

Öffentliche Sitzung der K. Akademie der Wissenschaften.

Zur Feier ihres 149. Stiftungstages

wird die K. Akademie der Wissenschaften Mittwoch den 11. März vormittags 11 Uhr eine öffentliche Sitzung halten.

In ihr werden, nach einleitenden Worten des Präsidenten der Akademie, Geheimen Rates Dr. von Heigel, den verstorbenen Mitgliedern durch die Klassensekretäre ehrende Nachrufe gewidmet werden.

Hierauf wird das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse, Professor Dr. Aurel Voss, die Festrede halten

Über das Wesen der Mathematik.

Der Zutritt zu dieser öffentlichen Sitzung steht jedermann frei.

München, den 4. März 1908.

K. B. Akademie der Wissenschaften.

Öffentliche Sitzung

zur Feier des 149. Stiftungstages

am 11. März 1908.

Die Sitzung eröffnete der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. Karl Theodor v. Heigel, mit folgender Ansprache:

Im kommenden Jahre wird unsere Akademie ihr 150. Lebensjahr vollendet haben. Wir haben beschlossen, von einer prunkvolleren Feier abzusehen; wir werden aber nicht vergessen des schuldigen Dankes für den gütigen Fürsten, der unsere Gesellschaft ins Leben gerufen hat, und für die vielen akademischen Genossen, die seit anderthalbhundert Jahren für Wahrheit und Aufklärung gearbeitet und, wenn es geboten war, gestritten und gelitten haben.

Auch heute soll herzlicher Dank an die Gönner unserer Akademie und der wissenschaftlichen Sammlungen unsere Festfeier einleiten.

Die Münchener Akademie unterscheidet sich ja dadurch von den meisten übrigen gelehrten Gesellschaften, daß auch heute noch zahlreiche Sammlungen, welche der allgemeinen Bildung und Belehrung dienen sollen, ihrer Obhut anvertraut sind, während die zu eigentlichen Unterrichtszwecken bestimmten, früher ebenfalls mit der Akademie verbundenen Institute nunmehr Attribute der Universität geworden sind. Unsere Akademie zieht aus der Verbindung mit den reichen wissenschaftlichen Sammlungen des Staates nicht bloß den Vorteil, daß den mit ihrer Pflege betrauten Mitgliedern die Objekte jederzeit zur unmittelbaren Verfügung stehen, sondern daß die ganze Körperschaft, gewissermaßen die Dienste der Schwestern Martha und Maria vereinigend, auch in innigere Verbindung mit den praktischen Aufgaben der Wissenschaft gebracht wird und auf

solche Weise ein lebendiger Mittelpunkt des gesamten wissenschaftlichen Betriebs im Vaterlande werden kann.

Von wertvolleren Gaben, die seit der Märzszitzung des Jahres 1907 der Akademie und dem Generalkonservatorium zugewendet wurden, sei an erster Stelle die hochherzige Stiftung unseres durch Krankheit leider von uns ferngehaltenen Kollegen Eduard von Wölfflin erwähnt. Er hat dem von ihm errichteten Fonds für den Thesaurus linguae latinae neuerdings 35 000 Francs zugewiesen. Ferner überließ er der Kommission aus seiner großen Privatbibliothek alle diejenigen lateinischen und griechischen Werke, die für die Ausarbeitung des Thesaurus von Nutzen sein können. Endlich widmete er der Akademie seine Büste in Marmor, ein prächtiges Kunstwerk aus der Hand des Bildhauers Hahn. Das würdigste Denkmal schuf sich freilich Wölfflin selbst im Thesaurus, für dessen Werden und Wachsen er zugleich Romulus und Camillus war.

Professor Hermann in Erlangen schenkte für das zoologische Museum seine reichen Dipterenbestände, die bedeutendste Privatsammlung dieser Art in Deutschland.

Schließlich habe ich noch zwei Gönnern zu danken, die nicht genannt sein wollen.

Die zoologische Sammlung, die vor einigen Wochen im Festsaal der Akademie ausgestellt war, ist von Herrn Dr. Bruegel in Siam und Borneo vermittels einer Stiftung im Betrage von 25 000 Mark zusammengebracht worden, die von einem Freunde der Wissenschaft in München herrührt.

Das Antiquarium hat im abgelaufenen Jahre durch die stattliche Spende eines Ungenannten den bedeutsamsten Zuwachs seit Ludwigs I. Tagen erhalten, indem damit ein mit feinstem Geschmack zusammengetragener Schatz antiker Klein-kunst, die Sammlung des hiesigen Archäologen Dr. Arndt, erworben werden konnte. Da das Antiquarium, wie fast alle unsere Sammlungen, an Raumangel leidet, mußte die neue Erwerbung vorläufig in einem Saale der K. Glyptothek untergebracht werden.

Aus den Zinsen des Thereianosfonds wurde ein Preis von 800 M. Dr. Ludwig Hahn, Professor am Neuen Gymnasium zu Nürnberg für sein Buch: „Rom und der Romanismus im griechischen Osten“, Leipzig 1906, zuerkannt.

Sodann wurden bewilligt:

1500 M. an Professor Karl Krumbacher für die Herausgabe von Band XVII der Byzantinischen Zeitschrift.

1000 M. für die Bearbeitung des von Professor Krumbacher geleiteten „Corpus der mittelgriechischen Urkunden“.

1000 M. an den Gymnasialprofessor Karl Reichhold in München zur Aufnahme griechischer Vasenbilder für den Abschluß des Furtwänglerschen Werkes: „Griechische Vasenmalerei.“

1000 M. an den Privatdozenten Dr. Ludwig Curtius in München zur Fortsetzung der von Adolf Furtwängler begonnenen Ausgrabungen auf der Insel Aegina.

1500 M. an Dr. Sophronios Eustratiades, Diakonus an der griechischen Kirche zum hl. Georg in Wien, zur Herausgabe des 2. Bandes der theologischen Briefe des Michael Glykas.

Aus den Mitteln des Mannheimer Reservefonds konnten das Antiquarium und das Ethnographische Museum unterstützt werden; ersteres mit 1200 M., letzteres zur dringend nötigen Ausfüllung empfindlicher Lücken mit 8300 M.

Aus den Mitteln der Münchener Bürger- und Cramer-Klett-Stiftung wurden vorläufig genehmigt:

1500 M. an den Erlanger Privatdozenten Dr. R. Fuchs zur Untersuchung der Einwirkung der Höhenluft auf den menschlichen Organismus.

500 M. für experimentelle Untersuchungen über Stereoisomerie an den Lyzealprofessor Dr. A. Ries in Bamberg.

500 M. an Dr. Björnbo in Kopenhagen zur Publikation der Arbeiten des Nürnberger Mathematikers Werner.

Aus der Königs-Stiftung zum Adolf v. Baeyer-Jubiläum sind 800 M. für Professor Oskar Piloty zur Fortführung seiner Arbeiten auf dem Gebiete der Pyrrholchemie bewilligt worden.

Weitere Zuwendungen aus diesen Fonds stehen noch bevor.

Es folgten die Nekrologe der Klassensekretäre.

Der philosophisch-philologischen Klasse sind im letzten Jahre zunächst zwei ordentliche Mitglieder durch den Tod entrissen worden.

Am 11. Juli 1907 starb Seine Exzellenz Dr. GEORG KARL AUGUST VON BECHMANN, lebenslänglicher Reichsrat der Krone Bayern, K. Geheimrat und Professor des deutschen bürgerlichen Rechts, des römischen Zivilrechts und der Rechtsenzyklopädie an der Universität München. Geboren am 16. August 1834 zu Nürnberg, promovierte der Verstorbene im Jahre 1860, habilitierte sich 1861 in Würzburg für das Fach des römischen Rechts, um hier wie später in Basel, Marburg, Kiel, Erlangen und Bonn eine ungemein erfolgreiche Lehrtätigkeit zu entfalten, bis er 1888 an unsere Universität berufen wurde. Außer durch eine größere Anzahl scharfsinniger Abhandlungen auf dem Gebiete des römischen Rechts sowie durch einige feinsinnige und wohlgedachte Fest- und Gedächtnisreden hat Bechmann vor allem durch seine zwei Hauptwerke über das römische Dotalrecht (1863 und 1867) und über den Kauf nach gemeinem Rechte (1876, 1884, 1905 und 1908), dessen Schlußband er noch wenige Wochen vor seinem Tode im Manuskript vollenden konnte, sich eine dauernde Bedeutung unter den Vertretern der geschichtlichen Rechtswissenschaft gesichert. Namentlich das letzte Werk ist ein hervorragendes Muster rechtsgeschichtlicher Forschung, in welchem nach dem Urteil eines Kenners nicht nur eine vergangene Phase des Rechts mit tiefem Wissen ergründet, sondern in echt historischem Sinne die gesamte Rechtsentwicklung auf diesem Gebiete bis zur

Gegenwart herab eingehend erörtert ist. Bechmann war ein energischer und zielbewußter Charakter, der — bei aller Gelehrsamkeit den Anforderungen des praktischen Lebens verständnisvoll entgegenkommend — im Verwaltungsausschuß unserer Universität und in den parlamentarischen Geschäften der Reichsratskammer sich sachkundig und gewissenhaft zu betätigen wußte und als einer der ersten unter den deutschen Rechtslehrern in seinen Vorlesungen den Übergang zum neuen Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches zu vollziehen bestrebt war. Unsere Akademie, der er in bedeutsamen Fragen allzeit ein treuer Berater gewesen ist, wird ihm ein ehrenvolles Andenken bewahren.

Am 10. Oktober 1907 starb zu Athen als ein Opfer deutschen Forscherfleißes auf griechischer Erde unser berühmter Archäologe Professor Dr. ADOLF FURTWÄNGLER, welchem im nächsten Jahre eine besondere Gedächtnisrede gewidmet werden soll.

Es starb ferner am 3. April 1907 zu Bonn das korrespondierende Mitglied der ehemalige Professor der dortigen Universität Dr. THEODOR AUFRECHT, ein umfassender Kenner der Sanskrit-Literatur, deren handschriftliche Bestände er noch in den letzten Jahrzehnten seines Lebens in einem monumentalen *Catalogus Catalogorum* sorgsam verzeichnet hat, ein bewährter Herausgeber vedischer und grammatisch-lexikographischer Texte, daneben in seinen jüngeren Jahren bahnbrechend in der Bearbeitung der altitalischen Dialekte und ein Mitbegründer der ersten Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung.

Am 8. Juli 1907 starb zu Christiania das auswärtige Mitglied Professor Dr. SOPHUS BUGGE, ein hochverdienter Forscher auf den Gebieten der altnordischen Philologie und der indogermanischen Sprachwissenschaft, welcher u. a. durch seine Aufsehen erregenden „Studien über die Entstehung der nordischen Götter- und Heldensagen“ der germanischen Mythologie vielfach neue Wege gewiesen hat.

Am 27. Februar 1908 endlich starb zu Berlin das auswärtige Mitglied Professor Dr. ADOLF KIRCHHOFF. Zu Anfang

seiner wissenschaftlichen Laufbahn im Verein mit Aufrecht bemüht um die Entzifferung der altitalischen Sprachdenkmäler und verdient um die Geschichte der Schrift bei den Germanen der Völkerwanderungszeit, hat er sich später ausschließlich der griechischen Philologie zugewandt und für die Kritik einer Reihe von Schriftstellern Bedeutsames geleistet, namentlich aber durch seine außerordentlich hervorragenden epigraphischen Arbeiten der griechischen Inschriftenkunde ganz neue Grundlagen geschaffen.

Die historische Klasse hat im vergangenen Jahre den Verlust zweier ordentlicher Mitglieder zu beklagen: HANS RIGGAUERS und LUDWIG TRAUBES.

HANS RIGGAUER, Honorarprofessor für Numismatik an der Universität München und langjähriger Vorstand des K. Münzkabinetts, gestorben am 5. April 1907, hat sich um dies unvergleichlich kostbare und gerade bei seinem Amtsantritt in seinem Bestande schwer bedrohte Museum durch unermüdliche Fürsorge und großes organisatorisches Talent unschätzbare Verdienste erworben und es zugleich in hohem Grade verstanden, durch systematische Nutzbarmachung des Museums für die Vertreter der verschiedensten Interessen und durch lebendige Fühlung mit der gesamten numismatischen Welt des In- und Auslands die wissenschaftliche und künstlerische Verwertung der ihm anvertrauten Schätze zu fördern. Und mit dieser höchst erfolgreichen Museumsarbeit verband sich ein rastloses Streben nach wissenschaftlicher Vertiefung, durch das sich Riggauer eine anerkannte Stellung als Kenner der antiken und der mittelalterlichen Münzkunde errungen hat. Seine Arbeiten über die Entwicklung des bayerischen Münzwesens unter den Wittelsbachern, über die Geschichte der Numismatik im 19. Jahrhundert, über die Medaillen und Münzen des Gesamthauses Wittelsbach u. a. sichern ihm einen ehrenvollen Platz in der Geschichte seiner Wissenschaft.

Wenige Wochen später, am 19. Mai 1907, schied von uns LUDWIG TRAUBE, ordentlicher Professor der lateinischen Philologie des Mittelalters an der Universität München, der geniale Führer und Pfadfinder auf einem Gebiete der Wissenschaft, das in gewissem Sinne sein eigenstes Werk ist. Ausgehend von der klassischen Literatur hat er es sich zur Lebensaufgabe gemacht, die Nachwirkung dieser Literatur durch das Mittelalter hindurch zu verfolgen, wie sie uns zunächst in der Geschichte der Überlieferung der antiken Schriftwerke entgegentritt, in der er mit Recht die Grundlage der mittelalterlichen Kulturgeschichte überhaupt erblickte.

Von diesem universalen Gesichtspunkte aus hat er in tieferem Sinne, als selbst die größten seiner Vorgänger, Paläographie und Handschriftenkunde zu einer wahrhaft historischen Wissenschaft erhoben, indem er durch die feinsinnige Kombination einer unendlichen Fülle von Beobachtungen auf dem Gebiete des Schriftwesens sozusagen die Pfade der geistigen Bewegung im Mittelalter und die von den literarischen Mittelpunkten des geistigen Lebens ausgehenden, weitverzweigten und sich vielfach kreuzenden Einwirkungen nachwies. So wurden ihm Schrift und Texte zu Urkunden des historischen Lebens selbst, zu lebendigen Zeugen des Werdeganges unserer Kultur. Durch diese geniale Verbindung von minutiöser Einzelforschung mit einer großzügigen Gesamtauffassung der Dinge ist sein literarisches Schaffen wahrhaft vorbildlich und mustergültig geworden, von den meisterhaften Arbeiten für die Monumenta Germaniae: für die große Ausgabe der Poetae latini aevi Carolini, der Dichter der karolingischen Renaissance, und für die Ausgabe Cassiodors bis zu den glänzenden Abhandlungen O Roma nobilis 1891, der Textgeschichte der Regula S. Benedicti 1898, Perrona Scottorum 1900, der paläographischen Forschungen und dem letzten in Jahren schweren, hoffnungslosen Leidens dem dahinsiechenden Körper mit heroischer Kraft abgerungenen Werke über die Nomina sacra, in dem eine kultur- und geistesgeschichtlich höchst wichtige Erscheinung durch eine unendlich verschlungene, fast zweitausendjährige Entwicklung hindurch

verfolgt und mit souveräner Meisterschaft in ihrem Ursprung und ihrem Wesen klargelegt wird.

Was Traube neben dieser schöpferischen Forscherarbeit als begeisterter und begeisternder Lehrer, als unermüdlicher, selbstloser Berater einer mit seinem Weltruf stetig wachsenden Schar historisch-philologischer Fachgenossen geleistet hat, was er vollends als Mensch und Freund gewesen ist, das kann an dieser Stelle nicht entfernt gewürdigt werden. Es ist ja auch bereits in ergreifender Weise zum Ausdruck gekommen bei der unvergeßlichen Trauerfeier, von der wohl alle Teilnehmer den unauslöschlichen Eindruck mitfortgenommen haben: Hier ist ein Mensch seltenster Art von uns gegangen, hier ist in unser wissenschaftliches Leben eine Lücke gerissen, die sich für uns Mitlebende wenigstens niemals wieder schließen wird.

Vgl. K. Krumbacher, Heilige Namen. Beilage zur Münchener Allgemeinen Zeitung 1907, Nr. 220 f. — J. L. Heiberg, Was uns die Handschriften lehren. Ludwig Traube zum Gedächtnis. Internationale Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik. Berlin 1907, Nr. 37. — Franz Boll, Erinnerungen an Ludwig Traube. Beilage zur Allgemeinen Zeitung 1907, Nr. 171 f. — Ludwig Traube zum Gedächtnis. Worte, gesprochen bei der Trauerfeier für Ludwig Traube 21. Mai 1907 auf dem Schwabinger Friedhof zu München. — Chronik der Münchener Universität 1907. — Margherita Traube-Mengarini, Geleitwort zu den Nomina sacra. „Seinen Schülern.“ — Hermann Brunn, Zur Erinnerung an Ludwig Traube. Süddeutsche Monatshefte 1908, Heft 3.

Zum Schluß hielt das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse Herr Voß die besonders im Druck erschienene Festrede: „Über das Wesen der Mathematik.“

Öffentliche Sitzung

zur Feier des 149. Stiftungstages

vom 11. März 1908.

Die Sitzung eröffnete der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. Karl Theodor v. Heigel, mit folgender Ansprache:

Im kommenden Jahre wird unsere Akademie ihr 150. Lebensjahr vollendet haben. Wir haben beschlossen, von einer prunkvolleren Feier abzusehen; wir werden aber nicht vergessen des schuldigen Dankes für den gütigen Fürsten, der unsere Gesellschaft ins Leben gerufen hat, und für die vielen akademischen Genossen, die seit anderthalbhundert Jahren für Wahrheit und Aufklärung gearbeitet und, wenn es geboten war, gestritten und gelitten haben.

Auch heute soll herzlicher Dank an die Gönner unserer Akademie und der wissenschaftlichen Sammlungen unsere Festfeier einleiten.

Die Münchener Akademie unterscheidet sich ja dadurch von den meisten übrigen gelehrten Gesellschaften, daß auch heute noch zahlreiche Sammlungen, welche der allgemeinen Bildung und Belehrung dienen sollen, ihrer Obhut anvertraut sind, während die zu eigentlichen Unterrichtszwecken bestimmten, früher ebenfalls mit der Akademie verbundenen Institute nunmehr Attribute der Universität geworden sind. Unsere Akademie zieht aus der Verbindung mit den reichen wissenschaftlichen Sammlungen des Staates nicht bloß den Vorteil, daß den mit ihrer Pflege betrauten Mitgliedern die Objekte jederzeit zur

unmittelbaren Verfügung stehen, sondern daß die ganze Körperschaft, gewissermaßen die Dienste der Schwestern Martha und Maria vereinigend, auch in innigere Verbindung mit den praktischen Aufgaben der Wissenschaft gebracht wird und auf solche Weise ein lebendiger Mittelpunkt des gesamten wissenschaftlichen Betriebs im Vaterlande werden kann.

Von wertvolleren Gaben, die seit der Märzszung des Jahres 1907 der Akademie und dem Generalkonservatorium zugewendet wurden, sei an erster Stelle die hochherzige Stiftung unseres durch Krankheit leider von uns ferngehaltenen Kollegen Eduard von Wölfflin erwähnt. Er hat dem von ihm errichteten Fonds für den Thesaurus linguae latinae neuerdings 35000 Francs zugewiesen. Ferner überließ er der Kommission aus seiner großen Privatbibliothek alle diejenigen lateinischen und griechischen Werke, die für die Ausarbeitung des Thesaurus von Nutzen sein können. Endlich widmete er der Akademie seine Büste in Marmor, ein prächtiges Kunstwerk aus der Hand des Bildhauers Hahn. Das würdigste Denkmal schuf sich freilich Wölfflin selbst im Thesaurus, für dessen Werden und Wachsen er zugleich Romulus und Camillus war.

Professor Hermann in Erlangen schenkte für das zoologische Museum seine reichen Dipterenbestände, die bedeutendste Privatsammlung dieser Art in Deutschland.

Schließlich habe ich noch zwei Gönnern zu danken, die nicht genannt sein wollen.

Die zoologische Sammlung, die vor einigen Wochen im Festsaal der Akademie ausgestellt war, ist von Herrn Dr. Bruegel in Siam und Borneo vermittels einer Stiftung im Betrage von 25000 Mark zusammengebracht worden, die von einem Freunde der Wissenschaft in München herrührt.

Das Antiquarium hat im abgelaufenen Jahre durch die stattliche Spende eines Ungenannten den bedeutsamsten Zuwachs seit Ludwigs I. Tagen erhalten, indem damit ein mit feinstem Geschmack zusammengetragener Schatz antiker Klein-kunst, die Sammlung des hiesigen Archäologen Dr. Arndt, erworben werden konnte. Da das Antiquarium, wie fast alle

unsere Sammlungen, an Raummangel leidet, mußte die neue Erwerbung vorläufig in einem Saale der K. Glyptothek untergebracht werden.

Aus den Zinsen des Thereianosfonds wurde ein Preis von 800 M. Dr. Ludwig Hahn, Professor am Neuen Gymnasium zu Nürnberg für sein Buch: „Rom und der Romanismus im griechischen Osten“, Leipzig 1906, zuerkannt.

Sodann wurden bewilligt:

1500 M. an Professor Karl Krumbacher für die Herausgabe von Band XVII der Byzantinischen Zeitschrift.

1000 M. für die Bearbeitung des von Professor Krumbacher geleiteten „Corpus der mittellgriechischen Urkunden“.

1000 M. an den Gymnasialprofessor Karl Reichhold in München zur Aufnahme griechischer Vasenbilder für den Abschluß des Furtwänglerschen Werkes: „Griechische Vasenmalerei.“

1000 M. an den Privatdozenten Dr. Ludwig Curtius in München zur Fortsetzung der von Adolf Furtwängler begonnenen Ausgrabungen auf der Insel Aegina.

1500 M. an Dr. Sophronios Eustratiades, Diakonus an der griechischen Kirche zum hl. Georg in Wien, zur Herausgabe des 2. Bandes der theologischen Briefe des Michael Glykas.

Aus den Mitteln des Mannheimer Reservefonds konnten das Antiquarium und das Ethnographische Museum unterstützt werden; ersteres mit 1200 M., letzteres zur dringend nötigen Ausfüllung empfindlicher Lücken mit 8300 M.

Aus den Mitteln der Münchener Bürger- und Cramer-Klett-Stiftung wurden vorläufig genehmigt:

1500 M. an den Erlanger Privatdozenten Dr. R. Fuchs zur Untersuchung der Einwirkung der Höhenluft auf den menschlichen Organismus.

500 M. für experimentelle Untersuchungen über Stereoisomerie an den Lyzealprofessor Dr. A. Ries in Bamberg.

500 M. an Dr. Björnbo in Kopenhagen zur Publikation der Arbeiten des Nürnberger Mathematikers Werner.

Aus der Königs-Stiftung zum Adolf v. Baeyer-Jubiläum sind 800 M. für Professor Oskar Piloty zur Fortführung seiner Arbeiten auf dem Gebiete der Pyrrholchemie bewilligt worden.

Weitere Zuwendungen aus diesen Fonds stehen noch bevor.

Hierauf folgten die Nekrologe der Klassensekretäre.

Die mathematisch-physikalische Klasse hat folgende Mitglieder durch den Tod verloren.

Am 31. Januar dieses Jahres starb das ordentliche Mitglied Geh. Rat **Karl von Voit**. Die Klasse hat beschlossen, die Verdienste dieses ausgezeichneten Gelehrten und Forschers durch eine besondere Gedächtnisrede zu ehren.

Heute wollen wir deshalb nur mit wenigen Worten unserer Dankbarkeit Ausdruck geben für alles das, was er lange Jahre hindurch der Klasse gewesen ist, vor allem für den unermüdlichen Eifer und die strenge Gewissenhaftigkeit, mit der er als Klassensekretär die Geschäfte der Klasse geführt hat. Er zeigte durch die Tat, daß, wie sein Sohn in einem Schreiben an den Präsidenten der Akademie hervorhebt, für ihn die höchste Ehre der Sitz in der Akademie war; ihr hat er in nie wankender Treue seine ganze Arbeitskraft zur Verfügung gestellt.

Noch in der Januarsitzung hat er, obschon schwer leidend, es sich nicht nehmen lassen, auf seinem Posten auszuharren. So wird sein Gedächtnis unter uns fortleben nicht nur als das eines Gelehrten, auf den unsere Akademie und unser ganzes Land stolz sein kann, sondern auch als das eines Mannes, dessen Leben uns durch hohen sittlichen Ernst und treueste Pflichterfüllung einen unvergeßlichen Eindruck gemacht hat.

Am 18. März 1907 starb im achtzigsten Lebensjahre zu Paris **Pierre Eugène Marcelin Berthelot**, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences pour les sciences physiques, membre de l'Académie Française, Sénateur.

Berthelot begann seine wissenschaftliche Laufbahn mit einer Untersuchung über das Glyzerin, welche heute noch als mustergültig bezeichnet werden kann. Er schuf dadurch nicht nur den Begriff eines mehratomigen Alkohols, sondern legte durch seine klassischen Versuche über die Bildung der Ester den Grund für eine neue Disziplin — die Lehre von den umkehrbaren chemischen Vorgängen. Die Synthese dieser Ester, zu denen die natürlich vorkommenden Fette gehören, bildet einen Meilenstein in der Geschichte der physiologischen Chemie.

Durch diese Studien wurde Berthelot auf die Wichtigkeit der Synthese und ihre Bedeutung für die Lehre von den Lebenserscheinungen aufmerksam. Er begnügte sich aber nicht damit aus zusammengesetzten Körpern noch kompliziertere aufzubauen, sondern suchte von den Elementen ausgehend einen vollständigen Aufbau der organischen Verbindungen zu erzielen, welcher der Assimilation des Kohlenstoffs durch die Pflanzen vergleichbar ist. Diese Aufgabe beschäftigte ihn fast ein Menschenalter hindurch, und durch ihre glänzende Lösung wurde er zum Hauptbegründer der synthetischen Chemie.

