\mathsf{R}) + H(\mathsf{S}) + l \leqq m$ darstellbar sind. Denn dann gibt es sicher ein Element $\mathsf{R} \in E_n$ mit $H(\mathsf{R}) = m$ und $\mathsf{T} - \mathsf{R} \in K$, und durch Fortsetzung dieses Schlusses ergibt sich die Behauptung.

Hierzu gehen wir von einer beliebigen Darstellung (6.91) bis (6.93) von T aus, für die in (6.92) stets $H(\mathsf{R}_{i,l;k}) + i + l \leqq m'$ und in (6.93), (6.51) stets $H(\mathsf{R}) + H(\mathsf{S}) + l \leqq m'$ mit $m' \geqq m$ gilt. Ist hierbei $m' = m$, so ist nichts zu beweisen. Und es genügt offenbar zu zeigen, daß es im Falle $m' > m$ eine andere solche Darstellung von T gibt, für die dasselbe schon mit $m' - 1$ statt mit m' gilt.

Bei der gegebenen Darstellung dürfen wir die $f_{i,l;k}$ und die $g_{i,l;k}$ bei festem i, l wieder als linear unabhängig über F^1 annehmen. Wie in Abschnitt 4 besitzt T_0 einen Repräsentanten $t_0 \in M^{m'}_{n+1}$ der Form

$$\mathsf{t}_0 = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ |\mathfrak{p}| \leqq m' \\ \mathfrak{p}_n \neq 0}} \sum_{k=1}^{K_{\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{n+1}}} \mathsf{g}^{\mathfrak{p}}_{(k)} \otimes f_{\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{n+1};k} \otimes g_{\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{n+1};k} Z^{\mathfrak{p}} \tag{6.94}$$

und S_0 einen Repräsentanten $\mathsf{s}_0 \in M^{m'}_{n+1}$ der Form

$$\mathsf{s}_0 = \sum_{\substack{\mathfrak{p}, j \\ |\mathfrak{p}| \leqq m' \\ \mathfrak{p}_j = 0, j \neq n+1}} h^{\mathfrak{p};j} Z^{\mathfrak{p}}, \qquad h^{\mathfrak{p};j} \in F^{\mathfrak{p};j}_{n+1} \tag{6.95}$$

Wegen $H(T) < m'$ lassen sich die in (6.95) gegebenen $h^{p;j}$ für $|p| = m'$ zu einem zu n, m' gehörigen Hauptsystem $(h^{p;j})$ mit

$$(6.76) \qquad \sum_j h^{p;j} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{K_{p_n, p_{n+1}}} \mathsf{g}^p_{(k)} \otimes f_{p_n, p_{n+1}; k} \otimes g_{p_n, p_{n+1}; k} & \text{für } p_n \neq 0, \\ 0 & \text{für } p_n = 0 \end{cases}$$

für alle p mit $|p| = m'$ ergänzen. Hieraus folgt wieder (6.77), und nach Prop. 1 daher für ein geeignetes, zu n, $m' - 1$ gehöriges triviales Hauptsystem $(\tilde{h}^{r;j})$

$$\dot{h}^r = \sum_j \tilde{h}^{r;j} - \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{K_{r_n, r_{n+1}}} \sum\limits_{j=1}^{n-1} (\mathsf{g}^{r+e_j;j}_{(k)})'_j \otimes f_{r_n, r_{n+1}; k} \otimes g_{r_n, r_{n+1}; k} & \text{für } r_n \neq 0, \\ 0 & \text{für } r_n = 0. \end{cases}$$

T besitzt mithin auch den Repräsentanten

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mathsf{t}} &= \mathsf{t}_0 - \mathsf{s}_0 - \sum_{\substack{p,j \\ |p| = m' \\ p_j = 0 \text{ für} \\ j \neq n+1}} h^{p;j} Z^p - \sum_{\substack{r \\ |r| = m'-1}} \dot{h}^r Z^r \\ &= \sum_{\substack{p \\ |p| < m' \\ p_n \neq 0}} \sum_{k=1}^{K_{p_n, p_{n+1}}} \mathsf{g}^p_{(k)} \otimes f_{p_n, p_{n+1}; k} \otimes g_{p_n, p_{n+1}; k} Z^p \\ &\quad + \sum_{\substack{r \\ |r| = m'-1 \\ r_n \neq 0}} \sum_{k=1}^{K_{r_n, r_{n+1}}} \sum_{j=1}^{n-1} (\mathsf{g}^{r+e_j;j}_{(k)})'_j \otimes f_{r_n, r_{n+1}; k} \otimes g_{r_n, r_{n+1}; k} Z^r \\ &\quad - \sum_{\substack{p,j \\ |p| < m' \\ p_j = 0, j \neq n+1}} h^{p;j} Z^p - \sum_{\substack{r,j \\ |r| = m'-1}} \tilde{h}^{r;j} Z^r \end{aligned}$$

und folglich eine Darstellung (6.91) bis (6.93) der behaupteten Art. Damit ist Prop. 3 bewiesen.

Aus Proposition 3 folgt insbesondere die Regularitätsforderung (r_0), daher auch (r_2) im Falle $\tilde{G}(a) = 1$. Beim Beweise von (r_2), dem wir uns jetzt zuwenden, dürfen wir also $\tilde{G}(a) = n + 1$ mit $n \geqq 1$ voraussetzen.

Es sei also $a \in L$ mit $\tilde{H}(a) = m > 0$ und mit $\tilde{G}(a) = n + 1$ und die Ableitung a' sei in der Form

$$(5.8) \qquad a' = b_1 + c_1 \quad \text{mit} \quad \tilde{G}(b_1) \leqq n, \quad \tilde{H}(c_1) \leqq m$$

darstellbar. Es sei weiter $\mathsf{S} \in E_{n+1}$ ein Repräsentant von a mit $H(\mathsf{S}) = \tilde{H}(a) = m$. Dann besagt (5.8) genau, daß S einen Repräsentanten $\mathsf{s} \in M^m_{n+1}$ mit der Eigenschaft besitzt, daß für alle q mit $|q| = m + 1$

$$(6.96)\qquad \sum_{k=1}^{K_{q_n,q_{n+1}}} \mathfrak{g}^q_{(k)} \otimes f_{q_n,q_{n+1};k} \otimes g_{q_n,q_{n+1};k} + \sum_{\substack{j\\ j\neq n+1}} h^{q;j} + \left(\sum_{\substack{j\\ j\neq n+1}} \mathfrak{g}^{q-e_j} - \mathfrak{g}^{q-e_{n+1}}\right)$$

$$= \begin{cases} f^{q-e_{n+1}} & \text{für } q_{n+1} \neq 0, \\ 0 & \text{für } q_{n+1} = 0, \end{cases}$$

$$\text{mit } \mathfrak{g}^q_{(k)} \in F_{n-1}, \quad f_{i,l;k} \in A^i, \quad g_{i,l;k} \in B^i,$$

$$h^{q;j} \in F^{q;j}_{n+1}, \quad \mathfrak{g}^p \in F^{e_{n+1}}_{n+1}$$

gilt. Es ist unserem jetzigen Falle unwesentlich, ob hierin die erste Summe linker Hand auch für $q_n = 0$ auftritt.

Für jedes r mit $|r| = m - 1$ sei jetzt $\mathfrak{g}^r_0 = \mathfrak{g}^{r+e_{n+1}}$, und für jedes p mit $|p| = m$ sei

$$(6.97)\qquad f^p_1 = \sum_{k=1}^{K_{p_n,p_{n+1}+1}} \mathfrak{g}^{p+e_{n+1}}_{(k)} \otimes f_{p_n,p_{n+1}+1;k} \otimes g_{p_n,p_{n+1}+1;k},$$

$$(6.98)\qquad f^p_2 = \sum_{\substack{j\\ j\neq n+1}} h^{p+e_{n+1};j} + \left(\sum_{\substack{j\\ j\neq n+1}} \mathfrak{g}^{p-e_j}_0 - \mathfrak{g}^{p-e_{n+1}}_0\right).$$

Dann ergeben die für $q_{n+1} \neq 0$ hingeschriebenen Gleichungen (6.96) für alle diese p

$$(6.99)\qquad f^p = f^p_1 + f^p_2 - \begin{cases} 0 & \text{für } p_{n+1} \neq 0, \\ \mathfrak{g}^p & \text{für } p_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Andererseits lauten die Gleichungen (6.96) für $q_{n+1} = 0$

$$\sum_{\substack{j\\ j\neq n+1}} \mathfrak{g}^{q-e_j} = - \sum_{\substack{j\\ j\neq n+1}} h^{q;j} - \sum_{k=1}^{K_{q_n,q_{n+1}}} \mathfrak{g}^q_{(k)} \otimes f_{q_n,q_{n+1};k} \otimes g_{q_n,q_{n+1};k}.$$

Hieraus folgt nach Abschnitt 1, 2) für $p_{n+1} = 0$

$$(6.100)\qquad \mathfrak{g}^p = \sum_{\substack{j\\ j\neq n+1}} h^{p;j}_0 + f^p_3$$

mit

$$(6.101)\qquad h^{p;j}_0 = - \sum_{\substack{r\\ |r|=m\\ r_{n+1}=0}} (-1)^{r_n-p_n} J_{(p-r)^n}\, h^{r+e_n;j}$$

und mit

$$(6.102)\qquad f^p_3 = \sum_{\substack{r\\ |r|=m\\ r_{n+1}=0}} \sum_{k=1}^{K_{r_n+1,r_{n+1}}} (-1)^{r_n-p_n} J_{(p-r)^n}\, \mathfrak{g}^{r+e_n}_{(k)} \otimes f_{r_n+1,r_{n+1};k} \otimes g_{r_n+1,r_{n+1};k}.$$

Für alle in den Summen (6.101), (6.102) vorkommenden r gilt nun $F_{n+1}^{r+e_n;j} \subset F_{n+1}^{p;j}$ für alle $j \neq n+1$ und $A^{r_n+1} \subset A^{p_n}$, $B^{r_n+1} \subset B^{p_n}$. Daher folgt, wenn man (6.97), (6.98) und (6.100) bis (6.102) in (6.99) einträgt, sofort, daß der Bestandteil höchster Ordnung $\sum_{|p|=m} f^p Z^p$ von S ein Element $b \in L$ mit $\tilde{G}(b) \leqq n$ definiert, also die behauptete Darstellung

$$(5.9) \qquad a = b + c \qquad \text{mit} \qquad G(b) < \tilde{G}(a),\ \tilde{H}(c) < \tilde{H}(a).$$

Damit ist die Regularitätsforderung (r_2) vollständig bewiesen.

