Abhandlungen
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung
Neue Folge. Heft 13
1932

Das Problem der Verbiegung von Flächen

von

F. Lindemann

München 1932
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei
in Nördlingen

In einer früheren Abhandlung[1] hatte ich Formeln aufgestellt, durch welche die Koordinaten eines Flächenpunktes in ihrer Abhängigkeit von den Parametern der auf der Fläche liegenden Minimalkurven dargestellt werden, und in der mit diesem Hilfsmittel die Beziehungen zwischen zwei durch Biegung (ohne Dehnung) ineinander überführbaren Flächen entwickelt wurden. Diese Formeln werden hier in § 1 kurz wiederholt. Daran schließt sich die Zurückführung des Problems, das die Aufstellung aller Biegungsflächen einer gegebenen Fläche fordert und das zunächst auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung führt, auf zwei nacheinander zu lösende partielle Differentialgleichungen erster Ordnung (§§ 2, 3 und 4). Bei diesem Problem war in der früheren Abhandlung eine Lücke geblieben, die ich in einer späteren Arbeit[2] auszufüllen versuchte. Neben der von zwei willkürlichen Funktionen abhängigen Lösung fand ich damals zwei andere, die nur je von einer willkürlichen Funktion abhängen, so daß im ganzen vier willkürliche Funktionen auftreten. Die gegenseitige Abhängigkeit dieser verschiedenen Lösungen blieb ungeklärt, die genauere Diskussion (§§ 5 und 6) führt jetzt dazu, daß diese von je einer willkürlichen Funktion abhängigen Lösungen als singuläre Lösungen aufzufassen sind, da sie sich nicht aus der allgemeinen (in § 3 aufgestellten) Lösung ableiten lassen, während umgekehrt die allgemeine Lösung aus ihnen wieder hervorgeht, so daß eine Verbiegung der singulären Flächen nichts Neues liefert.

Besonders behandelt wurden die Biegungsflächen der Rotationsflächen, zu denen auch die Kugel gehört (§§ 7, 8 und 9) und die Minmalflächen (§ 10), wobei sich ergibt, daß man für diese Fälle immer je eine Schar von Biegungsflächen, die von einer willkürlichen Funktion abhängen, durch bloße Quadraturen angeben kann.

Die im § 5 aufgestellten singulären Biegungsflächen führen von selbst zur Lösung der Aufgabe, alle Flächen mit gegebenem Linienelemente zu finden (§ 11), wie sie schon in der Arbeit von 1923 behandelt war. Schließlich wird auf den Zusammenhang mit der Theorie der Weingartenschen Flächen hingewiesen (§ 12), d. h. derjenigen Flächen, zwischen deren Hauptkrümmungsradien eine Relation besteht.

§ 1. Die Grundformeln.

Die Koordinaten x, y, z eines Flächenpunktes seien als Funktionen der Parameter α, β der Minimalkurven gegeben. Es seien λ, μ die (einander konjugierten) Parameter derjenigen Kurven, welche bei der sphärischen Abbildung in die Minimalgeraden der Kugel übergehen, so daß ein Punkt X, Y, Z der letzteren durch die Gleichungen

$$(1) \qquad X = \frac{\operatorname{cosin} \frac{1}{2}(\lambda + \mu)}{\operatorname{cosin} \frac{1}{2}(\lambda - \mu)}, \quad Y = -\frac{\operatorname{cosin} \frac{1}{2}(\lambda + \mu)}{\operatorname{cosin} \frac{1}{2}(\lambda - \mu)}, \quad Z = i \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\lambda - \mu)$$

---

[1] Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-physik. Klasse, Bd. XXIX, 1921.

[2] Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-physik. Klasse, 1923.

gegeben wird, so lassen sich die Koordinaten x, y, z in der folgenden Form darstellen:[1]

$$(2)\qquad \begin{gathered} x = i\int\left[\frac{\partial W}{\partial\alpha}\operatorname{cosin}\lambda\cdot d\alpha - \frac{\partial W}{\partial\beta}\operatorname{cosin}\mu\cdot d\beta\right], y = i\int\left[\frac{\partial W}{\partial\alpha}\sin\lambda\cdot d\alpha - \frac{\partial W}{\partial\beta}\sin\mu\cdot d\beta\right] \\ z = \int\left[\frac{\partial W}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial W}{\partial\beta}d\beta\right] = W, \end{gathered}$$

wobei W eine reelle Funktion von α und β bedeutet. Damit in (2) unter den Intregalzeichen vollständige Differentiale stehen, müssen die Bedingungen

$$(3)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\operatorname{tg}\omega = \frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta},\ \frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\operatorname{tg}\omega = -\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha},\ \text{also auch}\ \lambda_\beta W_\alpha + \mu_\alpha W_\beta = 0$$

erfüllt sein. Die Gaußschen Fundamentalgrößen E und G verschwinden identisch, und es ist

$$(4)\qquad F = 2\,W_\alpha W_\beta\cdot\operatorname{cosin}^2\omega.$$

Dabei ist ω rein imaginär, und zwar wurde

$$(5)\qquad 2\,\omega = \lambda - \mu$$

gesetzt. Das Krümmungsmaß ist gleich ($F' = \lg F$ gesetzt)

$$(6)\qquad -\frac{F'_{\alpha\beta}}{F} = -\frac{\lambda_\alpha\mu_\beta - \lambda_\beta\mu_\alpha}{2\,F\cdot\operatorname{cosin}^2\omega}.$$

Bei einer Verbiegung bleiben F und $F'_{\alpha\beta}$ ungeändert. Die drei Koordinaten (2) genügen der Differentialgleichung:

$$(7)\qquad W_{\alpha\alpha}W_{\beta\beta} - W^2_{\alpha\beta} + W_\alpha W_\beta F'_\alpha F'_\beta - W_{\alpha\alpha}W_\beta F'_\beta - W_{\beta\beta}W_\alpha F'_\alpha = F'_{\alpha\beta}(F - 2\,W_\alpha W_\beta).$$

Die Gleichung (6) kann in der Form

$$(8)\qquad \frac{\partial^2\lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\lambda_\beta\omega_\alpha - \lambda_\alpha\omega_\beta}{\operatorname{cosin}^2\omega}$$

geschrieben werden, oder in der Form

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\lambda_\beta\operatorname{tg}\omega - \frac{1}{2}F'_\beta\right) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\lambda_\alpha\operatorname{tg}\omega + \frac{1}{2}F'_\alpha\right).$$

Man kann daher setzen:

$$(10)\qquad \lambda_\beta\operatorname{tg}\omega - \frac{1}{2}F'_\beta = \frac{\partial\lg\Omega}{\partial\beta},\quad \lambda_\alpha\operatorname{tg}\omega + \frac{1}{2}F'_\alpha = \frac{\partial\operatorname{tg}\Omega}{\partial\alpha}.$$

Vertauscht man i mit $-i$, so geht λ in μ, α in β, β in α, ω in $-\omega$ über, und es möge Ω' zu Ω konjugiert sein, während die reelle Funktion F ungeändert bleibt. Es ergibt sich

$$(11)\qquad \mu_\alpha\operatorname{tg}\omega + \frac{1}{2}F'_\alpha = -\frac{\partial\lg\Omega'}{\partial\alpha},\quad \mu_\beta\operatorname{tg}\omega - \frac{1}{2}F'_\beta = -\frac{\partial\lg\Omega'}{\partial\beta},$$

und durch Subtraktion von (10) und (11):

$$(12)\qquad 2\,\omega_\beta\operatorname{tg}\omega = \frac{\partial\lg\Omega\Omega'}{\partial\beta},\quad 2\,\omega_\alpha\operatorname{tg}\omega = \frac{\partial\lg\Omega\Omega'}{\partial\alpha}.$$

---

[1] Auch Bonnet hat die Minimalkurven als Parameterkurven benutzt, kommt aber zu weniger handlichen Formeln (Journal de l'École polyt. t. 25, 1867), nachdem Bour schon 1862 die Gleichungen (2) aufgestellt hatte (ib. t. 22), ohne weiteren Gebrauch davon zu machen.

Andererseits folgt aus (4) durch Differentiation:

$$(13)\qquad F'_\beta = -2\,\omega_\beta \operatorname{tg}\omega + \frac{\partial \lg W_a W_\beta}{\partial \beta},\quad F'_a = -2\,\omega_a \operatorname{tg}\omega + \frac{\partial \lg W_a W_\beta}{\partial \alpha}.$$

Die Vergleichung mit (12) führt zu dem Ansatze:

$$(14)\qquad \lg \Omega\Omega' = \lg W_a W_\beta - \lg F,\quad \Omega\Omega' = \frac{W_a W_\beta}{F} = \frac{1}{2 \operatorname{cosin}^2\omega},$$

und die Vergleichung von (3) mit (11) ergibt:

$$(15)\qquad \Omega = \frac{W_a}{\sqrt{F}},\quad \Omega' = \frac{W_\beta}{\sqrt{F}}.$$

Diese Gleichungen sind nur möglich, wenn die Bedingung

$$(16)\qquad \frac{\partial \Omega \sqrt{F}}{\partial \beta} = \frac{\partial \Omega' \sqrt{F}}{\partial \alpha} = W_{a\beta}$$

erfüllt ist. Da der absolute Betrag von Ω durch (14) gegeben ist, so kann man setzen:

$$(17)\qquad \Omega = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{2} \operatorname{cosin}\omega},\quad \Omega' = \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{2} \operatorname{cosin}\omega},$$

wo δ eine reelle Größe bezeichnet. Die Bedingung (16) wird dadurch:

$$(18)\qquad e^{i\delta}\left(\frac{1}{2}F'_\beta + i\delta_\beta + \omega_\beta \operatorname{tg}\omega\right) + e^{-i\delta}\left(i\delta_a - \frac{1}{2}F'_a - \omega_a \operatorname{tg}\omega\right) = 0.$$

Formt man die Gleichungen (10) und (11) mittels (17) um, so ergibt sich in Rücksicht auf (5):

$$(19)\qquad p_\beta t - i\delta_\beta = \frac{1}{2}F'_\beta,\quad p_a t - i\delta_a = -\frac{1}{2}F'_a,$$

wenn hier, wie im folgenden

$$(20)\qquad p = \frac{1}{2}(\lambda + \mu),\quad t = \operatorname{tg}\omega$$

gesetzt wird, so daß jetzt $\lambda = p + \omega$, $\mu = p - \omega$. Die doppelte Berechnung von $p_{a\beta}$ aus den beiden Gleichungen (19) führt zu der Relation:

$$(21)\qquad F'_{a\beta} \sin\omega \cdot \operatorname{cosin}\omega = \frac{1}{2}(F'_a \omega_\beta + F'_\beta \omega_a) + i\,(\omega_a \delta_\beta - \omega_\beta \delta_a).$$

Zwischen ω und δ bestehen also die beiden Gleichungen (18) und (21). Die zweite Gleichung reduziert sich wegen (19) wieder auf die Relation (6).

§ 2. Die Biegungsflächen einer gegebenen Fläche.

Dieselbe Bedeutung, welche nach § 1 den Buchstaben

$$x, y, z\,(= W), F, \alpha, \beta, \lambda, \mu, \omega, p, t\,(= \operatorname{tg}\omega), \delta$$

für die gegebene Fläche zukommt, mögen die Buchstaben

$$\xi, \eta, \zeta, F, \alpha, \beta, \Phi, \Psi, \mathfrak{W}, P, T\,(= \operatorname{tg}\mathfrak{W}), \Delta$$

für die gesuchte Biegungsfläche haben. Dann ist nach (8) § 1:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \lg F_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \dfrac{\lambda_\beta\,\omega_\alpha - \lambda_\alpha\,\omega_\beta}{\operatorname{cosin}^2\omega} = \dfrac{\lambda_\alpha\,\mu_\beta - \lambda_\beta\,\mu_\alpha}{2\operatorname{cosin}^2\omega} = \lambda_\beta\,t_\alpha - \lambda_\alpha\,t_\beta = \dfrac{\Phi_\beta\,\mathfrak{W}_\alpha - \Phi_\alpha\,\mathfrak{W}_\beta}{\operatorname{cosin}^2\mathfrak{W}} \\ \qquad = \dfrac{\Phi_\beta\,\Psi_\alpha - \Phi_\alpha\,\Psi_\beta}{2\operatorname{cosin}^2\mathfrak{W}} = \Phi_\beta T_\alpha - \Phi_\alpha\,T_\beta. \end{cases}$$

Diese Gleichung ist von folgender Form:

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}(\lambda_\alpha\,t - \Phi_\alpha\,T) = \frac{\partial}{\partial\alpha}(\lambda_\beta\,t - \Phi_\beta\,T).$$

Es gibt also eine Funktion R, die den Gleichungen genügt:

$$(3)\qquad \Phi_\alpha\,T = \lambda_\alpha\,t + \frac{\partial \lg R}{\partial\alpha},\quad \Phi_\beta\,T = \lambda_\beta\,t + \frac{\partial \lg R}{\partial\beta}.$$