Man sollte glauben, daß diese Arbeiten von einem riesenhaften Umfang genügt hätten, ein Menschenleben zu erfüllen. Bei Berthelot war dies aber nicht der Fall. Er erkannte — man könnte fast sagen prophetischen Geistes —, daß die Aufgabe des Chemikers mit der bloßen Verkettung der Atome nicht beendet ist, und daß ein Einblick in die Natur der chemischen Vorgänge ohne ein physikalisches Studium der inneren Bewegungszustände nur ein Stückwerk bleibt. Dieser Erkenntnis entsprangen seine thermochemischen Arbeiten, denen er fast 40 Jahre seines Lebens gewidmet hat. Sein von ihm zu diesem Zwecke erfundener Apparat — die kalorimetrische Bombe — ist heute noch in den Händen eines jeden Chemikers.

Jede Anregung von außen löste bei ihm nicht nur ein vorübergehendes Interesse, sondern eine eingehende Beschäftigung mit dem Gegenstande aus, so veranlaßten ihn die kriegesischen Ereignisse in seinem Vaterlande zu grundlegenden Studien über die Explosivstoffe, Fragen der Landwirtschaft zu seinen Arbeiten über die Gärung, die tierische Wärme, den Vegetationsverlauf und die Assimilation des atmosphärischen Stickstoffs.

Schließlich zeigte sich die Universalität seines Geistes auch in seinen historischen Arbeiten. Man verdankt ihm die erste, wirklich wissenschaftliche Bearbeitung der älteren Geschichte der Chemie. So ist Berthelot unzweifelhaft den größten französischen Forschern an die Seite zu stellen, deren Namen heute noch allen Freunden der Wissenschaft teuer sind.

Am 17. Dezember 1907 starb in Glasgow reich an Jahren und von Erfolgen der berühmte Physiker **William Thomson**, Baron Kelvin of Largs. Eine ungewöhnlich vielseitige wissenschaftliche Laufbahn hat mit diesem Tode ihren Abschluß gefunden. Geboren 1824, war William Thomson bereits eine Art mathematisches Wunderkind, als er (1832) seinen Vater nach Glasgow begleitete, wohin dieser als Professor der Mathematik berufen worden war. Erst 11 Jahre alt, war er bereits Student an der Universität Glasgow, der er sein ganzes Leben lang treu geblieben ist. Aber ganz entgegen dem so häufigen Schicksal frühreifer Genies entfaltete er bis in das höchste Alter eine erstaunliche Tätigkeit, sowohl auf dem Gebiete der theoretischen als auf dem der experimentellen Physik. Hier ist sein Name mit dem von Robert Mayer, Helmholtz und Joule auf dem Gebiete der mechanischen Theorie der Wärme, mit dem von Faraday, Maxwell und Hertz auf dem der Elektrizität verknüpft. Thermo-Elektrizität und Thermodynamik bereicherte er durch grundlegende Untersuchungen.

Seine ungemeine Popularität, speziell in England, verdankte aber der große Physiker namentlich dem Umstand, daß er seine theoretischen Forschungen auch praktisch nutzbar zu

machen verstand. Sein Name ist auf das engste verknüpft mit der Legung der ersten Kabel durch die Ozeane mit den Fortschritt der Nautik und der Erfindung von Apparaten, die jetzt zu dem unentbehrlichen Rüstzeug des Physikers gehören.

So ruht er mit Recht unter Englands großen Toten in der Westminsterabtei.

Am 14. August 1907 starb der Direktor der Sternwarte zu Potsdam, **Hermann Karl Vogel**.

Geboren 1842 zu Leipzig, wandte er sich dem Studium der Astronomie zu und wurde bald Assistent an der Sternwarte seiner Vaterstadt. Hier beschäftigte er sich namentlich mit der Beobachtung von Nebelflecken und Sternhaufen. Zur Leitung der dem Kammerherrn v. Bülow gehörigen Sternwarte in Bothkamp bei Kiel berufen, wandte er sich der neueren Richtung der Astronomie zu, welche sich die Erforschung der physischen Beschaffenheit der Himmelskörper zur Aufgabe gestellt hatte. Auf diesem Gebiete hat er sich bald eine hervorragende Stellung erworben. Seine Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse setzte er später in Potsdam mit großer Meisterschaft in der Überwindung instrumenteller Schwierigkeiten und der Anstellung subtiler Beobachtungen fort. Namentlich ermöglichte ihm die Einführung der spektrophischen Methode eine Entdeckung von großer Tragweite: die Feststellung der Doppelsternnatur des Algol und einiger anderer Sterne. Ein unermüdlicher Beobachter und stiller Gelehrter ist er auf beinahe allen Gebieten der Astrophysik bahnbrechend gewesen.

Zum Schluß hielt das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse Herr Voß die besonders im Druck erschienene Festrede: „Über das Wesen der Mathematik.“

(Leipzig-Katalog T. 82) 4/5

ÜBER DAS WESEN DER MATHEMATIK

REDE

GEHALTEN AM 11. MÄRZ 1908 IN DER ÖFFENTL. SITZUNG
DER K. BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

VON

DR. A. VOSS

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK IN MÜNCHEN

ERWEITERT UND MIT ANMERKUNGEN VERSEHEN

ZWEITE, SORGFÄLTIG DURCHGESEHENE
UND VERMEHRTE AUFLAGE



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

COPYRIGHT 1913 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE

Der Aufforderung des Teubnerschen Verlages, eine neue Auflage der Schrift „Über das Wesen der Mathematik“ zu veranstalten, bin ich um so lieber nachgekommen, als sich mir dabei Gelegenheit bot, manche Mängel zu beseitigen, Unwesentliches fortzulassen und dafür einzelne Teile, die gar zu kurz oder gar nicht angedeutet waren, etwas weiter auszuführen. Möchte dieselbe auch in dieser neuen Gestalt dazu beitragen, das Verständnis und das Interesse für allgemeinere mathematische Fragen zu fördern. Dazu schien mir eine Behandlung vorzugsweise geeignet, welche mit der Entwicklung abstrakter Ideen zugleich die Darlegung ihrer historischen Entstehung und die Hinweise auf ihre hauptsächlichsten Quellen verbindet.

München, im Dezember 1912.

A. VOSS

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Bedeutung der Mathematik für die Entwicklung und das Verständnis unserer technisch-wissenschaftlichen Kultur	1-2
2. Über das allgemeine Verständnis für das Wesen und die Aufgaben der Mathematik	2-3
3. Abriß der historischen Entwicklung der Mathematik von der ältesten bis in die neuere Zeit	3-24
4. Die reine Mathematik als Wissenschaft von den Zahlen . . .	24-31
5. Die mathematische Erkenntnis des 19. Jahrhunderts	31-81
6. Die Anwendungsgebiete der Mathematik, Geometrie u. Mechanik	81-104
7. Die Axiomatik in der Arithmetik	105-107
8. Der Fortschritt des mathematischen Wissens	107-112
9. Objektiver Wert der Mathematik	112-114
10. Notwendigkeit gründlicher mathematischer Vorbildung, Reform des mathematischen Unterrichts	114-117
11. Schlußwort	117-119
12. Namen- und Sachregister	120-123

Unsere gegenwärtige Epoche pflegt man wohl als das Zeitalter der Naturwissenschaften und der Technik zu bezeichnen. Und gewiß mit Recht. Man vergegenwärtige sich nur die gewaltigen Leistungen unserer Zeit! Sie treten uns entgegen in unseren Bauwerken, denen fast keine Aufgabe mehr zu groß erscheint, unseren Erfindungen, welche die Kräfte der Natur uns untertan machen, in den wunderbaren Hilfsmitteln, welche die an rastloser Verfeinerung ihrer Methoden arbeitende Physik zu erschaffen weiß, in den mächtigen Fortschritten der Chemie, die bereits die Synthese der kompliziertesten organischen Verbindungen nicht mehr für unwahrscheinlich zu halten geneigt ist, in den Erfolgen der Astronomie, die selbst für entfernte Zeiträume mit ausreichender Genauigkeit die Veränderungen in der Konstellation der Himmelskörper voraussagen kann.

Dieses Streben unserer Zeit, der materiellen Wirklichkeit die Herrschaft des Geistes aufzuzwingen, äußert sich nach zwei verschiedenen Richtungen. Die eine ist die der technischen Erfindungsgabe, die sich z. B. in manchen Zweigen der Chemie, den Maschinenkonstruktionen, der Photographie, der Verwendung der Elektrizität für alle Verhältnisse unseres sozialen Lebens Bahn bricht. Aber wie hoch wir auch diese schöpferische Kraft der Erfindung im Interesse unserer materiellen Kultur einschätzen mögen, wohl noch höher steht uns die intellektuelle Durchdringung der gesamten Welt der Erscheinungen, die als das Ziel aller exakten Naturwissenschaften anzusehen ist.

Es kann nicht meine Aufgabe sein, dieses Ziel hier näher zu schildern. Ein Band aber gibt es, welches gleichmäßig alle Bestrebungen umschlingt, die ein tieferes Verständnis der Wirklichkeit gewinnen wollen, das ist die Mathematik. Was wäre der Ingenieur ohne diese Wissenschaft, die ihm einzig und allein ermöglicht, im voraus die Brauchbarkeit und den Effekt seiner Konstruktionen zu beurteilen, der Geodät, ohne dessen Hilfe unsere meilenweiten Tunnelführungen durch ganze Gebirgsmassive hindurch unausführbar sind! Was wäre ohne sie die Physik oder die Astronomie, welche in ihren theoretischen Teilen eigentlich nur Anwendungen der Mathematik sind; ja selbst die chemische

Analyse entnimmt ihre tiefsten Untersuchungen gegenwärtig dem Gebiete der mathematischen Abstraktion!

Diese kurzen Bemerkungen dürften hinreichen, um die Behauptung zu begründen, daß unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre eigentliche Grundlage in den mathematischen Wissenschaften findet. Diese Überzeugung ist eine so überwältigende, sich jedem aufzwingende, daß die Mehrzahl der Gebildeten der Mathematik nicht selten eine fast an Überschätzung grenzende Verehrung entgegenbringt. Sie spricht sich nicht nur in der immer zunehmenden Wertschätzung aus, welche der Mathematik als Bildungs- und Erziehungsmittel unserer Jugend zugeschrieben wird, sondern auch in den Gedanken unserer größten Geister. Galilei entwirft die Grundzüge einer neuen Epoche des Naturerkennens¹⁾: „Die wahre Philosophie verkündet uns die Natur; aber verstehen kann sie nur der, der ihre Sprache und die Zeichen kennen gelernt hat, in der sie zu uns redet. Diese Sprache ist aber die der Mathematik und ihre Zeichen sind die mathematischen Figuren.“ Und aus Kants Munde²⁾ hören wir die oft zitierten Worte: „Ich behaupte, daß in jeder besonderen Naturwissenschaft nur soviel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.“

Und doch ist die Mathematik, dieses Werk des Menschegeistes, mit dem sich an Alter kein anderes vergleichen läßt, deren Anfänge wir mit Sicherheit über sechs Jahrtausende zurück verfolgen können, noch immer die unpopulärste aller Wissenschaften! Allerdings gehört es zum Wesen jeder wahren Wissenschaft, unpopulär zu sein. Sie kann nicht auf dem behaglichen Wege einer gelegentlichen Lektüre, sondern nur durch andauernde unermüdliche Arbeit erfaßt werden. Aber während im allgemeinen jeder etwas umfassender Gebildete den hervorragend-

1) Diese merkwürdige Stelle befindet sich in Galileis *Saggiatore*, Opere 6, p. 233, Firenze 1890—1900 „la filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), mai non si può intendere, se primo non s'impara a intender la lingua à conoscer i caratteri, nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono trianguli cerchi ed altre figure matematiche.“

2) Siehe Kant, Vorrede zu den metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft.

sten übrigen Gebieten des Wissens, der Physik, der Astronomie, den beschreibenden Naturwissenschaften, den Ergebnissen der Sprachforschung, der Geschichte der Philosophie, sowie dem Zusammenhang der weltgeschichtlichen Entwicklung ein gewisses Verständnis entgegenbringt, und mit größerem oder geringerem Erfolge auch die Fortschritte dieser Wissenschaften zu ahnen und zu begreifen glaubt, zeigt sich im großen und ganzen der Mathematik gegenüber eine auffallend geringe Einsicht, die mit der oben bezeichneten allgemeinen Wertschätzung nur wenig im Einklang steht, ja sich im einzelnen Falle auch wohl auch in ungläubiger Geringschätzung äußert. Wie oft hört man von dem unüberwindlichen Widerwillen, den selbst geistig hochstehende Männer gegen die Anwendung mathematischer Formeln haben; wie oft hört man die Frage: Womit beschäftigt sich eigentlich die Mathematik wie ist es möglich, daß sie die großartige Rolle in unserer Kultur spielt, die sie doch tatsächlich einzunehmen scheint?

Der Grund für diese Ungewißheit, worin eigentlich das Wesen der Mathematik besteht, liegt nun allerdings zum Teil in der Schwierigkeit der mathematischen Untersuchungen, welche immer wegen ihres abstrakten Charakters eine intensive und beharrlich fortgesetzte Geistesarbeit verlangen, zu welcher der mitten in einer praktischen Tätigkeit Stehende nicht leicht die gehörige Muße findet. Er liegt aber auch in unserer Erziehung. Nur ein verschwindend kleiner Teil der Mathematik bildet auf unseren höheren Schulen den Gegenstand des Unterrichtes, während die historischen und sprachlichen Fächer eine ausführliche Grundlegung finden, zu deren Erweiterung im späteren Leben noch vielfache Möglichkeit geboten wird. Der mathematische Unterricht an unseren Schulen hat dagegen seit längerer Zeit eine ziemlich abgeschlossene Gestalt erhalten, welche, wenn auch vielleicht vorzüglich geeignet zur logischen Durchbildung und zur Erwerbung praktischer Kenntnisse¹⁾, keine Vorstellung von der Tiefe der Anschauung gibt,

1) Über den Einfluß des mathematischen Unterrichtes auf die Erziehung vgl. die trefflichen Bemerkungen von K. Schwering, *Zur Methodik des mathematischen Unterrichtes am Gymnasium*, Zeitschr. für math. und naturw. Unterricht, Jahrgang 33, 1902, p. 26; desgleichen H. Thieme, *Der Bildungswert der Mathematik*, Pädagog. Archiv 1897, Bd. 39, sowie die umfassenden Werke von M. Simon, *Didaktik und Methodik des Rechnens u. d. Mathematik*, 2. Aufl. München, 1908; A. Höfler, *Didaktik des math. Unterrichtes*, Leipzig und Berlin 1910.

welche seit dem 18. Jahrhundert die mathematischen Forschungen charakterisiert, sondern im allgemeinen nur den in sich zusammenhängenden, und einer wirklichen Erweiterung nicht unmittelbar zugänglich erscheinenden Kreis derjenigen Lehren behandelt, welche man als elementare Mathematik bezeichnet.¹⁾

Da ist es denn wohl begreiflich, wenn nur sehr wenige eine Ahnung davon haben, daß jenseits dieser, in Wirklichkeit nur der oberflächlichen Betrachtung so abgeschlossen erscheinenden Mathematik der Schule ein über alle Beschreibung großartiges Werk des menschlichen Geistes sich erhebt, das als reinstes und ureigenstes Erzeugnis der geistigen Tätigkeit seit den ältesten Zeiten mit dem bewundernswürdigsten Scharfsinn gepflegt, sich beständig in der gewaltigsten Entwicklung befindet, und in ununterbrochener Reihe immer neue und unvergängliche Wahrheiten zu Tage fördert.

1) Bei der noch jetzt vielfach bestehenden Beschränkung des math. Schulunterrichtes, (für die allerdings zunächst die historische Entwicklung verantwortlich erscheint), über die freilich der einzelne Lehrer nicht selten mit dem schönsten Erfolge hinauszugehen verstehen wird, ist es nur zu erklärlich, wenn viele sich vorstellen, die Mathematik bestehe in nichts anderem, als in einer umfangreicheren, vielleicht sogar überflüssigen Erweiterung derjenigen Teile, die der Elementarunterricht behandelt.

An sich ist ja auch die Beschäftigung mit der Lösung geometrischer Aufgaben ein vorzügliches Mittel, Kombinationsgabe und schöpferische Phantasie der Schüler zu wecken; Arithmetik und Algebra verlangen zur richtigen Durchführung eine stetige Sorgfalt, die man gewiß der geistigen Schulung durch die klassischen Sprachen vergleichen kann; Trigonometrie und Stereometrie bereiten auf die ersten Anwendungen und Fragen der Physik und Mechanik vor. Wer aber keinen weiteren Blick gewonnen hat, wird je nach den aus der Schule mitgebrachten Reminiszenzen oft der Ansicht sein, daß die Tätigkeit des Mathematikers nur in der Lösung schwierigerer Konstruktionsaufgaben, oder in der Vervollkommnung des Rechnens bestehe, oder daß die Ermittlung möglichst vieler Formeln ein Zweck an sich sei, der nur nebenbei einen praktischen Wert habe. Mit Recht sagt F. Lindemann in seiner akademischen Festrede, Lehren und Lernen in der Mathematik, München 1904. p. 15: „Wie viele feiern die Namen eines Newton und Leibniz! Wie wenige haben eine tiefere Vorstellung von dem, was diese Männer an Unvergänglichem geschaffen haben! Hier liegen die Wurzeln unserer heutigen Erkenntnis, hier die wahre Fortsetzung der Bestrebungen antiker Weisheit“.

Fragt man nun aber nach dem Wesen der Mathematik, so wird man für gewöhnlich die Antwort erhalten, das lasse sich nur dem Eingeweihten schildern. So richtig das auch sein mag, nicht allein für die Mathematik, sondern mutatis mutandis für jede Wissenschaft, so muß es doch möglich sein, von dem Inhalt, den Zielen und der charakteristischen Methodik der Mathematik eine, wenigstens in ihren allgemeinsten Zügen einigermaßen übersehbare Beschreibung zu geben. Wir werfen daher die Frage auf: Worin besteht eigentlich das Wesen der Mathematik? Wie ist es möglich, daß wir in ihr das einzige Beispiel einer Wissenschaft erblicken, die Erkenntnisse in apodiktischer Form ausspricht, welches ist die Operationsbasis, auf der dies erreicht wird, und was hat insbesondere das letzte Jahrhundert zur Ausbildung der Mathematik nach dieser, wenn ich so sagen soll, erkenntnis-theoretischen Seite getan?

Bevor wir aber in diese Betrachtung eintreten, scheint es angemessen einen kurzen Blick auf die historische Entwicklung der Mathematik überhaupt zu werfen. Die Erforschung der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik für die mathematische Erkenntnis selbst hat, lange unterschätzt, in der neueren Zeit eine außerordentliche Bedeutung gewonnen. Wenn es heute selbstverständlich erscheint, daß das Verständnis für die Entstehung und Umbildung mathematischer Ideen nur dadurch möglich ist, daß man auf ihre ersten Quellen zurückgeht, so ist das zum größten Teil das Verdienst Moritz Cantors und seiner Jünger, deren Arbeiten man in der Bibliotheka mathematica (Eneström) und in den Ostwaldschen Klassikern der exakten Wissenschaften verfolgen kann.¹⁾

Die Anfänge des mathematischen Wissens sind in tiefes Dunkel gehüllt; so weit wie wir sie zu verfolgen vermögen, treten sie uns schon auf einer fast rätselhaften Stufe der Ausbildung entgegen. Von den bereits ziemlich hoch entwickelten Kenntnissen der Völker des Zweistromlandes²⁾ geben uns die zahlreich zu Tage geförderten mit

1) Man vgl. auch das Werk von G. Kowalewski, die klassischen Probleme der Analysis, Leipzig 1910.

2) Moritz Cantor (Vorlesungen über Geschichte der Math., Bd. I, 3. Aufl., Leipzig 1907, Bd. II, III 2. Aufl., 1892, 1898) setzt mit Berufung auf G. Maspero (Cantor I. p. 1) die ältesten Zeugnisse aus dem Zweistromlande bis auf mehr als 5000 Jahre v. Chr. Über die Zuverlässigkeit solcher entlegener Zeitbestimmungen haben sich neuerdings manche

Keilinschriften bedeckten Reste einer längst untergegangenen Kultur Kenntnis; die ersten ausführlicheren handschriftlichen Urkunden sind uns aber von den Ägyptern, namentlich im Papyrus Rhind, aufbewahrt, dessen Alter nach übereinstimmenden Ansichten auf etwa 1800 v. Chr. gesetzt wird.¹⁾ Das Wissen dieser Völker war vorzugsweise

Zweifel erhoben. E. Meyer, Geschichte des Altertums, 2. Aufl. Bd. I, 2 (1909) bezeichnet den 10. Juni 4241 v. Chr., mit dem die Einführung des ägyptischen Sonnenjahres begonnen haben muß, als das älteste sichere Datum der Weltgeschichte (p. 102), während schwerlich ein einziges auf uns gekommenes Denkmal oder Schriftstück aus Babylonien an das Jahr 3000 v. Chr. heranreicht (p. 345). Daß Beziehungen zwischen Ägypten und Babylon vorhanden waren, hält auch dieser Forscher für wahrscheinlich. „Aber jeder Versuch, gegenseitige Beziehungen zwischen Ägypten und Babylon nachzuweisen, hat bis jetzt zu einem sicheren Ergebnis nicht geführt.“ In Rücksicht auf diese Unabhängigkeit wird man immer noch M. Cantor zustimmen können, der sein Werk mit Babylon beginnt. Daß die babylonischen Völker bereits hoch entwickelte arithmetische Kenntnisse besaßen, zeigt ihre Zifferrechnung, in der eine dezimale mit einer sexagesimalen Anordnung wechselt, wie aus den bei Senkereh 1854 gefundenen Tafeln hervorgeht; insbesondere ist durch K. H. Hilprechts Ausgrabungen (1906) eine große Zahl mathematischer Texte aus der Zeit von 2000–3000 v. Chr. zu Tage gefördert, in denen dieses Zahlensystem benutzt wird; diese Sexagesimalteilung hat sich bis auf die heutige Zeit in unserer Tageseinteilung, in unseren Instrumenten zur Winkelmessung erhalten. Über die geometrischen Kenntnisse dieser Völker vgl. Cantor I, p. 45 ff.; besonders merkwürdig scheint ihr Maßsystem, das auf denselben prinzipiellen Gesichtspunkten beruhen soll, wie unser erst seit einem Jahrhundert eingeführtes metrisches System. E. Meyer warnt auch hier vor übertriebenen Vorstellungen, a. a. O. p. 518.

1) Noch älter scheinen die 1889/90 bei Kahûn aufgefundenen Papyrus-Fragmente (vgl. Cantor, Bd. I, p. 59), deren Inhalt viel Verwandtschaft mit dem Papyrus Rhind zeigt. Auch der Papyrus von Achmîm, zwischen dem 6. und 7. Jahrhundert in griechischer Sprache geschrieben, enthält keine wesentliche Fortbildung der ägyptischen Rechenkunst. Der Papyrus Rhind, das Rechenbuch des Ahmes, „verfaßt nach dem Muster alter Schriften“, (neuere Schreibart des Namens siehe bei J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik Bd. II 1905, p. 270), von A. Eisenlohr (Heidelberg 1877) in mehr als fünfjähriger Arbeit übersetzt und erklärt, enthält die Rechnungen der vier Spezies in bezug auf ganze positive Zahlen und Brüche mit dem Zähler Eins (der Bruch $\frac{2}{3}$ macht eine Ausnahme) und weiß dieselben zur Lösung von praktischen Aufgaben, insbesondere auch von in Worte

arithmetischer Art, obwohl wir auch die Anfänge einer vorwiegend auf bestimmte Lebensverhältnisse gerichteten Geometrie wahrnehmen. Von

gekleideten Gleichungen ersten Grades zu verwenden; einige Beispiele zeigen sogar Bekanntschaft mit arithmetischen und geometrischen Reihen. Daneben finden sich die Anfänge einer praktischen Geometrie, welche bis zur Ausmessung des Kreises ($\pi = 3,16$) und der Pyramiden fortschreitet, ja vielleicht die ersten Spuren einer goniometrischen Auffassung (vgl. A. Eisenlohr, *Commentar zum Papyrus R.* p. 135, Cantor, I, p. 425). Eigentliche Beweise werden nicht gegeben; das Ganze erweckt zunächst den Eindruck einer exoterischen Darstellung von Lehren, denen vielleicht noch weiter gehende Kenntnisse zugrunde lagen; von H. Schneider, *Entwicklungsgeschichte der Menschheit*, Bd. I, Kultur und Denken der alten Ägypter, p. 297–317, wird dies indessen für sehr unwahrscheinlich gehalten (p. 311). Wenn man aber mit H. G. Zeuthen zugibt, daß dem Erfinder der im Rechenbuch des Ahmes niedergelegten Regeln unsere heutige Bruchrechnung im allgemeinen bekannt gewesen sein müsse, so muß man notwendigerweise viel höhere frühere Kenntnisse voraussetzen.

In neuerer Zeit ist der Papyrus Rhind, in dem manche Unrichtigkeiten, Rechenfehler und Korrekturen sich finden, insbesondere von E. Révillout, dem sich auch E. Weyr und M. Simon (*Verhandl. d. 3. internationalen Mathematikerkongresses*, Heidelberg 1905, p. 526, *Geschichte der Mathematik im Altertum*, Berlin 1909, p. 27), und auch H. G. Zeuthen angeschlossen haben, geradezu als Aufzeichnungsheft eines ziemlich unverständigen Schülers bezeichnet, doch lassen sich diese Mängel ebenso ungezwungen aus dem damaligen Zustand des Wissens begreifen, welcher noch nach der Niederschrift weitere Korrekturen nötig machte, andere Fehler unbemerkt ließ.