Satz 3: Erfüllen die Folgen A, B, v die Voraussetzung des vorangehenden Abschnittes, so genügt der Quotientenraum $L(A, B, v)$ von E nach $K(A, B, v)$ der Regularitätsforderung (r_2).

§ 7. DIE DURCH DEN EXISTENZSATZ ERZEUGTEN STRENGEN MULTIPLIKATIONSTHEORIEN

Wir knüpfen jetzt, im Besitze des im vorangehenden Paragraphen bewiesenen grundlegenden Existenzsatzes, an die Entwicklungen der §§ 4, 5 an und bringen diese mit der Untersuchung der durch den Existenzsatz erzeugten Multiplikationstheorien zu einem gewissen Abschluß. Dabei werden wir uns durchweg auf die – für die Theorie wie für die Anwendungen – allein interessanten strengen Multiplikationstheorien beschränken.

Es wird sich zeigen, daß strenge Multiplikationstheorien in sehr großer Zahl existieren. Die Gesamtheit aller strengen Multiplikationstheorien erscheint ähnlich unübersehbar wie die aller Differentationstheorien, vergleichbar etwa der Unübersehbarkeit der Gesamtheit aller reellen Funktionen. Während wir uns bei den Differentiationstheorien aber allein auf die eindeutig bestimmte maximale, die Distributionentheorie D, beschränkt haben, ist hier, aus Gründen, die wir in Abschnitt 2 auseinandersetzen werden, eine solche Beschränkung auf die maximale strenge Multiplikationstheorie $\overset{0}{P}$ nicht angebracht.

Das wesentliche Ergebnis dieser Paragraphen wird daher die Existenz einer großen Klasse von wichtigen strengen Multiplikationstheorien sein, welche alle unsere Regularitätsforderungen erfüllen und die Anforderungen der Anwendungen weitgehend befriedigen.

Wir beginnen in Abschnitt 1 mit der angekündigten Zusammenstellung der für alles Folgende grundlegenden Hauptergebnisse des vorangehenden Paragraphen.

1. Formulierung des Existenzsatzes

Nach den Ausführungen des vorangehenden Paragraphen gilt der folgende

Existenzsatz: Es sei $U \in \Omega$ eine offene Punktmenge. Es seien zwei absteigende Folgen $A = (A^m)$, $B = (B^m)$ von Teilräumen A^m, B^m von $F(U)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ gegeben:

$$(7.1) \qquad \begin{aligned} F(U) &= A^0 \supset A^1 \supset \cdots \supset A^m \supset A^{m+1} \supset \cdots, \\ F(U) &= B^0 \supset B^1 \supset \cdots \supset B^m \supset B^{m+1} \supset \cdots, \end{aligned}$$

welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

(V_1) Aus $f \in A^{m+1}, f \in F^1(U)$ folgt $f' \in A^m$.

(V_2) Aus $g \in B^{m+1}, g \in F^1(U)$ folgt $g' \in B^m$.

(V_3) Aus $g \in B^m$, $h \in F^m(U)$ folgt $hg \in B^m$.

Es sei ferner eine Folge $v = (v^m)$ von bilinearen Abbildungen v^m von $A^m \times B^m$ in $E^m(U)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ gegeben, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

(V_0') Für $m = 0$, also $f, g \in F(U)$, gilt $v^0(f, g) = fg$.

(V_1') Für $f \in A^{m+1} \cap F^1(U), g \in B^{m+1}$ gilt $v^{m+1}(f, g) = v^m(f', g)$.

(V_2') Für $g \in B^{m+1} \cap F^1(U), f \in A^{m+1}$ gilt $v^{m+1}(f, g) = (v^m(f, g))' - v^m(f, g')$.

(V_3') Für $f \in A^m$, $g \in B^m$, $h \in F^m(U)$ gilt $v^m(f, hg) = hv^m(f, g)$.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es einen streng produktiven Teilraum K von $\mathsf{E}(U)$, welcher alle Elemente

$$f^{(m)} \otimes g - v^m(f, g) \in \mathsf{E}(U) \qquad \text{mit } f \in A^m, g \in B^m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.2}$$

enthält.

Wir haben in § 6, Abschnitt 3 begründet, daß wir zu der Verwendung des inneren Produktes in (V_3') berechtigt sind.

Der Durchschnitt aller die Elemente (7.2) enthaltenden streng produktiven Teilräume K von $\mathsf{E}(U)$, also das von allen diesen Elementen (7.2) und allen Elementen

$$f \otimes \mathsf{S} \otimes g - \mathsf{S} \otimes fg \in E(U) \qquad \text{mit } f, g \in F(U),\ \mathsf{S} \in E_{n-1}(U),\ \bar{H}(f) + H(\mathsf{S}) \leqq 0,\ n = 1, 2, \ldots \tag{7.3}$$

in $\mathsf{E}(U)$ erzeugte, gegen die Differentiation abgeschlossene Linksideal, heißt der *von A, B, v erzeugte streng produktive Teilraum* von $\mathsf{E}(U)$ und wird mit $K(A, B, v)$ bezeichnet.

Es gilt dann weiter der folgende

Regularitätssatz: Unter den Voraussetzungen des Existenzsatzes erfüllt der Quotientenraum $L(A, B, v) = \mathsf{E}(U)/K(A, B, v)$ die Regularitätsforderung (r_2) und damit (§ 5, Prop. 1) auch die Regularitätsforderungen (r_1), (r_0).

2. Die maximale strenge Multiplikationstheorie

Aus dem Existenzsatz folgt zunächst, daß das von allen Elementen (7.3) in $\mathsf{E}(U)$ erzeugte, gegen die Differentiation abgeschlossene Linksideal $\overset{0}{K}(U)$ streng produktiv ist. Das System $\overset{0}{K}$, offenbar ein Teilraum von E, ist daher in $\overset{0}{K}{}^{\S} = \overset{0}{C}$ enthalten und mithin eigentliche Basis der maximalen strengen Multiplikationstheorie $\overset{0}{P}$. Folglich gilt (§ 5, Prop. 4)

Satz 1: Es gibt strenge Multiplikationstheorien, insbesondere also die maximale strenge Multiplikationstheorie $\overset{0}{P}$. $\overset{0}{P}$ erfüllt die Regularitätsforderung (R_1).

Dieser Satz 1 ist nicht neu; sein Beweis bildete den wesentlichen Inhalt meiner Arbeit [5]. In dieser Arbeit [5] konnte ich aber auch nur die Existenz der maximalen strengen Multiplikationstheorie $\overset{0}{P}$ beweisen, die Existenz weiterer Multiplikationstheorien blieb völlig ungewiß. In diesem Punkte werden wir im folgenden also weit über [5] hinausgelangen. In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns vor allem einen Überblick über eine große Klasse von wichtigen weiteren Multiplikationstheorien verschaffen, dagegen nicht ausführlich auf die spezielle Struktur von $\overset{0}{P}$ eingehen. Der Vollständigkeit halber und deshalb, weil sie als *Motivierung* unseres jetzigen Hauptanliegens dienen soll, führen wir in diesem Abschnitt aber wenigstens die wichtigste spezielle Eigenschaft von $\overset{0}{P}$ an:

Satz 2: Es sei $x \in U \in \Omega$ und $S \in D(U)$, $A \in \overset{0}{P}(U)$. Für das Produkt $SA \in \overset{0}{P}(U)$ gilt genau dann statt $G_x(SA) \leqq G_x(A) + 1$ die schärfere Ungleichung $G_x(SA) \leqq G_x(A)$, wenn A zerlegbar ist in $A = B + C$ mit $G_x(B) < G_x(A)$ und mit $\bar{H}_x(S) + \bar{H}_x(C) \leqq 0$.

Corollar zu Satz 2: Zwei Distributionen $S, T \in D(U)$ sind genau dann in bezug auf $\overset{0}{P}$ multiplizierbar, wenn für jedes $x \in U$ die Ungleichung $\bar{H}_x(S) + \bar{H}_x(T) \leqq 0$ gilt.

Daher werden durch Prop. 1 aus § 4 in der Tat, wie wir angekündigt hatten, alle absolut multiplizierbaren und sogar alle absolut streng multiplizierbaren Paare von Distributionen gegeben.