Ist R' zu R konjugiert, so erhält man durch Vertauschung von i mit $-i$:

$$(4)\qquad \Psi_\beta\,T = \mu_\beta\,t - \frac{\partial \lg R'}{\partial\beta},\quad \Psi_\alpha\,T = \mu_\alpha\,t - \frac{\partial \lg R'}{\partial\alpha}.$$

Andererseits müssen, analog zu (3) § 1, die Gleichungen

$$(5)\qquad \Phi_\beta\,T = \frac{\partial \lg \zeta_\alpha}{\partial\beta},\quad \Psi_\alpha\,T = -\frac{\partial \lg \zeta_\beta}{\partial\alpha}$$

bestehen. Ersetzt man in (3) und (4) die ersten Glieder der rechten Seiten durch die in (3), § 1 angegebenen Werte, so folgt: $\zeta_\alpha = W_\alpha R \cdot a$, wo a eine Konstante bedeutet; ferner $\zeta_\beta = W_\beta R' \cdot a'$, wenn a' zu a konjugiert ist. Die Konstanten a und a' können wir in die Definition der Funktionen R und R' eingehen lassen; dann werden die Koordinaten eines Punktes der Biegungsfläche:[1]

$$(6)\quad \begin{cases} \xi = i\int[\operatorname{cosin}\Phi \cdot R\,W_\alpha\,d\alpha - \operatorname{cosin}\Psi \cdot R'\,W_\beta\,d\beta], \\ \eta = i\int[\ \sin\ \Phi \cdot R\,W_\alpha\,d\alpha - \sin\ \Psi \cdot R'\,W_\beta\,d\beta], \\ \zeta = \int[R\,W_\alpha\,d\alpha + R'\,W_\beta\,d\beta]. \end{cases}$$

Damit hier vollständige Differentiale unter den Integralzeichen erscheinen, muß neben den Gleichungen (3) und (4) noch die Bedingung:

$$(7)\qquad \frac{\partial R\,W_\alpha}{\partial\beta} - \frac{\partial R'\,W_\beta}{\partial\alpha} = 0.$$

erfüllt sein, oder:

$$(8)\qquad W_{\alpha\beta}(R - R') + R_\beta\,W_\alpha - R'_\alpha\,W_\beta = 0.$$

Aus (3) und (4) zusammen mit (3), § 1 erhält man:

$$(\Phi_\beta\,R\,W_\alpha + \Psi_\alpha\,R'\,W_\beta)\,T = W_{\alpha\beta}(R - R') + R_\beta\,W_\alpha - R'_\alpha\,W_\beta.$$

Die Gleichung (7) oder (8) ist daher äquivalent mit der Bedingung

$$(9)\qquad \Phi_\beta\,R\,W_\alpha + \Psi_\alpha\,R'\,W_\beta = 0,$$

welche auch in Analogie zur dritten Gleichung (3), § 1 bestehen muß.

Für die beiden Flächen gemeinsame Fundamentalgröße F erhält man:

$$(10)\qquad F = 2\,\zeta_\alpha\,\zeta_\beta \operatorname{cosin}^2\mathfrak{W} = 2\,W_\alpha\,W_\beta \operatorname{cosin}^2\omega$$

---

[1] In dieser Form habe ich in der früheren Abhandlung (1921) die Koordinaten ξ, η, ζ auf weniger einfachem Wege erhalten. Ich untersuchte den Einfluß einer orthogonalen Transformation und dachte mir dann die Koeffizienten variabel.

oder:

(11) $$RR' \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W} = r^2 \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W} = \operatorname{cosin}^2 \omega,$$

wenn:

(12) $$R = r\, e^{i\varphi}, \quad R' = r \cdot e^{-i\varphi}$$

gesetzt wird, wodurch die Gleichung (8) übergeht in:

(13) $$W_{a\beta}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + W_a e^{i\varphi}(r'_\beta + i\varphi_\beta) - W_\beta e^{-i\varphi}(r'_a - i\varphi_a) = 0$$

wo $r' = \log r$. Setzt man $2P = \Phi + \Psi$, so bestehen, analog zu (19) § 1, die Gleichungen:

(14) $$P_\beta T = i\Delta_\beta + \frac{1}{2} F'_\beta, \quad P_a T = i\Delta_a - \frac{1}{2} F'_a,$$

ferner folgt aus (3) und (4) durch Addition:

(15) $$\begin{cases} P_\beta T = p_\beta t + i\varphi_\beta = i\delta_\beta + i\varphi_\beta + \frac{1}{2} F'_\beta, \\ P_a T = p_a t + i\varphi_a = i\delta_a + i\varphi_a + \frac{1}{2} F'_a, \end{cases}$$

also durch Vergleichung mit (14)

(16) $$\Delta = \delta + \varphi.$$

Berechnet man aus (15) die Differentialquotienten $P_{a\beta}$ in doppelter Weise, so erhält man die Integralitätsbedingung für (15) in der Form

(17) $$(pt)\, T - (pT)\, t - i(\varphi T) = 0,$$

wobei zur Abkürzung

(18) $$(\varphi\psi) = \varphi_a \psi_\beta - \varphi_\beta \psi_a$$

gesetzt ist. Aus (15) folgt weiter

(19) $$(\varphi P)\, T - (\varphi p)\, t = 0.$$

Jedenfalls ist für alle Werte von ρ die lineare Kombination von (13) und (19) erfüllt, nämlich:

(20) $$W_{a\beta}(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}) + W_a e^{\varphi i}(r'_\beta + i\varphi_\beta) - W_\beta e^{-\varphi i}(r'_a - i\varphi_a) + \rho\,[(\varphi P)\, T - (\varphi p)\, t] = 0$$

oder:

(20a) $$W_{a\beta}(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}) + W_a e^{\varphi i} r'_\beta - W_\beta e^{-\varphi i} r'_a + i\varphi_a [W_\beta e^{-\varphi i} + \rho\,(P_\beta T - p_\beta t)] + i\varphi_\beta [W_a e^{\varphi i} - \rho\,(P_a T - p_a t)] = 0.$$

Man kann ρ und φ so bestimmt denken, daß die beiden Gleichungen

(21) $$W_\beta e^{-i\varphi} + \rho\,(P_\beta T - p_\beta t) = 0, \quad W_a e^{\varphi i} - \rho\,(P_a T - p_a t) = 0$$

erfüllt sind; dann folgt für φ unter Benutzung von (15)

(22) $$W_a e^{\varphi i} \varphi_\beta + W_\beta e^{-i\varphi} \varphi_a = 0,$$

worauf ρ aus einer der beiden Gleichungen (21) gefunden wird. Aus (20a) erhält man eine Gleichung zur Bestimmung von r' $(= \lg r)$:

(23) $$W_{a\beta}(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}) + W_a e^{\varphi i} r'_\beta - W_\beta e^{-\varphi i} r'_a = 0.$$ [1]

Durch die Relationen (22) und (23) wird jedenfalls die Gleichung (13) erfüllt, ob aber auch die Gleichung (17), bleibt zu untersuchen. In Folge von (13) steht in dem Aus-

[1] In (22) und (23) haben wir die auf Seite 208 f. meiner Arbeit in den Sitzungsberichten von 1923 aufgestellten Gleichungen.

druck für ζ in (6) unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential und ζ ist eine reelle Größe.

§ 3. Die Ausführung der Biegung.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Lösung des Biegungsproblems in Angriff nehmen. Ist eine Oberfläche durch die Gleichungen (2) § 1 gegeben, so findet man alle Biegungsflächen derselben in folgender Weise:

1. Man bestimme eine Funktion φ von α, β durch die partielle Differentialgleichung erster Ordnung (22) § 2, d. h.

$$W_\alpha e^{\varphi i} \varphi_\beta + W_\beta e^{-\varphi i} \varphi_\alpha = 0. \tag{1}$$

Dadurch ist eine willkürliche Funktion eingeführt.

2. Man bestimme sodann r aus der partiellen Gleichung erster Ordnung (23) § 2, d. h.

$$W_{\alpha\beta}(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}) + W_\alpha e^{\varphi i} r'_\beta - W_\beta e^{-\varphi i} r'_\alpha = 0, \tag{2}$$

wo $r' = \lg r$. Dadurch wird eine zweite willkürliche Funktion eingeführt.

Dann ist auch die partielle Gleichung (13) § 2 erfüllt, welche aussagt, daß der Ausdruck

$$d\zeta = W_\alpha r e^{i\varphi} d\alpha + W_\beta r e^{-i\varphi} d\beta \tag{3}$$

ein vollständiges Differential ist, so daß ζ durch Quadratur gefunden wird.

3. Nachdem r gefunden ist, bestimmt sich $\mathfrak{W}$ aus der Gleichung (11) § 2, d. h.

$$r^2 \cdot \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W} = \operatorname{cosin}^2 \omega. \tag{4}$$

Damit ist auch $T = \operatorname{tg} \mathfrak{W}$ bekannt. Es sind nur rein imaginäre Werte für $\mathfrak{W}$ und T zulässig.

4. Die gefundenen Werte von T, r und φ benutze man, um aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_\beta T &= \frac{\partial \lg R W_\alpha}{\partial \beta} = \lambda_\beta t + r'_\beta + i\varphi_\beta, \\ \Psi_\alpha T &= -\frac{\partial \lg R' W_\beta}{\partial \alpha} = \mu_\alpha t - r'_\alpha + i\varphi_\alpha \end{aligned}\right. \tag{5}$$

die Werte von Φ und Ψ (die zueinander konjugiert sind) durch Quadraturen zu berechnen. Die Gleichungen (5) sind nach der Darstellung in § 1 die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Ausdrücke

$$\left\{\begin{aligned} d\xi &= i\,[\operatorname{cosin}\Phi \cdot R W_\alpha d\alpha - \operatorname{cosin}\Psi \cdot R' W_\beta d\beta], \\ d\eta &= i\,[\ \sin\ \Phi \cdot R W_\alpha d\alpha - \ \sin\ \Psi \cdot R' W_\beta d\beta] \end{aligned}\right. \tag{5 a}$$

vollständige Differentiale sind. Da nach (3) auch $d\zeta$ ein solches Differential ist, so stellen die Gleichungen (6) von § 2 eine Fläche dar, und die Fundamentalgröße F dieser Fläche ist nach § 1:

$$F = 2\, R R' W_\alpha W_\beta \operatorname{cosin}^2 \frac{1}{2}(\Phi - \Psi) = 2\, r^2 W_\alpha W_\beta \operatorname{cosin}^2 \frac{1}{2}(\Phi - \Psi),$$

die gleich $2\, W_\alpha\, W_\beta \operatorname{cosin}^2 \omega$ sein soll. Nach Gleichung (4) ist aber:

$$r^2 \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W} = \operatorname{cosin}^2 \omega. \tag{6}$$

Folglich muß

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2}(\Phi - \Psi) \tag{7}$$

gesetzt werden; das ist übereinstimmend mit den Gleichungen (5), wie noch zu zeigen ist.

Ergänzung zu Seite 8, Zeile 13 v. u.

Hinter dem Worte „sind" ist einzuschalten „(falls $2\,\mathfrak{W} = \Phi - \Psi$ genommen wird)". Irrtümlicherweise hatte ich bei der Korrektur diesen Zusatz gestrichen; er ist aber notwendig, da diese Annahme über $\mathfrak{W}$ die Voraussetzung für die nachfolgende Aussage ist und durch die Gleichung (7) nicht bewiesen, sondern nur nachträglich bestätigt wird.

Tegernsee, im September 1932 F. L.

Nach § 2 müssen neben den Gleichungen (5) auch die Gleichungen

(7a) $$\Phi_a T = \lambda_a t + r'_a - i\varphi_a, \quad \Psi_\beta T = \mu_\beta t - r'_\beta + i\varphi_\beta$$

bestehen; man bestätigt das hier in folgender Weise. Aus der Gleichung (6) folgt durch logarithmisches Differenzieren:

(8) $$r'_a = T \cdot \mathfrak{W}_a - t \cdot \omega_a, \quad r'_\beta = T \cdot \mathfrak{W}_\beta - t \cdot \omega_\beta.$$

Die Gleichungen (5) werden also:

(8a) $$\Phi_\beta T = (\lambda_\beta - \omega_\beta) t + \mathfrak{W}_\beta T + i\varphi_\beta, \quad \Psi_a T = (\mu_a + \omega_a) t - \mathfrak{W}_a T + i\varphi_a$$

oder, wenn wieder $2P = \Phi + \Psi$, $2p = \lambda + \mu$ gesetzt wird, unter Benutzung von (7):

$$P_\beta T = p_\beta t + i\varphi_\beta, \quad P_a T = p_a t + i\varphi_a$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (15) § 2. Zieht man hiervon die mit $\frac{1}{2}$ multiplizierten Gleichungen (5) ab, so entstehen in der Tat die Gleichungen (7a).

Die Aufstellung aller Biegungsflächen einer gegebenen Fläche erfordert somit die sukzesive Lösung von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und einige Quadraturen.