Auch die Bemerkung von Simon a. a. O., nicht L. da Vinci, Lambert oder Monge hätten die darstellende Geometrie erfunden, sondern ihre Anfänge fänden sich bei den Ägyptern bereits vor, dürfte doch wohl nur mit Vorsicht aufzunehmen sein. Verfahrensarten, wie das Abstecken eines Feldes mit Hilfe von Koordinatenstrecken, die Horizontal- und Vertikalprojektion einer Säule und ihres Kapitāls (Vgl. Borchardt, *Werkzeichnungen der Ägypter*, *Zeitschr. f. ägyptische Sprache* 1896), nach welcher der Steinmetz sich zu richten hatte, die Zeichnung einer Figur in verkleinertem Maßstabe, sind selbst auf der primitivsten Stufe so nahe liegend, daß wir aus ihnen keineswegs auf einen wirklichen Anfang der analytischen oder darstellenden Geometrie schließen können, welch letztere doch wesentlich in der gleichzeitigen Beziehung von Grundriß und Aufriß als Mittel zur räumlichen Darstellung besteht, ebensowenig, wie wir aus den Zeichnungen auf Knochenüberresten aus der la Tène-Periode den Schluß ziehen, daß eine Vorstellung von der Ähnlichkeit der Figuren damals bereits bekannt gewesen sei.

dort gelangte die Mathematik zu den Griechen, aber erst in Alexandria (etwa 300 v. Chr.) bildete sich jene Blütezeit der griechischen Geometrie aus, die wir an den Namen des Euklid zu knüpfen gewohnt sind, und wenig später schreitet das unvergleichliche Talent des Archimedes von Syrakus bereits zu denjenigen Methoden der Inhalts- und Oberflächenberechnung von Körpern vor, die erst 2000 Jahre später den Anfang der Infinitesimalrechnung ausmachen.¹⁾ Daneben entwickelt sich, dem Interesse für die Astronomie folgend, die Trigonometrie. Claudius Ptolemaeus (etwa 120 n. Chr.) hinterläßt in seiner *μεγάλη σύνταξις* ein für den astronomischen Gebrauch so vollkommen ausgebildetes System derselben, daß es weit über ein Jahrtausend nicht überboten werden konnte.²⁾ Aus Indien³⁾ stammen neue Quellen der mathematischen Erkenntnis, namentlich in arithmetischer Richtung, die

1) Eine neue Schrift des Archimedes von J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen, *Bibliotheca mathematica* 7, 1906/7, p. 321. Dieser von Heiberg in Veranlassung von H. Schoene in Konstantinopel 1906 entdeckte, aus einem Kloster bei Jerusalem stammende, Palimpsest enthält namentlich ein großes Stück der Schrift: *Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἑρατοσθένην ἔφοδος* und zeigt, daß Archimedes in seinen Untersuchungen über Inhaltsberechnung und verwandte Aufgaben aus der Mechanik sich fast ganz der Methoden der Infinitesimalrechnung bediente, wie sie 1800 Jahre später Kepler, Pascal und Fermat zur Anwendung brachten, nämlich der Zerlegung in eine Summe kleiner Rechtecke, als deren Grenzwert der Inhalt erscheint, wie er selbst sagt, „weil es leichter sei, wenn man vorher durch diese Methode eine Vorstellung von den Fragen gewonnen hat, den Beweis herzustellen, als ihn ohne vorläufige Vorstellung zu finden.“ Dasselbe rühmt auch Leibniz gelegentlich von seiner Methode. Wie Zeuthen zeigt, kannte Archimedes bereits das Integral $\int x^3 dx$.

2) Nach Cantor, Bd. I p. 414.

3) Über das Alter und die Unabhängigkeit der indischen Mathematik gehen die Ansichten noch auseinander. Während H. Hankel (Zur Geschichte d. Math. im Altertum und Mittelalter, 1874, p. 204, 210, 219) zu zeigen sucht, die indische Mathematik sei durchaus auf indischem Boden erwachsen, ist M. Cantor (Vorlesungen über Geschichte d. Math. 3. Aufl. Bd. I, p. 598) der Ansicht, daß dieselbe durch babylonische (vielleicht auch ägyptische), namentlich aber durch griechische Überlieferungen (Heron von Alexandria), beeinflusst sei und hat diese Ansicht auch trotz der Darlegung von A. Bürk (Zeitschr. d. deutsch. Morgenl. Gesellsch. Bd. 55, 1901; p. 543) im wesentlichen aufrecht erhalten, nach der das Alter der *Çulbasutras*, insbesondere des *Apa-stamba Çulbasutra* schon in das 4. oder 5. Jahrhundert v. Chr. zu setzen

ihren Höhepunkt unter den indischen großen Mathematikern Aryabhata und Brahmagupta erreichen; von dort gelangt der Strom der mathematischen Gedankenwelt zu den Arabern, sich weiter in der soeben bezeichneten Richtung fortbildend, um so endlich wieder in das Abendland nach Spanien zurückzukehren. Um das Jahr 1200 n. Chr. ist, wie M. Cantor sagt, das Abendland im Besitze lateinischer Übersetzungen der Werke der großen Alexandriner und der arabischen Mathematiker. Und zu derselben Zeit beginnt in Italien eine weitere Entwicklung der Algebra, die sich, befruchtet durch die von den Indern herrührende Einführung der Null, der negativen und irrationalen Zahlen, selbständig ausbildet; an Stelle des mühseligen Ausdruckes durch Worte tritt eine Zeichensprache, die sich der Buchstaben zur Bezeichnung der Zahlen und der mit ihnen vorzunehmenden Operationen bedient. Wir pflegen diesen Fortschritt mit den Anregungen, welche der französische Mathematiker Viète, die deutschen Algebristen M. Stifel und J. Widmann gaben, in Zusammenhang zu bringen; doch ist die Bezeichnungsweise der heutigen Mathematik erst ganz allmählich aus den verschiedensten Quellen zusammengefloßen.¹⁾

und der Satz des Pythagoras den Indern mindestens schon im 8. Jahrhundert bekannt gewesen sei. G. Thibaut (*Grundriß d. indoarischen Philologie* III, Heft 9, Straßburg 1899) verzichtet auf eine bestimmte Entscheidung. Gegenwärtig werden die Ansichten der Indologen, denen sich auch H. G. Zeuthen, M. Simon und andere angeschlossen haben, wohl kaum bestritten. Eine andere Frage ist es aber, ob die Inder einen Beweis des Pythagoreischen Satzes gekannt haben. Das Apastamba Çulbasutra sagt nur: „Die Diagonale eines Rechtecks bringt beides hervor, was die längere und die kürzere Seite jede für sich hervorbringen“, (für das gleichschenkelig rechtwinklige Dreieck wird der Satz auf anschaulichem Wege erkannt); ein Beweis wird nicht gegeben. Wahrscheinlich ist es, daß der Satz nur eine durch Induktion gewonnene Verallgemeinerung einzelner Fälle war, die in der Geheimlehre des Opferkultus eine Rolle spielten (vgl. H. Vogt, *Bibliotheca mathematica* 7, (1906) p. 6. Und so mag der eigentliche Beweis aus der pythagoreischen Schule stammen. Übrigens ist der Beweis im ersten Buche des Euklid keineswegs der einfachste. Schon von An-Nairizi (900 n. Chr.) rührt ein auf der Zerlegungsgleichheit des Quadrats der Hypotenuse mit den Quadraten der Katheten beruhender her; über damit verwandte Fragen vgl. die Dissertationen von C. Brandes und P. Mahlo, Halle 1908.

1) Schon bei den Ägyptern finden sich bestimmte Zahlzeichen (Papyrus Rhind, *Commentar* p. 8); ja ein Operationszeichen für

Die Dezimalbrüche¹⁾, mit ihnen die irrationalen Zahlen²⁾, gewinnen allmählich immer mehr Bürgerrecht; um 1620 werden die Logarithmen³⁾ erfunden, und die inzwischen neu belebte geometrische Anschauung wendet sich unter Kepler (1615) und B. Cavalieri (1635) wieder den von Archimedes hinterlassenen Problemen zu.

Addition und Subtraktion durch zwei vor oder rückwärtsschreitende Beine (ibid. p. 22), während die Griechen sich der Buchstaben des Alphabetes bedienten. Auch die letzteren erkannten die Null als Zahlbegriff noch nicht; selbst die Einheit, galt ihnen nicht als Zahl ($\text{oũτε δὲ ἡ μονὰς ἀριθμὸς, ἀλλὰ ἀρχὴ ἀριθμοῦ}$, vgl. Cantor I, p. 435); die aristotelische Ansicht war, daß die Zahl immer den Begriff der Vielheit einschließe; (Tropfke, Geschichte d. Elementarmathematik, Leipzig, 1903, Bd. I, p. 153); noch 1585 verteidigt S. Stevin ausführlich in seiner *Arithmétique pratique* (Tropfke I, p. 156) den Zahlcharakter der Eins. Ebenso erschienen die Brüche ihnen nicht als selbständige Zahlbegriffe, sondern nur als der Ausdruck geometrischer Verhältnisse (Vgl. auch W. Brix, Der math. Zahlbegriff und seine Entwicklung; Wundt, philos. Studien V, 1888, p. 632), was freilich von anderen bestritten wird.

Den Indern verdanken wir bekanntlich das Positionssystem (übrigens findet sich schon bei den Babyloniern, wie K. H. Hilprecht überzeugend nachgewiesen hat, ein Positionssystem mit sexagesimaler Anordnung) und die dezimale Einteilung; die Null (genauere Angaben bei Tropfke, p. 10 ff.) ist bei ihnen als Zeichen urkundlich seit dem Jahre 738 nachweisbar (Cantor I, p. 603); negative Zahlen werden durch einen übergesetzten Punkt als neue Zahlzeichen gekennzeichnet, „aber von den Leuten nicht gebilligt.“ (Cantor I, p. 622). Die indischen Ziffern haben sich durch Vermittelung der Araber erst langsam verbreitet; in einer Petrarca-Ausgabe von 1471 erscheinen sie zum ersten Male zur Paginierung der Seiten. Überhaupt hat die Buchdruckerkunst und Adam Rieses (1492–1559) Einfluß erst ihren allgemeinen Gebrauch befördert, vgl. E. Löffler, Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit, Leipzig 1912.

(Fortsetzung siehe nächste Seite.)

1) Über den Ursprung der dezimalen Auffassung vgl. Cantor, Bd. I, p. 7, 8, 253; über das erste Auftreten der Dezimalbrüche, dessen Bemerkungen zu J. v. Gmunden, Peurbach und C. Rudolff, ibid. II, 164, 167, 366. Erst S. Stevin hat es 1585 klar ausgesprochen, daß durch Einführung der Dezimalbrüche die Bruchrechnung formal ganz vermieden werden könne, ibid. p. 565.

2) Siehe die Gesch. d. Elementarmath. v. J. Tropfke, Bd. I, p. 158–164.

3) Über die Logarithmen vgl. die Darstellung von J. Tropfke, Bd II p. 141–186.

Zweierlei besonders wichtige Probleme hatte die Mathematik der Griechen trotz ihrer hohen Entwicklung nicht allgemein zu lösen vermocht, das der Tangentenkonstruktion, d. h. der Bestimmung einer geraden Linie, welche eine krumme in einer gegebenen Stelle berührt, und das der Inhaltsbestimmung. In ein ganz anderes Stadium traten diese Fragen, als durch den Einfluß von Descartes die Geometrie auf die Lehre von den Zahlen zurückgeführt wurde. Will man z. B. jemand den Standpunkt einer einzelnen Pflanze innerhalb einer horizontal ausgedehnten Wiese, die von einer Straße durchschnitten wird, bezeichnen, so wird man ihm sagen: Gehe auf der letzteren um x Meter vorwärts und schreite dann, in rechtem Winkel nach rechts (oder links) abweichend wieder geradlinig um y Meter vor, so wirst du sie antreffen. Dies ganz primitive Prinzip, durch Ko-

Diophantus v. Alexandria (um 350 n. Chr.) kennt schon ein besonderes Zeichen ς für die Unbekannte (Cantor I, p. 470), ein Subtraktionszeichen als umgekehrtes ψ ; das Gleichheitszeichen $\iota\varsigma$; die Regel der Multiplikation für positive Differenzen. Die Ausbildung des kaufmännischen Rechnens bei Leonardo Pisano (1202) führt die negativen Zahlen als debitum ein, doch werden diese selbst bis in das 17. Jahrhundert, z. B. von Vieta, dessen Buchstabenrechnung sich übrigens keineswegs auf allgemeine Zahlen, sondern auf geometrische Größen verschiedener Dimension bezieht, nicht zugelassen; erst die Geometrie des Descartes brach ihnen vermöge der Darstellung auf den Koordinatenachsen völlig Bahn, während schon 1544 durch M. Stifel der Null ihr Platz in der Reihe der positiven und negativen Zahlen angewiesen war. Vgl. z. B. J. Tropicke, Geschichte der Elementarmathematik, Bd. I, p. 158–162, insbes. p. 161.

Die Multiplikation wird schon bei den Indern durch Nebeneinandersetzen der Faktoren ausgedrückt (Rechenbuch von Bakhshali, Cantor I, p. 598); der Bruchstrich tritt bereits bei Leonardo Pisano auf. Der Ursprung der Zeichen $+$ und $-$, die plötzlich bei J. Widmann etwa 1480, dann bei M. Stifel 1544 erscheinen, während gleichzeitig noch $\tilde{p}$ und $\tilde{m}$ für plus und minus geschrieben werden, ist immer noch nicht völlig aufgeklärt (Cantor, Vorwort zu Bd. II, p. IV) (übrigens sollen sich dieselben bereits in den Msk. Leonardos da Vinci befinden); von Th. Harriot stammen die Zeichen $\lesseqgtr$ (1631); von R. Recorde 1556 das Zeichen $=$ für gleich. — Über die Ausbildung der Buchstabenrechnung vergleiche man die Darlegungen von Zeuthen, Geschichte d. Math. im 16. und 17. Jahrhundert, Leipzig 1903, p. 93–112 und die vortrefflichen Angaben bei Tropicke, Bd. I, p. 146–151.

ordinaten¹⁾ x, y, z die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, ist schon seit den ältesten Zeiten gebraucht worden, aber erst Descartes entkleidete den Koordinatenbegriff von der ihm zugrunde liegenden Größenvorstellung, und erfaßte diese x, y, z als reine Zahlen²⁾, die freilich zur Anwendung erst durch die Beziehung auf die

1) Koordinaten kann man schon bei den altägyptischen Baumeistern benutzt sehen, welche in derselben Weise, wie wir es noch jetzt tun, die Punkte einer Zeichnung durch quadratische Einteilung fixierten. Sie mußten sich auch wohl ganz von selbst einstellen, wenn man ein Feld nach der Weise der ägyptischen Harpedonapten abstecken wollte. Bei Hipparch erscheinen zuerst Länge und Breite als Polarkoordinaten auf der Kugel; rechtwinklige Koordinaten werden auch von Apollonius in der Lehre von den Kegelschnitten verwendet, sowie von Heron beim Feldmessen, um die Ecken der zu vermessenden Trapeze festzulegen. Am nächsten kommt einer eigentlichen Koordinatenvorstellung wohl der tractatus de latitudinibus formarum des Nic. Oresme (etwa um 1350); derselbe gibt, wie es scheint, eine graphische Methode, um mittels der latitudo und longitudo (der Ordinaten und Abszissen) Eigenschaften des Wachsens und Abnehmens von Größen zu veranschaulichen, ohne daß aber eine wesentlich über die empirische Beobachtung hinausgehende Verwendung zum Aufbau der Geometrie vorliegt, wie sie doch wohl zuerst bei Descartes und seinen Zeitgenossen auftritt. Vgl. Cantor, Bd. II, p. 117 ff. und J. Tropike, Gesch. d. Elementarmathematik, Bd. II, p. 409 ff. Bei Leibniz (unter dem Pseudonym O. V. E.) heißt es (Acta Erudit. 1692, p. 168) „Ordinatum applicatas vocare solent geometrae rectas quotcunque inter se paralleles, quae a curva ad rectam quandam directricem usque ducuntur, quae ... solent vocari ordinatae“; so schon die römischen Agrimensoren, auch Kepler 1615.

2) Dies ist der entscheidende Punkt, in dem die Lehre des Descartes der um vieles verständlicher und systematischer ausgeführten Isagöge ad locos planos et solidos (Oeuvres de Fermat, éd. Tannery et Henry, Bd. I, p. 91) seines berühmten Zeitgenossen P. Fermat, der an Stelle des reinen Zahlbegriffes noch die Vorstellung der Größen verschiedener Dimensionen verwandte, überlegen ist. Descartes sagt ausdrücklich (R. des Cartes geometria, ed. F. v. Schooten, Frankf. 1695) Omnia geometriae problemata facile ad hujus modi terminos reduci possunt, ut deinde ad illorum constructionum opus tantum sit rectarum quarundam linearum longitudinem cognoscere. Neque enim hosce Arithmetices terminos ut facilius intelligi possint, in geometriam introducere verebor (p. 1); ferner, p. 3, ubi notandum est, quod per a^2 vel b^3 similesve communiter non nisi lineas omnino simplices concipiam. Und p. 13 u. 15 wird das Koordinatenprinzip mit den Worten

jeweilig benutzte Längeneinheit kommen können. Vermöge dieses Koordinatenbegriffes reduziert sich offenbar jede geometrische Untersuchung auf eine solche über Beziehungen zwischen Zahlen, d. h. auf die Verknüpfungsgesetze derselben, wie sie die Arithmetik liefert; die Geometrie wird in die Sprache der Zahlenlehre übertragen.¹⁾

eingeführt: ponendo nimirum segmentum lineae AB , quod intra puncta A et B continetur, vocari x , BC (die Ordinate) autem vocari y ; possumus ad libitum assumere alterutram quantitatem incognitam x vel y , atque alteram invenire per hanc aequationem.

1) Der Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Geometrie hat bekanntlich mit dem Gegensatze, den wir mit der analytischen und synthetischen Methode (über diese vgl. z. B. W. Wundt, Logik, Bd. II, p. 94) verbinden, nichts zu tun; beide Disziplinen bedienen sich gleichmäßig derselben Methoden. — Der weitere Inhalt der Geometrie des Euklid beruht auf der Anwendung der Grundlagen auf einige doch eigentlich nur zufällig gewählte Figuren, so sehr auch die Beschränkung auf den Kreis und die gerade Linie im System selbst begründet ist. Eine allgemeine, auch in der Methodik einheitliche Behandlung kann erst dann entstehen, wenn eine einheitliche Auffassung der geometrischen Gebilde zugrunde gelegt wird. Diese letztere aber wird ermöglicht durch die gleichmäßige Erzeugung derselben aus ihren einfachsten Elementen. Betrachtet man als dieses Element z. B. den Punkt, so wird die Definition jedes Gebildes auf der gesetzmäßigen Verbindung seiner Punkte beruhen. Nun kann die Lage eines Punktes durch gewisse fundamentale geometrische Konstruktionen bestimmt werden; dann entsteht die synthetische Geometrie mit konstruktiver Untersuchungsmethode. Wird aber die Lage des Punktes durch Koordinaten oder Zahlen ausgedrückt, so ergibt sich die analytische Geometrie, deren Methodik in der Verwendung der Arithmetik liegt. Durch diese Auffassung wird nicht nur die innere Verwandtschaft, sondern auch der Charakter des formalen Unterschiedes zwischen den beiden geometrischen Forschungsrichtungen bezeichnet, der sich auch dann erhält, wenn ganz andere Elemente wie der Punkt zur Erzeugung der Raumgebilde eingeführt werden.

Koordinaten sind daher Zahlen, welche die Lage des gewählten Raumelements bestimmen; zu dieser Bestimmung ist eine fundamentale Konstruktion erforderlich, welche den wesentlichen Charakter des Koordinatensystems ausmacht. In der Möglichkeit, alsdann einzig und allein auf arithmetischer Basis fortzuschreiten, liegt die Kraft der analytischen Geometrie. Es darf aber nicht übersehen werden, daß in der Beziehung aller Elemente einer Figur auf ein Ko-

Jeder Punkt einer ebenen krummen Linie z. B. ist so bestimmt durch seine beiden Koordinaten x und y , die nach zwei etwa senkrecht zueinander liegenden Achsen gemessen zu denken sind; zu dem innerhalb gewisser Grenzen willkürlich wählbaren x gehört ein ganz bestimmtes y (eventuell auch mehrere y); y erscheint hier als abhängig von dem x und heißt eine Funktion desselben. Eine Gerade, die zwei Punkte A, B einer krummen Linie verbindet, heißt eine die letztere schneidende, eine Sekante derselben; nach der naiven Anschauung, der wir hier folgen, geht aus derselben die Tangente im Punkt A hervor, wenn man die Sekante so lange um den Punkt A bewegt, bis der Punkt B mit dem Punkt A zusammenfällt; wir sagen, die Grenzlage der Sekante ist die Tangente.¹⁾ In unserer heutigen Ausdrucksweise heißt das, die trigonometrische Tangente des Neigungs-

koordinatensystem, welches an und für sich derselben völlig fremd ist, eine Unvollkommenheit oder Schwerfälligkeit liegt, die insbesondere dem Anfänger, der die „synthetischen“ Betrachtungen der euklidischen Planimetrie gewohnt ist, entgegentritt; dieselbe kann beseitigt werden, wenn für eine zusammenhängende Gruppe von Untersuchungen ein für letztere besonders geeignetes Koordinatensystem gewählt wird. — Demgegenüber besaß die synthetische Geometrie mit ihren von vornherein einem großen und allgemeinen Gebiete geometrischer Fragen adäquaten Erzeugungsprinzipien eine weit größere Biegsamkeit, welche gestattete, manche Betrachtungen, die auf analytischem Wege nur weitläufig zu führen waren, mit einem Blicke zu überschauen. In der wirksamsten Weise aber hat sich für viele Teile der analytischen Geometrie durch die Methoden der Ausdehnungslehre, der Invarianten- und Gruppentheorie, die Möglichkeit eröffnet, eine Behandlungsweise auszubilden, welche nur noch Symbole von Koordinaten verwendet, die ihrer Bedeutung nach sich von dem Koordinatensystem völlig losgelöst haben, dagegen mit der Figur selbst in innerer Beziehung stehen; in der intrinsequen oder natürlich-geometrischen Methode der Differentialgeometrie ist dasselbe Prinzip mit großem Erfolge ausgebildet. In der Mechanik endlich tritt an Stelle der beständig erforderlichen Transformationen der rechtwinkligen Koordinatensysteme, wie sie z. B. S. D. Poisson in seinem *Traité* gebraucht, der Vektorbegriff mit seinen invarianten Symbolen ein, der zur formalen Behandlung nicht allein völlig ausreicht, sondern auch einen so ganz dem Wesen der Sache angemessenen Charakter besitzt, daß man ein Wort Boltzmanns hier anwenden kann: Die Formel scheine zuweilen klüger als der Mensch, der sie erfunden hat.

1) Über diese Tangentenbestimmung vgl. den Brief von Descartes (März 1638), *Oeuvres* VII, p. 62, éd. Cousin.

winkels der Kurventangente ist der Differentialquotient der abhängigen Variablen y in bezug auf die unabhängige Variable x . Darum, ob eine solche Grenzlage wirklich vorhanden sei, kümmerte man sich anfänglich nicht, da in den Fällen, um die es sich zunächst handelte, die Untersuchung selbst diese Annahme rechtfertigte, oder von vornherein die Kurve durch einen Bewegungsprozeß definiert war.

Zu ganz ähnlichen Fragen gelangte man aber auch beim Studium der einfachsten Naturvorgänge, das namentlich in Italien — man denke nur an Leonardo da Vinci, an die Neubegründer der Statik, an Galilei und seine Schüler — einen außerordentlichen Aufschwung genommen hatte.¹⁾

Bei jedem Vorgang in der Natur erscheinen gewisse Zustände derart miteinander verknüpft, daß das Vorhandensein einer ersten Klasse von Zuständen mit dem einer zweiten immer verbunden ist, während das Umgekehrte nicht immer der Fall ist; die ersten pflegen wir als die Wirkungen, die letzteren als die Ursachen zu bezeichnen. So erscheint uns der eine Vorgang als Folge von dem anderen, seiner Ursache, abhängig, und die formale Vorstellung dieser Abhängigkeit, d. h. diese, abgelöst von allen metaphysischen Ideen bestehende, Zuordnung irgend welcher physikalischen Zustände zueinander, wird wieder durch den Begriff der Funktion geliefert.

So wird, um nur die einfachsten Beispiele zu erwähnen, die Höhe der Quecksilbersäule eines Thermometers eine Funktion der Temperatur; die Temperatur eines Punktes eines Stabes, dessen eines Ende einer konstanten Wärmequelle ausgesetzt ist, als Funktion seines Abstandes von der letzteren und der verflossenen Zeit erscheinen; so wird der Druck des in einem unausdehnbaren Behälter eingeschlossenen Gases eine Funktion der Temperatur sein, der dasselbe ausgesetzt ist.

Galilei hatte durch seine Untersuchung über die Bewegung fallender Körper den ersten Anstoß zu einer wirklichen Kinematik und Dynamik, d. h. der Lehre von den Bewegungserscheinungen der Körper gegeben.²⁾ Insbesondere verdanken wir ihm die fundamentalen Be-

1) Siehe das ausgezeichnete Werk von P. Duhem, *Les origines de la statique*, 2 Bde, Paris 1905/06, sowie E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch und kritisch dargestellt*, 3. Aufl. Leipzig 1897, p. 119–148. (5. Aufl. seitdem 1908.)

2) Über Galileis kinematische Arbeiten vgl. M. Cantor, Bd. II, p. 637; desgleichen E. Mach a. a. O. p. 122, insbesondere über den

griffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung. Von der Geschwindigkeit wird zwar auch im gewöhnlichen Leben gesprochen. Indessen ist dieser Begriff nur dann ein klarer, wenn die Bewegung eines Punktes auf seiner Bahn eine gleichförmige ist, d. h. wenn die Anzahl der Wegeinheiten dividiert durch die der zugehörigen Zeiteinheiten beständig denselben Wert hat; dieser Quotient, den man in populärer Sprache als „Weg durch Zeit“ bezeichnet, ist eben die Geschwindigkeit. Ist dies nicht der Fall, so wird derselbe von einer bestimmten Anfangslage ausgehend, je nach dem der Endlage zugehörigen Zeitabschnitt einen veränderlichen Wert haben, den man als mittlere Geschwindigkeit bezeichnet. Einem Eisenbahnzuge, der in zwei Stunden 120 km zurücklegt, schreiben wir eine mittlere Geschwindigkeit von etwa 16,6 m pro Sekunde zu, obwohl wir sehr gut wissen, daß sich diese Angabe nur auf einen fingierten, sich gleichförmig bewegenden Zug bezieht, der mit dem wirklichen gleichzeitig abgeht und ankommt.