Bezüglich des Beweises von Satz 2 ist folgendes zu sagen: Der im Corollar gegebene Spezialfall findet sich schon in [5]; weiter wird dort Satz 2 für den Fall bewiesen, daß $\bar{H}_x(S) \geqq 0$ ist, in dem A also eine Funktion $A \in F(U)$ sein muß. Der vollständige Beweis von Satz 2 aber ist bisher nicht publiziert. Dieser Beweis erfordert langwierige und schwierige Überlegungen, die den Rahmen dieser ohnehin umfangreichen Arbeit sprengen würden. Ich beabsichtige, ihn an anderer Stelle im Rahmen einer Untersuchung der speziellen Eigenschaften der maximalen strengen Multiplikationstheorie $\overset{0}{P}$ zu veröffentlichen.

Wir werden von Satz 2 in seiner allgemeinen Form im folgenden keinerlei Gebrauch machen. Auch das bereits in [5] bewiesene Corollar werden wir bei den folgenden Überlegungen nicht zum Beweise heranziehen, sondern lediglich zu ihrer Motivierung:

Es ist, besonders in den Anwendungen, dringend erwünscht, Multiplikationstheorien zu besitzen, in bezug auf die möglichst viele Paare von Distributionen multiplizierbar sind. Unser Corollar zu Satz 2 zeigt aber, daß dieses Ziel von der maximalen strengen Multiplikationstheorie $\overset{0}{P}$, unbeschadet ihrer fundamentalen Stellung in der Gesamtheit aller strengen Multiplikationstheorien, nur in sehr unvollkommener Weise erreicht wird. In bezug auf $\overset{0}{P}$ sind z. B. Produktbildungen wie $\delta^{(m)}\,\delta^{(n)}$, $\delta^{(m)}\left(\mathrm{Pf.}\,\frac{1}{x^n}\right)$, ... sicher keine Distributionen. – Die Dinge liegen hier also wesentlich anders als bei den Differentiationstheorien, unter denen gerade die Distributionentheorie D die Bedürfnisse der Theorie wie die der Anwendungen in optimaler Weise erfüllte: Hier sollen umgekehrt möglichst wenige Ableitungen von Funktionen wieder Funktionen sein; z. B. soll die Ableitung $\delta = Y'$ von Y keine Funktion (oder, was in diesem Falle dasselbe bedeuten würde, nicht Null) sein.

Es erweist sich also notwendig, neben $\overset{0}{P}$ weitere, in diesem Sinne leistungsfähigere Multiplikationstheorien zu betrachten. Diese müssen tunlichst strenge Multiplikationstheorien sein, damit in ihnen ein brauchbarer Kalkül mit Produkten von Distributionen möglich ist (§ 4, Abschnitt 5), und sie müssen die Regularitätsforderung (R_1) erfüllen, welche das Auftreten pathologischer Erscheinungen ausschließt (§ 4, Abschnitt 3).

Das hiermit umrissene Ziel werden wir mit Hilfe unseres Existenz- und Regularitätssatzes angreifen und, wie sich zeigen wird, in weitgehend befriedigender Weise erreichen können.

3. Erzeugendensysteme

Für jedes $y \in U \in \Omega$ seien zwei absteigende Folgen $A(U, y) = (A^m(U, y))$, $B(U, y) = (B^m(U, y))$ von Teilräumen $A^m(U, y)$, $B^m(U, y)$ von $F(U)$ und eine Folge $v(U, y) = (v^m(U, y))$ von bilinearen Abbildungen $v^m(U, y)$ von $A^m(U, y) \times B^m(U, y)$ in $E^m(U)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ gegeben, welche die Voraussetzungen des Existenzsatzes erfüllen. Wir fassen die $A(U, y)$, $B(U, y)$, $v(U, y)$ zu den Systemen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v}$ zusammen und nennen $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ kurz ein *Erzeugendensystem*. Ebenso fassen wir die von den $A(U, y)$, $B(U, y)$, $v(U, y)$ erzeugten streng produktiven Teilräume $K(A(U, y), B(U, y), v(U, y)) = K(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v}; U, y)$ von $\mathsf{E}(U)$ zu dem System $K(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ zusammen.

Es sei weiter $C(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v}) = K^{\S}(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ der von $K(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ erzeugte separierende Teilraum von E, das System aller streng produktiven (§ 5, Prop. 2) Teilräume $C(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v}; U)$ von $\mathsf{E}(U)$, und schließlich $P(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ die durch $C(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ definierte strenge Multiplikationstheorie, das System aller Räume $P(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v}; U)$. Das System $K(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ ist eine *strenge Basis* von $P(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ (§ 5, Def. 2), und wir nennen $P(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ die *von* $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ *erzeugte strenge Multiplikationstheorie*.

Aus dem Regularitätssatz aus Abschnitt 1 und aus Prop. 3 von § 5 folgt sofort, daß $P(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ die Regularitätsforderung (R_0) erfüllt. Nach § 5, Prop. 4 gilt auch (R_1), sofern $K(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ eine *eigentliche* Basis von $P(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ ist. Ist dies der Fall, so nennen wir $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ ein *eigentliches Erzeugendensystem*.

Es ist klar, daß es nicht nur wegen der Gültigkeit von (R_1) wesentlich ist, sich auf eigentliche Erzeugendensysteme zu beschränken. Denn wir dürfen im allgemeinen nur dann, wenn $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ eigentlich ist, sicher sein, daß $f^{(m)}$, g für beliebige $f \in A^m(U, y)$, $g \in B^m(U, y)$ auch wirklich in bezug auf $P(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ multiplizierbar sind.

Proposition 1: Ein Erzeugendensystem $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ ist sicher dann eigentlich, wenn es für jedes $y \in R$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

(E_1) Für jedes Paar $U, V \in \Omega$ mit $y \in V \subset U$ und jedes $m = 1, 2, \ldots$ sind die Restriktionen von $A^m(U, y)$, $B^m(U, y)$ auf V in $A^m(V, y)$, $B^m(V, y)$ enthalten. Für alle $f \in A^m(U, y)$, $g \in B^m(U, y)$ stimmt die Restriktion von $v^m(U, y)(f, g)$ auf V mit $v^m(V, y)(f_V, g_V)$ überein.

(E_2) Für jedes $U \in \Omega$ mit $y \in U$ und jedes $m = 1, 2, \ldots$ ist $B^m(U, y)$ in $F^m(U, y)$ enthalten:

$$B^m(U, y) \subset F^m(U, y). \tag{7.4}$$

Zum Beweise genügt es offensichtlich zu zeigen, daß für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ und alle $y \in U \in \Omega$, $f \in A^m(U, y)$, $g \in B^m(U, y)$ die Restriktion von $v^m(U, y)(f, g)$ auf $V = U - (y)$ mit dem inneren Produkt $f_V^{(m)} g_V$ übereinstimmt. Für $m = 0$ ist das klar. Wir nehmen die Behauptung für ein $m \geqq 0$ als richtig an und beweisen sie für $m + 1$. Es sei also $f \in A^{m+1}(U, y)$, $g \in B^{m+1}(U, y)$. Wir wählen einen beliebigen, von y verschiedenen Punkt $x \in U$ und zu x, y je eine offene, in U enthaltene Umgebung W, W' mit leerem Durchschnitt, schließlich eine Funktion $h \in F^{m+1}(U)$, die auf W die Restriktion 1 und auf W' die Restriktion 0 besitzt. Dann gilt offenbar $hg \in F^1(U)$, folglich

$$h v^{m+1}(U, y)(f, g) = v^{m+1}(U, y)(f, hg) = (v^m(U, y)(f, hg))' - v^m(U, y)(f, (hg)')$$

und daher auf W nach Induktionsvoraussetzung

$$(v^{m+1}(U,y)(f,g))_W = (f_W^{(m)} g_W)' - f_W^{(m)}(g_W)' = f_W^{(m+1)}) g_W.$$

Da $x \in U$, $x \neq y$ beliebig wählbar ist, gilt dasselbe mithin auch in V, was zu beweisen war.

Es liegt natürlich sehr nahe, die Forderung (E_1) aufzustellen. Hierdurch werden die zu *demselben* $y \in R$ gehörigen $A(U,y)$, $B(U,y)$, $v(U,y)$ in der Tat in einer solchen Weise miteinander verknüpft, daß ihr Zusammenwirken der Eigentlichkeit des Erzeugendensystems $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ nicht entgegensteht. Die Hauptschwierigkeit aber liegt in den Wechselwirkungen zwischen den zu *verschiedenen* $y \in R$ gehörigen $A(U,y)$, $B(U,y)$, $v(U,y)$ begründet. Und eben diese Wechselwirkungen werden durch unsere Forderung (E_2) gewissermaßen trivialisiert. Die Forderung (7.4) bedeutet natürlich eine Einschränkung der Allgemeinheit. Aber sie (und im wesentlichen auch nur sie) ermöglicht es, ein Erzeugendensystem $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ in einfacher Weise als eigentlich zu erkennen und nachzuweisen, nämlich, wie Prop. 1 aussagt, schon dadurch, daß man nur die zu *demselben* $y \in R$ gehörigen $A(U,y)$, $B(U,y)$, $v(U,y)$ miteinander zu vergleichen braucht.

Damit sind wir geradezu zu einer neuen „Rangordnung" unter den „Variablen" U, y gelangt: Bisher haben wir, nach unserer Darstellung zu schließen, immer U als primär angesehen, und y durchlief alle Punkte von U; jetzt liegt es näher, y als primär anzusehen und U alle y enthaltenden offenen Punktmengen durchlaufen zu lassen.