In § 2 ergaben sich die Gleichungen (3) und (4), d. h. die obigen Gleichungen (5), aus einer Umformung der dortigen Gleichung (1). Letztere bleibt ungeändert, wenn man Φ und Ψ um eine beliebige Funktion ψ von $\mathfrak{W}$ additiv ändert. Bezeichnet man also mit Φ^0 einen aus (5) durch Quadratur gewonnenen Wert von Φ und hat Ψ^0 entsprechende Bedeutung, so ist allgemein

(9) $$\Phi = \Phi^0 + \psi(\mathfrak{W}) + A, \quad \Psi = \Psi^0 + \psi_1(\mathfrak{W}) + B,$$

wo ψ_1 die zu ψ konjugierte Funktion und A eine Funktion von α, B eine solche von β bezeichnet. Dabei muß $2\mathfrak{W} = \Phi - \Psi = \Phi^0 - \Psi^0$ sein, also:

(10) $$\psi(\mathfrak{W}) - \psi_1(-\mathfrak{W}) + A - B = 0,$$

d. h. $\Phi - \Psi$ muß eine Funktion von $A - B$ sein, falls der allgemeine Ansatz (9) zulässig sein soll.

Diese Bemerkung wird sich besonders bei den Biegungsflächen der Rotationsflächen als nützlich erweisen.

Insbesondere wird die Gleichung (1) durch die Annahme $\varphi =$ Konst. befriedigt; die Gleichungen (15) § 2 geben dann

(11) $$(Pp) = 0, \text{ also } P = f(p), \quad T \cdot f'(p) = t.$$

Die Gleichung (6) kann in der Form

(12) $$(1 + t^2) r^2 = 1 + T^2 \quad \text{oder} \quad f'(p)^2 (1 + t^2) r^2 = f'(p)^2 + t^2$$

geschrieben werden. Es wird also r eine Funktion von ω und p, die der Gleichung (2) identisch genügen müßte, was nur in besonderen Fällen zutreffen wird. Die Lösung $\varphi = c$ ist daher im allgemeinen nicht zulässig. Sie wird aber in den Fällen möglich, wo der obige Ansatz (9) zulässig ist.

Die Gleichungen (12) sind für $r = f'(p) = 1$ identisch erfüllt, dann ist aber der Ausdruck $e^{ic} W_\alpha \, d\alpha + e^{-ic} W_\beta \, d\beta$ im allgemeinen kein vollständiges Differential.

§ 4. Wiederholte Biegung einer Fläche.

Aus der durch die Gleichungen (2) § 1 gegebenen Fläche sei nach der in § 3 dargelegten Methode eine von den Funktionen r und φ abhängige Fläche, deren Punkten die Koordinaten ξ, η, ζ zukommen, abgeleitet. Wendet man auf diese dieselbe Methode noch einmal an, so dürfen dadurch keine neuen willkürlichen Funktionen eingeführt werden, d. h. die Lösung muß wieder auf die partiellen Gleichungen (1) und (2) von § 3 zurückführbar sein. Durch die neue Biegung mögen die Größen

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \varphi, r, \mathfrak{W}, \quad T, \quad P, \quad \Phi, \quad \Psi$$

übergehen in

$$\xi^*, \eta^*, \zeta^*, \psi, \rho, \mathfrak{W}^*, T^*, P^*, \Phi^*, \Psi^*.$$

Die Bedingung dafür, daß

$$(1) \qquad \begin{cases} d\zeta^* = \rho e^{\psi i} \zeta_\alpha \, d\alpha + \rho e^{-\psi i} \zeta_\beta \, d\beta \\ \quad\;\; = r\rho e^{\psi i} W_\alpha e^{i\varphi} \, d\alpha + r\rho e^{-\psi i} W_\beta e^{-i\varphi} \, d\beta \end{cases}$$

ein vollständiges Differential darstellt, ist dann nach (13) § 2:

$$(2) \qquad \zeta_{\alpha\beta}(e^{i\psi} - e^{-i\psi}) + \zeta_\alpha e^{i\psi}(\rho'_\beta + i\psi_\beta) - \zeta_\beta e^{-i\psi}(\rho'_\alpha - i\psi_\alpha) = 0,$$

wo $\rho' = \log \rho$. Hierin ist $\zeta_\alpha = rW_\alpha e^{i\varphi}$, $\zeta_\beta = rW_\beta e^{-i\varphi}$ und

$$\begin{aligned} \zeta_{\alpha\beta} &= re^{i\varphi} \quad W_\alpha (r'_\beta + i\varphi_\beta) + rW_{\alpha\beta} e^{i\varphi}, \\ &= re^{-i\varphi} W_\beta (r'_\alpha - i\varphi_\alpha) + rW_{\alpha\beta} e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Die Gleichung (2) kann demnach in folgender Form geschrieben werden:

$$(3) \qquad \begin{cases} e^{i(\varphi+\psi)}(W_{\alpha\beta} + r'_\beta W_\alpha + i\varphi_\beta W_\alpha) - e^{-i(\varphi+\psi)}(W_{\alpha\beta} + r'_\alpha W_\beta - i\varphi_\alpha W_\beta) \\ \quad + e^{i(\varphi+\psi)} W_\alpha (\rho'_\beta + i\psi_\beta) + e^{-i(\varphi+\psi)} W_\beta (\rho'_\alpha + i\psi_\alpha) = 0. \end{cases}$$

Entsprechend dem Verfahren in § 2 ist diese Gleichung in die folgenden beiden zu zerlegen:

$$(4) \qquad W_{\alpha\beta}(e^{i(\varphi+\psi)} - e^{-i(\varphi+\psi)}) + e^{i(\varphi+\psi)} W_\alpha (r'_\beta + \rho'_\beta) - e^{-i(\varphi+\psi)} W_\beta (r'_\alpha + \rho'_\alpha) = 0,$$

$$(5) \qquad e^{i(\varphi+\psi)} W_\alpha (\varphi_\beta + \psi_\beta) + e^{-i(\varphi+\psi)} W_\beta (\varphi_\alpha + \psi_\alpha) = 0.$$

Diese zu lösenden partiellen Gleichungen erster Ordnung sind identisch mit den früheren Gleichungen (23) und (22); es ist nur φ durch $\varphi + \psi$, r' durch $r' + \rho'$ ersetzt, so daß in der Tat keine neue partielle Gleichung gelöst werden muß. Macht man $\psi = -\varphi$, $\rho' = -r'$, so wird die Fläche mit den Koordinaten ξ, η, ζ in die ursprüngliche mit den Koordinaten x, y, z zurückverwandelt. Weiter hat man

$$\begin{gathered} r^2\rho^2 \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}^* = r^2 \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W} = \operatorname{cosin}^2 \omega, \\ P_\alpha^* T^* = P_\alpha T + i\psi_\alpha = p_\alpha t + i(\varphi_\alpha + \psi_\alpha), \\ P_\beta^* T^* = P_\beta T + i\psi_\beta = p_\beta t + i(\varphi_\beta + \psi_\beta), \\ \Phi^* = P^* + \mathfrak{W}^*, \quad \Psi^* = P^* - \mathfrak{W}^*. \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} d\xi^* &= ir\rho\,[\operatorname{cosin}\Phi^* \cdot e^{i(\varphi+\psi)}\, d\alpha - \operatorname{cosin}\Psi^* \cdot e^{-i(\varphi+\psi)}\, d\beta], \\ d\eta^* &= ir\rho\,[\sin \quad \Phi^* \cdot e^{i(\varphi+\psi)}\, d\alpha - \sin \quad \Psi^* \cdot e^{-i(\varphi+\psi)}\, d\beta]. \end{aligned}$$

§ 5. Singuläre Biegungsflächen.

In § 2 haben wir die Gleichung (20) dadurch in zwei Gleichungen zerlegt, daß wir ihre linke Seite linear mit der linken Seite einer anderen Bedingungsgleichung, und zwar der Gleichung (19), kombinierten. Wir verfahren analog mit Hilfe der aus den Gleichungen (15) § 2 folgenden Relation

$$F'_{\alpha\beta} \sin \mathfrak{W} \cdot \cos \mathfrak{W} = (\mathfrak{W} P)\, T = (\mathfrak{W} p)\, t + i\, (\mathfrak{W} \varphi). \tag{1}$$

Wir bilden die lineare Kombination:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}\,(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + W_\alpha\, e^{\varphi i}\,(r'_\beta + i\varphi_\beta) - W_\beta\, e^{-i\varphi}\,(r'_\alpha - i\varphi_\alpha) \\ + \rho\,[(\mathfrak{W} P)\, T - (\mathfrak{W} p)\, t - i\,(\mathfrak{W} \varphi)] = 0 \end{aligned}$$

und bestimmen φ und ρ so, daß die Gleichungen bestehen:

$$\left\{ \begin{aligned} & W_\alpha\, e^{i\varphi}\, \varphi_\beta + W_\beta\, e^{-i\varphi}\, \varphi_\alpha - \rho\, \mathfrak{W}_\alpha\, \varphi_\beta + \rho\, \mathfrak{W}_\beta\, \varphi_\alpha = 0, \\ & W_{\alpha\beta}\,(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + W_\alpha\, e^{i\varphi}\, r'_\beta - W_\beta\, e^{-i\varphi}\, r'_\alpha + \rho\,[(\mathfrak{W} P)\, T - (\mathfrak{W} p)\, t] = 0. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Die erste Gleichung wird durch den Ansatz

$$W_\alpha\, e^{\varphi i} - \rho\, \mathfrak{W}_\alpha = 0, \quad W_\beta\, e^{-i\varphi} + \rho\, \mathfrak{W}_\beta = 0 \tag{3}$$

identisch befriedigt; und es folgt:

$$W_\alpha\, \mathfrak{W}_\beta\, e^{\varphi i} + W_\beta\, \mathfrak{W}_\alpha\, e^{-\varphi i} = 0. \tag{4}$$

Multipliziert man jetzt die Gleichung (20) von § 2 mit $W_\alpha W_\beta$ und wendet die Gleichung (4) an, so entsteht:[1]

$$W_{\alpha\beta}\,(\mathfrak{W}_\alpha\, W_\beta + \mathfrak{W}_\beta\, W_\alpha) + W_\alpha\, W_\beta\,[(\mathfrak{W}_\alpha\, r'_\beta + \mathfrak{W}_\beta\, r'_\alpha) + i\,(\mathfrak{W}_\alpha\, \varphi_\beta - \mathfrak{W}_\beta\, \varphi_\alpha)] = 0. \tag{5}$$

Die Umformung der hier auftretenden Klammern mit Hilfe von (3) § 1 ergibt folgendes:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}\,(\mathfrak{W}_\alpha\, W_\beta + \mathfrak{W}_\beta\, W_\alpha) &= W_\alpha\, W_\beta\,(\mathfrak{W}_\alpha\, \lambda_\beta - \mathfrak{W}_\beta\, \mu_\alpha)\, t \\ &= W_\alpha\, W_\beta\,[(\mathfrak{W} p) + (\mathfrak{W}_\alpha\, \omega_\beta + \mathfrak{W}_\beta\, \omega_\alpha)]\, t, \end{aligned}$$

wo wieder $2p = \lambda + \mu$, $2\omega = \lambda - \mu$; ferner nach (8) § 3:

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_\alpha\, r'_\beta + \mathfrak{W}_\beta\, r'_\alpha &= \mathfrak{W}_\alpha\,(\mathfrak{W}_\beta\, T - \omega_\beta\, t) + \mathfrak{W}_\beta\,(\mathfrak{W}_\alpha\, T - \omega_\alpha\, t) \\ &= 2\, \mathfrak{W}_\alpha\, \mathfrak{W}_\beta\, T - (\mathfrak{W}_\alpha\, \omega_\beta + \mathfrak{W}_\beta\, \omega_\alpha)\, t. \end{aligned}$$

Die Gleichung (5) wird somit

$$(\mathfrak{W} p)\, t + 2\, \mathfrak{W}_\alpha\, \mathfrak{W}_\beta\, T = i\,(\mathfrak{W} \varphi) = 0$$

und unter nochmaliger Anwendung der Gleichungen (8) § 3 und unter Benutzung von (1):

$$F'_{\alpha\beta} \cdot \cos^2 \mathfrak{W} = -2\, \mathfrak{W}_\alpha\, \mathfrak{W}_\beta, \tag{6}$$

eine partielle Gleichung erster Ordnung für $\mathfrak{W}$. Hat man sie gelöst, so ist φ durch (4) und r durch die Gleichung $r^2 \cos^2 \mathfrak{W} = \cos^2 \omega$ bestimmt; auf letzterer Gleichung beruhen die bei Umformung von (5) in (6) benutzten Gleichungen (8) von § 3, so daß umgekehrt vermittelst dieser Gleichungen der Übergang von (6) zu (5) und zu (2) gemacht werden kann. Werden Φ und Ψ aus den Gleichungen (5) § 3 berechnet, so sind $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ vollständige Differentiale und es bestehen wieder die Gleichungen (7) und (7a)

---

[1] Dasselbe Resultat entsteht aus (2), wenn man den Wert von ρ aus (3) einsetzt und Gleichung (1) benutzt.

von § 3. Damit sind unendlich viele von einer willkürlichen Funktion, die durch (6) eingeführt ist, abhängige Biegungsflächen gefunden.[1]

Es entsteht die Frage, wie diese Lösung aus den von zwei willkürlichen Funktionen abhängigen Lösungen des § 3 abgeleitet werden kann. Aus obiger Gleichung (4) und den Gleichungen (1) von § 3 folgt

$$\mathfrak{W}_\beta \varphi_\alpha - \mathfrak{W}_\alpha \varphi_\beta = 0, \text{ also } \varphi = f(\mathfrak{W}),$$

wenn f eine willkürliche Funktion bezeichnet. Dann ergibt sich aus (17) § 2:

$$(p\,t)\,T = (p\,T)\,t, \quad \text{also } (p \cdot \log T, \lg t) = 0$$

also, wenn χ ein Funktionszeichen ist:

$$T = t \cdot \chi(p) \text{ und} \tag{9}$$

$$r^2 = (1 + T^2) \operatorname{cosin}^2 \omega = (1 + t^2 \chi^2) \operatorname{cosin}^2 \omega.$$

Die Funktion $\mathfrak{W}$ (oder $T = \operatorname{tg} \mathfrak{W}$) müßte also neben der Bedingung (6) noch einer zweiten Gleichung genügen, was nur in besonderen Fällen eintreten kann. Die durch (6) vermittelte Lösung kann hiernach aus der allgemeinen in § 3 gegebenen Lösung nicht durch besondere Wahl der beiden willkürlichen Funktionen abgeleitet werden. Das gibt die Berechtigung, die zugehörige Fläche als singuläre Biegungsfläche der gegebenen Fläche zu bezeichnen.