Wie kommen wir nun aber zu dem Begriff der Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke? Wir glauben zunächst zu bemerken, daß je kleiner das Zeitintervall gewählt wird, die mittlere Geschwindigkeit sich um so mehr einem bestimmten sogenannten Grenzwerte nähert, der eben die Geschwindigkeit im Anfangsmomente ist. In unserer heutigen Ausdrucksweise heißt das, die Größe der Geschwindigkeit ist der Differentialquotient des Weges nach der Zeit, und man kann wohl kaum stark genug betonen, daß ein scheinbar so einfacher Begriff, wie der der Geschwindigkeit, schon nicht ohne den auf den Vorstellungen der Infinitesimalrechnung beruhenden Grenzbegriff erfaßt werden kann, durch welche einzig und allein die intuitiv gebildete Überzeugung sich in eine begriffliche Einsicht verwandeln läßt.

Begriff der Beschleunigung p. 137. Es ist sehr merkwürdig, daß sich die eigentliche Bewegungslehre trotz der Ansätze von Roberval u. a. erst so spät entwickelt hat. Erst 1763 findet Giulio Mozzi den Satz, jede Momentanbewegung des Raumes sei eine Schraubenbewegung; 1827 wird derselbe von Cauchy wirklich bewiesen; erst im Jahre 1858 legt Helmholtz (*Journ. f. Math.* 55, p. 25) den Grund zur Kinematik der Flüssigkeiten. Eigentlich hat erst die neuere Zeit die ungeheure Fruchtbarkeit der Kinematik erkannt, man vgl. das gedankenreiche Werk von Study, *Die Geometrie der Dynamen*, Leipzig 1899.

Nun zeigt sich, daß die Ermittlung der Geschwindigkeit nach Richtung und Größe¹⁾ vollständig mit dem Tangentenproblem übereinstimmt. Es kann daher nicht überraschen, daß man diese Auffassung bei durch Bewegungsprozesse erzeugbaren Kurven geradezu zur Tangentenkonstruktion benutzte.²⁾

Aber damit ergaben sich viel weitergehende Konsequenzen. Wir schreiben der Geschwindigkeit vermöge des Satzes vom Parallelogramm der Bewegungen³⁾ Komponenten oder Seitengeschwindigkeiten nach den Achsen der Koordinaten zu, welche sie völlig nach Richtung und Größe bestimmen. Und dann zeigen die einfachsten Betrachtungen, daß die Bewegung selbst völlig gegeben ist, wenn man ihre Geschwindigkeitskomponenten in jedem Augenblicke als Funktionen der Zeit und der augenblicklichen Lage des sich bewegendes Punktes kennt, falls nur die Anfangslage gegeben war. Wir sind damit in den Stand gesetzt, den Bewegungsprozeß zu beschreiben, wenn wir nur in jedem Augenblicke seine Geschwindigkeitskomponenten kennen. Bezeichnet man diese letzteren als Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ der Koordinaten nach der Zeit, so hat man nach unserer heutigen Ausdrucksweise ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung integriert. Es kommt also insbesondere darauf an, diejenige Kurve zu finden, die ein gegebenes „Neigungsverhältnis“ gegen die x -Achse hat. Dies ist das Problem, das Leibniz (*Acta erudit.* 1693, Ostwalds Klassiker Nr. 162) löst; er gibt a. a. O. sogar schon einen Integrappen an, der zur Aufzeichnung derselben in ähnlicher Weise dienen kann, wie der erst neuerdings von A. Abakanowicz erfundene Integrapp.

Zugleich war damit aber auch das Inhaltsproblem gelöst, falls man

1) Man vgl. J. Barrows *motus transversus und descendens* in dessen *Lectiones geometricae*, Cantor, Bd. III, p. 129.

2) G. Roberval (1602–1675) hat seine Methode zur Tangentenkonstruktion (Cantor, Bd. II, p. 804) auf 13 verschiedene Kurven angewandt (Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, Bd. I, p. 206). Aber schon seine Konstruktion für die Kegelschnitte ist unrichtig (L. Burmester, *Lehrbuch d. Kinematik*, Leipzig 1888, p. 67).

3) Nach Cantor (Bd. II, p. 805) scheint Roberval zuerst den Satz vom Parallelogramme der Geschwindigkeiten in der uns geläufigen Form ausgesprochen zu haben.

überhaupt voraussetzt, daß der Inhalt einer Fläche, die z. B. von der geradlinigen x -Achse, zwei zu ihr senkrechten Ordinaten a und y , sowie von dem zwischen ihren Endpunkten verlaufenden Kurvenbogen begrenzt ist, durch eine Zahl meßbar ist. Denn es ergab sich unmittelbar, daß die Geschwindigkeit, mit der der Flächeninhalt F wächst, nämlich $\frac{dF}{dx}$, gleich y ist, womit eben F durch Integration gewonnen wird.

Aber mittels des Begriffes der Geschwindigkeit allein würde die Mechanik niemals zu der unermesslichen Tragweite gelangt sein, die sie alsbald entfaltete. Denn die Geschwindigkeiten und ihre funktionelle Abhängigkeit von Ort und Zeit sind schwer durch Beobachtungen zu erkennen und schon in den einfachsten Fällen nicht an besonders übersichtliche Gesetze gebunden. Tragen wir aber die Geschwindigkeitskomponenten wieder als Parallelkoordinaten auf, so entsteht eine der ursprünglichen Bewegung zugeordnete neue, deren Geschwindigkeitskomponenten wir die Beschleunigungen der ursprünglichen Bewegung nennen¹⁾, sie sind die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten. Und wieder ist die ursprüngliche Bewegung durch ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung vollständig bestimmt, wenn man nur die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeiten des Punktes kennt.

In den zunächst behandelten Fällen, wie der Fallbewegung, der Bewegung der Planeten, waren nun diese Beschleunigungen ganz einfache Funktionen von der Lage des sich bewegenden Punktes²⁾, und

1) Dies ist die Konstruktion des Hodographen, der sich W. R. Hamilton (Elements of Quaternions, London 1866, p. 100, 718) bedient; sie macht eine besondere Theorie der Beschleunigungen (beliebiger Ordnung) überflüssig.

2) Bei der Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer nach dem Gravitationsgesetze wirkenden Zentralkraft, die in der Einheit der Entfernung die Intensität μ besitzt, ist die Geschwindigkeitsgröße durch die Formel

$$v^2 = v_0^2 + 2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right),$$

in welche die Anfangsgrößen v_0 , r_0 eingehen, die Richtung durch die Tangentenkonstruktion der Kegelschnitte bestimmt. Die Beschleunigung ist dagegen in jeder Lage durch $\frac{\mu}{r^2}$ ausgedrückt. Daß übrigens die Beschleunigung unabhängig ist von dem Anfangszustande der Bewe-

so eröffnete sich dem Genius Newtons die Möglichkeit, die Keplerschen Gesetze der Bewegung der Himmelskörper als notwendige Folgen einer allgemeinen Begriffsbildung nachzuweisen, für die allerdings manche metaphysische Vorstellungen, wie die eines absoluten Raumes, einer absoluten Zeit, die der Kraft und ihrer Beziehung zur Masse und Beschleunigung sehr wesentlich waren, und über deren Auffassung auch heute noch in den gebräuchlichen Darstellungen der Mechanik verschiedenartige Vorstellungen bestehen.¹⁾

In der Tat sind die soeben ausgeführten Überlegungen für Newton maßgebend gewesen, dessen Fluxionsrechnung schon durch ihren

gung, d. h. von den Koordinaten des Anfangspunktes und dessen Geschwindigkeitskomponenten, liegt in dem Begriffe der Beschleunigung selbst. Denn die Bahn eines Punktes hängt von 6 Parametern, den Koordinaten des Ausgangspunktes und den Komponenten der Geschwindigkeit in demselben ab. Durch Elimination von dreien derselben kann man sehr verschiedenartige Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten erhalten, in denen neben x, y, z, t noch drei Parameter auftreten; dagegen lassen sich die Komponenten der Beschleunigung als Funktionen von $x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ allein darstellen. Daher scheint es mir zu enge gefaßt, wenn z. B. Poincaré (Wissenschaft und Hypothese, Leipzig 1903, p. 94, 2. Aufl.) sagt:

„Die Beschleunigung eines Körpers hängt nur ab von dem Orte dieses Körpers, von den benachbarten Körpern und ihren Geschwindigkeiten.“

Schon wenn ein materieller Punkt benötigt ist, auf einer mit der Zeit veränderlichen Fläche sich zu bewegen, werden die Beschleunigungen desselben von der Zeit abhängig; diese Vorstellung tritt aber auch in vielen anderen Teilen der Mechanik auf.

1) Die Idee der allgemeinen Gravitation, welche in populären Schriften gewöhnlich als das Hauptverdienst von Newton angesehen wird, ja selbst eine doch wohl verfehlte theoretische Begründung des Gravitationsgesetzes, die allerdings in Rücksicht auf den Satz, daß die Oberflächen von Kugeln sich wie die Quadrate der Radien verhalten, auch heute noch manchem sehr plausibel erscheinen mag, war schon gleichzeitig mit oder auch schon vor Newton von anderen seiner Zeitgenossen gefaßt, vgl. Whewell (Hist. of the inductive Sciences II, p. 119). Viel wichtiger ist es, daß Newton in seinen Prinzipia Philosophiae naturalis nicht allein im einzelnen die Idee der allgemeinen Gravitation durchführte, sondern daß er auch zugleich die Grundlinien der gesamten Mechanik in ihnen entwarf, die sich bis auf heute, wenn auch in etwas modifizierter Form, unverändert erhalten haben.

Namen darauf hinweist, daß seine infinitesimalen Grundvorstellungen der Bewegungslehre entnommen waren, wenn er sich auch zur Ermittlung dieser Fluxionen oder Geschwindigkeitskomponenten besonderer rein mathematischer Hilfsmittel bedienen mußte.¹⁾

1) Der Newtonschen Fluxionsrechnung liegt ursprünglich ein metaphysisches Prinzip zugrunde, die Beziehung auf die absolute Zeit. Im *Tractatus de curvatura curvarum* heißt es: „Quantitates mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineae describuntur . . . non per appositionem partium sed per motum continuum punctorum . . ., tempora per fluxum continuum et sic in caeteris.“ Alsdann wird das Problem gestellt: Data aequatione quocunque fluentes involvente, invenire fluxiones“ (Differentialrechnung); die Aufgabe, aus den Fluxionen die Fluenten zu finden (Integralrechnung), wird auf die Quadratura curvarum zurückgeführt. Die Abhandlung schließt mit den triumphierenden Worten: „Et his principiis via ad majora sternitur“, mit denen auch Gauß seine große Entdeckung des Krümmungsmaßes in den *Disquisitiones circa superficies curvas* schon in der Abhandlung über die in den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung andeutet (Werke 4, p. 189, vgl. die Bemerkungen von P. Stäckel, Gauß' Werke 8, p. 385).

Demgegenüber erscheint die Leibnizsche Auffassung viel populärer, wie denn auch dieser selbst (M. Simon, *Zur Gesch. d. Phil. d. Differentialr.*, Abh. zur Gesch. d. Math., Heft 8, Leipzig 1898, p. 115) sich dahin ausspricht, daß seine Methode es der Mittelmäßigkeit ermögliche, die Probleme anzugreifen, die bisher nur hochbegabten zugänglich gewesen seien.

Beide aber haben den strengen Grenzbegriff bereits erkannt. Man vgl. die berühmte Stelle in den *Principia Philos. naturalis*, Amsterdam 1723, p. 23: „Ultimae rationes illae quibuscum quantitates evanescent revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quas propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi“ mit dem Manuskript von Leibniz (26. März 1676, Leibniz, *Math. Schriften*, ed. C. J. Gerhardt, Bd. 5, p. 217). „Videndum, an exacte demonstrari possit . . . quod differentia non tantum sit infinite parva, sed omnino nulla, quod ostendetur, si constet, eo usque semper posse inflecti polygonum, ut differentia assumpta etiam infinite parva minor fiat error.“ Noch deutlicher sagt Newton in dem *Tractatus de curvatura curvarum* „In finitis autem quantitibus analysin instituere et finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigare, consonum est geometriae veterum: et volui ostendere quod in methodo fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in geometriam introducere.“

Leibniz dagegen, der sich weit enger an das Tangentenproblem und seine Umkehrung hielt, gelangte von den Vorstellungen ausgehend, die bereits B. Pascal und J. Barrow¹⁾ in die Behandlung dieser Aufgaben eingeführt hatten, zu einer ganz anderen Darstellung, indem er, unmittelbar an die geometrische Vorstellung anknüpfend, die unendlich kleinen Größen seiner Betrachtung zugrunde legte.

Leibniz hat dagegen vielfach sich solcher Ausdrucksweisen bedient, die sich auf „unendlich kleine Größen“ beziehen, und die er selbst nur „toleranter vera“ nennt.

Aber den Leibnizschen Begriffsbildungen hat zum Siege über Newtons Fluxionsrechnung der unübertroffene Algorithmus des Differenzierens verholfen, mit dem L. die Infinitesimalrechnung beherrscht in den *Acta erud.* von 1684. Dort finden sich die Regeln des Differenzierens für die durch die 4 Spezies zusammengesetzten Funktionen; noch mehr tritt das hervor bei der Einführung neuer Variablen. Wird nämlich $y = f(x)$ und $dy = f'(x)dx$ gesetzt, so wird für $x = \varphi(u)$, $y = f(\varphi(u)) = F(u)$ wieder $dy = F'(u)du$. Dieser Charakter der Invarianz des Differentials tritt noch bedeutungsvoller hervor in Leibniz genialer Fassung des Integrals. Am 26. Oktober 1675 schreibt er noch an Stelle des Cavalierischen „omnia $f(x)$ “ das Zeichen $\int f$, aber schon am 11. Nov. in der *methodus tangentium inversa* wählt er dafür $\int f(x)dx$. Und in dieser Form tritt nun wieder die invariante Gleichung $\int f'(x)dx = \int F'(u)du$ bei der Transformation $x = \varphi(u)$ hervor, aus der sofort die allgemeine Formel $\int f(x)dx = \int F(u)\varphi'(u)du$ hervorgeht. — Von Leibniz stammt auch die ganze Terminologie (Differential, Derivierte [1677], *derivare* usw.).

Die Selbständigkeit der Leibnizschen Ideen hat auch Newton selbst anerkannt, bevor er in den unerquicklichen Prioritätsstreit hineingezogen war, in der bekannten Stelle der *Principia* p. 227 (Amsterdamer Ausgabe 1723): „Cum (Leibnitio) significarem, me compotem esse methodi determinandi tangentes et similia peragendi, et literis transpositis hanc sententiam involventibus (data Aequatione quocunque fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire et vice versa) eandem celarem, rescripsit vir clarissimus, se quoque in ejusmodi methodum incidisse et methodum suam communicavit a mea vix abludentem praeterquam in verborum et notarum formulis et idea generationis quantitarum“.

1) Nach Cantor (Bd. III, p. 129) hat J. Barrow schon den Ausdruck *indefinite parvum*. Über die Beziehungen von Leibniz zu dem charakteristischen Dreieck von Pascal vgl. die Bemerkungen von Cantor (Bd. III, p. 156 ff.) über die Schrift von Gerhardt, *Ber. d. Berl. Acad.* 1891.

Daß die Länge eines Kurvenbogens um so weniger von der seine Endpunkte verbindenden Sehne abweicht, je kleiner derselbe ist, daß die Tangente um so mehr mit der Sekante zusammenfällt, je geringer der Abstand der beiden Schnittpunkte der letzteren mit der Kurve ist, daß der Inhalt der Kugel um so genauer gefunden wird, je größer die Zahl der eingeschriebenen Pyramiden ist, die ihre Spitze im Mittelpunkt, die Ecken ihrer Grundflächen auf der Kugelfläche haben, usw. das sind, wie es scheint, so unmittelbar einleuchtende, — allerdings mit dem scharfen logischen Denken der griechischen Geometer völlig unverträgliche — Vorstellungen, daß bereits Kepler dieselben in konsequenter Verfolgung zu einer großen Zahl von Inhalts- und Oberflächenbestimmungen geometrischer Körper verwenden konnte. Leibniz aber gelang es, diese vagen und von der Exaktheit der Geometrie der Alten weit entfernten Vorstellungen teils durch schärfere Begriffsbestimmungen, teils durch eine für alle Fälle mit der größten Leichtigkeit anzuwendende Methode in ein fast mechanisches Rechnen mit diesen unendlich kleinen Zahlen oder Größen, die eben kleiner sein sollten als jede noch so klein vorgegebene, zu verwandeln.

Von nun an waren die Wege dem Fortschritt der Infinitesimalrechnung geebnet. Man erkannte, daß bei allen Vorgängen in der Natur — und auf diese richtete sich vorwiegend die damalige Forschung —, ganz ähnliche Verhältnisse wie bei den geometrischen und analytischen Untersuchungen auftreten. Eine gewisse Gruppe von unbekannten Vorgängen, welche vermöge ihrer Eigenschaft, meßbar zu sein, durch Zahlwerte ausdrückbar sind, ist durch ihre Fluxionen oder Differentialquotienten in bezug auf eine Gruppe unabhängiger Variablen (Zeit- und Längengrößen) gegeben; man soll die ersteren bestimmen. Bei der Leibnizschen Auffassung hatte man zugleich den Vorteil einer außerordentlichen Erleichterung, welche der Gebrauch der unendlich kleinen Größen für die anschauliche Erfassung der Aufgaben mit sich brachte.

Auf diese Weise gelang es allmählich, nicht nur Fragen der Geometrie und Analysis, sondern die ganze Mechanik, und zwar nicht nur die astronomische oder Mechanik des Himmels, sondern auch die Molekularmechanik, die Elastizitätstheorie, die Hydrodynamik, die Theorie der Fortpflanzung der Wärme, später auch die Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus, soweit die experimentellen Grundlagen für diese Erscheinungen bereits fest-

standen, durch ein System von Differentialgleichungen vollständig zu beschreiben, aus dessen Lösung alles der Erkenntnis überhaupt Zugängliche hervorgehen mußte. Niemals hat eine Wissenschaft größere Triumphe gefeiert wie die Entwicklung der Mathematik unter den Händen der Heroen der Infinitesimalrechnung, der Bernoullis, Eulers, d'Alemberts, Lagranges, Laplaces; es war ein Siegeszug ohnegleichen, mit dem im 18. Jahrhundert die mathematische Analyse sich aller Gegenstände der Erscheinungswelt bemächtigte. Probleme, an deren Lösbarkeit man früher nicht einmal zu denken gewagt hatte, wurden jetzt aufgeworfen, und kaum aufgeworfen, auch schon fast spielend gelöst; nichts schien dem menschlichen Geiste im Gebiet der exakten Naturwissenschaften mehr unerreichbar. Den Abschluß dieser Periode mag wohl Laplace¹⁾ bezeichnen, der das stolze

1) Bei Laplace (*Théorie analytique des probabilités*, 3. éd. Paris 1820, *Oeuvres Compl. de Laplace*, Paris 1876, Tome 7, p. VI) heißt es „Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé, serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre dans la perfection qu'il a su donner à l'astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en Mécanique et en Géométrie, jointes à celles de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans les mêmes expressions analytiques les états passés et futurs du système du monde. En appliquant la même méthode à quelques autres objets de ses connaissances, il est parvenu à ramener à des lois générales les phénomènes observés et à prévoir ceux que des circonstances données font éclore. Tous ses efforts dans la recherche de la vérité tendent à le rapprocher sans cesse de l'intelligence que nous venons de concevoir, mais dont il restera toujours infiniment éloigné.“

Laplace will freilich einfach in den allgemeinen Formeln die Zeit $t = \pm \infty$ setzen, um Anfang und Ende der Welt zu erfahren; aus den Untersuchungen Poincarés wissen wir jetzt, daß nicht einmal in dem scheinbar einfachen Falle des Dreikörperproblems die zur Auflösung benutzten Reihen beständig konvergieren. Vgl. auch die Bemerkungen von H. Burkhardt, *Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken*, Antrittsvorlesung Zürich 1897, *Deutsche Math. Verein.* 11, p. 49.

Wort, in dem wir freilich jetzt kaum mehr als eine starke Übertreibung erblicken können, aussprach: Eine Intelligenz, der in einem bestimmten Augenblicke der Zustand der gesamten materiellen Welt gegenwärtig wäre, würde mit den Hilfsmitteln der mathematischen Analyse Vergangenheit und Zukunft der Welt mit einem Schlage überschauen können: Der Verlauf des Kosmos ist durch ein großes System von Differentialgleichungen geregelt, welche bis auf die entferntesten Zeiten den Ablauf der vergangenen und zukünftigen Ereignisse voraussagen.

Was ist denn nun aber die Mathematik, deren Entwicklung wir soeben in großen Zügen, allerdings mehr in Rücksicht auf die derselben zugrundeliegenden wesentlichen Gedanken, als es einer streng historischen Darstellung erlaubt sein würde, zu schildern versuchten?

Die alte Antwort, die Mathematik sei die Lehre von den Größen; Größe sei aber alles, was sich selbst gleich oder ungleich, d. h. in der Beziehung des kleiner oder größer Seins stehend gedacht werden könne, wird wohl kaum befriedigen. Denn erstens gibt es ganze Zweige der Mathematik, in denen gar nicht von der Vergleichung von Größen die Rede ist, wie z. B. die Kombinatorik und die Gruppentheorie, die projektive Geometrie und die Analysis situs, die Zahlentheorie; auch die Algebra der Logik wird hierher zu rechnen sein. Andererseits sehen wir uns damit auf den Begriff der Größe zurückgewiesen, der sich wenigstens für den ersten Augenblick in die Dunkelheit einer unbestimmten Anschauung zu verlieren scheint.¹⁾

1) Die „Anschauung“ der linear ausgedehnten Größe scheint allerdings klar zu sein, wenn wir uns auf die geradlinige Strecke beschränken; schon bei der krummen Linie treten bereits im Altertume wohlbekannte Schwierigkeiten auf. Schon damals wird erörtert, ob man überhaupt von der Länge krummer Linien sprechen könne, d. h. ob krumme Linien als „Größen“ mit Strecken komparabel seien. Noch mehr ist dies bei ebenen Flächenstücken der Fall; hier können wir nicht unmittelbar entscheiden, ob sie einander gleich sind, ob das eine von ihnen als das größere zu betrachten ist, so daß nicht einmal der Größencharakter der einfachsten geometrischen Gebilde nach der obigen Definition unmittelbar feststeht. Erst durch Cauchy sind diese Schwierigkeiten beseitigt.

In der Theoretischen Arithmetik von Stolz und Gmeiner, Bd. I p. 1 wird Graßmanns (Lehrbuch der Arithmetik, 1861, p. 1) Definition zugrunde gelegt: „Größe heißt ein jedes Ding, welches einem

Diese Überlegungen haben dazu geführt, eine weit allgemeinere Begriffsbestimmung der Mathematik zu fordern. Mit der Erkenntnis,

anderen gleich oder ungleich gesetzt werden kann. Unter welchen Bedingungen zwei zu einem System gehörige Dinge gleich oder ungleich heißen, muß jedesmal besonders festgesetzt sein. Lassen sich alle Dinge eines Systemes so aufeinander beziehen, so bilden sie ein System von gleichartigen Größen.“ Schärfer hat dies wohl schon B. Bolzano (*Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig 1851, p. 4–5) ausgesprochen: „Betrachten wir einen Gegenstand als gehörig zu einer Gattung von Dingen, deren je zwei und zwei niemals ein anderes Verhältnis zu einander haben können, als daß sie einander entweder gleich sind, oder daß sich das eine von ihm als eine Summe darstellt, die einen dem andern gleichen Teil in sich faßt, ... so betrachten wir diesen Gegenstand als eine Größe.“

Es handelt sich aber in der Mathematik um die extensiven Größen im Sinne von Kant (*Kritik der reinen Vernunft*, *Elementarlehre II*, Teil I; Abt. II, 2) „Eine extensive Größe nenne ich diejenige, in welcher die Vorstellung der Teile die Vorstellung des Ganzen möglich macht (und also notwendig vor dieser vorhergeht)“. Dagegen heißt es weiter: „In allen Erscheinungen hat das Reale, was ein Gegenstand der Empfindung ist, intensive Größe, d. h. einen Grad... Nun nenne ich diejenige Größe, die nur als Einheit apprehendiert wird, und in welcher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation = 0 vorgestellt werden kann, die intensive Größe.“

Noch in seinen letzten Lebensjahren sagte C. F. Gauß (Gauß z. Gedächtnis von Sartorius v. Waltershausen, Leipzig 1856, p. 98). „Unter extensiven Größen verstehe ich solche, welche aus gleichartigen Teilen zusammengesetzt sind; sie bilden den Gegenstand der Mathematik; die intensiven nur insoweit, als sie extensiv gemacht werden können, wenn man für sie eine Skala angeben kann, an der sie sich messen und untereinander vergleichen lassen. Es würde für einen Philosophen verdienstlich sein, solche Punkte anzugeben, in denen etwa eine exakte Untersuchung anzubahnen sei, und wäre die erste Ausführung auch noch so grob, so hätte man doch eine Hoffnung, demnächst etwas weiterzukommen.“

Wenige Jahre darauf (1860) erschienen G. Th. Fechners *Elemente der Psychophysik* (2. Aufl. 1889) auf Grund der Untersuchungen von E. H. Weber über den Tastsinn und der ausgedehnten Versuchsreihen von Fechner selbst. Trotz der außerordentlich geistreichen Darlegung desselben und der interessanten auf diesem Wege erhaltenen Resultate haben sich indessen immer aufs neue Stimmen gegen die prinzipielle Begründung des psychophysischen Maßprinzips erhoben, wenn auch vielleicht nicht bestritten wird, daß dasselbe für besonders einfache Reize, denen Helligkeits- und Druckempfindungen

daß die Gewißheit der mathematischen Sätze doch schließlich nur auf ihrem rein logisch deduktivem Aufbau beruhen kann, haben die Bestrebungen begonnen, eine rein logische Begriffsbestimmung der Mathematik zu geben, welche sie nach Methode und Inhalt vollständig und allgemein charakterisieren will.¹⁾

entsprechen, eine gute Orientierung abgibt. Man vergleiche darüber die dem Mathematiker besonders naheliegende These von A. Foucault (*La psychophysique, Thèse présentée, devant la faculté des lettres à l'université de Paris* 1901) und das interessante Referat über dieselbe von J. Tannery (*Darboux, Bull. des sciences math.*, Bd. 36, 1900, p. 101), wo aufs neue darauf hingewiesen wird, daß Fechners logarithmische Maßformel von zwei an sich gänzlich willkürlichen, aber durch ihre Einfachheit sich empfehlenden, Voraussetzungen abhängt.