In diesem Lichte aber erscheint die in (7.4) vorgenommene Einschränkung bei weitem nicht mehr so schwerwiegend: Sie besagt nämlich, kurz gesagt, lediglich, daß der zu einem festen $y \in R$ gehörige Bestandteil

$$\mathsf{A}(y) = (A(U,y)),\ \mathsf{B}(y) = (B(U,y)),\ \mathsf{v}(y) = (v(U,y)) \tag{7.5}$$

des Erzeugendensystems $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ nur im Punkte y selbst wirksam werden soll, daß dieser Bestandteil nur die im Punkte y konzentrierten „Singularitäten" der Funktionen, die sich ihrer Multiplizierbarkeit mit mehr oder weniger allgemeinen Distributionen entgegenstellen, überwinden soll – daß wir uns mithin auf solche „isolierten Singularitäten" beschränken werden. – Vom Standpunkte der Anwendungen aus bedarf eine derartige Einschränkung übrigens keiner Rechtfertigung.

Es wird daher im folgenden unser Hauptziel sein, für *festes* $y \in R$ Systeme (7.5) aufzufinden, in denen die Folgen $A(U,y)$, $B(U,y)$, $v(U,y)$ für jedes $U \in \Omega$ mit $y \in U$ die Voraussetzungen des Existenzsatzes und (E_2) erfüllen und in ihrer Gesamtheit durch die Eigenschaft (E_1) miteinander verknüpft sind. Ein solches System $(\mathsf{A}(y), \mathsf{B}(y), \mathsf{v}(y))$ nennen wir kurz ein **zu** *y gehöriges reguläres Erzeugendensystem*. Und wir wissen:

Ist für jedes $y \in R$ ein zugehöriges reguläres Erzeugendensystem $(\mathsf{A}(y), \mathsf{B}(y), \mathsf{v}(y))$ gegeben, so bildet deren Gesamtheit $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$ ein eigentliches Erzeugendensystem der strengen, die Regularitätsforderung (R_1) erfüllenden Multiplikationstheorie $P(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v})$.

4. Die Standard-Multiplikationstheorien

Wir können jetzt sehr leicht eine erste große Klasse von strengen Multiplikationstheorien angeben. Ihre Konstruktion beruht auf einer gewissen Verallgemeinerungsmöglichkeit des inneren Produktes:

Für jedes $U \in \Omega$ und jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ definieren wir eine bilineare Abbildung von $\dot{F}^m(U) \times M^m(U)$ auf $E^m(U)$ durch

$$(7.6) \qquad (g, s) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=j}^{m} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (\dot{g}^{(k-j)} f_k)^{(j)},$$

$$g \in \dot{F}^m(U), \quad s = \sum_{k=0}^{m} f_k z^k \in M^m(U), \quad f_k \in F(U).$$

Die für m, $m+1$ definierten Abbildungen (7.6) stimmen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich $\dot{F}^{m+1}(U) \times M^m(U)$ überein; daher dürfen wir, wie in (7.6) geschehen, statt $(g, s)_m$ kurz (g, s) schreiben.

Wir benutzen also zur Definition die Produktregel in der Form (4.12). Damit ist klar, daß (g, s) für $g \in F^m(U)$ nichts anderes als das innere Produkt gS von g und der durch s definierten Distribution $S \in E^m(U)$ ist. Daher hat $g \in F^m(U), s \in N^m(U) = N(U) \cap M^m(U)$ sicher $(g, s) = 0$ zur Folge. Für beliebiges $g \in \dot{F}^m(U)$ braucht dies jedoch keineswegs der Fall zu sein; daher definiert (7.6) für $m = 0$ keine eindeutige Abbildung von $\dot{F}^m(U) \times E^m(U)$ auf $E^m(U)$. Man verifiziert jedoch mühelos, daß die folgenden Relationen auch hier gültig bleiben:

$$(7.7) \qquad (g, s)' = (\dot{g}, s) + (g, s'), \quad g \in \dot{F}^{m+1}(U), \quad s \in M^m(U),$$

$$(7.8) \qquad h(g, s) = (hg, s), \qquad g \in \dot{F}^m(U), \quad s \in M^m(U), \quad h \in F^m(U).$$

Außerdem ist die Abbildung (7.6) offensichtlich mit der lokalen Struktur von $\dot{F}^m$, M^m, E^m verträglich.

Der Zusammenhang dieser Relationen (7.7), (7.8) mit den in (V_2'), (V_3') auftretenden liegt auf der Hand. Es ist jedoch, wie betont, kein Analogon zur Relation (V_1') vorhanden. Zur Vermeidung dieser Schwierigkeit führen wir den folgenden Begriff ein:

Es sei $y \in R$. Wir nennen einen Teilraum A von $F(R)$ einen *zu y gehörigen Querraum*, wenn seine Restriktion $A(U)$ auf kein $U \in \Omega$ mit $y \in U$ eine von Null verschiedene differenzierbare Funktion $f \in F^1(U)$ enthält. Ist jedem $y \in R$ ein zugehöriger Querraum $A(y)$ zugeordnet, so nennen wir das System A aller $A(y)$ ein *Quersystem*. Offenbar gibt es Querräume und Quersysteme in ungeheuerer Zahl. Wir denken uns ein festes Quersystem $\mathsf{A} = (A(y))$ gegeben.

Für jedes $y \in U \in \Omega$ und jedes $m = 1, 2, \ldots$ sei jetzt $A^m(U, y)$ gleich der Restriktion $A(U, y)$ des zu y gehörigen gegebenen Querraumes $A(y)$ auf U, ferner $A^0(U, y) = F(U)$. Weiter setzen wir $B^m(U, y) = F^m(U, y)$, für $m = 0$ also insbesondere $B^0(U, y) = F(U)$. Dann sind die Voraussetzungen (7.1) und (V_1) bis (V_3) des Existenzsatzes erfüllt, desgleichen (E_2). Für $f \in A^m(U, y)$, $g \in B^m(U, y)$ erklären wir schließlich

$$(7.9) \qquad v^m(U, y)(f, g) = (g, f z^m) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} (f \dot{g}^{(m-j)})^{(j)}.$$

Für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ wird hierdurch eine bilineare Abbildung $v^m(U, y)$ von $A^m(U, y) \times \times B^m(U, y)$ auf $E^m(U)$ erklärt, für $m = 0$ insbesondere das gewöhnliche Produkt fg von $f, g \in F(U)$. Die Voraussetzungen (V_2'), (V_3') sind unmittelbar aus (7.7), (7.8) zu bestätigen, und Voraussetzung (V_1') ist jetzt (wegen der Einführung der Querräume!) trivialerweise erfüllt. Schließlich ist auch (E_1) evident. Wir haben also zu jedem $y \in R$ ein

reguläres Erzeugendensystem $(\mathsf{A}(y), \mathsf{B}(y), \mathsf{v}(y)) = (\mathsf{A}(y))$ und damit ein eigentliches Erzeugendensystem $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v}) = \mathsf{A}$ gewonnen. Die hierdurch erzeugte strenge Multiplikationstheorie $P(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{v}) = P_{\mathsf{A}}$ nennen wir die *zum Quersystem* A *gehörige Standard-Multiplikationstheorie.*

Satz 3: Jedem Quersystem A ist eine wohlbestimmte strenge, die Regularitätsforderung (R_1) erfüllende Multiplikationstheorie, die Standard-Multiplikationstheorie P_{A}, zugeordnet. P_{A} ist die obere Grenze aller strengen Multiplikationstheorien, in denen für alle $y \in U \in \Omega$, $m = 1, 2, \ldots$ und alle $f \in A(U, y)$, $g \in F^m(U, y)$ die Gleichung

$$f^{(m)}g = (g, fz^m) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} (f\dot{g}^{(m-j)})^{(j)} \tag{7.10}$$

gilt.

Ist das Quersystem A_1 in dem Quersystem A_2 enthalten, so ist P_{A_2} offenbar Verengung von P_{A_1}; hiervon gilt aber nicht die Umkehrung. Aus den Überlegungen von § 6, insbesondere aus Formel (6.90), kann man jedoch leicht erschließen, daß aus $\mathsf{A}_1 \subset \mathsf{A}_2$ und der Isomorphie von $P_{\mathsf{A}_1}, P_{\mathsf{A}_2}$ die Gleichheit von $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$ folgt. Diese Tatsache garantiert schon die Existenz einer großen Zahl von strengen Multiplikationstheorien.

Offenbar gibt es unter allen Quersystemen ein einziges *minimales*, nämlich $\overset{0}{\mathsf{A}} = ((0))$; die zugehörige Standard-Multiplikationstheorie $P_{\overset{0}{\mathsf{A}}}$ stimmt mit $\overset{0}{P}$ überein. Andererseits ist jedes Quersystem in einem *maximalen* Quersystem enthalten. Wir wollen, als extremen Fall, die zu einem solchen maximalen Quersystem A gehörige Standard-Multiplikationstheorie P_{A} näher betrachten.

Hierzu wählen wir ein beliebiges $U \in \Omega$ und ein beliebiges $f \in F(U)$. Zu jedem $y \in U$ gibt es, da der Querraum $A(y)$ maximal sein sollte, ein Element $f^0 \in A(U, y)$ mit der Eigenschaft, daß die Restriktion von $f - f^0$ auf eine gewisse, in U enthaltene offene Umgebung V von y in $F^1(V)$ enthalten ist. f_V ist also zerlegbar in $f_V = f^1 + g^1$ mit $f^1 \in A(V, y)$ und $g^1 \in F^1(V)$. Indem wir diesen Schluß jetzt auf $(g^1)'$ anwenden und ihn in entsprechender Weise wiederholen, erhalten wir schließlich: Zu jedem $y \in U$ und jedem $m = 1, 2, \ldots$ gibt es eine (beliebig klein wählbare) in U enthaltene offene Umgebung V_y^m von y, in der eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} f_{V_y^m} &= f_y^1 + g_y^1, & f_y^1 &\in A(V_y^m, y), & g_y^1 &\in F^1(V_y^m), \\ (g_y^1)' &= f_y^2 + g_y^2, & f_y^2 &\in A(V_y^m, y), & g_y^2 &\in F^1(V_y^m), \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\ (g_y^{m-1})' &= f_y^m + g_y^m, & f_y^m &\in A(V_y^m, y), & g_y^m &\in F^1(V_y^m) \end{aligned} \tag{7.11}$$

gilt. Wir können offenbar $V_y^{m+1} \subset V_y^m$ annehmen; die zu $m + 1$ gehörige Darstellung (7.11) geht dann aus der zu m gehörigen durch Bildung der Restriktion auf V_y^{m+1} und Hinzufügung einer weiteren Gleichung hervor.