Durch die Gleichung (6) und die Bedingung $r^2 \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W} = \operatorname{cosin}^2 \omega$ ist hier die Gleichung (5) befriedigt, zusammen mit (4) also die Bedingung dafür, daß

$$d\zeta = [r e^{\varphi i} W_\alpha d\alpha + r e^{-\varphi i} W_\beta d\beta]$$

ein vollständiges Differential sei. Wendet man auf die neue Fläche die Methode von § 3 zur weiteren Verbiegung an, für die ρ und ψ an Stelle von r und φ in § 3 treten, so muß jetzt

$$d\zeta^* = [r\rho e^{(\varphi+\psi)i} W_\alpha d\alpha + r\rho e^{-(\varphi+\psi)i} W_\beta d\beta]$$

ein vollständiges Differential sein, d. h. es muß die Gleichung

$$\zeta_{\alpha\beta}(e^{i\psi} - e^{-i\psi}) + \zeta_\alpha e^{i\psi}(\rho'_\beta + i\psi_\beta) - \zeta_\beta e^{-i\psi}(\rho'_\alpha - i\psi_\alpha) = 0 \tag{10}$$

erfüllt sein. Drückt man ζ durch r, φ und W aus, so ergibt sich die Gleichung (3) § 4, so daß ρ und ψ nach der Methode von § 3 durch die Gleichungen (4) und (5) § 4 zu bestimmen sind. Während aber φ der obigen Gleichung (4) und $\mathfrak{W}$ der obigen Gleichung (6) genügt, woraus dann r abgeleitet wurde, sind jetzt ψ und ρ so zu bestimmen, daß $\varphi + \psi$ und $r' + \rho'$ den in § 3 für φ und r aufgestellten Gleichungen genügen. Die nach § 3 aus der singulären Fläche abgeleiteten Biegungsflächen sind sonach identisch mit den aus der ursprünglichen Fläche nach § 3 abzuleitenden Flächen.

Sucht man den direkten Übergang von der ersten zur dritten Fläche, so geschehe dasselbe mittels der Hilfsgrößen χ und r; es genügt dann χ der Bedingung

$$e^{\chi i} W_\alpha \chi_\beta + e^{-\chi i} W_\beta \chi_\alpha = 0. \tag{11}$$

---

[1] Diese Flächen sowie die in § 6 aufgestellten hatte ich auch in Nr. 9 des Aufsatzes in den Sitzungsberichten von 1924 abgeleitet; damals war ihre Stellung zu der allgemeinen Lösung von § 3 nicht geklärt.

Die Vergleichung mit (5) § 4 ergibt:

(12) $$m \cdot e^{\chi i}\, \chi_\beta = e^{(\varphi+\psi)i}(\varphi_\beta + \psi_\beta), \quad m e^{-\chi i}\, \chi_\alpha = e^{-(\varphi+\psi)i}(\varphi_\alpha + \psi_\alpha),$$

woraus folgt

(13) $$\chi = \varphi + \psi, \quad m = 1.$$

Die Größe $\mathfrak{r}'$ ($= \lg \mathfrak{r}$) muß der Gleichung

$$W_{\alpha\beta}(e^{\chi i} - e^{-\chi i}) + e^{\chi i}\, W_\alpha\, \mathfrak{r}'_\beta - e^{-\chi i}\, W_\beta\, \mathfrak{r}'_\alpha = 0$$

genügen; also: $\mathfrak{r}' = r' + \rho'$, $\chi = \varphi + \psi$, wenn man mit (10) vergleicht.

§ 6. Eine andere Schar singulärer Biegungsflächen.

Wir verfahren wie in § 5, nachdem in (1) die Größen $\mathfrak{W}$, T mit ω, t vertauscht sind, was nach (15) § 2 erlaubt ist, bilden also die Gleichung:

$$W_{\alpha\beta}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + W_\alpha e^{\varphi i}(r'_\beta + i\varphi_\beta) - W_\beta e^{-i\varphi}(r'_\alpha - i\varphi_\alpha)$$
$$+ \rho\,[(\omega p)\, t + i\,(\omega\varphi) - (\omega P)\, T] = 0$$

und bestimmen ρ durch die Bedingungen:

$$W_\alpha e^{i\varphi} - \rho\,\omega_\alpha = 0, \quad W_\beta e^{-i\varphi} + \rho\,\omega_\beta = 0,$$

so daß auch:

(1) $$W_\alpha\, \omega_\beta\, e^{i\varphi} + W_\beta\, \omega_\alpha{}^{-i\varphi} = 0.$$

Die Gleichung (20) § 2 wird jetzt:

(2) $$W_{\alpha\beta}(\omega_\alpha W_\beta + \omega_\beta W_\alpha) + W_\alpha W_\beta[(\omega_\alpha r'_\beta + \omega_\beta r'_\alpha) + i\,(\omega_\alpha \varphi_\beta - \omega_\beta \varphi_\alpha)] = 0$$

und hierin ist:

$$W_{\alpha\beta}(\omega_\alpha W_\beta + \omega_\beta W_\alpha) = W_\alpha W_\beta(\omega_\alpha \lambda_\beta - \omega_\beta \mu_\alpha)\, t$$
$$= W_\alpha W_\beta[(\omega p) + 2\,\omega_\alpha \omega_\beta]\, t$$
$$= W_\alpha W_\beta[F'_{\alpha\beta} \sin\omega \cdot \operatorname{cosin}\omega + 2\,\omega_\alpha \omega_\beta\, t].$$

Wenn somit φ aus (1) bestimmt ist, so wird r' ($= \lg r$) aus der linearen partiellen Gleichung

(3) $$F'_{\alpha\beta} \sin\omega \cdot \operatorname{cosin}\omega + 2\,\omega_\alpha \omega_\beta\, t + \omega_\alpha r'_\beta + \omega_\beta r'_\alpha + i\,(\omega, \varphi) = 0$$

gefunden, schließlich $\mathfrak{W}$ aus der Bedingung $r^2 = \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W} = \operatorname{cosin}^2 \omega$. Wegen dieser Bedingungen ist $d\zeta$ ein vollständiges Differential. Sodann berechnet man Φ und Ψ aus den Gleichungen (3) und (4) von § 3 für Φ_β und Ψ_α durch Quadratur. Die Gleichungen (5) von § 3 sind dann ebenfalls erfüllt, nämlich mit (3) und (4) identisch, so daß auch $d\xi$ und $d\eta$ vollständige Differentiale sind.

Soll die so gefundene Fläche unter den Biegungsflächen von § 3 enthalten sein, so muß $(\omega\varphi) = 0$ sein (analog zu (7) § 5); dann folgt aus (15) § 3:

(4) $$(P\omega)\, T = (p\,\omega)\, t = -F'_{\alpha\beta} \sin\omega \cdot \operatorname{cosin}\omega,$$

andererseits ist $(\mathfrak{W} P)\; T = F'_{\alpha\beta} \sin\mathfrak{W} \operatorname{cosin}\mathfrak{W}$. Definiert man also $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{Q}$ durch die Gleichungen:

$$d\omega = d\mathfrak{q} \cdot \sin\omega \cdot \operatorname{cosin}\omega, \quad d\mathfrak{W} = d\mathfrak{Q} \cdot \sin\mathfrak{W} \cdot \operatorname{cosin}\mathfrak{W},$$

so folgt:

$$(\mathfrak{q} P) = (\mathfrak{Q} P) \text{ oder } (\mathfrak{q} - \mathfrak{Q}, P) = 0,$$

$P = \chi(\mathfrak{q} - \mathfrak{Q})$ und

$$P_\alpha = \chi' \cdot (\mathfrak{q}_\alpha - \mathfrak{Q}_\alpha), \quad P_\beta = \chi' \cdot (\mathfrak{q}_\beta - \mathfrak{Q}_\beta)$$

und hieraus

(5) $$0 = (\mathfrak{q} P) - (\mathfrak{Q} P) \text{ oder } (\omega P)\, t = (\mathfrak{W} P)\, T = F'_{\alpha\beta} \sin \mathfrak{W} \cdot \operatorname{cosin} \mathfrak{W},$$

also durch Vergleichung mit (4) $\sin \omega \cdot \operatorname{cosin} \omega = \sin \mathfrak{W} \cdot \operatorname{cosin} \mathfrak{W}$ oder $\mathfrak{W} = \omega$, also $r = 1$. Die durch (1) erhaltene Biegungsfläche muß daher auch als eine singuläre bezeichnet werden.

Es ist ferner zu untersuchen, ob man die durch (1) bestimmte Fläche aus den singulären Flächen von § 5 ableiten kann. Die Vergleichung von (1) mit (1) in § 5 ergibt $(\omega \mathfrak{W}) = 0$ und aus (5):

$$(\omega P)\, T = (\omega p)\, t + i\,(\omega, \varphi) \text{ ferner aus (8) § 3: } (\omega r') = 0,$$

also $r' = \chi(\omega)$; und aus (2) würde folgen:

$$W_{\alpha\beta}(\omega_\alpha W_\beta + \omega_\beta W_\alpha) + 2\, W_\alpha W_\beta \cdot \chi'(\omega)\, \omega_\alpha \omega_\beta = 0.$$

Das ist aber eine Bedingung für die ursprünglich gegebene Fläche, die nur ausnahmsweise erfüllt sein kann.

Die nach der Methode von § 3 aus den jetzt betrachteten singulären Flächen abgeleiteten Flächen geben (ebenso wie im Falle von § 5) wieder die Flächen der allgemeinen Lösung. Wir haben also gefunden:

1. Die allgemeine Lösung, d. h. Biegungsflächen, die von zwei willkürlichen Funktionen abhängen;
2. zwei von je einer willkürlichen Funktion abhängende singuläre Flächenscharen, aus denen wieder die allgemeinen Lösungen abgeleitet werden können.

Da die Verbiegungen der singulären Flächen zu den Flächen der allgemeinen Lösung zurückführen, so findet man immer dieselben singulären Flächen, von welcher allgemeinen Biegungfläche man auch ausgehen mag.

§ 7. Die Biegungsflächen der Rotationsflächen.

Nach § 5 der früheren Abhandlung wird die durch die Gleichungen

$$x = r \operatorname{cosin} \psi, \; y = r \sin \psi, \; z = f(r)$$

gegebene Rotationsfläche, in ihrer Abhängigkeit von den Parametern α, β der Minimalkurven dargestellt durch Formeln der Form:

(1) $$x = r \cdot \operatorname{cosin}(\alpha + \beta) \cdot F_1(\alpha - \beta), \; y = r \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot F_1(\alpha - \beta), \; z = G(\alpha - \beta),$$

wobei:

(2) $$F_1^2 + F'^2_1 + G'^2 = 0,$$

und es ist:

(3) $$W = G(\alpha - \beta), \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{F'_1}{F_1}, \quad F = 2\, F_1^2$$

(4) $$\operatorname{cosin} \lambda = \frac{F_1}{\sqrt{F_1^2 + F'^2_1}}, \quad \lambda = \frac{\pi}{2} - 2\beta.$$

Die Gleichungen (22) und (23) von § 3 werden:

$$e^{\varphi i}\varphi_\beta - e^{-\varphi i}\varphi_\alpha = 0, \tag{5}$$

$$G''(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}) - G' e^{\varphi i} r'_\beta - G' e^{-\varphi i} r'_\alpha = 0. \tag{6}$$

Bezeichnet $f(\varphi)$ eine willkürliche Funktion von φ, so ist das allgemeine Integral von (5):

$$e^{i\varphi}\alpha + e^{-i\varphi}\beta = f(\varphi). \tag{7}$$

Die Gleichungen der Charakteristiken von (6) sind:

$$\frac{d\alpha}{e^{-i\varphi}} = \frac{d\beta}{e^{i\varphi}} = \frac{G' \cdot dr'}{G''(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}, \tag{7a}$$

deren eines Integral sich in geschlossener Form angeben läßt, nämlich:

$$r' = -\log G' + \text{Konst.} \tag{8}$$

Die Aufstellung des zweiten Integrals erfordert die Integration der Differentialgleichung:

$$e^{i\varphi} d\alpha - e^{-i\varphi} d\beta = 0, \tag{9}$$

worin φ eine durch (7) gegebene Funktion von α, β bezeichnet.