1) Nach B. Peirce (*Linear associative algebra* 1870, *Americ. Journ. of. Math.* IV, 1881) ist Mathematik „the science which draws necessary conclusions.“ Aber dann fällt sie mit dem logischen Denken überhaupt zusammen, denn jedes Urteilen besteht in der (vermeintlichen) Fähigkeit, solche Schlüsse ziehen zu können. Diese Bemerkung führt dazu, die Mathematik nicht lediglich durch ihre formale Methode zu definieren, sondern auch auf die besondere Natur der Objekte Rücksicht zu nehmen, auf die sie Anwendung findet.

B. Kempe gibt folgende Definition, der sich auch im allgemeinen M. Bôcher (*the fundamental concepts and methods of mathematics*, *Bull. Americ. math. society*, 11, p. 115, 1905) anschließt:

„If we have a certain class of relations, and if the only questions, which we investigate, are whether ordered groups of these objets do or do not satisfy the relations, the results of the investigations are called mathematics.“

Ich möchte hervorheben, daß E. Papperitz (*Jahresber. d. Deutsch. Math. Verein.* 1, 1892, p. 36) bereits früher zu folgendem Ergebnis gelangte:

„Den Gegenstand der reinen Mathematik bilden die Beziehungen, welche zwischen irgendwelchen gedachten Elementen begrifflich herstellbar sind, indem wir sie als in einer wohlgeordneten Mannigfaltigkeit enthalten ansehen; das Ordnungsgesetz dieser Mannigfaltigkeit muß unserer Wahl unterliegen.“

Ähnlich wird auch von G. Itelson (1904 *Revue de métaphysique et de morale*, 12, p. 1037) die Mathematik als die Wissenschaft von den geordneten Gegenständen bezeichnet, was wieder an Justus Günter Graßmanns noch weit allgemeineren Ausspruch erinnert, Mathematik sei die Wissenschaft der freien (ungehemmten) Verknüpfung und Trennung.

Wir können auf diese Untersuchungen hier nicht eingehen, da sie einem Gebiet angehören, auf welchem eine Verständigung in Kürze nicht leicht sein und vielleicht auch zweifelhaft bleiben würde.

Auch kann man mit einer allgemeinen Formulierung dessen, was eine Wissenschaft ist, niemals irgendeine konkrete Vorstellung von

Bei B. Russell (*The principles of mathematics* Cambridge 1903) heißt es:

„Pure mathematics is the class of all propositions of the form p implies q , where p and q are propositions containing one or more variables the same in the two propositions, and neither p nor q contains any constants except logical constants. And logical constants are all notions definable in terms of the following, „implication“, the relation of a term to a class, of which it is a member, the notion of „such that“, the notion of relation and such further notions, as may be involved in the general notion of propositions of the above form.“

Kürzer faßt wieder M. Bôcher, der die Gesichtspunkte von Kempe und Russell zu vereinigen sucht, a. a. O. seine Ansicht dahin zusammen, daß Mathematik die Wissenschaft sei, welche mit Hilfe der logischen Prinzipien aus logischen Definitionen (by logical principles from logical principles) deduktive Schlüsse ableitet.

Auch L. Couturat (*Die philosophischen Prinzipien der Mathematik*, deutsch von C. Siegel, Leipzig 1908) schließt sich p. 228 ff. der Russell'schen Auffassung an. Nach ihm besteht die mathematische Methode in der Deduktion aus den von der Logistik aufgestellten Prinzipien. Was aber die Mathematik von allen anderen rein deduktiven Theorien unterscheidet, ist, daß sie eigentlich keiner Postulate bedarf. Denn ihre Definitionen sind rein logisch, sie enthalten keine anderen Konstanten als die logischen Konstanten. Und ihre Objekte werden zugleich als bloße Funktionen der logischen Konstanten definiert. So besteht denn die formale Seite der Mathematik in einer den logischen Prinzipien konformen Gesamtheit von Abhängigkeitsbeziehungen, inhaltlich aber in einer Gesamtheit von Definitionen, die nur logische Begriffe enthalten.

Alle diese Aussagen sind gewiß sehr wohl erwogen. Den meisten wird man entgegenhalten können, daß sie den Unterschied zwischen dem allgemeinen Gebiete der Logik und dem der Mathematik zu verwischen scheinen. Auch Russells Definition scheint ebenso gut als das ideale Leitprinzip jeder abstrakt philosophischen Untersuchung anzusehen zu sein; am meisten positiven Inhalt dürfte noch die Fassung besitzen, welche nach E. Papperitz angeführt wurde, und die sich an die Vorstellungen der Mengenlehre anlehnt. Doch wird man auch hier wieder im Hinblick auf die beschreibenden Naturwissenschaften zweifeln können, ob das richtige getroffen ist. Denn diese beschäftigen

ihrem Wesen geben, denn dieses besteht eben in der Gesamtheit der in ihr entwickelten Begriffe, welche keineswegs aus einer solchen ganz allgemeinen und daher bloß formalen Definition allein entnommen werden können. Jedenfalls aber würde eine solche Betrachtung

sich in ihren systematischen Teilen auch mit den Ordnungsgesetzen einer Mannigfaltigkeit, die bis zu einem gewissen Grade unserer Wahl unterliegen können (z. B. Sexual- und natürliches System in der Botanik), ohne daß man dieselben der Mathematik zuzählen wird.

Nach meiner Ansicht wird jeder Mathematiker, der in seiner Wissenschaft einen mit dem Formalismus der Logik nicht schlechthin zusammenfallenden Gegenstand finden will, geneigt sein, noch einen weiteren Unterschied zu betonen. Die Objekte der Mathematik sind Zeichen, welche der ordnenden Tätigkeit des Verstandes ihre durch rein logische Definitionen ausgedrückten Verknüpfungsgesetze verdanken. Solche begrifflich festgesetzte Zeichen nennen wir aber allgemein Zahlen. Und daher sehe ich das unterscheidende Merkmal der Mathematik darin, daß sie die Wissenschaft von der Zahl ist. Und hiernach wird man stets, wie ich glaube, unterscheiden können, ob irgendeine Untersuchung dem mathematischen Gebiet oder einem anderen angehört. Man vgl. auch die Bemerkungen von H. Rothe, Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, Leipzig 1911, p. 65.

Einen besonderen Teil der Mathematik bildet daher auch der Logikkalkül, insoweit er nämlich auf einen reinen Formalismus der Zeichen reduzibel ist. So groß der Wert sein mag, den seine abstrakten Ergebnisse besitzen, so gering sind bisher seine positiven Resultate, wenn es sich um die Darlegung eines zusammengesetzteren gedanklichen Prozesses handelt. Es ist eben nicht durchführbar, die sämtlichen Gegenstände unseres Denkens dem Begriffe der Zahl in einer solchen Weise unterzuordnen, daß dabei ihre vielfachen gegenseitigen Beziehungen noch in einfacher Weise zum Ausdruck kommen. So weit ich die praktischen Ergebnisse der mathematischen Logik zu übersehen vermag, scheitern sie bei jeder wirklichen Anwendung an der extremen Weitläufigkeit ihrer Formeln, welche nur mit einem unverhältnismäßig großen Aufwand fast triviale Resultate, diese allerdings mit absoluter Sicherheit abzulesen gestatten. Nur da, wo rein mathematische Fragen, d. h. Beziehungen zwischen Zahlen, erörtert werden, erweist er sich in Peanos Formulaire des mathématiques oder Peanos Lezioni di Analisi infinitesimale, Torino 1893, als eine wirkliche, vielleicht durch keine andere Ausdrucksweise zu ersetzende Kraft. Von anderen Seiten wird auch dies bestritten und der modernen Logistik namentlich alle produktive Kraft abgesprochen, so z. B. M. Winter, La méthode dans la philosophie des mathématiques, Paris, librairie Alcan, 1911, p. 48–101.

uns von dem Inhalt der Mathematik selbst viel weiter entfernen, als es der Zweck dieser Darstellung beabsichtigt.

Weniger verschiedenartigen Auffassungen dürften wir begegnen, wenn wir an einer nach der Meinung der neueren logischen Schule allerdings oberflächlicheren¹⁾ Ansicht festhalten und das Gesamtgebiet der mathematischen Untersuchungen scheiden in das der reinen Mathematik und ihrer Anwendungsgebiete. Zu diesen letzteren rechnen wir Geometrie und Mechanik, beide im weitesten Sinne genommen. Die reine Mathematik ist dagegen die Wissenschaft von den Zahlen; Zahlen sind aber von uns geschaffene Zeichen für ordnende Tätigkeiten unseres Verstandes, die sich nach bestimmten allgemeinen Regeln miteinander verknüpfen lassen.

In der Zahlenlehre sehen wir daher das eigentliche Wesen der Mathematik, während die Darlegung, wie alle anderen Vorstellungen, die dem Größenbegriff anhaften, dem Zahlbegriff untergeordnet werden können, innerhalb der reinen Mathematik zu den Anwendungsgebieten hinüberleitet.

Und wenn wir uns im folgenden zunächst auf diejenigen Zahlzeichen beschränken, die auf dem Boden der natürlichen ganzen Zahlen erwachsen und erst später den allgemeinen Charakter der Zahl streifen, welcher der soeben bezeichneten Auffassung vom Wesen der Mathematik zugrunde liegt, so folgen wir damit nur der historischen Entwicklung, welche die Wissenschaft selbst genommen hat.

In der zuvor geschilderten geschichtlichen Übersicht haben wir eine ganze Reihe neuer Begriffe auftreten sehen, den der veränderlichen Zahl, der Variablen, den der funktionellen Abhängigkeit, den des Grenzwertes. Aber noch ein weiterer, diesen Auffassungen selbst zum Teil zugrunde liegender Begriff kommt hier in Betracht, der der Stetigkeit oder Kontinuität. Wir schreiben der Bewegung, durch die eine Linie erzeugt wird, und damit dieser Linie selbst, die Eigenschaft zu, keinen Punkt zu überspringen, eben diese Eigenschaft der

1) So z. B. E. B. Wilson, the foundations of mathematics, Bull. Americ. math. Society, 11, p. 74, 1905, „Some there are, who under the influence of arithmetic tendencies, might be tempted to give a decidedly more superficial definition in terms of integers“. Dem gegenüber sei bemerkt, daß der Begriff der Zahl im Texte ein weit allgemeinerer ist; im übrigen sei auf die ausführliche Darlegung in der vorhergehenden Anm. verwiesen.

Kontinuität, die wir auch von allen Vorgängen in der Natur, so weit wir sie auf Bewegungserscheinungen zurückzuführen beabsichtigen, fordern zu müssen glauben. Soll man also mittels des Zahlbegriffs diese Stetigkeit erfassen, so muß die Zahl selbst zu einer stetig variablen gemacht werden.

Wie war es aber nun möglich, in die Mathematik, deren Grundlagen von alters her auf dem festen Fundament der arithmetischen Regeln, die doch zunächst nur das Rechnen mit den ganzen Zahlen betreffen, und den geometrischen Axiomen und Postulaten des Euklid zu ruhen schienen, diese ganz neuen Begriffe der Stetigkeit, der Grenze oder der endlosen Annäherung an eine solche, des Unendlichen, einzuführen, welche selbst nur auf ganz schwankenden unbestimmten Aussagen zu beruhen schienen, ohne damit den Charakter der Mathematik, eine über jeden Zweifel erhabene Erkenntnis zu vermitteln, vollkommen zu ändern?

Dieser Einwand ist oft gemacht, nicht am wenigsten in jener wunderbaren Zeit der Entwicklung der Infinitesimalrechnung¹⁾ selbst, in der manchem die Forderung der logischen Strenge, durch welche die Methoden der Alten sich auszeichneten, verloren gegangen zu sein schien, In der Tat, so mächtig und überwältigend war der Impuls, mit dem eine Entdeckung auf mathematischem Gebiet damals förmlich die andere überflügelte, daß manche Vorstellungen unbekümmert um ihre logische

1) M. Rolle (1652–1719) (Rolles Theorem, aus dem der Fundamentalsatz der Differentialrechnung sich gebildet hat, im *Traité d'algèbre*, Paris 1690, p. 124) nahm freilich seine Einwürfe als auf Mißverständnissen beruhend später wieder zurück (Cantor III, p. 265). G. Berkeley, bekannter durch seinen philosophischen Idealismus, beanstandete die Vorstellung der Fluxionen höherer Ordnung (Cantor III, p. 715); Maclaurin widerlegte diesen Einwand 1737 durch die konsequente Entwicklung derselben, insbesondere des Begriffs der Beschleunigung, in seinem *Treatise of Fluxions*, 1742 (p. 99 ff.). Von Berkeley stammt auch die Behauptung, in der Differentialrechnung würden beständig Fehler begangen, aber durch entgegengesetzte wieder aufgehoben. Dies Argument ist seitdem oft wiederholt worden, so von Lagrange, wie ich bereits in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften Bd. II, p. 59 bemerkt habe, von L. N. Carnot, der in seiner *Métabysique de l'analyse infinitésimale* 1797 behauptet, l'analyse infinitésimale n'est autre chose qu'un calcul d'erreurs compensées, a. a. O. p. 119, 122, 136; auch in neuerer Zeit sind diese längst widerlegten Einwürfe wieder aufgenommen worden (vgl. das Referat von R. Hoppe, Bd. 16 der Fortschritte der Math. p. 49).

Berechtigung eingeführt wurden. Zweifelnde wurden auch wohl auf die an sich widerspruchslosen Erfolge der neuen Lehre hingewiesen, in denen der beste Prüfstein ihrer Richtigkeit liege.¹⁾ Am deutlichsten zeigt sich das vielleicht in den fundamentalen Werken des großen Mathematikers L. Euler, der zum ersten Male eine Gesamtübersicht der Analysis des Unendlichen zu geben unternahm, die auch heute noch von unvergänglichem Werte erscheint, während wir seiner prinzipiellen Begründung keineswegs mehr zustimmen können.²⁾ Derartige Unvollkommenheiten treten fast mit Notwendigkeit bei jeder Wissenschaft auf, die sich in einem besonders lebhaften Entwicklungsprozesse befindet, wo die Divination der methodischen Erkenntnis vorauszuweilen pflegt; sie bilden insbesondere dann kein eigentliches Hindernis für den Fortschritt, wenn eine Unrichtigkeit sich alsbald durch ihren Widerspruch gegen bereits gesicherte Erkenntnisse herausstellen muß, wie das in der Mathematik möglich ist, der in jedem Augenblicke unzählig viele Kontrollen zu Gebote stehen, wie sie keiner anderen Wissenschaft in ebenso entscheidender Gestalt sich darbieten.

Aber die Mathematik hat von jeher als ihr höchstes Ziel die Erkenntnis an sich angesehen und nicht die wenn auch durch noch so viele Proben bestätigte moralische Überzeugung von der sachlichen Berechtigung ihrer Methoden. Es ist die Herstellung des denknötwendigen, auf dem ausschließlichen Gebrauch der logischen Operationen beruhenden systematischen Zusammenhanges, welchen sie fordert.

Und nun hat die Arbeit eines großen Teils des neunzehnten Jahrhunderts darin bestanden, der reinen Mathematik die absolute Herrschaft wieder einzuräumen, d. h. den Begriff der Zahl und der Operationen mit derselben als das ausschließliche Fundament aller mathematischen Erkenntnis nachzuweisen.³⁾ So

1) Bekannt ist das von Fontenelle in seinem éloge auf d'Alembert dem letzteren zugeschriebene Wort: „Allez en avant, et la foi vous viendra“.

2) Dies kann auch in mancher Beziehung noch von Lagrange gelten, z. B. von seiner *Théorie des fonctions analytiques*. Nous restons étonnés, sagt É. Picard (*Sur le développement de l'analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences*, Bull. des scienc. mathém. 28, 1904, p. 267), on peut l'avouer, devant la démonstration qu'il croit avoir donnée de la possibilité du développement d'une fonction en série de Taylor, a. a. O. p. 275.

3) Dies ist derjenige Gesichtspunkt, den F. Klein (*Über die Arithmetisierung der Mathematik*, Gött. Nachr., geschäftl. Mitt. 1895, p. 82)

ist nicht allein der Begriff der veränderlichen Zahl geschaffen, und die allgemeine Arithmetik zu einer vollständig abgeschlossenen Wissenschaft entwickelt, sondern auch der Begriff der Funktion und die Darstellung der Funktionen durch geeignete Hilfsmittel in der umfassendsten Weise aufgebaut, das unendlich Kleine und unendlich Große als logisch völlig berechnete Auffassungsweise dargetan, und damit die Grundlage der Infinitesimalrechnung geklärt; endlich ist auch die von

als Arithmetisierung der Mathematik bezeichnet. Kronecker wollte bekanntlich (Journ. f. Math. 101, 1887, p. 338) die ganze Zahl als alleinigen Gegenstand der Mathematik angesehen wissen und bezeichnete die hierdurch geforderte Reduktion aller Untersuchungen als „Arithmetisierung“. Auch Dedekind (Was sind und was sollen die Zahlen, 2. Aufl., Braunschweig 1893) ist der Ansicht, daß jeder auch noch so fern liegende Satz der Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt, betrachtet es aber keineswegs als etwas Verdienstliches, diese mühselige Umschreibung wirklich vorzunehmen, und keine anderen als die natürlichen Zahlen anerkennen zu wollen. Auch Weierstraß hat sich mißbilligend über Kroneckers Ansicht ausgesprochen (vgl. Mittag-Leffler, Une page de la vie de Weierstrass, Congrès international de Paris 1900, Paris 1902, p. 131): „Bei Kronecker ist es jetzt ein Axiom, daß es nur Gleichungen zwischen ganzen Zahlen gibt.“

Nach Dedekind a. a. O. p. VII, VIII, sind die Zahlen freie Schöpfungen des menschlichen Geistes; sie dienen als ein Mittel, die Verschiedenheiten der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. „Durch den rein logischen Aufbau der Zahlenwissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlenreich sind wir in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen. Verfolgt man genau, was wir bei dem Zählen der Menge oder Anzahl von Dingen tun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des menschlichen Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden, ohne welche Fähigkeit überhaupt kein Denken möglich ist. Auf dieser einzigen, auch sonst ganz unentbehrlichen Grundlage muß nach meiner Ansicht die gesamte Wissenschaft der Zahlen errichtet werden.“ An dem Ausdrucke „freie Schöpfungen des menschlichen Geistes“ hat man vielfach Anstoß genommen, meiner Ansicht nach mit Unrecht. Es handelt sich hier gar nicht um eine psychologische Frage, sondern nur um das „apriorische“, welches nun einmal in jedem mathematischen Begriffe liegt. In demselben Sinne sagt auch G. Cantor: „das Wesen der Mathematik besteht in ihrer Freiheit“ (Math. Annalen 21, p. 564).

der Mathematik des 18. Jahrhunderts kaum berührte Frage nach der Existenz der Lösungen der Differentialgleichungen zum größten Teil erledigt.

Vor allem bedarf daher nun die Lehre von den Zahlen selbst eine Darlegung. Denn die Schuld an allen Zweifeln trug eben der von den Indern überkommene Zahlbegriff, der in seinen wesentlichsten Punkten ganz unklar geblieben war.

Den Begriff der Anzahl einer Menge¹⁾ von vorgestellten Dingen, auf dessen psychologische Entwicklung wir hier nicht eingehen können, als der Zusammenfassung oder Kollektion einer Reihe

1) Wir gehen hier also vom Begriff der Kardinalzahl aus, als einer von der besonderen Natur einer Menge von Objekten unabhängigen Abstraktion. Nach B. Russell, *The principles of mathematics*, Cambridge 1903, ist sie der gemeinsame Begriff, der allen äquivalenten Mengen im Sinne der heutigen Mengenlehre zukommt; ähnlich definiert auch schon früher G. Frege, *Grundlagen der Arithmetik*, Breslau 1884, p. 47: die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes „gleichzählig dem Begriffe F “. Manche halten den Begriff der Ordinalzahl als den psychologisch primären, so auch v. Helmholtz (*Wiss. Abhandlg.* 3 (1895), p. 371). Bei Kant (*Kritik der reinen Vernunft*, von dem Schematismus der reinen Verstandesbegriffe) heißt es: „Also ist die Zahl nichts anderes, als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen seiner gleichartigen Vorstellung überhaupt, dadurch daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge.“ Die hier auftretende Vorstellung der Zeit, die vielleicht bei der psychologischen Entstehung der Ordinalzahl eine Unterstützung findet, hat zu der zum mindesten ganz nutzlosen Ansicht Veranlassung gegeben, daß das Fundament des Begriffes der Zahl die Zeit als Form der reinen Anschauung sei, wie sie namentlich W. R. Hamilton vertreten hat. Welchen Sinn hat z. B. die Phrase „Algebra is the science of pure time“ (W. R. Hamilton, *Trans. Roy. Irish Acad.* 17, p. 293, 1837)? Alle Denkakte verlaufen allerdings zeitlich; wie sollte aber ein Vergleichen oder Beziehen derselben aufeinander ohne dasjenige zustande kommen, was Kant die transzendente Einheit der Apperzeption nennt? Übrigens wird diese Ansicht auch von Seiten der Philosophie abgelehnt (vgl. z. B. E. G. Husserl, *Philosophie der Arithmetik*, Leipzig 1891, p. 31). In derselben Weise äußert sich auch W. Wundt, *Logik*, Bd. II, 1907, p. 153: „Diese psychologische Grundlage des Zahlbegriffes (nämlich das zeitliche Nacheinander des Zählaktes) darf aber nicht dazu verführen, daß man mit W. R. Hamilton auch logisch die Zahl aus der Zeit ableitet. Können wir schon psychologisch unter Umständen mehrere Denkinhalte gleichzeitig auf-

wiederholter Denkakte, wollen wir als an sich klar ansehen, und ebenso werden wir uns hier zur Rechtfertigung der einfachsten Verknüpfungen dieser ganzen Zahlen, wie sie die Grundregeln der Arithmetik für das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren lehren, auf die unmittelbare logische Gewißheit berufen, mit der diese Verknüpfungen erfolgen.¹⁾

fassen, so ist es logisch überhaupt nicht nötig, über die Zeitfrage der Einheiten irgend etwas auszumachen.“

Ähnlich äußert sich auch J. Baumann, weitere Bemerkungen zur modernen Mathematik (Ostwalds Ann. d. Naturphilosophie, VII, 1908, p. 312), desgleichen schon B. Bolzano, Wissenschaftslehre III, p. 241, 1837.

1) Eine Herleitung der arithmetischen Grundrechnungsarten findet man z. B. nach H. G. Graßmanns Vorgange bei Helmholtz (Zählen und Messen, erkenntnis-theoretisch bearbeitet, Wissensch. Abhandlg. 1887, Bd. III, p. 356); besonders instruktiv ist die Darstellung von H. Poincaré in dessen ausführlicher Behandlung in der Revue de métaphysique et de morale 1894, p. 371, (die übrigens wohl auf die erschöpfende Behandlung von C. S. Peirce, Amer. Journ. of Math. 4, p. 85, 1881, zurückgeht), vgl. auch dessen Werk Wissenschaft und Hypothese, herausg. von F. und L. Lindemann, 2. Aufl. 1906, p. 3–10; man vgl. auch die Bemerkungen von O. Hölder, Anschauung und Denken in der Geometrie, Leipzig 1906, p. 59, Anmerk. 58. Übrigens hat B. Bolzano bereits 1810 die Operationen mit ganzen Zahlen ganz wie Graßmann behandelt, vgl. Ostwalds Klassiker, Nr. 153, p. 38.

Eine dem gegenwärtigen Standpunkt entsprechende Fassung des Zahlbegriffes ergibt sich aus den einfachsten Vorstellungen der Mengenlehre (vgl. z. B. H. Weber, Elementare Mengenlehre, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Verein. 15, p. 173, 1906).

Eine Menge, d. h. eine aus irgend welchen Dingen oder Elementen gebildete Gesamtheit heißt dort geordnet, wenn man von jedem Paare a, b ihrer Elemente weiß, welches dem anderen vorhergeht, derart daß wenn $a < b$ ausdrückt, a stehe vor b , aus $a < b$, $b < c$ auch $a < c$ folgt. Die Menge heißt wohlgeordnet, wenn sie ein erstes (resp. letztes) Element besitzt; sie heißt endlich, wenn sie ordnungsfähig ist und bei jeder ihrer denkbaren Anordnungen ein erstes und ein letztes Element besitzt. Zwei solche endliche Mengen M, N heißen äquivalent, $M \sim N$, wenn ihre Elemente umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen werden können; eine endliche Menge kann nicht einem ihrer echten Teile äquivalent sein. Alsdann läßt sich beweisen (siehe den Beweis bei Weber a. a. O., p. 181), daß zwei solche Mengen M und N immer in einer von den drei folgenden Beziehungen stehen müssen:

Die ganzen Zahlen, aber auch nur sie alleine, haben die Eigenschaft, als Zeichen für an reale Dinge außer uns geknüpfte Vorstellungen

1. Entweder ist $M \sim N$;
 2. oder ein echter Teil M_1 von M ist äquivalent mit N ;
 3. oder ein echter Teil N_1 von N ist äquivalent mit M .
- Im Falle 2. resp. 3. sagt man, M sei $> N$ resp. $M < N$, wobei die Zeichen $<, >$ in Analogie zum Größer- und Kleinerzeichen gewählt sind.