Wir wählen weiter ein beliebiges $m = 1, 2, \ldots$ und ein beliebiges $g \in \dot{F}^m(U)$. Zu jedem $y \in U$ gibt es dann eine in U enthaltene offene Umgebung V, in der $g_V \in F^m(V, y)$ gilt. Wir dürfen annehmen, daß V mit dem im vorigen Absatz gewonnenen V_y^m übereinstimmt.

Aus (7.11) folgt dann in $P_A(V)$

$$(7.12)\qquad (f^{(m)}g)_V = \sum_{l=1}^{m} (f_y^{m+1-l})\, g_V^{(l)} + (g_y^m)'\, g_V.$$

Nach (7.10) ist $(f^{(m)}g)_V$ also eine Distribution: $(f^{(m)}g)_V \in E^m(V)$. Daher ist auch $f^{(m)}g$ eine Distribution: $f^{(m)}g \in D(U)$, und zwar gilt nach § 3, Prop. 2 sogar $f^{(m)}g \in E^m(U)$. – Weiter haben wir nach (7.11) in $M^m(V)$

$$(7.13)\qquad f_V\, z^m = \sum_{l=1}^{m} f_y^{m+l-1}\, z^l + (g_y^m)' - t_y^m$$

mit den Abkürzungen

$$(7.14)\qquad s_y^l = (g_y^l)' - g_y^l\, z \in N^1(V), \quad t_y^m = \sum_{l=1}^{m} (s_y^{m+1-l})\, z^{l-1} \in N^m(V).$$

Vergleichen wir (7.12) und (7.13) und berücksichtigen (7.10), so folgt mithin

$$(7.15)\qquad (f^{(m)}g)_V = (g, f z^m)_V + (g_V, t_y^m).$$

Ist insbesondere $g_V \in F^m(V)$, so verschwindet hierin der letzte Summand, und auf beiden Seiten steht das innere Produkt $f_V^{(m)} g_V$. Weiter verschwindet dieser letzte Summand für $f \in A(U, y)$; das folgt einerseits aus (7.10), andererseits daraus, daß in diesem Falle alle g_y^l Null sind. Für ein beliebiges $f \in F(U)$ aber ist er im allgemeinen von Null verschieden, und seine Form hängt wesentlich von der speziellen Wahl des Querraumes A ab.

Wir gehen noch einen Schritt weiter: Es werde $m, k = 1, 2, \ldots$ und $g \in \dot{F}^{m+k}(U)$ beliebig gewählt, für jedes $y \in U$ wieder $V_y^{m+k} = V$ gesetzt und $g_V \in F^{m+k}(V, y)$ angenommen. Dann gilt nach (4.12) in $P_A(V)$

$$(f^{(m)} g^{(k)})_V = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (f^{(m+k-i)} g)_V^{(i)}.$$

Setzt man hierin (7.15) ein, so folgt nach (7.7)

$$(f^{(m)} g^{(k)})_V = (\dot{g}^{(k)}, f z^m)_V + \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (g_V, t_y^{m+k-i})^{(i)}$$

und hieraus nach kurzer Rechnung unter Berücksichtigung von (7.14)

$$(7.16)\qquad (f^{(m)} g^{(k)})_V = (f^{(m)} \dot{g}^{(k)})_V + \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{l} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \left(g_V, (s_y^{m+k-l})\, z^{l-i}\right)^{(i)}.$$

Es ist mithin auch $(f^{(m)} g^{(k)})_V$ eine Distribution, und zwar unterscheidet sie sich von $(f^{(m)} \dot{g}^{(k)})_V$ nur höchstens um eine Distribution der Ordnung k. Daher gilt $(f^{(m)} g^{(k)})_V \in E^{Max\,(m,k)}(V)$. Auch $f^{(m)} g^{(k)}$ ist wieder eine Distribution: $f^{(m)} g^{(k)} \in D(U)$, und nach § 3 Prop. 2 gilt sogar $f^{(m)} g^{(k)} \in E^{Max\,(m,k)}(U)$. Damit haben wir den folgenden

Satz 4: Es sei A ein maximales Quersystem. In bezug auf die zugehörige Standard-Multiplikationstheorie P_A ist jede Distribution $S \in E^m(U)$ multiplizierbar mit jeder Distribution $T \in E^k(U)$ der Form

$$T = \sum_{j=0}^{k} g_j^{(j)} \qquad \text{mit } g_j \in \dot{F}^{m+j}(U). \tag{7.17}$$

Und zwar gilt in $P_A(U)$

$$S\,T = \sum_{j=0}^{k} S\,\dot{g}_j^{(j)} + R \tag{7.18}$$

und dabei für jedes $y \in U$

$$H_y(R) \leqq H_y(T) \qquad \text{und damit } H_y(S\,T) \leqq \operatorname{Max}\left(H_y(S), H_y(T)\right). \tag{7.19}$$

Dieser Satz ist das umfassende Ergebnis hinsichtlich der Multiplizierbarkeit von Distributionen, das wir aufzuweisen haben: In einer zu einem maximalen Quersystem gehörigen Standard-Multiplikationstheorie P_A sind zwei Distributionen S, T immer dann multiplizierbar, wenn wenigstens die zweite von ihnen nur „isolierte Singularitäten" besitzt. – Dabei haben wir Satz 4 noch nicht einmal in vollster Allgemeinheit, für $S, T \in D(U)$ formuliert.

Ist das Quersystem A nicht notwendig maximal, so überträgt sich Satz 4 mit der Einschränkung, daß in bezug auf P_A nur *gewisse* $S \in E^m(U)$ mit *allen* $T \in E^k(U)$ der Form (7.17) multiplizierbar sind, unter Erhaltung der Relationen (7.18), (7.19).

Zur Illustrierung der vorangehenden Überlegungen bringen wir ein wichtiges *Beispiel:* $y \in U \in \Omega$ seien beliebig, ebenso $f \in F(U)$, und es sei $g = Y_y \in F^\infty(U, y)$, die Heavisidefunktion in bezug auf den Punkt y. Für jedes $m = 1, 2, \ldots$ gilt in einer gewissen Umgebung V von y nach (7.14)

$$(Y_y, s_y^m) = c_m(y)\,\delta_y, \qquad (Y_y, t_y^m) = \sum_{l=1}^{m} c_{m+1-l}(y)\,\delta_y^{(l-1)}$$

mit

$$c_m(y) = -g_y^m(y). \tag{7.20}$$

Dann gilt nach (7.15), zunächst in V und damit auch in ganz U,

$$f^{(m)}\,Y_y = (Y_y f)^{(m)} + \sum_{l=1}^{m} c_{m+1-l}(y)\,\delta_y^{(l-1)}, \tag{7.21}$$

weiter nach (7.16) für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f^{(m)}\,\delta_y^{(k)} = -\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} c_{m+1+k-i}(y)\,\delta_y^{(i)}. \tag{7.22}$$

Diese Formeln (7.21), (7.22) gelten in $P_A(U)$ für jedes $f \in F(U)$. Die Koeffizienten $c_m(y)$ sind natürlich von f abhängig, aber im allgemeinen durch f nicht eindeutig bestimmt, d. h.

in allen zu maximalen Quersystemen A gehörigen Standard-Multiplikationstheorien P_A dieselben. Maßgebend hierfür ist das „Verhalten" von f in der Umgebung von y. Gilt in einer gewissen Umgebung V von y etwa $f_V \in F^m(V)$ für ein $m = 1, 2, \ldots$, so sind $c_1(y)$, $\ldots$, $c_m(y)$ nach (4.18) eindeutig festgelegt zu

$$c_j(y) = -f^{(j-1)}(y), \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{7.23}$$

Andererseits gilt die folgende

Proposition 2: Es sei $y \in U \in \Omega$, und für keine in U enthaltene Umgebung V von y sei die Restriktion von $f \in F(U)$ in $F^1(V)$ enthalten. Dann gibt es zu beliebig vorgegebenen Zahlen $c_m(y)$, $m = 1, 2, \ldots$ ein Quersystem A (und folglich auch ein maximales) mit der Eigenschaft, daß in $P_A(U)$ die Relationen (7.21), (7.22) gelten.

Der Beweis ist sehr einfach: Man setze f irgendwie zu einer auf R definierten Funktion $f_1 \in F(R)$ fort, ferner setze man etwa $h_m = (x-y)^{1-1/2m} - c_m(y)$, $m = 1, 2, \ldots$ und erkläre den zu y gehörigen Querraum $A(y)$ als den von $f_1 - h_1$ und allen $h'_m - h^{m+1}$, $m = 1, 2, \ldots$ erzeugten Teilraum von $F(R)$.

Wir haben diese Tatsache auch deshalb für sich formuliert, um daraus sogleich eine wichtige, nach allem Vorangehenden evidente Folgerung zu ziehen:

Satz 5: Es gibt unendlich viele, paarweise nicht isomorphe strenge Multiplikationstheorien. Genauer: Die Menge aller minimalen strengen Multiplikationstheorien besitzt mindestens die Mächtigkeit der Funktionenmenge.