Insbesondere kann hier die Lösung

$$\varphi = c \; (= \text{Konst.})$$

benutzt werden. Dann geben die Gleichungen (8) und (9):

$$r = \frac{f(\alpha e^{ic} - \beta e^{-ic})}{G'(\alpha - \beta)}, \tag{10}$$

wo f eine willkürliche Funktion bezeichnet. Aus (4), § 3 findet man:

$$\cos^2 \mathfrak{W} = \cos^2 \omega \cdot \left(\frac{G'(\alpha - \beta)}{f_1(\alpha e^{ic} - \beta e^{-ic})}\right)^2,$$

worin nach § 5 der früheren Abhandlung (wo das jetzige ω durch 2ω bezeichnet war):

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{F'_1}{F_1}, \quad \text{also } \cos^2\omega = \frac{F_1^2}{F_1^2 + F'^2_1} = -\frac{F_1^2}{G'^2}. \tag{11}$$

Es wird daher:

$$T^2 = \operatorname{tg}^2 \mathfrak{W} = -\frac{f^2 + F_1^2}{F_1^2} \tag{12}$$

und das Differential $d\zeta$ der Z-Koordinate der verbogenen Fläche bestimmt sich aus den Gleichungen:

$$\begin{cases} \zeta_\alpha = r \cdot G' \cdot e^{ic} = f(\alpha e^{ic} - \beta e^{-ic}) \cdot e^{ic}, \\ -\zeta_\beta = r \cdot G' \cdot e^{-ic} = f(\alpha e^{ic} - \beta e^{-ic}) \cdot e^{-ic}. \end{cases} \tag{13}$$

Zur Berechnung von ξ und η muß man zunächst Φ und Ψ aus λ, μ, ω und r' gemäß (5a) § 3 bestimmen. Es war:

$$\begin{cases} \lambda_\beta t = -\dfrac{G''}{G'}, \quad \lambda_\alpha t = \mu_\alpha t + 2\omega_\alpha t = -\dfrac{G''}{G'} - 2\dfrac{F'_1}{F_1} \cdot \dfrac{F_1 F''_1 - F'^2_1}{G'^2} \\ \mu_\alpha t = -\dfrac{G''}{G'}, \quad \mu_\beta t = \lambda_\beta t - 2\omega_\beta t = -\dfrac{G''}{G'} - 2\dfrac{F'_1}{F_1} \cdot \dfrac{F_1 F''_1 - F'^2_1}{G'^2} \end{cases} \tag{14}$$

und somit

$$(15)\qquad \begin{cases} \Phi_\beta T = \lambda_\beta t + r'_\beta = -e^{-ic}\dfrac{f'}{f}, \quad \Psi_a T = -\mu_a t - r'_a = -e^{ic}\dfrac{f'}{f}, \\ \Phi_a T = \lambda_a t + r'_a = -2\dfrac{G''}{G'} - 2\dfrac{F'_1}{F_1}\cdot\dfrac{F_1 F''_1 - F'^2_1}{G'^2} + e^{ic}\dfrac{f'}{f}, \\ \Psi_\beta T = \mu_\beta t - r'_\beta = -2\dfrac{G''}{G'} + 2\dfrac{F'_1}{F_1}\cdot\dfrac{F_1 F''_1 - F'^2_1}{G'^2} + e^{-ic}\dfrac{f'}{f}. \end{cases}$$

Es wird also

$$(\Phi_a + \Psi_\beta)\, T = (\lambda_a + \mu_a)\, t, \text{ d. h. } P_a T = p_a t,\ P_\beta T = p_\beta t,$$

$(Pp) = 0$, d. h. $P =$ Funktion von p in Übereinstimmung mit (11) § 3. Es kommt also der damalige Schluß zur Anwendung, nach dem die Annahme $\varphi = c$ ausgeschlossen wurde. Nur wenn T (d. h. auch $\mathfrak{W}$) eine Funktion von $A - B$ oder von $\alpha - \beta$ ist, bleibt die Annahme $\varphi = c$ möglich; dann aber muß nach (12) $c = 0$ sein. Dieser Fall führt auf die Mindingschen Rotationsflächen.

Berechnet man $\Phi_{a\beta}$ aus den Gleichungen (15) und bildet die Differenz der beiden Werte, so folgt:

$$(16)\qquad \Phi_\beta T_a - \Phi_a T_\beta = 2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{G''}{G'}\right) + 2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{F_1'}{F_1}\cdot\frac{F_1 F''_1 - F'^2_1}{G'^2}\right) = \lambda_\beta t_a - \lambda_a t_\beta,$$

wie es sein muß, da beide Seiten der Gleichung mit $F'_{a\beta}$ übereinstimmen sollen. Setzt man den Wert von G' aus (2) ein, so ergibt sich:

$$\frac{G''}{G'} + \frac{F_1 F''_1 - F'^2_1}{G_1^2}\cdot\frac{F'_1}{F_1} = \frac{F'_1}{F_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg F}{\partial\alpha}.$$

Das mittlere Glied von (16) ist also in der Tat gleich $F'_{a\beta}$ in Übereinstimmung mit obiger Gleichung (3). Die Gleichungen bestehen unabhängig davon, ob Φ und Ψ durch Funktionen von $\mathfrak{W}$ additiv geändert werden.

Insbesondere sei jetzt $c = 0$ gewählt; dann werden Φ, Ψ, ζ und also auch ξ, η Funktionen von $\alpha - \beta$ allein, d. h. es ergibt sich keine Fläche. Hier muß man von der Bemerkung am Schluße von § 3 Gebrauch machen. Es ist $\mathfrak{W}$ eine Funktion von $\alpha - \beta$; es kann deshalb die dort eingeführte (zunächst willkürliche) Funktion $\psi(\mathfrak{W})$ durch $\psi^*(\alpha - \beta)$ ersetzt werden, und die dortige Gleichung (10) wird:

$$\psi^*(\alpha - \beta) - \psi_1^*(\beta - \alpha) + A - B = 0.$$

Es muß also $A = k\alpha$, $B = k\beta$ gesetzt werden, wenn k eine reelle Konstante bezeichnet, so daß:

$$\psi^*(\alpha - \beta) - \psi_1^*(\beta - \alpha) = k(\beta - \alpha).$$

Wählt man $\psi^* = \varkappa(\alpha - \beta)$, $\psi_1^* = \varkappa(\beta - \alpha)$, so folgt $k = -2\varkappa$. Sei also der in (17) gegebene Wert von Φ mit Ψ^0 bezeichnet, so ist nach (9) § 3

$$(18)\qquad \Phi = \Phi^0 - \varkappa(\alpha + \beta), \text{ entsprechend } \Psi = \Psi^0 - \varkappa(\alpha + \beta).$$

So daß Φ und Ψ Funktionen der beiden Variabeln $\alpha - \beta$ und $\alpha + \beta$ werden.[1]

---

[1] Der in § 6 der früheren Abhandlung für $\lambda_{1\beta}$ gegebene Wert, der nur von $\alpha - \beta$ abhängt, stellt also den Wert Φ^0_β, nicht $\Phi_{\beta 1}$ dar. Daselbst ist $\operatorname{tg}\omega$ durch $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega$ zu ersetzen.

Um festzustellen, ob und wie die auf die gegebene Fläche verbiegbaren Rotationsflächen in den gefundenen Lösungen enthalten sind, müssen wir die betreffenden Formeln aus § 6 der früheren Abhandlung nochmals ableiten. Die Mindingschen Flächen sind dargestellt durch folgende Gleichungen. Es werde

$$u = a(\alpha + \beta), \qquad v = \alpha - \beta \qquad (= \text{rein imaginär})$$

gesetzt; dann ist

$$\xi = a^{-1} \operatorname{cosin} u \cdot F_1(v),\ \eta = a^{-1} \sin \cdot F_1(v),\ \zeta = i a^{-1} \int \sqrt{F'^2_1 + a^2 F_1^2}\, d(\alpha - \beta),$$

also:

$$(19) \qquad \begin{cases} d\xi = a^{-1}(F'_1 \operatorname{cosin} u - a \sin u \cdot F_1)\, d\alpha - a^{-1}(F'_1 \operatorname{cosin} u + a \sin u \cdot F_1)\, d\beta, \\ d\eta = a^{-1}(F'_1 \sin u + a \operatorname{cosin} u \cdot F_1)\, d\alpha - a^{-1}(F'_1 \sin u - a \operatorname{cosin} u \cdot F_1)\, d\beta, \\ d\xi = i a^{-1} \sqrt{F'^2_1 + a^2 F_1^2}\, d(\alpha - \beta). \end{cases}$$

Es wird in der Tat $\xi_\alpha^2 + \eta_\alpha^2 + \zeta_\alpha^2 = 0$, $\xi_\alpha \xi_\beta + \eta_\alpha \eta_\beta + \zeta_\alpha \zeta_\beta = 2 F_1^2$. Nach unserem allgemeinen Ansatze soll sein:

$$(20) \qquad \begin{cases} d\xi = i(\zeta_\alpha \operatorname{cosin} \Phi \cdot d\alpha - \zeta_\beta \operatorname{cosin} \Psi \cdot d\beta) \\ d\eta = i(\zeta_\alpha \sin \Phi \cdot d\alpha - \zeta_\beta \sin \Psi \cdot d\beta). \end{cases}$$

Die Vergleichung mit (19) ergibt:

$$(21) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} \Phi = \dfrac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} \chi}{1 - \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} \chi}, & \text{wenn } \operatorname{tg} \chi = a \cdot \dfrac{F_1}{F'_1} \\ \operatorname{tg} \Psi = \dfrac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} \chi}{1 + \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} \chi}, & \text{also } \Phi = u + \chi,\ \Psi = u - \chi \\ 2\mathfrak{W} = \Phi - \Psi = 2\chi, & \operatorname{tg} \mathfrak{W} = a \cdot \dfrac{F_1}{F'_1}. \end{cases}$$

Sollen unsere allgemeinen Formeln im Falle $c = 0$ die Mindingschen Rotationsflächen geben, so muß man setzen:

$$(22) \qquad \zeta_\alpha = r \cdot G_\alpha = r \cdot G' = i r \sqrt{F_1^2 + F'^2_1} = i a^{-1} \sqrt{F'^2_1 + a^2 F_1^2},$$

folglich

$$r^2 = a^{-2} \frac{F'^2_1 + F_1^2 \cdot a^2}{F'^2_1 + F_1^2} = \frac{\operatorname{cosin}^2 \omega}{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}} = -\frac{F_1^2}{G'^2} \frac{1}{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}}$$

und hieraus

$$(23) \qquad \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W} = \frac{a^2 F_1^2}{F'^2_1 + a^2 F_1^2},\ \operatorname{tg}^2 \mathfrak{W} = \frac{F'^2_1}{a^2 F_1^2}.$$

Dies Resultat stimmt mit der letzten Gleichung (21) nicht überein; man kann aber durch folgende Überlegung die Übereinstimmung herstellen.

Die Größen Φ und Ψ sind durch die Gleichungen (15) nur bis auf additive Konstante bestimmt; wir können sie also durch $\Phi + \frac{1}{2}\pi$ und $\Psi + \frac{1}{2}\pi$ ersetzen, was mit einer Drehung des Koordinatensystems gleichbedeutend ist. Ebenso kann man in (18a) u durch $\frac{\pi}{2} + u$ ersetzen. Die Gleichungen (20) werden dann:

$$d\xi = i(-\zeta_\alpha \sin \Phi\, d\alpha + \zeta_\beta \sin \Psi\, d\beta),$$
$$d\eta = i(\quad \zeta_\alpha \operatorname{cosin}\Phi\, d\alpha - \zeta_\beta \operatorname{cosin}\Psi\, d\beta),$$

und in den Gleichungen (19) ist cosin u durch — sin u, sin u durch cosin u zu ersetzen.