Hieraus entwickelt sich der kardinale Zahlbegriff. Der Gesamtheit aller zu einer endlichen Menge A äquivalenten Mengen ordnen wir ein Zeichen a , ihre Kardinalzahl zu. Sind dann A und B zwei endliche Mengen, denen die Zeichen a, b zukommen, so setzen wir:

$$\begin{aligned} a &= b, & \text{wenn } A &\sim B, \\ a &< b, & \text{wenn } A < B, \\ a &> b, & \text{wenn } A > B. \end{aligned}$$

Nun läßt sich mit Hilfe des Satzes von der vollständigen Induktion zeigen, daß die Zahlen, welche kleiner sind als a oder gleich a sind, eine endliche Menge bilden, der die Zahl a zukommt.

Denn man betrachte eine endliche, also auch wohlgeordnete Menge A , so gilt dieser Satz für das erste Element a_0 derselben, dem das Zeichen 1 zugewiesen wird. Es sei nun a ein anderes Element, b sein vorhergehendes. Dann kommen den entsprechenden Teilmengen $A_a, A_b - A_b$ ist diejenige Menge, welche alle b vorhergehenden Elemente und b selbst enthält — die beiden Zeichen α, β zu. Ist nun der Satz richtig für A_b , d. h. bilden die Zahlen, welche kleiner oder gleich β sind, eine Menge von der Zahl β , so können wir die Elemente dieser letzteren Menge umkehrbar eindeutig auf die von A_b beziehen; alsdann ist dasselbe aber auch der Fall, wenn man das Element a hinzunimmt, und nun der Menge die Zahl $\alpha = \beta + 1$ zuweist. Wir sagen, der Zahl β werde die Zahl $+1$ hinzugefügt. Und so zeigt sich die Vorstellung der Kardinalzahl hier als die ursprüngliche, während der Begriff der Ordinalzahl durch den Prozeß des Hinzufügens der Einheit entsteht.

Das Prinzip der vollständigen Induktion, das soeben benutzt wurde, kann (man vgl. die Bemerkungen darüber in der Anmerkung 3 zu S. 109) auf das Prinzip des Widerspruches zurückgeführt werden.

Dasselbe lautet in der Fassung von H. Weber: „Ein allgemeiner, auf jedes Element einer wohlgeordneten Menge M anwendbarer Satz ist bewiesen, sobald derselbe für das erste Element a_0 der Menge gilt, und wenn sich zeigen läßt, daß derselbe für das auf a folgende Element gilt, falls er für a richtig ist.“

Angenommen, der Satz sei nicht richtig für alle Elemente von M , so bilden wir die Teilmenge M_1 von M , welche alle Elemente ent-

angesehen werden zu können. Anders steht es schon mit den gebrochenen Zahlen, wenngleich hier vielleicht noch keine wesentlichen Schwierigkeiten vorzuliegen scheinen.¹⁾ Bis in die Mitte des vorigen Jahrhunderts, ja über dieselbe hinaus²⁾, haben dagegen die negativen³⁾ Zahlen Veranlassung zu Bedenken gegeben; sie pflegen auch dem Laien, dem ihr eigentliches Wesen meist verschlossen bleibt, immer aufs neue in der Ansicht zu bestärken, daß in der Mathematik keineswegs alles auf rein deduktiven Beweisen beruhe. Zahllose Versuche sind gemacht, um diese Schwierigkeit zu überwinden, indem man sich

hält, für die der Satz nicht gilt. Auch diese Menge ist wohlgeordnet; sie hat ein erstes Element α . Dieses ist nicht α_0 , denn für dieses gilt der Satz; es geht dem α also ein Element β in M vorher, und für dieses gilt der Satz, weil β sich nicht in M_1 befindet. Dann gilt der Satz nach Voraussetzung auch für α . Dies widerspricht aber der Annahme, daß M_1 das Element α enthalte. Es kann daher die Menge M_1 überhaupt kein Element enthalten, was zu zeigen war.

Für den naiven Standpunkt hat es etwas befremdendes, wenn ein Beweis für eine unmittelbar evidente Schlußform, wie die der vollständigen Induktion in der Gestalt „gilt ein Satz für die ganze Zahl n_0 und gilt er für die ganze Zahl $n + 1$, wenn er für n gültig ist, so gilt er für jede ganze Zahl $\geq n_0$ “, verlangt wird. Die Berechtigung dieser Forderung beruht auf der Notwendigkeit, für eine Behauptung, die sich auf den speziellen Begriff der ganzen Zahl bezieht, die logische Grundlage auf Grund des allgemeinen Ordnungsbegriffes nachzuweisen.

1) Man kann nicht genug hervorheben, daß schon mit der Bildung der Brüche und der negativen Zahlen das Gebiet des „Imaginären“ beginnt. Dies empfanden schon die Alten; bei uns wird das Gefühl dafür durch die hergebrachte Form des elementaren Rechenunterrichtes abgestumpft. J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions*, Paris 1886, préface p. VIII, sagt: „Une fraction du point de vue, que j'indique, ne peut pas être regardée comme la réunion de parties égales de l'unité; ces mots «parties de l'unité» n'ont plus de sens; une fraction est un ensemble de deux nombres entiers, rangés dans un ordre déterminé (dies ist der von W. R. Hamilton zuerst eingenommene Standpunkt); sur cette nouvelle espèce de nombres il y a lieu de reprendre les définitions de l'égalité, de l'inégalité et des opérations arithmétiques.“

2) Ich erinnere an den unerquicklichen Streit, der in der Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht Bd. 14/15 von seiten einer ganzen Reihe von Autoren über diesen Gegenstand geführt wurde.

3) Über die Ausdrücke positiv und negativ siehe Tropke a. a. O. I, p. 167, desgl. *Encycl. des sciences math.*, Paris 1904, I, 1, p. 34.

bestrebte, sich für die negativen Zahlen auf ähnliche der realen Welt angehörige Denkkakte zu berufen, wie für die positiven Zahlen, oder indem man auf die räumliche Vorstellung als eine unzweifelhaft sichere Quelle der Erkenntnis zurückging, bei welcher die positiven Zahlen durch Punkte auf der rechten Seite einer durch den Nullpunkt geteilten geraden Linie, der Zahlenachse, die negativen auf der linken Seite derselben untergebracht wurden. In der Tat würde sich ja hier auch wohl die additive und subtraktive Verknüpfung rechtfertigen lassen, doch begegnet der Satz, daß das Produkt zweier negativen Zahlen wieder eine positive Zahl ist, auf diesem Standpunkte immer Schwierigkeiten, die man wohl zu verhüllen, aber nicht zu überwinden vermochte. Ja man hat sogar, wie z. B. der Jesuit Clavius (1612) diese Sätze für völlig unbegreiflich, wenn auch als tatsächlich richtig, angesehen.¹⁾

Im Grunde genau dieselben Bedenken zeigten sich bei der Einführung der sogenannten imaginären Zahlen.²⁾ Unter der Bildung der

1) Clavius sagt: „causa autem hujus rei in multiplicatione numerorum et signorum + et — rejicienda videtur, et debilitas humani ingenii accusanda, quod capere non potest, quo pacto id verum esse possit. Neque enim de ratione dubitandum est, cum illa per multa exempla sit confirmata.

Erst die neuere Auffassung, insbesondere das Prinzip der Permanenz hat hier das erlösende Wort gesprochen. Übrigens liegt hier auch eine wirkliche Schwierigkeit vor; sie beruht auf der doppelten Bedeutung der funktionellen Zeichen $\pm$, welche sowohl als Zeichen der Addition und Subtraktion, als auch als Zeichen für positive und negative Zahlen auftreten, d. h. Operationen verschiedenen Charakters repräsentieren. Diese Zweideutigkeit, welche die Arithmetik nicht ohne wesentliche Beeinträchtigung ihres allgemeinen Algorithmus aufgeben kann, wird vermieden, wenn man, wie es durch Hankel in Aufnahme gekommen ist, zunächst neue Zeichen für die Operationen $\pm$ z. B. $\cap$ und $\cup$ einführt, und sich hinterher von der Zulässigkeit überzeugt, sie in dem gebräuchlichen Sinne abzuändern.

2) Die älteste Spur der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl findet sich, allerdings in ganz mißverständlicher Auffassung, bei Heron v. Alexandria (Cantor I, p. 403); die Inder schrieben diesen Quadratwurzeln keinen Zahlencharakter zu (Cantor I, p. 626). Ihr Auftreten bei Cardanus, 1545, in dem *Artis magnae seu de regulis algebraicis liber*, geriet bald wieder in Vergessenheit. A. Girard, *Invention nouvelle en algebre*, Amsterdam 1629, war der erste, der den formalen Nutzen erkannte, der in der Erweiterung des Zahlensystems durch die komplexen Zahlen liegt, während Descartes (*Oeuvres* V, p. 398, ed. Cousin)

Quadratwurzel aus einer Zahl a versteht man bekanntlich die Angabe derjenigen Zahl, welche mit sich selbst multipliziert a gibt. Ist nun a negativ, so kann es weder eine positive noch eine negative Zahl geben, welche dieser Forderung Genüge leistet, denn das Quadrat jeder positiven oder negativen Zahl ist immer positiv. Trotzdem konnte man nicht umhin, Zahlzeichen für diese imaginären Zahlen einzuführen, und mit ihnen vermöge der Einführung einer imaginären Einheit $\sqrt{-1} = i$, sowie mit den komplexen Zahlen $a + bi$ genau so zu rechnen, als ob sie gewöhnliche, reelle Zahlen wären. Und man erhielt so eine Fülle der merkwürdigsten Resultate, an deren Richtigkeit man nicht zweifeln konnte, da dieselben sich in vielen Fällen durch eine das Imaginäre vermeidende Untersuchung gewinnen ließen.

Man erkannte indes allmählich, daß dem Rechnen, d. h. den Verknüpfungsgesetzen der ganzen Zahlen, gewisse formale Gesetze¹⁾ zugrunde liegen, auf welchen allein das Rechnen beruht, ohne daß man auf die Vorstellung dessen, was die Zahlen in ihrer Beziehung

dieselben nicht anerkannte und sie deshalb als imaginär bezeichnete. Die Gaußsche Repräsentation der imaginären Zahlen (Gött. Nachrichten 1831; Werke II p. 169) findet sich dagegen schon 1797 von C. Wessel, *Essai sur la représentation analytique de la direction*, Copenhague 1797, entwickelt; unabhängig davon wurde sie von F. Argand (*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, abgedruckt im Bull. des sciences mathématiques VII, p. 145) wiedergefunden.

1) Diese bestehen in dem kommutativen und distributiven Prinzip (F. Servois, *Annales de Gergonne* 5, 1814/15, p. 93), dem W. R. Hamilton wohl das assoziative hinzugefügt hat. Indes sind diese noch nicht ausreichend. Bei der Untersuchung der von beliebig vielen Einheiten gebildeten Zahlensysteme pflegt man zunächst voraussetzen:

1. die kommutative Eigenschaft der Addition;
2. daß das Produkt zweier Zahlen wieder demselben Zahlkörper angehört;
3. daß dasselbe die distributive und assoziative Eigenschaft besitzt;
4. daß die Multiplikation, obwohl das kommutative Gesetz nicht vorausgesetzt wird, im allgemeinen durch die beiden Arten der Division eindeutig umkehrbar, oder daß ein Modul der Multiplikation vorhanden ist. Eine wesentliche Rolle spielt dabei noch die Frage, ob das Produkt auch Null sein kann, ohne daß dies für einen seiner Faktoren der Fall ist.

auf wirkliche Objekte bedeuten können, in jedem Augenblicke zurückzugehen braucht. Damit entsprang ein für den Zahlbegriff ganz neues Verständnis. Da die Subtraktion zweier gleicher Zahlen oder einer größeren von einer kleineren nicht möglich ist, und doch als Forderung an unseren Intellekt überall herantritt, so mußte man neue Zahlbegriffe einführen, welche diese Forderungen erfüllen. Und nun handelt es sich nur darum zu zeigen, inwiefern diese rein begrifflichen Schöpfungen unseres Verstandes ein Rechnen, d. h. eine gesetzmäßige Verknüpfung zulassen. Hat man so z. B. die Null und die negativen Zahlen als Zeichen für die Ausführung eines bestimmten Denkaktes eingeführt, so wird es die Aufgabe sein, solche Regeln in der geeignetsten Weise festzusetzen. Dies wird aber dann in besonders übersichtlicher Art der Fall sein, wenn dieselben formalen Gesetze, welche das Rechnen mit den natürlichen ganzen Zahlen befolgt, ohne Widerspruch beibehalten werden können. Denn alsdann entsteht ein reiner Schematismus des Rechnens, der ein allgemeines, durch nichts mehr gehindertes Verfahren ermöglicht.

Dieses lediglich hodegetische Prinzip der Erweiterung des Zahlgebietes durch freie und an sich willkürliche, aber dem Prinzip der Ökonomie des Denkens von E. Mach¹⁾ untergeordnete Begriffsbestimmungen, das Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze, ist zum ersten Male durch H. Hankel²⁾ in seiner vollen All-

1) Nach E. Mach (Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch und kritisch dargestellt, 3. Aufl., Leipzig 1897, p. 480) besteht das Prinzip der Ökonomie in einer Wissenschaft darin, daß man mit dem geringsten Gedankenaufwand jedes Ziel zu erreichen suchen soll.

2) H. Hankel, Vorlesungen über die Theorie der komplexen Zahlen, Leipzig 1867. Hankel selbst schreibt sich nicht die absolute Priorität dieses wichtigen Prinzipes zu, sondern erwähnt a. a. O. p. 15 die Arbeiten G. Peacocks und anderer englischer Mathematiker aus den Jahren 1834–42. Auch der vielgeschmähte M. Ohm, den Hankel übrigens gleichfalls zitiert, scheint mir in der ersten Auflage seines „Versuches eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik, 1822,“ den wesentlichen Grundgedanken des Prinzips bereits ausgesprochen zu haben; man vgl. z. B. die Vorrede zur 3. Auflage, 1828, p. XIIIff., sowie den Anhang von Bd. I, p. 407 ff. Nach M. Simon (Über die Mathematik, Gießen 1908) findet sich das Prinzip auch in einem 1834 erschienenen Programme des Hamburger Johanneums von G. H. Buben-dey (Über die räumliche Darstellung imaginärer Größen der Analysis). W. Wundt hat in der 3. Auflage seiner Logik trotz der hier-

gemeinheit ausgesprochen, und bildet seitdem die Grundlage der rein arithmetischen Theorien. Es zeigte sich nun, daß das Rechnen mit den gebrochenen, negativen, dann auch den komplexen Zahlen tatsächlich diesem Prinzip der Permanenz untergeordnet werden kann: man kann mit allen diesen Zahlen so wie mit den ganzen Zahlen rechnen, wenn man nur bei allen Operationen die rein formalen Regeln walten läßt, und jede auf den Grundrechnungsarten beruhende Rechnung bezieht sich auch da, wo kein Gebrauch davon beabsichtigt ist, immer auf das ganze komplexe Zahlengebiet.

In Wirklichkeit hat sich die allgemeine Anwendung der imaginären Zahlen erst dann eingebürgert, als Gauß durch eine Darstellung dieser Zahlen in der Zahlenebene eine an sich widerspruchsslose, allerdings auf die Raumanschauung begründete¹⁾ Verknüpfung dieser Zahlen gelehrt hatte, welche auf eine bloß formale Erweiterung der bekannten

gegen bereits von H. Burkhardt (Vierteljahrsschrift für wiss. Philosophie Bd. XIX, Referat über die 2. Auflage der Logik von Wundt) erhobenen Einwände das Prinzip der Permanenz als ein axiomatisches bezeichnet. Dies ist völlig unrichtig; das Prinzip ist eine Forderung, die im Sinne der Einfachheit und Zweckmäßigkeit gestellt wird; ob sich dieselbe erfüllen läßt, muß jedesmal besonders untersucht werden. Eine durch Allgemeinheit ausgezeichnete Darlegung des Permanenzprinzips findet sich bei O. Stolz und J. A. Gmeiner, Theoretische Arithmetik, Leipzig 1900, 1. Abt. p. 46 ff., 61 ff.

Noch häufig begegnet man dem Mißverständnis, als solle das Prinzip ein oberstes Axiom sein, dem sich alle arithmetischen Verknüpfungsgesetze fügen müssen, derart, daß es zum Beweise dieser selbst dienen kann. Derartige Prinzipie benutzt allerdings die angewandte Mathematik, so z. B. die Mechanik, wenn sie alle Vorgänge dem Satze von der Aktion und Reaktion unterwirft; in der reinen Mathematik kommen sie nicht vor. In seiner frühesten Form tritt das Prinzip bei der Einführung negativer Potenzexponenten auf: Sowie man festsetzt, daß a^{-m} nichts anderes bedeuten soll, als $\frac{1}{a^m}$, entsteht die einheitliche Rechnung mit allgemeinen reellen Exponenten.

1) Dies entspricht also nicht einer rein arithmetischen Einführung der komplexen Zahlen, wie wir sie heute fordern. Über eine solche vgl. man z. B. H. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Leipzig 1908, p. 1–10; die rein arithmetische, auf dem Gebrauche von Zahlenpaaren beruhende Einführung der komplexen Zahlen ist zuerst durch W. R. Hamilton 1835 (Trans. of the R. Irish Acad. Bd. 17, 1837) entwickelt.

Rechnungsregeln hinauslief¹⁾; noch durchschlagender hat wohl der großartige Erfolg gewirkt, den Gauß in seinen zahlentheoretischen Untersuchungen, Abel, Jacobi und Cauchy in der Theorie der Funktionen von komplexen Variablen aus diesen Zahlen zu ziehen wußten.²⁾

Ist aber nun mit den komplexen Zahlen der Zahlbegriff abgeschlossen? Es zeigt sich allerdings, daß zunächst keine Veranlassung besteht, zu noch weiteren Zahlzeichen überzugehen, da die Arithmetik alle Rechnungen, die sie in ihrem eigenen Bereiche aufwirft, vermöge der komplexen Zahlen ausführen kann; die letzteren bilden einen in sich abgeschlossenen Zahlkörper. Aber in Rücksicht auf die außerordentliche Wirksamkeit, welche das Rechnen mit den komplexen Zahlen vermöge seiner viel größeren Beweglichkeit entfaltete, ließ sich wohl die Frage aufwerfen, ob nicht, so wie man von der geraden Linie, der Zahlenachse der reellen Zahlen, zu der Zahlenebene von Gauß aufgestiegen war, eine noch weit größere Vollendung des Rechnens entstehen würde, wenn man zum Raum überginge, in dem jeder Punkt mit seinen drei Koordinaten einem Zahlzeichen zugeordnet wäre.

Diese Frage führte zu den vielseitigen Untersuchungen über hyperkomplexe Zahlen. Dem englischen Mathematiker W. R. Hamilton verdanken wir ein Zahlensystem, das der Quaternionen, welches allerdings dem Prinzip der Permanenz nicht mehr entspricht und nur in einem Grenzfalle sich demselben wieder unterordnet, aber vielleicht zum erstenmale die Möglichkeit rein begrifflicher Zahlenschöpfungen und deren Nützlichkeit dokumentierte. Die eigentliche Frage jedoch,

1) Eine andere ebenfalls geometrische Herleitung des Rechnens mit den komplexen Zahlen, welche die Einzigartigkeit derselben beweisen sollte, gab Drobisch (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 2, p. 171); für die elementare Begründung ist sie, abgesehen von anderen Erwägungen, unbrauchbar.

2) Schon die Erweiterung der Lehre von den Primzahlen durch Gauß mußte das größte Interesse erregen. Eine Primzahl p von der Form $4n + 1$ läßt sich, da sie nach Fermat von der Form $a^2 + b^2$ ist, in die komplexen Factoren $a + ib$, $a - ib$ zerlegen; dies ist unmöglich bei den Primzahlen der Form $4n + 3$ ($2 = (1 + i)(1 - i)$ ist ein Ausnahmefall). So entsteht der Begriff der komplexen Primzahlen; diese bestehen außer den reellen, zuletzt genannten und der Zahl $1 + i$ aus allen $a + bi$, deren „Norm“ $a^2 + b^2$ Primzahl von der Form $4n + 1$ ist; $1 + 2i$ ist Primzahl, aber $1 + 3i = (1 + i)(2 + i)$.

ob nicht ein höheres als das komplexe Zahlensystem auch dem Prinzip der Permanenz zu genügen imstande sei, war damit nicht beantwortet. Nachdem bereits Hankel¹⁾ diese von Gauß angeregte Frage in ihren Grundzügen und zwar in verneinendem Sinne entschieden hatte, zeigten Weierstraß und Dedekind ganz allgemein, daß, wenn die formalen Gesetze der reellen Zahlen bestehen bleiben sollen, welche freilich zu diesem Zwecke noch etwas genauer begrifflich gefaßt werden mußten²⁾, überhaupt eine Erweiterung über das komplexe Gebiet nicht möglich, oder wenigstens überflüssig ist, so daß hiernach das Rechnen mit den komplexen Zahlen einen völlig abgeschlossenen Charakter besitzt.

Eine weit größere Schwierigkeit aber bot die logische Berechtigung der irrationalen Zahlen, die wir in der bisherigen Betrachtung eigentlich schon stillschweigend vorausgesetzt haben.

Die Griechen hatten erkannt, daß das Verhältnis zweier Strecken nicht immer durch eine rationale Zahl oder einen Bruch ausgedrückt

1) H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, p. 107.

2) Siehe Anmerkung 2, S. 36. Von den allgemeinsten Gesichtspunkten aus haben zuerst Weierstraß und Dedekind (Göttinger Nachr. 1884, p. 356; 1885, p. 141; 1887, p. 1) und seitdem noch viele andere Mathematiker die Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten oder hyperkomplexen Zahlensysteme untersucht; man vgl. den Enzyklopädieartikel von E. Study, Bd. I, Teil 1, p. 146.

Setzt man bei zwei Einheiten die kommutative, assoziative und distributive Eigenschaft der Multiplikation und die Existenz eines Moduls e derselben voraus, derart, daß für jede Zahl a $ea = ae$, so gibt es noch drei wesentlich verschiedene Rechnungsarten. Aber nur eine derselben hat die Eigenschaft, daß das Produkt nur vermöge seiner Faktoren verschwindet, dies ist das System der gemeinen komplexen Zahlen. Systeme ohne einen solchen Modul sind zuerst von E. Study (Gött. Nachr. 1889, p. 239) behandelt (Stolz u. Gmeiner, Th. Arithmetik II, p. 286).

Komplexe Zahlen mit $n > 2$ Einheiten, die Hamilton schon erwähnt (Vorrede zu den Lectures of Quaternions, 1853), welche den acht bei Stolz und Gmeiner (a. a. O. II p. 294–308) aufgestellten Permanenzgesetzen entsprechen, lassen dagegen nie eine kommutative Multiplikation zu. Läßt man dort die Bedingung für das Verschwinden des Produkts fallen, so existiert nur noch das System der Hamiltonschen Quaternionen (Frobenius, Journ. f. Math. 84, p. 59; Berlin. Ak. Ber. 1896, p. 601); hieraus erhellt die einzigartige Stellung der Quaternionen.

werden kann. Es kann sein, daß zwei Strecken durch ein und dieselbe Längeneinheit genau meßbar sind, welche etwa a mal in der ersten, b mal in der zweiten enthalten ist: $a : b$ heißt dann das Verhältnis der beiden kommensurablen Strecken. Der pythagoreischen Schule wird schon die Erkenntnis zugeschrieben, daß z. B. die Diagonale und die Seite eines Quadrates niemals als ganze Vielfache ein und derselben Längeneinheit ausdrückbar, d. h. inkommensurabel sind. Anstatt nun, wie es uns weit natürlicher scheint, den Zahlbegriff zu verallgemeinern, sahen sie von seiner Anwendung auf die Geometrie ab, und suchten durch eine allerdings höchst scharfsinnige Methode, die der Proportionen oder Verhältnisse, die Geometrie selbständig auszubilden. Daß es Zahlenoperationen gibt, die als Forderungen angesehen, durch keine rationale Zahl erfüllt werden können, ist jedem bekannt: die Quadratwurzel aus jeder rationalen Zahl, die nicht selbst ein Quadrat ist, ist eine solche. Nun würde es ja möglich sein, jedes dieser neuen Zahlzeichen für sich den Regeln der Permanenz zu unterwerfen und so den Schematismus des Rechnens wiederherzustellen, aber durch dies Verfahren würde man niemals zu einer Einsicht über die Berechtigung aller denkbaren Irrationalzahlen kommen.

Die Veranlassung zur Bildung der Irrationalzahlen liegt vielmehr in der Auffassung von der Kontinuität der Größen¹⁾, im einfachsten Falle also der geradlinigen Strecke, welche durch Zahlen beschrieben werden mußte, wenn man nicht darauf verzichten wollte, mathematisch das Wesen der Vorgänge in der Natur, denen die Stetigkeit zuzukommen scheint, zu erfassen.²⁾

Dedekind gebührt das Verdienst die hier vorliegende Schwierig-

1) Vgl. F. Klein, Math. Ann. 37, p. 572: „Sicher liegt die Veranlassung zur Bildung der Irrationalzahlen in der scheinbaren Stetigkeit der Rauman anschauung. Ich kann aber, da ich der Rauman anschauung keine Genauigkeit beilege, ihr auch nicht die Existenz des Irrationalen entnehmen wollen. Vielmehr ist die Theorie des Irrationalen etwas, was in rein arithmetischer Weise zu begründen oder zu umgrenzen ist, und was wir dann dank den Axiomen in die Geometrie hineinbringen, um auch in ihr diejenige Schärfe der Distinktionen zu erreichen, welche die Vorbedingung der mathematischen Behandlung ist.“

2) Daß die Differentialrechnung die irrationalen Werte der unabhängigen Variablen nicht entbehren kann, geht aus dem Begriff des z. B. vorwärts genommenen Differentialquotienten hervor, welcher erfordert, daß der Ausdruck

keit zuerst in wahrhaft philosophischer Weise überwunden zu haben. Er ging dabei von der Ansicht aus, das Wesen der Stetigkeit der Geraden zu beschreiben, und fand dasselbe am 24. November 1858 in der folgenden Eigenschaft:¹⁾

Zerfallen alle Punkte einer Geraden in zwei Klassen, derart daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, der diese Zerteilung, diesen Schnitt hervorbringt.