Wir müssen jedoch konstatieren, daß die Standard-Multiplikationstheorien, so natürlich ihre Einführung und so weitreichend die in ihnen gewährleistete Multiplizierbarkeit von Distributionen auch sein mag, doch nicht alle Forderungen erfüllen, die von seiten der Anwendungen gestellt werden. Der Grund hierfür ist die zweite Ungleichung (7. 19). Aus ihr folgt z. B., daß in einer Standard-Multiplikationstheorie niemals die erste der Relationen (4.23) gelten kann (die zweite ist, wie wir wissen, in einer strengen Multiplikationstheorie ohnehin unmöglich). Es erweist sich also als notwendig, weitere strenge Multiplikationstheorien aufzusuchen, in denen diese zweite Ungleichung (7.19) nicht allgemein gilt. Der Existenzsatz wird uns auch hierzu verhelfen. In den so gewonnenen Multiplikationstheorien haben wir hinsichtlich der „Werte" des Produktes von speziellen Distributionenpaaren dann mehr Variationsmöglichkeit als in den Standard-Multiplikationstheorien, müssen dies aber, wie sich zeigen wird, damit erkaufen, daß bei weitem nicht so viele Distributionenpaare multiplizierbar sind wie in diesen Standard-Multiplikationstheorien.

5. Der Basissatz

Wir vergegenwärtigen uns noch einmal den Zweck, den wir mit der Einführung der Querräume und Quersysteme verfolgt haben: Es sollte damit erreicht werden, daß die Voraussetzungen (V_1), (V'_1) des Existenzsatzes, die bei der Definition der Abbildungen v^m durch (7.9) auf Schwierigkeiten führen würden, trivialerweise erfüllt sind. Auch hier wird es nützlich sein, diese Voraussetzungen (V_1), (V'_1) in derselben Weise auszuschalten. Ist man sicher, daß A^1 (und damit A^m für jedes $m = 1, 2, \ldots$) keine von Null verschiedene differenzierbare Funktion $f \in F^1(U)$ enthält, so erkennt man sofort, daß sich die übrigen Voraussetzungen des Existenzsatzes nur auf die lineare Vektorraumstruktur der A^m beziehen: Man braucht die Abbildungen v^m nur für *einzelne*, in ihrer Gesamtheit über $F^1(U)$ linear unabhängige und A^m aufspannende Funktionen $f \in A^m$ zu erklären, um sie alsdann

durch die Forderung der Linearität auf ganz A^m zu gewinnen. Es bedeutet also keinerlei Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die A^m, entweder bis zu einem gewissen Maximalindex m_0 hinauf oder aber für alle m, als nur aus den reellen Vielfachen einer einzelnen Funktion $f \in F(U), f \notin F^1(U)$ bestehend annehmen.

Damit sind alle Schwierigkeiten bei der Definition geeigneter Abbildungen v^m auf deren in (V_2), (V_3), (V_2'), (V_3') zum Ausdruck kommende Verknüpfung mit der Struktur der B^m konzentriert, und zwar ist hierbei sowohl die Differentiation als auch die Multiplikation im Spiele. Diese Schwierigkeiten treten jetzt, da wir uns nicht mehr auf die vorweg bekannten Abbildungen (7.6) mit den analogen Eigenschaften (7.7), (7.8) stützen können, in ihrem ganzen Umfange in Erscheinung. Zu ihrer Überwindung denken wir uns die B^m in geeigneter Weise durch eine Familie von Funktionen $g_i \in F^m(U, y)$ erzeugt, welche sowohl hinsichtlich der Differentiation als auch hinsichtlich der Multiplikation gewisse Basiseigenschaften besitzt. Damit die Funktionen g_i weiter für alle betrachteten m dieselben sein können, werden wir im ersten der oben genannten Fälle, in dem die Folge der A^m also bei einem gewissen Maximalindex m_0 abbricht, $g_i \in F^{m_0}(U, y)$ vorauszusetzen haben, im zweiten Falle sogar $g_i \in F^\infty(U, y)$. Beide Fälle lassen sich völlig analog behandeln; wir beschränken uns daher auf den zweiten.

Wir werden so in natürlicher Weise auf die im folgenden Satz präzisierten Voraussetzungen geführt:

Satz 6: Es sei $y \in U \in \Omega$ und $f \in F(U)$ eine Funktion, deren Restriktion auf keine in U enthaltene offene Umgebung V von y in $F^1(V)$ enthalten ist. Es sei weiter eine Familie $(g_i)_{i \in I}$ von Funktionen $g_i \in F^\infty(U, y)$ und eine Folge von Familien $(S_i^m)_{i \in I}$, $m = 1, 2, \ldots$ von Distributionen $S_i^m \in E^m(U)$ gegeben, welche für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ die folgende Eigenschaft besitzen:

(B) Aus

$$\sum_i h_i g_i \in F^1(U), \qquad h_i \in F^{m+1}(U), \tag{7.24}$$

$$h_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } i \in I$$

folgt für jedes $i \in I$ eine Darstellung der Form

$$h_i \dot{g}_i = p_i g_i + q_i, \qquad p_i, q_i \in F^m(U), \tag{7.25}$$

für welche

$$h_i S_i^{m+1} = h_i (S_i^m)' - p_i S_i^m - q_i f^{(m)} \qquad \text{mit } S_i^0 = f g_i \text{ für } m = 0 \tag{7.26}$$

gilt.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein zu y gehöriges reguläres Erzeugendensystem $(\mathsf{A}(y), \mathsf{B}(y), \mathsf{v}(y))$ mit

$$f \in A^m(U, y), \quad g_i \in B^m(U, y), \quad v^m(U, y)(f, g_i) = S_i^m \tag{7.27}$$

für alle $m = 1, 2, \ldots$ und alle $i \in I$.

Das heißt nach Abschnitt 3: Es gibt eine strenge, die Regularitätsforderung (R_1) erfüllende Multiplikationstheorie P mit der Eigenschaft, daß in $P(U)$

$$f^{(m)} g_i = S_i^m \tag{7.28}$$

für alle $m = 1, 2, \ldots$ und alle $i \in I$ gilt.

Beweis: Wir überlegen zunächst, daß für jedes $m = 0, 1, 2 \ldots$ aus

$$\sum_i h_i g_i + h = 0, \qquad h_i, h \in F^m(U), \tag{7.29}$$

auch

$$\sum_i h_i S_i^m + h f^{(m)} = 0 \tag{7.30}$$

folgt. – Für $m = 0$ ist das wegen $S_i^0 = f g_i$ klar. Wir setzen die Behauptung für ein $m \geqq 0$ als richtig voraus und beweisen sie für $m + 1$. Es gilt also

$$\sum_i h_i g_i + h = 0, \qquad h_i, h \in F^{m+1}(U). \tag{7.31}$$

Dann haben wir nach Induktionsvoraussetzung zunächst

$$\sum_i h_i S_i^m + h f^{(m)} = 0$$

und hieraus durch Differentiation

$$\sum_i h_i' S_i^m + \sum_i h_i (S_i^m)' + h' f^{(m)} + h f^{(m+1)} = 0. \tag{7.32}$$

Weiter folgt aus (7.31) nach (B) für jedes $i \in I$ Gleichung (7.25), und nach (7.26)

$$\sum_i h_i S_i^{m+1} = \sum_i h_i (S_i^m)' - \sum_i p_i S_i^m - \sum_i q_i f^{(m)}. \tag{7.33}$$

Schließlich erhalten wir durch Differentiation von (7.31) wegen (7.25)

$$\sum_i (h_i' + p_i) g_i + \left(\sum_i q_i + h' \right) = 0$$

und daher, wieder nach Induktionsvoraussetzung,

$$\sum_i h_i' S_i^m + \sum_i p_i S_i^m + \sum_i q_i f^{(m)} + h' f^{(m)} = 0. \tag{7.34}$$

Kombinieren wir nun Gleichung (7.33) mit (7.32), (7.34), so folgt sogleich

$$\sum_i h_i S_i^{m+1} + h f^{(m+1)} = 0,$$

also unsere Behauptung für $m + 1$.

Es sei jetzt $A^0(U, y) = B^0(U, y) = F(U)$, für $m = 1, 2, \ldots$ weiter $A^m(U, y)$ der Teilraum aller reellen Vielfachen von f und $B^m(U, y)$ der Teilraum aller $g \in F^m(U, y)$ der Form

$$g = \sum h_i g_i + h, \qquad h_i, h \in F^m(U). \tag{7.35}$$

Die Voraussetzungen (V_1), (V_3) des Existenzsatzes sind dann offensichtlich erfüllt, und nach (B) gilt dasselbe von (V_2). Auf Grund des eben Bewiesenen wird ferner durch

$$v^m(U, y)(f, g) = \sum_i h_i S_i^m + h f^{(m)} \tag{7.36}$$

für $m = 1, 2, \ldots$ und durch $v^0(U, y)(f, g) = fg$ für $m = 0$ eine bilineare Abbildung $v^m(U, y)$ von $A^m(U, y) \times B^m(U, y)$ in $E^m(U)$ erklärt. Die Voraussetzungen (V_0'), (V_1'), (V_3') sind wieder offensichtlich erfüllt. Zum Beweise von (V_2') sei ein $g \in B^{m+1}(U, y) \cap F^1(U)$ in der Darstellung

$$g = \sum_i h_i g_i + h, \qquad h_i, h \in F^{m+1}(U)$$

gegeben. Nach (7.25), (7.36) hat man dann

$$v^{m+1}(U, y)(f, g) = \sum_i h_i S_i^{m+1} + h f^{(m+1)},$$

$$v^m(U, y)(f, g) = \sum_i h_i S_i^m + h f^{(m)},$$

$$v^m(U, y)(f, g') = \sum_i (h_i' + p_i) S_i^m + \sum_i q_i f^{(m)} + h' f^{(m)}$$

und folglich nach (7.26)

$$v^{m+1}(U, y)(f, g) + v^m(U, y)(f, g') - (v^m(U, y)(f, g))'$$
$$= \sum_i (h_i S_i^{m+1} - h_i (S_i^m)' + p_i S_i^m + q_i f^{(m)}) = 0.$$

Damit sind also alle Voraussetzungen des Existenzsatzes erfüllt.