An Stelle von (21) findet man dann

$$-\operatorname{tg}\Phi = \frac{-F'_1 \sin u - a F_1 \operatorname{cosin} u}{F'_1 \operatorname{cosin} u + a F_1 \sin u} = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg}\chi_1}{1 - \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg}\chi_1},$$

entsprechend für Ψ, während $\mathfrak{W}$ nur das Vorzeichen ändert; es ist

$$-\Phi + \Psi = 2\mathfrak{W} = 2\chi_1, \qquad \chi_1 = a\frac{F_1}{F'_1},$$

was nun mit (23) übereinstimmt.

Für $c = 0$ ist die Lösung von Gleichung (12) gegeben, indem man r gleich einer willkürlichen Funktion von $\alpha - \beta$ annimmt. Dadurch wären die vorstehenden Gleichungen wesentlich vereinfacht worden; es kam aber darauf an, den Zusammenhang mit den früheren Formeln klarzulegen. Auch $r' = \lg r$ wäre dann eine willkürliche Funktion von $\alpha - \beta$; T hängt nur von $\alpha - \beta$ ab; so wird nach (15) auch Φ eine willkürliche Funktion von $\alpha - \beta$, und so erklärt sich die Möglichkeit der obigen Einführung einer willkürlichen Funktion $\psi^*(\alpha - \beta)$, die dann durch $\varkappa(\alpha - \beta)$ ersetzt wurde.

§ 8. Singuläre Biegungsflächen von Rotationsflächen.

Die singulären Biegungsflächen einer Rotationsfläche findet man nach § 5 in folgender Weise. Es ist $F = 2F'^2_1$, also

$$\frac{\partial^2 \lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 2\left(\frac{\partial^2 \lg F_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial \lg F_1}{\partial\alpha}\frac{\partial \lg F_1}{\partial\beta}\right) = -2\frac{\mathfrak{W}_\alpha \mathfrak{W}_\beta}{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}}.$$

Bezeichnet man die linke Seite, die eine Funktion von $\alpha - \beta$ ist, mit $2\psi(\alpha - \beta)$ und führt eine Funktion $\mathfrak{w}$ durch die Gleichung $\mathfrak{w} = \int \frac{d\mathfrak{W}}{\operatorname{cosin}\mathfrak{W}}$ ein, so hat man für $\mathfrak{w}$ die partielle Gleichung:

$$\psi(\alpha - \beta) + \mathfrak{w}_\alpha \mathfrak{w}_\beta = 0. \tag{1}$$

Die Gleichungen der Charakteristiken sind:

$$\frac{d\alpha}{q} = \frac{d\beta}{p} = -\frac{d\mathfrak{w}}{2\psi} = \frac{-dp}{\psi'} = \frac{dq}{\psi'}, \tag{2}$$

wo p, q für $\mathfrak{w}_\alpha$ und $\mathfrak{w}_\beta$ geschrieben ist; also:

$$dp + dq = 0,\ \psi' \cdot (d\alpha - d\beta) = pdp + qdq,\ p + q = a,\ p^2 + q^2 = 2\psi + b,$$

wo a und b Konstante sind. Wegen (1) ist hier b durch a schon bestimmt: $b = a^2$. Es wird:

$$2p = a + \sqrt{a^2 + 4\psi},\quad 2q = a - \sqrt{a^2 + 4\psi}. \tag{3}$$

Es ist ferner $q d\mathfrak{w} = -2\psi \cdot d\alpha$, $p d\mathfrak{w} = -2\psi d\beta$, also $(q-p)\, d\mathfrak{w} = -2\psi\,(d\alpha - d\beta)$,

$$\mathfrak{w} = 2\int \frac{\psi}{\sqrt{a^2+4\psi}}\, d(\alpha-\beta) + \text{const} \tag{4}$$

$d\alpha = -q\dfrac{d\mathfrak{w}}{2\psi}$, $d\beta = -p\dfrac{d\mathfrak{w}}{2\psi}$. Es sind also die Größen $\alpha, \beta, \mathfrak{w}, p, q$ als Funktionen eines Parameters (nämlich $\alpha-\beta$) dargestellt, und damit sind die charakteristischen Flächenstreifen zur Aufstellung der vollständigen Lösung bekannt.

Für die singulären Flächen von § 6 erhalten wir aus der dortigen Gleichung (1): $\varphi = \frac{1}{2}\cdot\pi$; es wäre also $(\omega, \varphi) = 0$; und die Gleichung (3) § 6 wird:

$$F'_{\alpha\beta} \sin\omega \cdot \operatorname{cosin}\omega + 2\,\omega_\alpha \omega_\beta t + \omega_\alpha r'_\beta + \omega_\beta r'_\alpha = 0. \tag{5}$$

Hier sind F und ω Funktionen von $\alpha-\beta$; die Gleichung ist also von der Form

$$\chi(\alpha-\beta) + r'_\beta - r'_\alpha = 0 \tag{6}$$

und hat das allgemeine Integral:

$$r' (= \lg r) = \int \chi(\alpha-\beta)\,(d\alpha - d\beta) + f(\alpha+\beta), \tag{7}$$

wo f eine willkürliche Funktion bezeichnet. Es bestimmt sich Φ aus der Gleichung:

$$\Phi_\beta \cdot T = \lambda_\beta t + r'_\beta = \lambda_\beta t + f'(\alpha+\beta) - \chi(\alpha-\beta)$$

und entsprechend für Ψ_α, nachdem $\mathfrak{W}$ aus der Gleichung $\operatorname{cosin}^2\mathfrak{W}\cdot r^2 = \operatorname{cosin}^2\omega$ berechnet ist. Diese zweite Klasse von singulären Biegungsflächen der Rotationsflächen wird also durch bloße Quadraturen gewonnen.

§ 9. Die Biegungsflächen der Kugel.

Die Kugel ist eine Rotationsfläche, ihre Biegungsflächen sind also nach vorstehendem bekannt. Für sie hat man (der Radius gleich 1 angenommen) zu setzen:

$$G = W = i\operatorname{tg}(\alpha-\beta),\quad \lambda = \frac{\pi}{2} - 2\beta,\quad \mu = \frac{\pi}{2} - 2\alpha,\quad \omega = \alpha-\beta,$$

$$F = \frac{2}{\operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta)},\quad F_1 = \frac{1}{\operatorname{cosin}(\alpha-\beta)},\quad F'_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{-2}{\operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta)}.$$

Es wird φ wieder durch die Gleichung (7) § 7 bestimmt, sodann r' durch (7a), worin

$$G' = \frac{i}{\operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta)},\quad G'' = \frac{2\,i\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta)}$$

zu setzen ist.

Die Annahme $\varphi = \text{const}$ ist wieder nicht zulässig, es sei denn, daß $\varphi = 0$ genommen wird. Dann ergeben sich die Rotationsflächen von positivem konstanten Krümmungsmaße.

Für die erste Schar von singulären Biegungsflächen der Kugel gilt die Differentialgleichung.

$$\mathfrak{W}_\alpha \mathfrak{W}_\beta \cdot \operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta) = \operatorname{cosin}^2\mathfrak{W}.$$

Im § 7 ist also ψ durch $\operatorname{cosin}^{-2}(\alpha-\beta)$ zu ersetzen. Für die dortigen Gleichungen (3) und (4) ergeben sich keine wesentlichen Vereinfachungen.

Für die zweite Schar von singulären Biegungsflächen der Kugel ergibt sich aus (5) § 8:

$$-4\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+r'_\beta-r'_\alpha=0.$$

Es ist also χ durch $-4\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ zu ersetzen. Das allgemeine Integral wird:

$$r=\operatorname{cosin}^4(\alpha-\beta)\cdot f(\alpha+\beta),$$

ferner:

$$T^2=\operatorname{cosin}^6(\alpha-\beta)\cdot f^2-1,\quad \Phi_\beta=[2\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg} f(\alpha+\beta)]\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosin}^6(\alpha-\beta)\cdot f^2-1}}.$$

§ 9. Die Biegungsflächen der Minimalflächen.

Bei den Minimalflächen hat man sich nach dem Vorgange von Enneper und Weierstraß schon immer der Darstellung durch die Parameter der Minimalkurven bedient. Setzt man im § 1:

(1) $$W=A+B,\quad \lambda=2\alpha,\quad \mu=2\beta,\quad \omega=\alpha-\beta,$$

so erhält man die bekannten Formeln in der Form:

(2) $$\begin{cases} x=i\int[\operatorname{cosin}2\alpha\cdot A'\,d\alpha-\operatorname{cosin}2\beta\cdot B'\,d\beta],\\ y=i\int[\ \sin\ 2\alpha\cdot A'\,d\alpha-\ \sin\ 2\beta\cdot B'\,d\beta],\quad z=A+B,\end{cases}$$

wo A eine Funktion von α, B eine Funktion von β bezeichnet. Die Differentialgleichungen (22) und (23) von § 2 werden:

(3) $$\begin{cases} A'e^{\varphi i}\varphi_\beta+B'e^{-\varphi i}\varphi_\alpha=0,\\ A'e^{\varphi i}r'_\beta-B'e^{-\varphi i}r'_\alpha=0.\end{cases}$$

Führt man A, B an Stelle von α, β als unabhängige Variable ein, so werden die Gleichungen (2):

(4) $$\begin{cases} x=i\int[\operatorname{cosin}2\mathfrak{A}\cdot dA-\operatorname{cosin}2\mathfrak{B}\cdot dB),\\ y=i\int[\ \sin\ 2\mathfrak{A}\cdot dA-\ \sin\ 2\mathfrak{B}\cdot dB),\quad z=A+B,\end{cases}$$

wo nun $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Funktionen von bzw. A, B bedeuten, und die Gleichungen (3) werden:

(5) $$\begin{cases} e^{\varphi i}\varphi_B+e^{-\varphi i}\varphi_A=0,\\ e^{\varphi i}r'_B-e^{-\varphi i}r'_A=0\end{cases}$$

und man hat

(6) $$F=2A'B'\operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta)\,d\alpha\,d\beta=2\operatorname{cosin}^2(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cdot dA\,dB,\quad \omega=\mathfrak{A}-\mathfrak{B}.$$

Die allgemeinen Integrale dieser beiden Gleichungen sind, wenn mit f und f_1, willkürliche Funktionen bezeichnet werden:

(7) $$\begin{cases} e^{\varphi i}A-e^{-\varphi i}B=f(\varphi),\\ \qquad G(A,B)=f_1(r_1),\end{cases}$$

wenn $G(A,B)=\text{const}$, das Integral der Gleichung $\varphi_A\,dA-\varphi_B\,dB=0$ darstellt, welch letztere aus der partiellen Gleichung

(7a) $$\varphi_B r'_A+\varphi_A r'_B=0$$

gewonnen wird, die eine Folge von (5) ist. Hat man also eine Minimalfläche in der Form (2) durch die Parameter der Minimalkurven dargestellt, so sind, nach Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung, zur Aufstellung aller Biegungsflächen nur noch Quadraturen notwendig.

Die Lösung $\varphi = \text{const}$ ist hier zulässig (vgl. den Schluß von § 3). Es ergeben sich die von Bonnet und Schwarz studierten Biegungsflächen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi = i\int[e^{ic}\cdot \cos 2\alpha\cdot A'\,d\alpha - e^{-ic}\cos 2\beta\cdot B'\,d\beta], \\ \eta = i\int[e^{ic}\cdot \sin 2\alpha\cdot A'\,d\alpha = e^{-ic}\sin 2\beta\cdot B'\,d\beta], \\ \zeta = \int[e^{ic}A'\,d\alpha\cdot e^{-ic}B'\,d\beta]. \end{cases}$$

Wählt man $W = -ia(\alpha-\beta)$, wo a eine Konstante bedeutet, so erhalten wir aus (2) die Parameterdarstellung des Katenoids (Rotationsfläche der Kettenlinie) in der Form:

$$(9)\qquad \begin{cases} x = -a\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta), \\ y = a\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta), \quad z = -ia(\alpha-\beta). \end{cases}$$

In den Formeln von § 7 für Rotationsflächen ist $F_1 = a\cdot\cos(\alpha-\beta)$ zu nehmen. Die Gleichungen (7) werden in diesem Falle

$$(10)\qquad e^{\varphi i}\alpha + e^{-\varphi i}\beta = f(\varphi), \quad r = f_1(\varphi).$$

Die Gleichung (8) von § 2 wird für eine Minimalfläche:

$$R_\beta A' - R'_\alpha B' = 0 \text{ oder } R_B = R'_A,$$

d. h. es kann eine Funktion von A und B so gewählt werden, daß

$$R = \frac{\partial P}{\partial A},\ R' = \frac{\partial P}{\partial B}$$

ist, also

$$\frac{\partial^2 P}{\partial A\,\partial B} = e^{-i\varphi}\frac{\partial r}{\partial A} - ire^{-i\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial A} = e^{i\varphi}\frac{\partial r}{\partial B} + ire^{i\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial B},$$

in Übereinstimmung mit (3) und (7a).