Und nun sagen wir weiter: Zerfallen alle rationalen Zahlen in zwei Klassen, derart, daß jede Zahl der ersten Klasse kleiner ist als jede Zahl der zweiten Klasse, und existiert immer ein und nur ein Zahlzeichen, welches diese Zerfällung hervorbringt, so bilden die Zahlen eine stetige Mannigfaltigkeit.

Bei einer solchen Zerfällung können nun vier Fälle auftreten:

1. Unter den Zahlen der ersten Klasse befindet sich eine größte a , unter denen der zweiten eine kleinste b . Dieser Fall scheidet als unmöglich aus, denn $\frac{1}{2}(a + b)$ wäre eine rationale Zahl, die gegen die Voraussetzung weder zur ersten noch zur zweiten Klasse gehört.
2. Unter den Zahlen der ersten Klasse befindet sich eine größte a , unter denen der zweiten keine kleinste; dann ist a die rationale Zahl, die den Schnitt hervorbringt.
3. Unter den Zahlen der ersten Klasse befindet sich keine größte, dagegen unter denen der zweiten eine kleinste; dann bringt b diesen Schnitt hervor.
4. Unter den Zahlen der ersten Klasse befindet sich keine größte, unter denen der zweiten keine kleinste; dann gibt es keine rationale Zahl, die diesen Schnitt hervorbringt. Wir müssen

$$\frac{f(x+h) - fx}{h}, \text{ } h \text{ positiv,}$$

auf welche Weise auch die h eine gegen Null konvergierende Zahlenreihe durchlaufen, sich einer einzigen bestimmten Grenze nähert. Daß aber auch sonst die Menge der irrationalen Werte der unabhängigen Variablen eine wesentliche Rolle in den Grundlagen der Differential- und Integralrechnung spielt, zeigt z. B. die Arbeit von L. Scheeffer, Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen, Acta math. V, p. 183 u. 279.

1) R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, 2. Aufl. Braunschweig 1892.

ihm also ein Zahlzeichen als eine neue Schöpfung zuweisen, und ebenso oft, wie dies geschehen kann, entstehen nun neue nicht mehr rationale Zahlbegriffe, d. h. irrationale Zahlen.

Jetzt handelt es sich nur darum zu zeigen, wie mit diesen neuen Zahlzeichen gerechnet werden kann. Dazu gehört der Nachweis, daß diese neuen Zeichen unter sich und den rationalen Zahlen gegenüber als in dem Verhältnis der Gleichheit, sowie des Größer- oder Kleinerseins stehend definierbar sind, und daß die gewöhnlichen Regeln der Arithmetik auf sie anwendbar bleiben. Gelingt dies, so haben wir es erreicht, ein stetiges Zahlensystem einzuführen. In der Tat beweist Dedekind den folgenden Satz: Zerfällt das so erweiterte System der reellen Zahlen in zwei Klassen derart, daß jede Zahl der ersten Klasse kleiner ist als jede Zahl der zweiten Klasse, so existiert eine und nur eine Zahl, welche diesen Schnitt hervorbringt.

Selbstverständlich ist es unmöglich, die neuen Zahlzeichen irgendwie mit Hilfe der rationalen Zahlen exakt auszudrücken. An und für sich ist dies aber auch in der reinen Mathematik nicht erforderlich, denn hier genügt die begriffliche Einführung vollständig. Führt man aber in Rücksicht auf die Anwendungen den Ausdruck ein: Zwei Zahlzeichen nähern sich einander bis auf den Grad ϵ , wenn ihr absoluter Unterschied kleiner als $10^{-\epsilon}$ ist, dann kann man die Irrationalzahlen angenähert und zwar mit beliebig großem aber immer nur endlichem Grade der Annäherung durch Dezimalbrüche ersetzen.¹⁾

1) Der Praktiker, welcher nur die Resultate der mathematischen Untersuchungen zu seinen Zwecken verwendet, benutzt daher niemals irrationale Zahlen, sondern immer nur solche angenäherten Werte derselben, die eine hinreichende Genauigkeit verbürgen, während die reine Mathematik eine weit über die Bedürfnisse des wirklichen Lebens hinausgehende absolute Genauigkeit gerade durch die Einführung der irrationalen Zahlen erreicht. Hier zeigt sich der tiefgreifende Unterschied zwischen der Präzisions- und Approximationsmathematik, den F. Klein so geistvoll in seiner Vorlesung, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien, Leipzig, Teubner 1902, behandelt hat, den speziell in bezug auf die hier vorliegenden Fragen auch H. Burkhardt in seiner Antrittsrede, Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken 1897 (Jahresber. d. Deutsch. Math.-Verein 11, p. 49, 1902) erläutert. Auf den ersten Blick könnte es sogar scheinen, als ob diese absolute

Hiermit schwinden auch die Bedenken, welche noch in neuerer Zeit gegen diese Darstellung sowie verwandte Auffassungen erhoben sind.¹⁾

Diese letzteren gehen vom Begriff des Grenzwertes aus²⁾, der

Genauigkeit, welche die reine Mathematik fordert und fordern muß, in bezug auf ihre Anwendungsgebiete nur der einmal hergebrachten Gewöhnung an die ideale Abstraktion zu Liebe eingeführt sei, und vielleicht ebenso zweckmäßig durch einen den Bedürfnissen der Praxis bequemer angepaßten Approximationskalkül ersetzt werden könne. Man überzeugt sich jedoch leicht, daß nur auf dem von der reinen Wissenschaft eingeschlagenen Wege die Grundlagen einer für jeden speziellen Fall mit Sicherheit ausreichenden Approximation gelegt werden können.

1) E. Illigens (Math. Ann. 33, p. 155, desgl. 35, p. 452) hatte gegen die modernen Theorien der Irrationalzahlen den Einwand erhoben, der von der schon im Texte bezeichneten unhaltbaren Ansicht ausgeht, daß der Zahlbegriff auch bei seiner Erweiterung notwendig immer ein „wie viel“ von Dingen bezeichnen müsse. Dem gegenüber bemerkt A. Pringsheim (Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht, Deutsche Math.-Verein., Bd. 6, p. 78) „will man zu einem brauchbaren allgemeinen Zahlbegriff gelangen, so muß man 1. alle möglichen als Zahlen bezeichneten Objekte, 2. die zwischen ihnen bestehenden sogenannten Größenbeziehungen unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt bringen.“ Das erste wird indessen durch den von E. Heine (Elemente der Funktionslehre, Journ. f. Math., Bd. 74 [1874] p. 173) eingenommenen Standpunkt erreicht: „Ich nenne gewisse greifbare Zeichen Zahlen, so daß die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht.“ Diese Äußerung ist vielfach dahin mißverstanden, als sei es hinreichend, irgendein „Zeichen“ auf das Papier zu machen. Nicht auf „greifbare Existenz“ in diesem Sinne kommt es an, sondern auf die begriffliche funktionelle Bedeutung des Zeichens, die eben durch dasselbe unzweideutig überall wieder erkennbar in unserem Geiste festgelegt wird, und eben wegen dieser absoluten Bestimmtheit so charakteristisch für jede mathematische Darstellung wird. Das geeignete Mittel zur Lösung der zweiten Aufgabe sieht Pringsheim darin, „daß man die Beziehungen „größer und kleiner“ im allgemeinen lediglich als Ausdruck einer bestimmten Sukzession betrachtet: nur in besonderen, ausdrücklich dafür qualifizierten Fällen dienen sie im Sinne des gewöhnlichen Sprachgebrauches dazu, durch Zählung oder Messung feststellbare Quantitätsverschiedenheiten anzuzeigen.“ In der Tat hat schon die Behauptung $3 > -5$ mit Quantitätsvorstellungen nicht das geringste gemein, sondern bedeutet nur die Ordnungsbeziehung.

2) Im Altertum ersetzte man den Begriff des Grenzwertes durch die sogenannte dem Eudoxus zugeschriebene Exhaustionsmethode (nach M. Cantor, Bd. II, p. 818 stammt das Wort von Gregorius a S.

ebenfalls vollständig aufzuklären war. Bei der Ausbildung der Leibnizschen Infinitesimalrechnung stellte sich die Schwierigkeit heraus, von den unendlich kleinen Größen eine logisch befriedigende Vorstellung zu gewinnen. Der eine erklärt sie für Nullen schlechtweg¹⁾, andere bildeten sich die mystische Vorstellung von Größen, die, kleiner als jede vorstellbare, dennoch den Keim zur Entstehung der endlichen Quantität enthalten sollten.²⁾ Erst d'Alembert drang wieder auf die Einführung des Grenzbegriffs; zum Fundament der Infinitesimalrechnung hat ihn aber erst Cauchy erhoben, obwohl auch nach ihm noch manche weitere Arbeit nötig war.

Als eine evidente Wahrheit erscheint der naiven Überlegung die Behauptung, eine Strecke, die beständig wächst und doch nie eine gegebene Strecke übertrifft, müsse einen größten Betrag erreichen, der ihre Grenze heißt. Dieses Prinzip können wir daher auch auf den Zahlbegriff anwenden, dessen Individuen ja der kontinuierlichen Strecke

Vincentio 1647). Dieselbe stützt sich auf das Axiom des Eudoxus: „das n -fache irgendeiner gegebenen Größe wird bei genügend großem n jede vorgegebene gleichartige Größe übertreffen.“ Soll nun durch einen apagogischen Beweis gezeigt werden, daß $A = B$ ist, so nehme man an, daß $A > B$. Läßt sich dann zeigen, daß $A - B$ kleiner ist als jede noch so kleine, aber bestimmte, gleichartige Größe, z. B. C/n , so ist $n(A - B) < C$, was dem Axiom widerspricht. — John Wallis hat den arithmetischen Begriff der Grenze geschaffen (Opera I, p. 382), indem er die sukzessiven Werte eines Bruches aufsucht, von denen er behauptet: *Facto enim experimento patefit rationes inductione repertae ad has continue propius accedere, ita ut differentia evadat quovis assignabili minor, adeoque in infinitum continuata evanescere* (Cantor, Bd. II, p. 823).

1) Euler äußert sich verschieden über den Differentialbegriff. In der Vorrede zu den *Inst. calculi integralis* 1755 sagt er p. XIV: „Hic autem limes, qui quasi rationum ultimarum incrementum constituit, verum est objectum calculi differentialis“, vorher aber p. X u. XI: „quod nihilum jam hic litera w exhibitur, id in calculo differentiali, quia ut incrementum quantitatis x spectatur, signo dx repraesentari ejusque differentiale vocari solet.“

2) Poisson, *traité de mécanique*, Übers. von M. Stern, Berlin 1833, I, p. 12, behauptet: die unendlich kleinen Größen sind daher in Wirklichkeit vorhanden (ont une existence réelle) und nicht ein bloßes Hilfsmittel, das die Mathematiker erdacht haben. Die hieran geknüpften Kritik von Stern a. a. O., p. 558 erscheint auch jetzt noch zutreffend.

zugeordnet sein sollen. Versucht man nun diese anschauungsmäßige Wahrheit exakt auszudrücken, so ergibt sich die folgende Definition:

Bezeichnet man mit $a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots$ eine nicht abbrechende Reihe von aufeinander folgenden Werten einer veränderlichen Zahl x , und existiert eine Zahl A von der Beschaffenheit

$$|a_n - A| < \epsilon$$

sobald $n > N$ ist, (wobei ϵ eine beliebig klein vorgegebene rationale Zahl bedeutet), so heißt A der Grenzwert¹⁾ der Zahl x . Diese Definition hat noch die Unbequemlichkeit, daß man die Zahl A schon kennen muß; Cauchy sprach sie daher (ohne dies allerdings vielleicht völlig zu rechtfertigen) in der folgenden, jetzt unter dem Namen des Konvergenzprinzipes²⁾ bekannten Form aus:

Hat eine nicht abbrechende Reihe von Zahlen $a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots$ die Eigenschaft, daß

$$|a_{n+m} - a_n| < \epsilon$$

für jedes noch so große m wird, falls nur $n > N$ ist, so hat die Reihe der a einen Grenzwert.

Ist so der Begriff der Grenze definiert, so eröffnet sich eine neue Theorie der irrationalen Zahlen, welche der Dedekindschen gegenüber einige Vorteile zu haben scheinen könnte. Denn man wird einerseits zugeben müssen, daß bei den meisten Fragen die Zahlen nicht als Schnitte auftreten, sondern jedesmal eine besondere Überlegung nötig sein wird, um sie als solche zu erkennen; andererseits knüpft die Dedekindsche Betrachtung allerdings nur dem äußeren Anschein

1) Diesen entscheidenden Schritt hat zuerst Cauchy getan (*Résumé des leçons données à l'école Polytechnique*, Paris 1823, p. 81). Indessen ist zu bemerken, daß B. Bolzano bereits 1817 die Stetigkeit einer Funktion in der heute gebräuchlichen Weise, also früher wie Cauchy im *Cours d'analyse* 1821, und das Konvergenzprinzip ausgesprochen hat, freilich ohne dasselbe streng zu beweisen, vgl. Ostwalds Klassiker, Nr. 153, p. 41, herausgegeben von Ph. Jourdain.

2) Der Beweis für das Konvergenzprinzip im Anschluß an den Dedekindschen Ideengang bei Tannery (*Introduction à la théorie des fonctions*, 1. éd., p. 28), noch eingehender bei H. Burkhardt, *Algebraische Analysis*, Leipzig 1903, p. 73. Man vergleiche auch den Beweis bei C. Jordan, *cours d'analyse*, éd. 3, Bd. I, p. 9 und E. Cesàro, *Algebraische Analysis*, herausg. von G. Kowalewski, Leipzig 1904, p. 88 und G. Kowalewski, *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung*, Leipzig 1909, p. 33.

nach an die Rauman anschauung an. Im Gegensatze dazu kann man die Theorien von Heine, Cantor und Méray als rein arithmetische bezeichnen.¹⁾ Bei diesen betrachtet man Reihen von rationalen Zahlen, welche nach dem Konvergenzprinzip einen Grenzwert besitzen. Dieser kann eine rationale Zahl sein; ist er das nicht, so muß man einer solchen Reihe ein neues irrationales Zahlzeichen zuordnen. Auch hier läßt sich dann zeigen, wie mit diesen Zeichen nach den Gesetzen der Permanenz gerechnet werden kann.²⁾

1) Über eine dritte, rein arithmetische Theorie der Irrationalzahlen, nämlich die von Weierstraß in seinen Vorlesungen entwickelte, sind wir ganz neuerdings durch die Schrift von V. v. Dantscher, Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen, Leipzig u. Berlin, 1908, genauer unterrichtet.

2) Mit dem Zahlbegriff hat sich G. F. Lipps eingehend beschäftigt (Wundt, Phil. Studien, Bd. 11 und 14) und eine Zusammenfassung seiner Ergebnisse in der Schrift Mythenbildung und Erkenntnis, Leipzig 1908, p. 100 – 154 gegeben. Die Ansichten des kenntnisreichen Verfassers, dessen Betrachtungen im Kap. V, p. 100 ff. jeder mit Interesse verfolgen wird, weichen von denen der führenden Mathematiker erheblich ab. Auf p. 124 heißt es „wohl aber glaubt der Mensch in seinem Denken ein schöpferisches Vermögen zu besitzen, durch das er die verschiedenen Zahlformen willkürlich hervorbringen könne, wenn er nur die Produkte seines Geistes von Widersprüchen freihalte. Uns steht indessen eine derartige schöpferische Verstandeskraft nicht zur Verfügung.“ Dieser Ansicht, welche die Theorien von Dedekind und anderen als eine psychologische Täuschung zu bezeichnen scheint, ist entgegenzuhalten, daß die Mathematik, um die Schärfe ihrer Begriffe zu erreichen, von jeder psychologischen Entwicklung derselben absieht und sie lediglich hinsichtlich ihrer notwendigen Merkmale definiert. Ob die Art und Weise wie Lipps die negativen und imaginären Zahlen durch das Prinzip eines zwei- und viergliederigen Gegensatzes einführt, bei den Mathematikern Anklang finden wird, scheint mir mindestens sehr zweifelhaft.

Das ohne eine ernsthaft zu nehmende Begründung ausgesprochene Verdammungsurteil über die Algebra der Logik p. 154 wird man ebenfalls nicht zu billigen geneigt sein, desgleichen die Ansicht, daß aus ± 1 , $\pm i$, und dem Begriff von „Außen und Innen“ die Dreidimensionalität des Raumes folge, p. 196. Das im ganzen eine ähnliche Tendenz verfolgende, nämlich von der Bildung fundamentaler Reihen ausgehende Werk von P. Natorp, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, Leipzig 1910, enthält im Kap. 3, „Zahl und Rechnung“ ebenfalls viele für den Mathematiker interessante Betrachtungen, insbesondere auch in den kritischen Anmerkungen, p. 109, 140, 154 (weiter

Für die ein-eindeutige Beziehung der reellen Zahlen zur kontinuierlichen Strecke entsteht aber bei allen diesen Theorien eine Schwierigkeit, auf die G. Cantor schon frühe¹⁾ aufmerksam gemacht hat. Geht man von der arithmetischen Definition der irrationalen Zahlen aus, so kann man wohl mit Hilfe der Größenvorstellungen, die

auch p. 172 ff.). Manchem wird derselbe freilich auch widersprechen müssen. So heißt es z. B. p. 187 „Stetigkeit kann so wenig angeschaut wie empfunden werden, sie kann nur gedacht werden, da sie nichts anderes als das letzte Grundgesetz des Denkens selbst bloßlegt und zum wissenschaftlich genauen Ausdruck bringt“ oder p. 188 „Stetigkeit ist qualitative Allheit, als Ursprungseinheit“. Noch weniger wird dies der Fall sein, wo der Verfasser auf die Infinitesimalrechnung eingeht. Da wird z. B. p. 216 gesagt, der Differentialquotient sei eine endliche, für jeden Punkt konstante Größe; p. 219 wird mit H. Cohen das Infinitesimalverfahren als erlösende Antwort für die Bedeutung des Denkens als Erzeugung des Seins proklamiert. Wie nun, wenn gar kein Differentialquotient existiert, und doch ein „Sein“ hervorgehen soll? Ebenso willkürlich muß es erscheinen, wenn im Kap. V die Zahlenreihe, welche der Verfasser von vornherein als vor- und rückwärts beliebig fortgesetzt denkt (was Lipps, Weltanschauung und Bildungsideal, Leipzig 1911, p. 213, als unmöglich bezeichnet), da sie eine einzigartig bestimmte Funktion des Geistes sei, als gerade Linie interpretiert, und von hier aus den Weg zur Geometrie mit ihren „Richtungen und Dimensionen“, wohl im Anschluß an Veronese und Russell sucht. Wenn schon hier alogische Momente unbemerkt untergeschoben zu werden scheinen, so verliert sich nun die Darstellung immer mehr in Willkürlichkeiten, so z. B. p. 241 bei der Betrachtung der komplexen Zahlen.

Aber es ist vielleicht ungerecht, einzelne Ausstellungen an auf so umfassenden Kenntnissen beruhenden Werken, wie die von Lipps und Natorp, zu machen. Man darf wohl erwarten, daß eine so ernste philosophische Kritik, wie sie hier vorliegt, dazu beitragen werde, die Kluft, welche noch immer zwischen der philosophischen Terminologie, die immer der Gefahr unterliegen kann, in bloße Phraseologie sich zu verlieren, und der rein mathematischen Begriffsbildung besteht, zu schließen.

1) G. Cantor, Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Ann. 5, 1871, p. 128. Siehe ferner die ausführliche Besprechung dieser Frage in der Enzyklopädie III A, B, 1, p. 35 ff. durch F. Enriques. Auf die Frage, ob das Dedekindsche Axiom von der einzigartigen Existenz der Irrationalzahl notwendig ist, oder ob nicht noch andere (Veronesesche oder Hilbertsche) Zahlen sich widerspruchlos einschalten lassen, kann hier nicht eingegangen werden.

aus dem Begriff kongruenter Strecken und dem gleich zu erwähnenden Axiom des Eudoxus entspringen, zeigen, daß zu jeder Strecke eine rationale oder irrationale Zahl gehört. Daß aber auch umgekehrt jeder irrationalen Zahl eine ganz bestimmte Strecke entspricht, folgt daraus noch nicht. Denn die arithmetischen Darstellungen der irrationalen Zahlen lassen sich in ihrer Totalität nicht übersehen und noch viel weniger mit der räumlichen Auffassung in Beziehung setzen. Das letztere muß daher als ein Axiom angesehen werden, durch welches erst die umkehrbar eindeutige Zuordnung der Punkte der Geraden zu den reellen Zahlen und damit, die Anwendung der letzteren auf Geometrie und Mechanik möglich gemacht wird. Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse, wenn man die Dedekindsche Theorie, wie es sein muß, als eine ganz von der räumlichen Vorstellung losgelöste¹⁾ betrachtet.

1) In einer sehr eingehenden Weise hat O. Hölder (die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß, Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wissenschaften, Bd. 53, 1901, p. 1) den Zusammenhang der Größenlehre mit der Theorie der reellen Zahlen begründet. Er legt der Untersuchung der meßbaren Größen die folgenden Axiome zugrunde:

1. Je zwei Größen a, b stehen in einer der Beziehungen $a \geq b$.
2. Zu jeder Größe gibt es eine kleinere.
3. Die Summe $a + b$ ist bei gegebener Reihenfolge der Summanden eindeutig bestimmt.
4. $a + b$ ist sowohl $> a$ als $> b$.
5. Ist $a < b$, so gibt es Größen x und y , welche der Bedingung $a + x = b, y + a = b$ genügen.
6. Es ist $a + (b + c) = (a + b) + c$, und
7. das dem Dedekindschen Stetigkeitsaxiom nachgebildete: Wenn alle Größen in zwei Klassen so eingeteilt sind, daß jede Größe einer und nur einer Klasse zugewiesen ist, daß jede Klasse Größen enthält, und jede Größe der ersten Klasse kleiner ist als jede der zweiten, so existiert eine Größe ξ derart, daß jedes $\xi' < \xi$ zur ersten, und jedes $\xi'' > \xi$ zur zweiten Klasse gehört.

Aus diesen Axiomen läßt sich nun herleiten:

1. Das Archimedische Axiom: Ist $a < b$, so gibt es eine ganze positive Zahl n der Art, daß $na > b$ ist, a. a. O., p. 10.
2. Die kommutative Eigenschaft der Addition der Größen, $a + b = b + a$, daselbst p. 13.
3. Zu jedem Größenverhältnisse, d. h. zu je zwei Größen, die in einer bestimmten Ordnung gegeben sind, gehört eine bestimmte Zahl im allgemeinen Sinne des Wortes p. 23, und endlich:

Aber damit ist die Erweiterung des Zahlbegriffes an sich noch längst nicht abgeschlossen. Schon die vielseitigen Resultate, welche Hamilton mittels der Quaternionen¹⁾ erhielt, zeigen die Fruchtbarkeit von

4. Es gibt eine GröÙe ξ , welche in Beziehung auf eine beliebig gegebene Einheit durch eine beliebig gegebene Zahl ausgedrückt wird, d. h. sie zur Maßzahl hat, p. 32.

Durch diese Sätze ist die vollständige Beziehung der Zahl zur Größenlehre, wie sie für die Anwendungen erforderlich ist, erreicht.

1) W. R. Hamiltons Quaternionen (1843), schon 1819/20 von Gauß aufgestellt (Göttinger Nachr., math. phys. Klasse 1898, p. 8), einst „sanctioned as a subject of public and repeated examination in the Dublin University“ (H. Hankel, a. a. O., p. 125) sind trotz ihres großen prinzipiellen Interesses und der ausgedehnten Anwendungen, die ihr Erfinder selbst auf die mannigfaltigsten Probleme der Geometrie und Mathematik gegeben hat, zu einer allgemeineren Verbreitung nicht gelangt. Dagegen hat sich aus der Quaternionenrechnung, d. h. der Arithmetik der Zahlen $a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$, deren Einheiten den Multiplikationsgesetzen

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k; jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

unterworfen sind, und den Ideen H. G. Graßmanns die Symbolik der Vektorenrechnung herausgebildet, welche zwei wesentliche Multiplikationsgesetze verwendet. Das innere Produkt zweier Vektoren

$$ia_1 + ja_2 + ka_3, ib_1 + jb_2 + kb_3$$

wird nach den Regeln

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1, ij = ji = 0, jk = kj = 0, ki = ik = 0$$

durch den Ausdruck

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

das Vektor-Produkt mittels der Regeln

$$i^2 = j^2 = k^2 = 0, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

— diese beiden Bestandteile treten übrigens in charakteristischer Weise auch in der Multiplikation der Quaternionen hervor — dargestellt. Durch Maxwells geniale Divinationsgabe, der es gelang, die Formeln der Elektrodynamik mit Hilfe des Vektorbegriffes in einer vollständig symmetrischen Weise aufzubauen, ist die Vektorenrechnung gegen-

Zahlzeichen, deren Verknüpfungsgesetze gar nicht mehr dem Gesetze der Permanenz genügen, sondern ihre Berechtigung lediglich ihrer logisch widerspruchsfreien Definition verdanken. Graßmann hat sich das große Verdienst erworben, in seiner Ausdehnungslehre entwickelt zu haben, welchen Nutzen der Gebrauch von Zahlen mit beliebig vielen Einheiten für die systematische Ausbildung aller der Fragen hat, auf denen überhaupt die Anwendung der Arithmetik auf Geometrie und Mechanik beruht.