Für jede in U enthaltene offene Umgebung V von y ist schließlich nach unseren Voraussetzungen die Funktion f_V gegeben, ferner die Familie $((g_i)_V)_{i \in I}$ der Funktionen $(g_i)_V \in F^\infty(V, y)$ und die Familie $((S_i^m)_V)_{i \in I}$ der Distributionen $(S_i^m)_V \in E^m(V)$. Man überzeugt sich mühelos, daß alle diese wieder die Eigenschaft (B) besitzen. In einem solchen V können wir also alle unsere bisherigen Betrachtungen wiederholen. Insbesondere sei wieder $A^0(V, y) = B^0(V, y) = F(V)$, für $m = 1, 2, \ldots$ weiter $A^m(V, y)$ der Teilraum aller reellen Vielfachen von f_V und $B^m(V, y)$ der Teilraum aller $g \in F^m(V, y)$ der Form

$$g = \sum_i h_i (g_i)_V + h, \qquad h_i, h \in F^m(V),$$

sowie $v^0(V, y)(f, g) = fg$ für $m = 0$ und

$$v^m(V, y)(f_V, g) = \sum_i h_i (S_i^m)_V + h f_V^{(m)}$$

für $m = 1, 2, \ldots$ Dann sind wieder alle Voraussetzungen des Existenzsatzes erfüllt. Schließlich setzen wir für eine nicht in U enthaltene offene Umgebung V von y einfach $A^0(V, y) = B^0(V, y) = F(U)$ und $A^m(V, y) = B^m(V, y) = (0)$ für $m = 1, 2, \ldots$ sowie

$v^0(V, y)(f, g) = fg$ für $f, g \in F(V)$. Dann sind die Forderungen (E_1), (E_2) offensichtlich erfüllt, wir haben mithin ein zu y gehöriges reguläres Erzeugendensystem $(\mathsf{A}(y), \mathsf{B}(y), \mathsf{v}(y))$ gewonnen, für welches (7.27) gilt. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Corollar zu Satz 6: Es sei $y \in U \in \Omega$ und $(f_l)_{l \in L}$ eine Familie von Funktionen $f_l \in F(U)$, deren Restriktionen auf jede in U enthaltene offene Umgebung V von y linear unabhängig über $F^1(V)$ sind. Es sei weiter eine Familie $(g_i)_{i \in I}$ von Funktionen $g_i \in F^\infty(U, y)$ und für jedes $l \in L$ eine Folge von Familien $(S^m_{i,l})_{i \in I}$, $m = 1, 2, \ldots$ von Distributionen $S^m_{i,l} \in E^m(U)$ gegeben, welche für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ in bezug auf f_l die Eigenschaft (B) besitzen.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein zu y gehöriges reguläres Erzeugendensystem $(\mathsf{A}(y), \mathsf{B}(y), \mathsf{v}(y))$ mit

$$f_l \in A^m(U, y), \quad g_i \in B^m(U, y), \quad v^m(U, y)(f_l, g_i) = S^m_{i,l} \tag{7.37}$$

für alle $m = 1, 2, \ldots$ und alle $i \in I$, $l \in L$.

Das heißt wieder: Es gibt eine strenge, die Regularitätsforderung (R_1) erfüllende Multiplikationstheorie P mit der Eigenschaft, daß in $P(U)$

$$f_l^{(m)} g_i = S^m_{i,l} \tag{7.38}$$

für alle $m = 1, 2, \ldots$ und alle $i \in I$, $l \in L$ gilt.

Nach unseren Vorbemerkungen ist dieses Corollar in der Tat eine triviale Folgerung aus Satz 6.

6. Folgerungen

Aus Satz 6 gewinnt man nun ohne Schwierigkeiten eine Fülle von wichtigen strengen Multiplikationstheorien. Insbesondere liefert dieser Satz in – soweit wir sehen – allen für die Anwendungen bedeutungsvollen Fällen scharfe Resultate. Das wird sofort klar, wenn wir aus ihm die folgende Konsequenz (eine unter vielen möglichen Konsequenzen) ziehen:

Proposition 3: Es sei $y \in U \in \Omega$ und $f \in F(U)$ eine Funktion, deren Restriktion auf keine in U enthaltene offene Umgebung V von y in $F^1(V)$ enthalten ist. Es sei weiter $(g_i)_{i \in I}$ eine Familie von Funktionen $g_i \in F^\infty(U, y)$, welche für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ die folgende Eigenschaft besitzt:

(B′) Aus

$$\sum_i h_i g_i \in F^1(U), \qquad h_i \in F^{m+1}(U), \tag{7.24}$$

$$h_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } i \in I$$

folgt für jedes $i \in I$

$$h_i g_i \in F^1(U), \qquad h_i \dot{g}_i \in F^m(U). \tag{7.38}$$

Es sei schließlich $(T^m_i)_{i \in I}$ eine Folge von Familien von Distributionen $T^m_i \in E^{m+1}(U)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Unter diesen Voraussetzungen gibt es *genau dann* eine strenge Multiplikationstheorie P mit der Eigenschaft, daß in $P(U)$

$$f^{(m)} g_i' = T_i^m \tag{7.39}$$

für alle $m = 0, 1, 2, \ldots$ und alle $i \in I$ gilt, wenn in $D(U)$ für alle $m = 0, 1, 2, \ldots, i \in I$ und $h \in F^{m+1}(U)$ mit $hg_i \in F^1(U)$ die Relation

$$f^{(m)} (h\dot{g}_i) = T_i^m h \tag{7.40}$$

besteht. Ist das der Fall, so erfüllt die obere Grenze aller Multiplikationstheorien P mit dieser Eigenschaft die Regularitätsforderung (R_1).

Für jedes $h \in F^{m+1}(U)$ mit $hg_i \in F^1(U)$ gilt in $D(U)$ nämlich

$$hg_i' = (hg_i)' - h' g_i = h\dot{g}_i;$$

also ist die Bedingung (7.40) sicher notwendig. Und aus Satz 6 folgt umgekehrt sofort, daß sie auch hinreicht.

Wir geben für Proposition 3 ein charakteristisches, für die Anwendungen vor allen anderen wichtiges **Beispiel:**

Die Familie $(g_i)_{i \in I}$ bestehe aus den beiden Funktionen

$$g_1 = Y_y, \qquad g_2 = \log |x - y|, \tag{7.41}$$

die beide offenbar in $F^\infty (U, y)$ enthalten sind. Offenbar ist

$$\dot{g}_1 = 0, \qquad \dot{g}_2 = \frac{1}{x-y}. \tag{7.42}$$

Wir überzeugen uns, daß die Bedingungen (B′) erfüllt sind: Aus (7.24) folgt zunächst $h_1(y) = h_2(y) = 0$ und damit $h_1 Y_y \in F^1(U)$, also auch $h_2 \log|x-y| \in F^1(U)$. Die zweite Bedingung (7.38) ist für $i = 1$ trivialerweise erfüllt, ebenso für $i = 2$ im Falle $m = 0$. Für $m = 1, 2, \ldots$ hat $h \in F^{m+1}(U)$, $h(y) = 0$ andererseits, wie schon bei Gleichung (4.19) erwähnt, $h(\log|x-y|)^{\cdot} = \frac{h}{x-y} \in F^m(U)$ zur Folge, deshalb auch $h \log|x-y| \in F^1(U)$.

Die Bedingungen (7.40) lauten hier also erstens für $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$T_1^m h = 0 \qquad \text{für alle } h \in F^{m+1}(U) \text{ mit } h(y) = 0 \tag{7.43}$$

und zweitens für $m = 0$

$$T_2^0 \frac{1}{\log|x-y|} = \frac{f}{(x-y)\log|x-y|} \tag{7.44}$$

und für $m = 1, 2, \ldots$

$$T_2^m h = f^{(m)} \frac{h}{x-y} \qquad \text{für alle } h \in F^{m+1}(U) \text{ mit } h(y) = 0. \tag{7.45}$$

Die Gleichungen (7.43) lassen sich bei beliebigem $f \in F(U)$ natürlich leicht erfüllen, nämlich durch

$$T_1^m = -c_{m+1}(y)\, \delta_y$$

für beliebige Koeffizienten $c_{m+1}(y)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Wir erhalten aus (7.39) für eine geeignete strenge Multiplikationstheorie P dann in $P(U)$

$$f^{(m)}\,\delta_y = -\,c_{m+1}(y)\,\delta_y \tag{7.46}$$

oder, durch leichte Umrechnung,

$$f^{(m)}\,Y_y = (f\,Y_y)^{(m)} + \sum_{j=1}^{m} c_{m+1-j}(y)\,\delta_y^{(j-1)} \tag{7.47}$$

für $m = 0, 1, 2, \ldots$ Andererseits folgt aus (7.46) allgemeiner für beliebiges $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f^{(m)}\,\delta_y^{(k)} = -\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} c_{m+1+k-i}(y)\,\delta_y^{(i)}. \tag{7.48}$$

Wir bemerken, daß diese Formeln (7.47), (7.48) völlig identisch sind mit den in den Standard-Multiplikationstheorien P_A gewonnenen (7.21), (7.22).