Da hier $F = 2A'B'\cos^2\omega = 2A'B'\cos^2(\alpha-\beta)$ ist, so wird die erste Schar der singulären Biegungsflächen durch die partielle Gleichung bestimmt:

$$(11)\qquad \frac{1}{\cos^2(\alpha-\beta)} + \frac{\mathfrak{W}_\alpha\mathfrak{W}_\beta}{\cos^2\mathfrak{W}} = 0.$$

Die Gleichung ist von der Form (1) § 7 bei den Rotationsflächen. Die für die vollständige Lösung benötigten charakteristischen Flächenstreifen sind folglich durch Quadraturen gegeben.

Für die zweite Schar singulärer Biegungsflächen erhält man aus (1) § 6

$$(12)\qquad A'e^{\varphi i} - B'e^{-\varphi i} = 0,$$

ferner aus der dortigen Gleichung (3), da $\omega_\alpha = 1 = -\omega_\beta$ ist:

$$(13)\qquad r'_\beta - r'_\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{A''}{A'} - \frac{B''}{B'}\right) = 0.$$

Das allgemeine Integral lautet:

$$r' = -\frac{1}{2}\lg B' - \frac{1}{2}\lg A' + \lg f(\alpha+\beta),\ r = \frac{f(\alpha+\beta)}{\sqrt{A'B'}},$$

wo f eine willkürliche Funktion bezeichnet. Es wird also

$$\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W} = \frac{A'B'}{f^2}\cdot \operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta),\quad T^2 = \frac{f^2 - A'B'\operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta)}{A'B'\operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta)}.$$

Schließlich findet man Φ aus den Gleichungen

$$\Phi_\beta T = r'_\beta + i\varphi_\beta = f'(\alpha+\beta),\ \Phi_\beta = \frac{f'(\alpha+\beta)\cdot\sqrt{A'B'}\cdot\operatorname{cosin}(\alpha-\beta)}{\sqrt{f^2 - A'B'\cdot\operatorname{cosin}^2(\alpha-\beta)}},$$

und entsprechend für Ψ. Es sind auch nur Quadraturen notwendig.

§ 10. Die Flächen mit gegebenem Linienelemente.

Alle Flächen mit gleichem Ausdrucke für das Linienelement sind aufeinander abwickelbar (ineinander verbiegbar). Ist also das Linienelement in seiner Abhängigkeit von den Parametern α, β der Minimalkurven gegeben, so braucht man nur eine der zugehörigen Flächen zu kennen, um dann aus ihr alle anderen nach den Methoden von §§ 3 ff. abzuleiten.

Unter den Biegungsflächen einer gegebenen Fläche ist nach § 5 eine Schar enthalten, deren Hilfsgröße $\mathfrak{W}$ allein durch die gegebene Funktion F bestimmt wird, indem sie der dortigen Differentialgleichung (6) genügen muß. Haben wir also ω aus der entsprechenden Gleichung

$$F'_{\alpha\beta}\cdot\operatorname{cosin}^2\omega + 2\,\omega_\alpha\,\omega_\beta = 0, \tag{1}$$

gefunden, so kommt es darauf an, aus ihr die übrigen Hilfsgrößen λ, μ, W abzuleiten. Es geschieht dies durch die in § 1 eingeführte Größe δ, die den dortigen Gleichungen (18) und (21) genügen muß, nämlich:

$$e^{i\delta}\left(\frac{1}{2}F'_\beta + i\delta_\beta + \omega_\beta\operatorname{tg}\omega\right) + e^{-i\delta}\left(i\delta_\alpha - \frac{1}{2}F'_\alpha - \omega_\alpha\operatorname{tg}\omega'\right) = 0, \tag{2}$$

$$F'_{\alpha\beta}\sin\omega\cdot\operatorname{cosin}\omega - \frac{1}{2} - (F'_\alpha W_\beta + F'_\beta\omega_\alpha) - i(\omega_\alpha\delta_\beta - \omega_\beta\delta_\alpha) = 0. \tag{3}$$

Es ist identisch:

$$\lambda_\beta\omega_\alpha - \lambda_\alpha\omega_\beta = \lambda_\beta\omega_\alpha - (2\,\omega_\alpha + \mu_\alpha)\,\omega_\beta = \lambda_\beta\omega_\alpha - \mu_\alpha\omega_\beta - 2\,\omega_\alpha\omega_\beta.$$

Die Vergleichung mit (8) § 1 lehrt somit, daß für die durch obige Gleichung (1) charakterisierten Flächen die Identität besteht

$$\lambda_\beta\omega_\alpha - \mu_\alpha\omega_\beta = 0. \tag{4}$$

Nun ist nach (3), (15) und (17) von § 1

$$(\lambda_\beta\omega_\alpha - \mu_\alpha\omega_\beta)\cdot t = \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha W_\beta}(\omega_\alpha W_\beta + \omega_\beta W_\alpha)$$

$$= \frac{W_{\alpha\beta}\sqrt{F}}{W_\alpha W_\beta}(\omega_\alpha\Omega' + \omega_\beta\Omega) = \frac{W_{\alpha\beta}\sqrt{F}}{W_\alpha W_\beta\cdot\sqrt{2}\operatorname{cosin}\omega}(\omega_\alpha e^{-i\delta} + \omega_\beta e^{i\delta}).$$

Wegen (4) verschwindet also die rechtsstehende Klammer:

$$\omega_\alpha e^{-i\delta} + \omega_\beta e^{i\delta} = 0. \tag{5}$$

Vermöge dieser Relation geht obige Gleichung (2) in die Gleichung (3) über, wenn man noch die Bedingung (1) berücksichtigt. Sind ω und δ aus (1) und (5) berechnet, so sind also auch die beiden Gleichungen (3) und (4) erfüllt, und man findet W aus einer der beiden Gleichungen (15) § 1, d. h.

$$W_\alpha = \sqrt{\frac{F}{2}} \cdot \frac{e^{i\delta}}{\operatorname{cosin}\omega}, \quad W_\beta = \sqrt{\frac{F}{2}} \cdot \frac{e^{-i\delta}}{\operatorname{cosin}\omega},$$

schließlich λ und μ aus den Gleichungen (10) und (11) § 1, nämlich:

$$\lambda_\beta t = \frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial \beta} = i\delta_\beta + \omega_\beta t, \quad \mu_\alpha t = -\frac{\partial \lg W_\beta}{\partial \alpha} = i\delta_\alpha - \omega_\alpha t.$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst, aus dem Linienelemente (d. h. aus der gegebenen Funktion F) eine zugehörige Fläche (und zwar sogleich unendlich viele) zu bestimmen. Die gefundenen Flächen sind solche, wie sie nach § 5 als singuläre Biegungsflächen einer gegebenen Fläche auftreten, nämlich charakterisiert durch die Bedingung (4).

Bestehen umgekehrt die Gleichungen (1) und (4), und ist $2\omega = \lambda - \mu$, so besteht auch die Gleichung (8) § 1, so daß man die Folgerungen (9) und (10) daselbst ziehen kann; aus ihnen erhält man:

$$(\lambda_\beta \omega_\alpha - \mu_\alpha \omega_\beta) t = \frac{1}{2}(F'_\beta \omega_\alpha + F'_\alpha \omega_\beta) + i(\omega, \delta) + 2\omega_\alpha \omega_\beta \operatorname{tg}\omega.$$

Die rechte Seite ist aber wegen (1) mit der linken Seite von (3) identisch. Infolge der Gleichungen (1) und (4) bzw. (5) sind also beide Gleichungen (2) und (3) erfüllt.

Sind ω und δ bekannt, so findet man W aus (15) § 1, ferner λ und μ aus (3) § 1.

In den Sitzungsberichten der Akademie von 1923 hatte ich eine zweite Methode zur Bestimmung von Flächen mit gegebenem Linienelemente angegeben, die indessen nicht durchführbar ist. Allerdings werden durch die Gleichungen $Me^{i\delta} + Ne^{-i\delta} = 0$, $F'_{\alpha\beta} \sin^2\omega = -2MN$ (wo $M = \frac{1}{2}F'_\beta + i\delta_\beta, N = \frac{1}{2}F'_\alpha - i\delta_\alpha$) die beiden Gleichungen (3), (4) auch befriedigt; es ergeben sich aber unzulässige Folgerungen für λ, μ. Aus (15), (17) und (19) von § 1 würde nämlich folgen: $p_\beta \mu_\alpha + p_\alpha \lambda_\beta = 0$ oder $\lambda_\alpha \lambda_\beta + \mu_\alpha \mu_\beta + 2\lambda_\beta \mu_\alpha = 0$. Andererseits erhält man aus (3) $-2Ne^{-i\delta} + t(e^{i\delta}\omega_\beta - e^{-i\delta}\omega_\alpha) = 0$ oder $\lambda_\alpha e^{-i\delta} + \omega_\beta e^{i\delta} = 0$ und wenn man $e^{i\delta}$ durch (17) eliminiert: $\lambda_\alpha W_\beta + \omega_\beta W_\alpha = 0$ oder $\lambda_\alpha \lambda_\beta + \frac{1}{2}\mu_\alpha \mu_\beta - \frac{1}{2}\mu_\alpha \lambda_\beta - \frac{1}{2}\mu_\alpha \lambda_\beta = 0$, und in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung $\frac{1}{2}\mu_\alpha(\mu_\beta + \frac{5}{2}\lambda_\beta) = 0$. Da man i mit $-i$ vertauschen kann, folgt also $\mu_\alpha = 0$, $\lambda_\beta = 0$, was nicht zulässig ist.

§ 10. Die Differentialgleichung (7) von § 1.

Die drei Koordinaten x, y, z eines Punktes der gegebenen Fläche genügen der Gleichung (7) von § 1, wenn α, β die Parameter der Minimalkurven sind. Dasselbe muß für die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes jeder Biegungsfläche gelten. Für ζ habe ich das in den Sitzungsberichten von 1923 gezeigt; die Rechnung gestaltete sich in folgender Weise. Aus (10) § 2 erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\zeta_{\alpha\alpha}}{\zeta_\alpha} &= -\frac{\zeta_{\alpha\beta}}{\zeta_\beta} - 2\,\omega_\alpha\, t + 2\,\mathfrak{W}_\alpha\, T + \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} + \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\beta}\\ &= \Psi_\alpha\, T + 2\,\mathfrak{W}_\alpha\, T - 2\,\omega_\alpha\, t - \mu_\alpha\, t + \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} \text{ nach (3) § 1}\\ &= \Phi_\alpha\, T - \lambda_\alpha\, t + \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha}, \text{ da } 2\,W = \Phi - \Psi,\ 2\,\omega = \lambda - \mu.\end{aligned}$$

Ebenso:
$$\frac{\zeta_{\beta\beta}}{\zeta_\beta} = -\Psi_\beta\, T + \mu_\beta\, t + \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta};$$

ferner aus (4) und (3) § 1:

$$\frac{F_\alpha}{F} = \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} + \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\beta} - 2\,\omega_\alpha\, t = \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} - \lambda_\alpha\, t, \quad \frac{F_\beta}{F} = \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} + \mu_\beta\, t.$$

Die Gleichung (7) § 1 schreiben wir in der Form:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha}\cdot\frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} - \frac{W_{\alpha\beta}^2}{W_\alpha W_\beta} - \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha}\cdot\frac{F_\beta}{F} - \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta}\cdot\frac{F_\alpha}{F} + \frac{F_\alpha F_\beta}{F^2}\\ &= \left(\frac{F}{W_\alpha W_\alpha} - 2\right)\frac{\partial^2 \lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -2\sin^2\omega\cdot\frac{\partial^2 \lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta} = (\lambda_\beta\,\mu_\alpha - \lambda_\alpha\,\mu_\beta)\,t^2\\ &= (\Phi_\beta\,\Psi_\alpha - \Phi_\alpha\,\Psi_\beta)\,T^2 \text{ nach (6) § 1 und (1) § 2.}\end{aligned}\right.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\mathfrak{G} = \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} - \lambda_\alpha\, t, \quad \mathfrak{H} = \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} + \mu_\beta\, t,$$

so wird die Gleichung (1), nachdem W durch ζ, also ω durch $\mathfrak{W}$, λ durch Φ, μ durch Ψ ersetzt ist:

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{G} + \Phi_\beta\, T)\,(\mathfrak{H} - \Psi_\beta\, T) - \mathfrak{H}\,(\mathfrak{G} + \Phi_\alpha\, T) - \mathfrak{G}\,(\mathfrak{H} - \Psi_\beta\, T)\\ &+ \mathfrak{H}\cdot\mathfrak{G} - \frac{\zeta_{\alpha\beta}^2}{\zeta_\alpha\,\zeta_\beta} = -\Phi_\alpha\,\Psi_\beta\, T^2 - \frac{\zeta_{\alpha\beta}^2}{\zeta_\alpha\,\zeta_\beta} = (\Phi_\beta\,\Psi_\alpha - \Phi_\alpha\,\Psi_\beta)\,T^2 = -2\sin^2\mathfrak{W}\cdot F'_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

so daß die Gleichung (1) tatsächlich erfüllt wird.