Ebenso leicht läßt sich die Gleichung (7.44) bei beliebigem $f \in F(U)$ lösen, nämlich durch

$$T_2^0 = \frac{f}{x-y} + d_1(y)\,\delta_y \tag{7.49}$$

mit beliebigem $d_1(y)$. Die Gleichungen (7.45) bedürfen jedoch für jedes $f \in F(U)$ einer gesonderten Betrachtung. Nehmen wir beispielsweise $f = Y_y$ an, so gilt für jedes $h \in F^{m+1}(U)$, $m = 1, 2, \ldots$ mit $h(y) = 0$ nach (4.19)

$$f^{(m)}\,\frac{h}{x-y} = \delta_y^{(m-1)}\,\frac{h}{x-y} = -\frac{1}{m}\,\delta_y^{(m)}\,h,$$

die Gleichungen (7.45) nehmen also die Form

$$\left(T_2^m + \frac{1}{m}\,\delta_y^{(m)}\right) h = 0$$

an und lassen sich durch

$$T_2^m = -\frac{1}{m}\,\delta_y^{(m)} + d_{m+1}(y)\,\delta_y$$

mit beliebigem Koeffizienten $d_{m+1}(y)$, $m = 1, 2, \ldots$ mühelos befriedigen. Für eine geeignete strenge Multiplikationstheorie P haben wir in $P(U)$ mithin neben (7.46) bis (7.49) für $f = Y_y$ die Gleichungen

$$\delta_y^{(m)}\left(\mathrm{Pf.}\,\frac{1}{x-y}\right) = -\frac{1}{m+1}\,\delta_y^{(m+1)} + d_{m+2}(y)\,\delta_y, \tag{7.50}$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$ Allgemeiner folgt hieraus für beliebiges $k = 1, 2, \ldots$ wieder

$$\delta_y^{(m)}\left(\mathrm{Pf.}\,\frac{1}{(x-y)^k}\right) = (-1)^k\,\frac{m!}{(m+k)!}\,\delta_y^{(m+k)} + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} \binom{k-1}{i} d_{m+1+k-i}(y)\,\delta_y^{(i)}. \tag{7.51}$$

Hierin ist, als einfachster Spezialfall, die Formel (4.23) enthalten, die uns mit Hilfe der Standard-Multiplikationstheorie nicht erreichbar war.

Dieses eine Beispiel, das sich noch beliebig ausbauen ließe, soll die Schlagkraft unseres Satzes 6 und damit letztlich die unseres Existenz- und Regularitätssatzes demonstrieren. Das Corollar zu Satz 6 erlaubt die gleichzeitige Behandlung vieler Funktionen $f_l \in F(U)$ bei gleichem $y \in R$, und mit der Einführung der zu einem Punkte gehörigen regulären Erzeugendensysteme (Prop. 2) haben wir die in *derselben Multiplikationstheorie* vollziehbaren, zu *verschiedenen Punkten* $y \in R$ gehörigen Betrachtungen voneinander völlig unabhängig gemacht. Wir gelangen so zu einer Fülle von strengen, die Regularitätsforderung (R_1) erfüllenden Multiplikationstheorien, welche alle die in den Anwendungen benutzten Produktrelationen erfassen dürften.

Wir bemerken jedoch, daß in bezug auf eine in dieser Weise aus Satz 6 gewonnene Multiplikationstheorie niemals eine so weitgehende Multiplizierbarkeit von Distributionen bestehen kann wie laut Satz 4 in bezug auf die zu maximalen Quersystemen gehörigen Standard-Multiplikationstheorien. Man kann z. B. zeigen, daß die Distribution δ'_y und die Funktion $\frac{1}{(x-y)^2}$ sicher nicht multiplizierbar sind in bezug auf eine strenge, (R_1) erfüllende Multiplikationstheorie, in welcher die Formeln (7.49), (7.50) gelten. – Den einfachen Beweis unterdrücken wir.

Mit Proposition 3 schließt sich der Kreis der Multiplikationstheorie. Die Ergebnisse einer „naiv" geübten „Multiplikation durch Division" haben wir, soweit sie legitim sind, zurückgewonnen als Ausfluß einer umfassenden Theorie, welche dem Umgange mit Produkten von Distributionen dieselbe Sicherheit verleiht wie dem mit den Distributionen selbst.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. Bourbaki, Éléments de Mathématique. Livre II, Chap. III: Algèbre Multilinéaire. Actual. Sci. Industr. 1044 (1948)

[2] –, Livre III, Chap. I: Structures Topologiques. Actual. Sci. Industr. 1142 (9151).

[3] –, Livre III, Fascicule de Résultats. Actual. Sci. Industr. 1196 (1953).

[4] H. König, Neue Begründung der Theorie der „Distributionen" von L. Schwartz. Math. Nachr. 9 (1953), 129–148

[5] –, Multiplikation von Distributionen I. Math. Ann. 128 (1954), 420–452

[6] –, Multiplikationstheorie der verallgemeinerten Distributionen. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft vorgelegter Bericht. Würzburg 1955

[7] –, Multiplikation und Variablentransformation in der Theorie der Distributionen. Arch. f. Math. VI (1955), 391–396

[8] L. Schwartz, Théorie des Distributions, I. Actual. Sci. Industr. 1091 (1950).

[9] –, Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions. C. r. Acad. Sci. Paris 239 (1954), 847–848

SACHVERZEICHNIS

(Die Zahlen geben die Seiten an)

Absolut multiplizierbare Distributionen 30
Absolut streng multiplizierbare Distributionen 35
Algebraische Struktur 10
Äquivalenzrelation 10

Basis einer Multiplikationstheorie 39
– eigentliche 39
– strenge 39
Basissatz 70

Charakteristische Abbildung einer Differentiationstheorie 19
– einer Multiplikationstheorie 27
Charakteristisches System einer Differentiationstheorie 19
– einer Multiplikationstheorie 27

Differentiation 16
– erweiterte 17
Differentiationssystem 18
Differentiationstheorie 18
Diracdistribution 23
Distributionentheorie 21

E, $E(U)$ 18
Eigentliche Basis einer Multiplikationstheorie 39
Existenzsatz 53, 61
Erzeugendensystem 64
– eigentliches 64
– reguläres 65

F, F^m 15, 17
F_n^p, $F_{n+1}^{p;j}$ 42
Funktionenklassen 15
Funktionensystem 9
– verallgemeinertes 10

G, G_x 28, 29
$\tilde{G}$ 37

H, $\bar{H}$, H_x, $\bar{H}_x$ 21, 22
H', $\bar{H}'$, H'_x, $\bar{H}'_x$ 28, 29
$\hat{H}$, $\bar{\hat{H}}$ 37
$\overset{0}{H}$ 54
Hauptsytem 44
– spezielles 44
– trivialles 44
Heavisidefunktion 23
Homomorphismus lokaler Strukturen 10
Hüllensystem 11

Isomorphismus lokaler Strukturen 10
Inneres Produkt 32

$\overset{0}{K}$, $\overset{0}{K}(U)$ 48
K_{n+1}, $K_{n+1;j}$ 49
$\overset{0}{K}_n$ 50
$\bar{K}_n$, $\bar{\bar{K}}_n$ 54
Kommutativitätsrelation 33
Komplettierende Äquivalenzrelation 13

Leibnizsche Regel 31
Lokalisationsprinzip 11
(L_1), (L_2) 11
Lokale Struktur 9

M, $M(U)$ 19
Maximale Differentiationstheorie = Distributionentheorie 21
Maximale Multiplikationstheorie 27
– strenge 35, 62
Multiplikationssystem 24
Multiplikationstheorie 25

Multiplikatives Produkt 32
Multiplizierbare Distributionen 30

N, $N(U)$ 19

Ordnung einer Distribution 22
Ordnung 28

Polynomialkoeffizienten 41
Produktiver Teilraum 36
Produktregel 24
Produktsystem 10
Pseudofunktion 23

Querraum 66
Quersystem 66
Quotientensystem 10

Regularitätsforderung (R_0) 30
– (R_1) 30
– (r_0), (r_1) 37
– (r_2) 38
Reguläres Erzeugendensystem 65
Regularitätssatz 61, 62
Restriktion 9
Rückbild eines Hauptsystems 44

Separierende Äquivalenzrelation 13
– r Teilraum 13
Spezielles Hauptsystem 44
Strenge Basis einer Multiplikationstheorie 39
Streng produktiver Teilraum 36
Strenge Multiplikationstheorie 34
Standard-Multiplikationstheorie 65
Stufe 28
System, lokal strukturiertes 9

Teilsystem 9
Teilung der Einheit 14
Tensorprodukt, Tensoralgebra 26
Totale Ordnung einer Distribution 22
Totale Ordnung 29
Träger einer Distribution 23
Träger 30
Triviales Hauptsystem 44

Verallgemeinertes Funktionensystem 10
Verengung einer Differentiationstheorie 19
– einer Multiplikationstheorie 26
Verknüpfung, innere, äußere (auf einem lokal strukturierten System) 10
verträglich (mit der lokalen Struktur) 10

W_n 50
$w_{n;j}$, $\overline{w}_{n;j}$ 50
Wert einer Funktionenklasse in einem Punkte 17

Zerlegungslemma 41
Zulässige Abbildung 10