Ersetzt man ζ durch ξ oder η, so wird die Rechnung etwas umständlicher. Man kann sie in folgender Weise vereinfachen:

Die Differentiale dx, dy, dz müssen sich auch in folgender Form darstellen lassen:

$$dx = W_\alpha^*\, d\alpha + W_\beta^*\, d\beta,\ dy = i\,(\sin\lambda^*\cdot W_\alpha^*\cdot d\alpha - \sin\mu^*\, W_\beta^*\cdot d\beta),$$
$$dz = i\,(\cosin\lambda^*\cdot W_\alpha^* - \cosin\mu^*\cdot W_\beta^*).$$

Dann folgt:

$$W_\alpha^* = i \operatorname{cosin} \lambda \cdot W_\alpha, \quad \sin \lambda^* \cdot W_\alpha^* = \sin \lambda \cdot W_\alpha, \quad i \operatorname{cosin} \lambda^* \cdot W_\alpha^* = W_\alpha$$

und somit

$$-i \operatorname{tg} \lambda^* = \sin \lambda, \; -i \operatorname{tg} \lambda = \sin \lambda^*, \; W_\alpha^* = i \operatorname{cosin} \lambda \cdot W_\alpha, \; W_\beta^* = -i \operatorname{cosin} \mu \cdot W_\beta.$$

Die Integralitätsbedingung für W^* ist hier erfüllt, denn es ergibt sich beiderseits

$$W_{\alpha\beta}^* = -W_{\alpha\beta} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda + \mu)}{\sin \frac{1}{2}(\lambda - \mu)}.$$

Mit den neuen Größen λ^*, μ^*, W^* kann man ebenso verfahren wie soeben mit λ, μ, W, so daß auch für ξ die Gleichung (7) § 1 erfüllt sein muß; ebenso für η.

Auch für die gemäß § 9 aus der Fundamentalgröße F abgeleiteten Flächen muß die Gleichung (7) § 1 befriedigt sein. Aus (4) und (3) erhält man

$$\frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} = -\frac{W_{\alpha\beta}}{W_\beta} + 2\,t \cdot \omega_\alpha + F'_\alpha, \quad \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} = -\frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha} + 2\,t \cdot \omega_\beta + F'_\beta$$
$$= \lambda_\alpha \cdot t + F'_\alpha, \qquad\qquad = F'_\beta - \mu_\beta \cdot t.$$

Die linke Seite von (1) wird somit

$$(F'_\alpha + \lambda_\alpha t)(F'_\beta - \mu_\beta t) - (F'_\alpha + \lambda_\alpha t) F'_\beta - (F'_\beta - \mu_\alpha t) F'_\alpha + F'_\alpha F'_\beta - \frac{W_{\alpha\beta}^2}{W_\alpha W_\beta}$$
$$= -\lambda_\alpha \mu_\beta t^2 - \frac{W_{\alpha\beta}^2}{W_\alpha W_\beta} = (\lambda_\beta \mu_\alpha - \lambda_\alpha \mu_\beta)\, t^2,$$

also in der Tat gleich der rechten Seite von (1).

§ 11. Unendlich kleine Verbiegungen.

Soll die Verbiegung unendlich klein sein, so setzen wir:

$$\xi = x + \varepsilon \mathfrak{x}, \; \eta = y + \varepsilon \mathfrak{y}, \; \zeta = z + \varepsilon \mathfrak{z} = W + \varepsilon \mathfrak{z},$$

wo ε unendlich klein sein möge, ferner

$$\Phi = \lambda + \varepsilon \mathfrak{l}, \; \Psi = \mu + \varepsilon \mathfrak{m}, \; r = 1 + \varepsilon \mathfrak{r}, \; \varphi = \varepsilon \mathfrak{p}. \; \mathfrak{W} = \omega + \varepsilon \mathfrak{w}.$$

Aus (11) § 2 folgt

$$(1 + \varepsilon \mathfrak{r})^2 \cdot \operatorname{cosin}^2 (\omega + \varepsilon \mathfrak{w}) = \operatorname{cosin}^2 \omega$$

oder, wenn man die Glieder mit ε^2 vernachlässigt.

(1) $$\mathfrak{r} \operatorname{cosin}^2 \omega - \mathfrak{w} \cdot \sin \omega \cdot \operatorname{cosin} \omega = 0, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{w} \cdot \operatorname{tg} \omega$$

und hieraus

(2) $$\mathfrak{r}_\alpha = \mathfrak{w}_\alpha \operatorname{tg} \omega + \mathfrak{w} \cdot \frac{\omega_\alpha}{\operatorname{cosin}^2 \omega}, \; \mathfrak{r}_\beta = \mathfrak{w}_\beta \cdot \operatorname{tg} \omega + \mathfrak{w} \cdot \frac{\omega_\beta}{\operatorname{cosin}^2 \omega}.$$

Die Gleichung (1) § 2 wird:

(3) $$W_\alpha \mathfrak{p}_\beta + W_\beta \mathfrak{p}_\alpha = 0,$$

und aus (2) § 2 erhält man:

$$(4)\qquad 2\,i\psi\cdot W_{\alpha\beta}+W_\alpha\left(\mathfrak{w}_\beta\cdot\operatorname{tg}\omega+\frac{\mathfrak{w}\cdot\omega_\beta}{\operatorname{cosin}^2\omega}\right)-W_\beta\left(\mathfrak{w}_\alpha\cdot\operatorname{tg}\omega+\frac{\mathfrak{w}\cdot\omega_\alpha}{\operatorname{cosin}^2\omega}\right)=0.$$

Da W und ω gegeben sind, so bestimmen sich hiernach ψ und $\mathfrak{w}$ nacheinander durch diese beiden linearen partiellen Gleichungen (3) und (4), sodann $\mathfrak{r}$ durch (1). Da $\zeta_\alpha=z_\alpha+\varepsilon\mathfrak{z}_\alpha=r\cdot e^{i\varphi}\,W_\alpha=(1+\varepsilon\mathfrak{r})\,(1+i\psi\varepsilon)\,W_\alpha$ sein soll, so folgt:

$$(5)\qquad \mathfrak{z}_\alpha=(\mathfrak{r}+i\psi)\,W_\alpha,\quad \mathfrak{z}_\beta=(\mathfrak{r}-i\psi)\,W_\beta.$$

Die doppelte Berechnung von $\zeta_{\alpha\beta}$ führt auf die Gleichung (4) zurück. Die Gleichungen für Φ_β und Ψ_α ergeben:

$$(6)\qquad \mathfrak{l}_\beta\cdot\operatorname{tg}\omega+\frac{\mathfrak{w}\cdot\omega_\beta}{\operatorname{cosin}^2\omega}=\mathfrak{r}_\beta+i\psi_\beta,\quad \mathfrak{m}_\alpha\cdot\operatorname{tg}\omega+\frac{\mathfrak{w}\cdot\omega_\alpha}{\operatorname{cosin}^2\omega}=-\mathfrak{r}_\alpha+i\psi_\alpha,$$

wodurch $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ bestimmt sind. Schließlich wird:

$$(7)\qquad d\mathfrak{x}=i\,(\cos\lambda\cdot\mathfrak{z}_\alpha-\mathfrak{l}\cdot\sin\lambda\cdot W_\alpha)\,d\alpha-i\,(\cos\mu\cdot\mathfrak{z}_\beta-\mathfrak{l}\sin\mu\cdot W_\beta)\,d\beta$$

entsprechend für $d\mathfrak{y}$.

Den Übergang zu der singulären Biegungsfläche von § 5 vermitteln Werte von ψ und $\mathfrak{w}$, die durch die beiden Gleichungen definiert sind:

$$(8)\qquad \begin{cases} W_\alpha(\mathfrak{w}_\beta+i\psi\,\omega_\beta)+W_\beta(\mathfrak{w}_\alpha-i\psi\,\omega_\alpha)=0,\\ \mathfrak{w}_\alpha\,\omega_\beta+\mathfrak{w}_\alpha\,\omega_\beta-2\,F'_{\alpha\beta}\cdot\mathfrak{w}\cdot\sin\omega\cdot\cos\omega=0,\end{cases}$$

aus denen zuerst $\mathfrak{w}$ und dann ψ zu bestimmen ist, worauf für $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ wieder die Gleichungen (1) und (6) bestehen.

Der Zusammenhang mit der Theorie des Entsprechens zweier Flächen durch Orthogonalität der Elemente beruht auf der Identität

$$dx\,d\mathfrak{x}+dy\,d\mathfrak{y}+dz\,d\mathfrak{z}=0.$$

Die Lösung pflegt man sonst auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückzuführen.[1]

Die Gleichungen für die zweite Klasse von singulären Biegungsflächen (§ 6) ergeben:

$$(9)\qquad (W_\alpha\,\omega_\beta-W_\beta\,\omega_\alpha)\,\psi=0,\ \text{d. h. } \psi=0,\ \text{und}$$

$$\omega_\alpha\left(\mathfrak{w}_\beta\cdot t+\omega_\beta\frac{\mathfrak{w}}{\operatorname{cosin}^2\omega}\right)+\omega_\beta\left(\mathfrak{w}_\alpha\cdot t+\omega_\alpha\frac{\mathfrak{w}}{\operatorname{cosin}^2\omega}\right)=0.$$

oder

$$(10)\qquad \mathfrak{w}_\alpha\frac{\partial\mathfrak{w}\cdot\operatorname{tg}\omega}{\partial\beta}+\omega_\beta\frac{\partial\mathfrak{w}\cdot\operatorname{tg}\omega}{\partial\alpha}=0.$$

---

[1] Vgl. z. B. Darboux: Leçons t. IV, ferner A. Voß: Sitzungsberichte der math.-physik. Klasse der Bayer. Akademie der Wissenschaft, Bd. 27, 1897. Bei Josephine Kapfer erscheint dies Problem als besonderer Fall der isogonalen Verwandtschaft von Flächen, Sitzungsberichte der math.-physik. Klasse der Bayer. Akademie 1926 und 1927.

Wie in § 3 gezeigt wurde, ist die Lösung $\varphi = \text{const}$ im allgemeinen nicht zulässig; so führt auch hier die Lösung $\psi = 0$ nicht zu einer brauchbaren Lösung. Aus (4) würde sich nämlich ergeben $(W\,\mathfrak{r}) = 0$, d. h. $\mathfrak{r} = f(W)$. Da $2\,\mathfrak{w} = \mathfrak{l} - \mathfrak{m}$ ist, so folgt aus (6):

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_\beta t &= f'(W)\,W_\beta - \mathfrak{w}\cdot t_\beta, & \mathfrak{l}_\alpha t &= 2\,\mathfrak{w}_\alpha t - f'(W)\,W_\alpha - \mathfrak{w}\cdot t_\alpha, \\ \mathfrak{m}_\alpha t &= -f'(W)\,W_\alpha + \mathfrak{w}\cdot t_\alpha, & \mathfrak{m}_\beta t &= 2\,\mathfrak{w}_\beta t + f'(W)\,W_\beta + \mathfrak{w}\cdot t_\beta, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{l}\,W)\,t &= 2\,\mathfrak{w}_\alpha W_\beta\cdot t - 2\,W_\alpha W_\beta f'(W) - \mathfrak{w}\cdot(t\,W), \\ (\mathfrak{m}\,W)\,t &= 2\,\mathfrak{w}_\beta W_\alpha\cdot t - 2\,W_\alpha W_\beta f'(W) + \mathfrak{w}\cdot(t\,W), \end{aligned}$$

und durch Subtraktion:

$$(\mathfrak{w}\,W)\,t = (\mathfrak{w}\,W)\,t - \mathfrak{w}\cdot(t\,W);$$

es müßte also $\omega_\alpha W_\beta - \omega_\beta W_\alpha = 0$, d. h. W gleich einer Funktion von ω sein, was eine besondere Bedingung für die gegebene Fläche wäre.

§ 12. Die Weingartenschen Flächen.

Als solche bezeichne ich diejenigen Flächen, zwischen deren Hauptkrümmungs-Radien eine Relation besteht. Sie haben die Eigenschaft, daß die beiden Mäntel ihrer Krümmungszentra-Flächen Biegungsflächen von Rotationsflächen sind, wobei den Krümmunglinien der gegebenen Fläche geodätische Linien der Zentraflächen entsprechen. Da nun die geodätischen Linien der Rotationsflächen bekannt sind, so gilt dasselbe für die geodätischen Linien ihrer Biegungsflächen, und die gesuchte Fläche ist umgekehrt als orthogonale Trajektorie der Tangenten der geodätischen Linien zu bestimmen, also ohne Lösung neuer Differentialgleichungen.

Die Bestimmung aller Weingartenschen Flächen ist hiermit auch auf sukzessive Lösung von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt, während sie bisher von wenig einfachen Gleichungen zweiter Ordnung abhängig gemacht wurde. Insbesondere kann man für jede Relation zwischen den Krümmungsradien eine von einer willkürlichen Funktion abhängige Schar von Weingartenschen Flächen durch bloße Quadraturen aufstellen.