Eine bestimmt gegebene reelle Zahl wird, wenn sie auch noch so klein ist, immer jede andere gegebene übertreffen, wenn man sie nur hinreichend oft vervielfältigt. Als Tatsache unserer Anschauung glauben wir dies auch von den Größen behaupten zu können; wie fein das Verständnis der Alten für derartige Fragen war, ersehen wir daraus, daß schon Eudoxus von Cnidus und Archimedes dies als ein unbeweisbares Axiom der Größenlehre ansahen. Wir sagen, ein im modernen Sinne stetiges (lineares) Größensystem genügt dem Lemma des Eudoxus oder Archimedes. Aber schon unsere gewöhnlichen komplexen Zahlen ordnen sich diesem Größenbegriff nicht mehr unter.¹⁾ Und Hilbert hat in seinen Untersuchungen der Grundlagen der Geometrie reelle Zahlbegriffe eingeführt und mit ganz besonderem Er-

wärtig für die mathematische Physik unentbehrlich, und zwar nicht allein als bloßes Hilfsmittel, welches eine übersichtliche und kurze Darstellung der Formeln ermöglicht. Aber auch die rationelle Mechanik erlangt (man vgl. z. B. das bekannte Werk von Föppl) infolge der Unabhängigkeit der Darstellung vom Koordinatensystem eine weit größere Durchsichtigkeit, wenn auch zuzugeben ist, daß bei der speziellen Durchführung eines Problems in den meisten Fällen das Zurückgehen auf die gewöhnlichen Koordinaten sich als zweckmäßig erweist. Man vgl. außer der Vector Analysis von W. Gibbs, ed. by. E. B. Wilson, New-York 1902, die Vorlesungen über Vektorenrechnung von E. Jahnke, Leipzig 1905 und die dort gegebene Literatur.

1) Man nennt nach J. Thomae (Abriß einer Theorie der komplexen Funktionen, 1870, p. 41) $a + bi \geq c + di$, wenn $a \geq c$, und falls $a = c$, wenn $b \geq d$ ist; eine komplexe Zahl, welche ≥ 0 ist, heißt positiv oder negativ. Diese Definitionen sind mit den allgemeinen Größenbeziehungen (vgl. z. B. Stolz u. Gmeiner, Theor. Arithmetik II, Leipzig 1902, p. 99 ff., im Einklang; aber das Lemma des Eudoxus ist nicht mehr erfüllt. Denn die Zahl b^2i ist kleiner als $c^2 + di$ und dasselbe gilt auch von nb^2i , wo n jede noch so große positive ganze Zahl sein kann.

folge verwandt, für die dasselbe gilt.¹⁾ Einen ähnlichen Charakter besitzen auch die von P. Du Bois-Reymond eingeführten „Unendlich der reellen Funktionen“²⁾ sowie die Zahlzeichen mit ihren besonderen Verknüpfungsgesetzen, welche z. B. die Algebra der Logik verwendet.

Der Begriff der Funktion³⁾ hatte sich allmählich in der folgenden Form ausgeprägt; y heißt eine Funktion von x in dem Intervall $x = a$ bis $x = b$, wenn zu jedem Werte von x innerhalb desselben ein oder auch einige bestimmte y gehören. Daß nun dieser Begriff bei seiner Fortentwicklung einen so unermeßlich reichen Inhalt gewinnt,

1) Hilbert betrachtet den Bereich derjenigen eindeutigen und reellen Funktionen von t (Grundlagen, 2. Aufl., p. 22), welche aus t durch die 5 Rechnungsarten der 4 Spezies und der Operation $+ \sqrt{1 + \omega^2}$ entspringen, wobei ω bereits durch jene Operationen entstanden ist. Sieht man diese Funktionen, deren jede für hinreichend große Werte von t ein bestimmtes Zeichen hat, als eine Art komplexer Zahlen a, b an, so heißt $a > b$, wenn $a - b$ als Funktion von t für hinreichend große t positiv ist. Unter diesen Voraussetzungen ist nun für jedes positive ganze n und die positive Zahl α die Zahl $n\alpha - t$ gewiß negativ, d. h. $n\alpha$ kleiner wie die positive Zahl t ; man vgl. auch die weiteren Ausführungen in den Grundlagen § 33, sowie Anhang II, p. 95, und die Bemerkungen Poincarés (Bull. des Sc. Mathém., Bd. 37, 1902, p. 259).

2) Siehe O. Stolz, Zur Geometrie der Alten, Math. Ann. 22, p. 506.

3) Bei Leibniz scheint zuerst das Wort function vorzukommen (Act. erudit. 1692, p. 168 ff.; vgl. auch 1694, p. 316. Joh. Bernoulli sagt 1718 (Mém. de l'acad. de Paris 1718, p. 106, Opera II, p. 241) „on appelle ici fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes“. Von P. G. Dirichlet (Dove, Repertorium d. Physik 1837, Werke, Bd. I, p. 133) stammt der moderne Funktionsbegriff, der sich indes auch schon bei F. Lacroix — in dessen großem Traité, Tome I, p. 1, 1810 — findet. Die seitdem oft ausgesprochene Ansicht, die Funktion sei nichts anderes als eine tabellarische Zuordnung (so spricht Dirichlet a. a. O. p. 153 von gesetzlosen Funktionen) ist mit Recht (z. B. von E. Dühring) bekämpft worden. Nur durch eine gesetzmäßige Zuordnung der y zu den x kann der Funktionsbegriff über die Zuordnung zwischen einzelnen bestimmten Werten hinausgehen. Eine Logarithmentabelle liefert erst dann die Darstellung der logarithmischen Funktion, wenn wir sie nach dem begrifflichen Gesetze derselben zu interpolieren vermögen. Andererseits ist der Dirichletsche Funktionsbegriff allgemein genug, um z. B. auch solche Funktionen zu enthalten, die für alle rationalen Werte von x etwa gleich $a + bx$, für alle irrationalen x gleich $c + dx$ sind.

wird auf den ersten Blick schwer begreiflich erscheinen. Hier können wir uns nur auf die Tatsache berufen, daß die Arbeit des ganzen vorigen Jahrhunderts der Ausbildung dieses Begriffes, der mit unseren Kausalitätsideen in engster Verbindung steht, gewidmet gewesen ist, und daß man auch wohl in Zukunft in ihm immer den Angelpunkt aller mathematischen Untersuchungen erblicken wird. Indessen lassen sich die ihn betreffenden Fragen doch vielleicht etwas weiter andeuten.

1. Es ist das Gesetz der Abhängigkeit des y von dem x durch eine allgemein verständliche elementare arithmetische Vorschrift gegeben. Dann handelt es sich im wesentlichen um die Eigenschaften der zugehörigen Kurve $y=f(x)$; derartige Fragen bilden den Gegenstand der Differentialgeometrie.
2. Es ist überhaupt nur eine Vorschrift gegeben, nach welcher sich entscheiden läßt, welches y zu jedem angenommenen x gehört. Alsdann haben wir zunächst danach zu fragen, wo die Funktion stetig ist und wo sie es nicht ist, ob sie da, wo sie sich stetig verhält, differentiierbar, wohl gar wiederholt differentiierbar ist.

Als eine erste Untergruppe kann man dann diejenigen Funktionen hervorheben, die unbeschränkt, d. h. beliebig oft differentiierbar sind. Für solche Funktionen kann ein grundlegender Satz, die Taylorsche Reihe, gültig sein¹⁾, welche den Funktionswert in einem bestimmten Intervall, dem Konvergenzgebiet, durch eine sogenannte Potenzreihe darstellt, falls man an einer Stelle desselben den Funktionswert nebst seinen sämtlichen Ableitungen kennt. Ist dies der Fall, so kann man sagen, die Funktion sei in jenem Konvergenzgebiet durch einen analytischen Ausdruck dargestellt.

1) Eine durch eine Potenzreihe darstellbare Funktion hat innerhalb ihres Konvergenzbereiches Differentialquotienten jeder Ordnung n , (die allerdings mit n über jeden Betrag wachsen können). Umgekehrt wird aber eine Funktion, der diese Eigenschaft zukommt, noch nicht durch die Taylorsche Reihe darstellbar sein. Hierzu ist vielmehr erforderlich, daß das Restglied des Taylorschen Satzes mit wachsendem n gegen Null konvergiert. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen die Ableitungen der Funktion in dem betreffenden Intervall genügen müssen, sind zuerst von A. Pringsheim (Math. Ann. 44, 1894, p. 68) angegeben.

Bei einer zweiten Gruppe, den sogenannten willkürlichen Funktionen einer stetigen Variablen x , für die weder Stetigkeit noch Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird, versagt natürlich diese analytische Darstellung völlig. Aber die geschichtliche Entwicklung hat gezeigt, daß eine große Klasse dieser „willkürlichen Funktionen“ durch trigonometrische Reihen und andere Hilfsmittel darstellbar wird. Die Untersuchung dieser Fälle, die von Fourier begonnen, durch Dirichlet¹⁾ zuerst auf eine vollkommen sichere Basis gestellt wurde, bildet eines der wichtigsten Kapitel aus der Lehre von den Funktionen einer reellen Variablen, das wir hier nicht weiter in seinen Einzelheiten, insbesondere auch nicht bis an die Grenzen seiner Erweiterung verfolgen können.

Wenn man indessen bedenkt, welche außerordentliche Bereicherung die Arithmetik durch den Begriff der komplexen Zahl erhalten hat, so war natürlich zu erwarten, daß mit der Einführung der komplexen Zahlen in den Funktionsbegriff sich ganz neue Gesichtspunkte ergeben mußten. Es ist das außerordentliche Verdienst Cauchys²⁾, diesen Schritt zuerst getan zu haben, indem er an Stelle des ganz trivialen Begriffes, daß

$$\xi + i\eta \text{ von } x + iy$$

abhängig sein soll, den Begriff der analytischen Funktion³⁾ einführt, der darauf hinauskommt, daß

$$f(x + iy)$$

1) Eine Funktion, die in einem endlichen Intervall endlich bleibt und nur eine endliche Zahl von Unterbrechungen der Stetigkeit resp. von Maximis und Minimis besitzt, kann durch eine trigonometrische Reihe hergestellt werden. Unter gewissen Bedingungen darf die Funktion auch unendlich werden, vgl. z. B. É. Picard, *Traité d'Analyse I*, p. 215; erweitert wurden diese Fragen durch O. Hölder, *Zur Theorie der trigonometrischen Reihen*, *Math. Ann.* 24, p. 181.

2) Gauß hat sich (Brief an Bessel, 18. Dez. 1811) schon weit früher mit der Integration im komplexen Gebiet als Quelle der Periodizität beschäftigt; er hat auch schon den Fundamentalsatz $\int f(z) dz = 0$, den Cauchy 1825 im *Mémoire sur les intégrales définies entre des limites imaginaires* aufstellt (M. Simon, *Zur Geschichte der Philosophie der Differentialrechnung*, *Abh. z. Gesch. d. Math.*, Heft 8, Leipzig 1898, p. 115).

3) Cauchy nannte übrigens (*Comptes Rendus* 36, p. 453) die den Stetigkeitsbedingungen samt ihrer Derivierten genügende eindeutige

als Funktion der beiden Variablen x und y betrachtet, d. h. in dem zu betrachtenden Bereich der stetigen Variablen x und y , erste partielle Differentialquotienten nach x und iy besitzt, die für jede Stelle x, y einander gleich sind.

Von nun an tritt die Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen in den Vordergrund. Sie ist hauptsächlich nach zwei Richtungen hin entwickelt worden. Die eine, durch Weierstraß begründete, nimmt ihren Ausgangspunkt von der Tatsache, daß eine Potenzreihe der komplexen Variablen z innerhalb ihres Konvergenzgebietes ein Element einer analytischen Funktion darstellt, daß es aber in vielen Fällen möglich ist, dieses Funktionselement über den anfänglich gegebenen Bereich hinaus auf eine und nur eine Art fortzusetzen. Dadurch entspringt dann ein vollkommen bestimmtes analytisches Gebilde, und dieses bezeichnet man eben als die analytische Funktion, welches aus jenem Funktionselemente entspringt oder zu ihm gehört.

Man kann gegen diese Auffassung vielleicht einwenden, daß der Ausgangspunkt von der Potenzreihe doch zunächst ein zufälliger ist, der von vornherein eine vielleicht nicht notwendige Beschränkung des Funktionsbegriffes mit sich führen könnte. Dies wird vermieden bei der eigentlich tieferliegenden, an die Cauchysche Auffassung anknüpfenden Betrachtungsweise Riemanns, welche den Funktionsbegriff durch seine wesentlichsten Bedingungen einzugrenzen sucht, und zugleich zu dem Resultate führt, daß die Weierstraßsche Auffassung genau denselben Grad von Allgemeinheit besitzt wie die soeben erwähnte.¹⁾

Funktion in dem betreffenden Gebiet monogen; die gegenwärtig nicht mehr gebrauchte Bezeichnung synektisch ist von Cauchy, Briot und Bouquet später in verschiedenem Sinne gebraucht worden. Wir sind jetzt gewohnt zu sagen, eine Funktion verhalte sich in der Umgebung eines Punktes analytisch (oder holomorph) und bilden daraus den Begriff der (monogenen) analytischen Funktion nach Weierstraß.

1) Diese Betrachtung beruht auf dem Integralsatze von Cauchy. Existiert in einem Punkte z_0 eines Gebietes G für die eindeutige Funktion $f(z)$ der Grenzwert von

$$\frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{\zeta}$$

für $\lim \zeta = 0$, so heißt $f(z)$ bei z_0 differentierbar, jener Grenzwert

Dem Nichtmathematiker wird es allerdings schwer verständlich sein, weshalb erst die Einführung der imaginären Zahlen geeignet erscheint, so viele neue Eigenschaften des Funktionsbegriffes zu enthüllen. Warum bedarf es erst eines Überganges in das imaginäre Gebiet, um Wahrheiten zu finden, die doch schließlich wieder zu Aussagen über die Beziehungen zwischen reellen Zahlen Veranlassung geben sollen? Man kann hierauf mit einer Analogie antworten. Wenn jemand nur auf dem geradlinigen Wege zwischen zwei Orten reist, so wird er nur beschränkte Erfahrungen sammeln, zu weit ausgedehnteren geben verschiedenartige Reiserouten Gelegenheit. So gibt es auch geometrische Sätze¹⁾, welche sich in der Ebene nicht beweisen lassen, die aber sofort deduzierbar werden, wenn man die viel reicheren Eigenschaften des Raumes hinzuzieht. In derselben Weise ist auch das Zahlenkontinuum in der komplexen Ebene ein viel reicheres, und die Beantwortung der Frage liegt darin, daß es vermöge der Beziehungen in der Zahlenebene gelingt, Verhältnisse zu entdecken, die man bei der Beschränkung auf das reelle Gebiet wenigstens zunächst ganz über-

$f'(z_0)$, und die Funktion in G analytisch, wenn in jedem inneren Punkte von G die Ableitung vorhanden ist. Ist $f(z)$ in jedem Punkte des Innern und auf dem Rande des von „regulären“ Kurven begrenzten Gebietes G stetig und in dessen Innern analytisch, so ist das über die Begrenzung erstreckte $\int f(z) dz$ gleich Null.

Dieser fundamentale Satz wurde früher so bewiesen, daß dabei die Stetigkeit von $f'(z)$ entweder implizite (so Briot u. Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, Paris 1875, p. 128) oder explizite (so z. B. É. Picard, *traité d'Analyse*, Tome II, p. 4, 1893) vorausgesetzt wurde. É. Goursat hat (1899) gezeigt, daß die Existenz eines völlig bestimmten $f'(z)$ schon hinreichend ist (z. B. im *Cours d'Analyse math.* II, p. 82, vgl. W. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie* 1906, p. 296 ff.).

1) Der Satz von Desargues, „bei zwei Dreiecken in derselben Ebene, deren entsprechende Seiten sich in drei Punkten einer geraden Linie schneiden, gehen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch einen Punkt, und umgekehrt“, kann nach Klein (*Math. Ann.* 6, 1872, p. 112) mittels der projektiven Geometrie allein durch Zuziehung räumlicher Verhältnisse bewiesen werden. Für den Beweis in der Ebene sind aber weitere Postulate (bei Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, p. 49, das Parallelen- und Kongruenzaxiom) erforderlich. Dies wird dadurch gezeigt, daß in der Ebene eine Geometrie, welche außer den projektiven Postulaten auch noch das Axiom des Eudoxus erfüllt, existiert, bei der der Satz von Desargues nicht stattfindet, a. O., p. 51.

sehen würde.¹⁾ Und hierin liegt es begründet, daß fast alle Untersuchungen auf dem Gebiete der theoretischen Physik ohne die Anwendung der Funktionen der komplexen Variablen überhaupt völlig undurchführbar sind, und erst in den Endresultaten, die sich auf wirkliche Verhältnisse unserer Anschauung und Erfahrung beziehen sollen, der Übergang zu den reellen Zahlen gemacht wird. Dem Anfänger mag es überraschend erscheinen, wenn durch den Gebrauch hyperkomplexer Zahlensysteme, wie das der alternierenden Zahlen oder der Quaternionen neue Beziehungen zwischen den reellen Zahlen sich ergeben. So folgen aus den ersteren die Grundzüge der Determinantentheorie, aus den letzteren — um nur ein besonders frappantes Beispiel zu nennen — die Eulersche Verwandlung des Produktes zweier Summen von vier Quadraten in eine ebenso gebildete Summe. Eine einfache Überlegung zeigt indes, daß, sobald einmal die reellen Zahlen in ihrem ganzen Umfange eingeführt sind, alle diese Methoden nur zu Beziehungen führen, die auch auf dem reellen Gebiet allein — und hierin besteht ein wesentlicher Unterschied mit dem eben erwähnten Falle der Raumgeometrie — schon zu gewinnen sind. Denn diese Methoden beruhen immer nur auf Gleichungen, die in dem letzteren gültig sind, welche freilich wegen ihrer unübersichtlichen Gestalt der direkten Herleitung sich oft entziehen würden. Auf die deutlichste Weise kommt dies zum Ausdruck durch die ungeheuren Fortschritte, welche die Analysis durch Eulers Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ machte.

Nur ganz flüchtig können wir uns noch denjenigen Dingen zuwenden, welche der mechanischen Naturauffassung des 18. Jahrhunderts allerdings ganz besonders wichtig erscheinen mußten, nämlich der Lösung der Differentialgleichungen. Es zeigte sich sehr bald, daß nur für eine kleine Gruppe der Differentialgleichungen, auf die selbst die einfachsten Fragen führen, die Zurückführung auf die Umkehrung eines Differentialprozesses, d. h. durch sogenannte Quadraturen möglich war. Eulers *Institutiones calculi integralis* geben uns eine mit ebensoviel Erfindungsgabe als wirklichem Erfolg durchgeführte Behandlungsweise der Differentialgleichungen nach dieser Richtung,

1) Das Aufhören der Konvergenz der Taylorschen Entwicklung im reellen Gebiet für die Funktion $(1 + x^2)^{-1/2}$, welche in demselben überall mit ihren Derivierten stetig ist, findet seine Aufklärung erst durch die imaginären singulären Punkte derselben.

welche durch Lies Lehre von den Transformationsgruppen¹⁾ in unserer Zeit eine ganz neue und an prinzipiellen Gesichtspunkten reiche Form erhalten hat. Nur indem man von der eigentlich durch die mechanische Naturauffassung selbst erst verbürgten Auffassung ausging, daß jede Differentialgleichung lösbar sei²⁾, gelang es in vielen Fällen, diese Lösung in einer für die Anwendung hinreichenden Form darzustellen, wenngleich dazu nicht selten Wege eingeschlagen werden mußten, die nicht völlig gerechtfertigt waren.³⁾

Auch hier hat Cauchy die entscheidenden Grundlagen geschaffen. Er zeigte nicht allein, daß ein System reeller Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unabhängigen Variablen — und auf diesen Fall läßt sich jedes System gewöhnlicher Differentialgleichungen von bestimmter Ordnung zurückführen — unter gewissen Voraussetzungen eine und nur eine bestimmte Lösung habe, sondern erweiterte später durch seinen Calcul des limites diesen Satz auch auf das komplexe Gebiet.⁴⁾ Seine Untersuchungen sind bis in die neueste Zeit noch

1) S. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen, bearbeitet von G. Scheffers, Leipzig 1891; S. Lie und G. Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896.

2) Dieser Gedanke hat lange Zeit hindurch die mathematische Auffassung beherrscht. Geht man von der Voraussetzung aus, daß unsere mechanischen Grundbegriffe die einzige und vollkommen adäquate Form für die Erkenntnis der Naturerscheinungen bilden, so mußte allerdings jedes in sich widerspruchsfreie Problem wenigstens eine bestimmte Lösung haben; in vielen Fällen ließ sich dann auch die Eindeutigkeit desselben beweisen. Ein charakteristisches Beispiel dafür bildet z. B. die Existenz der Greenschen Funktion, welche die Verteilung der Elektrizität auf einem Leiter infolge der Influenz eines elektrischen Teilchens angibt, oder auch die des Potentials elektrischer Ströme, welche Klein in seiner Theorie der algebraischen Funktionen, Teubner, Leipzig 1881, anführt. Sowie man zugibt, daß alles mathematisch-mechanische Erklären nur den Wert eines Bildes hat, dessen Übereinstimmung mit der vorausgesetzten Wirklichkeit keineswegs von vornherein feststeht, ist selbstverständlich, daß die Existenz von Funktionen oder Lösungen auf diesem Wege sich nicht begründen läßt.

3) So z. B. die auf der von Descartes (Cantor Bd. II, p. 684) erfundenen Methode der unbestimmten Koeffizienten beruhenden Entwicklungen.

4) Über die verschiedenen Existenzbeweise zur Lösung von Differentialsystemen erster Ordnung sehe man den Artikel von P. Pain-

vereinfacht und vervollkommenet worden. Wir müssen hier darauf verzichten, weitere Angaben über die Natur dieser Lösungen zu machen, da hierzu die Terminologie der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen unerlässlich ist. Doch mag bemerkt werden, daß Gauß bereits in seiner Arbeit über die hypergeometrische Reihe, wie sich allerdings erst später in vollem Umfange hat erkennen lassen, die Grundlagen derjenigen Theorie der linearen Differentialgleichungen angedeutet hat, die seit Fuchs¹⁾ bahnbrechenden Arbeiten endgültig den alten Standpunkt, durch eine Reihe von Quadraturen die Lösung zu bewerkstelligen, verläßt, und an Stelle desselben das direkte Studium der Integrale mit Hilfe der Cauchy-Weierstraßschen Funktionentheorie einführt.

Bei dem außerordentlichen Interesse, das diese Klasse von Differentialgleichungen einerseits wegen ihrer besonderen Einfachheit²⁾, andererseits wegen mancher neu auftretenden Schwierigkeiten³⁾ in

levé (Enzyklopädie d. Math. Wiss. IIA 4a, p. 193–206). Besonders wichtig ist der Satz von der Eindeutigkeit der (holomorphen) Lösung eines Differentialsystems, dessen rechte Seiten holomorphe Funktionen der Variablen in der Umgebung der Anfangswerte sind, der zuerst von É. Picard (Traité d'Analyse II, p. 314) auch auf den Fall ausgedehnt wurde, wo der Weg der dem Anfangswerte zustrebenden unabhängigen Variablen nicht mehr von endlicher Länge ist. Sind die rechten Seiten nicht mehr holomorph, so können ganz andere Verhältnisse eintreten; man vgl. Peanos (Math. Ann. 37, p. 82) Beispiel $\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}$ mit den Anfangsbedingungen der positiven Variablen $t, t=0, x=0$, dem die stetigen holomorphen Lösungen $x=0, x=t^3$, dann aber auch die Funktion, die von $t=0$ bis $t=t_0$ null ist, für $t>t_0$ aber durch $(t-t_0)^3$ ausgedrückt wird, entsprechen.

1) L. Fuchs, Programm der städt. Gewerbeschule zu Berlin 1865; Journ. f. Math. 66, p. 122 und 68, p. 354.

2) Die Einfachheit beruht darauf, daß die Integrale dieser linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, deren Koeffizienten analytische Funktionen der unabhängigen Variablen sind, nur feste singuläre Punkte enthalten.

3) Diese Schwierigkeiten ergeben sich einmal durch die Forderung, die Funktionselemente in der komplexen vielblättrigen Ebene in der richtigen analytischen Fortsetzung miteinander in Zusammenhang zu bringen, sodann durch die besondere Natur der singulären Punkte, welche Stellen der Bestimmtheit oder Unbestimmtheit liefern können. Einfache und übersichtliche Verhältnisse ergeben sich zunächst nur

Anspruch nahm, ist es wohl begreiflich, daß die partiellen Differentialgleichungen, die eigentlich für die physikalischen Anwen-

bei den Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse, bei denen sich alle Lösungen in der Nähe der singulären Punkte vollkommen bestimmt verhalten. Eine zusammenfassende Darstellung der Arbeiten über lineare Differentialgleichungen, welche durch die vereinigte Tätigkeit der gegenwärtigen Mathematiker entstanden sind, gibt das große Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen von L. Schlesinger, Bd. I und II, Leipzig 1895–1898; man vgl. dessen Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen, Leipzig 1904, sowie J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Leipzig 1905, und zur weiteren Orientierung P. Painlevé, Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles, 3. intern. math. Kongreß in Heidelberg, Leipzig 1905, S. 86.

Die Lösungen nicht linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen können, wie schon die einfachsten Fälle, z. B. $x + yy' = 0$, zeigen, auch bewegliche, nämlich von den willkürlichen Konstanten abhängige singuläre Stellen besitzen. In bezug auf die nicht linearen Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form

$$f(x, y, y') = 0,$$

wo f ganz und rational in y, y' , analytisch in x ist, sagt ein grundlegender Satz von Painlevé, daß die nicht algebraischen singulären Stellen von y fest sind, während die algebraischen im allgemeinen beweglich sein werden.

Eine Gleichung von der angegebenen Form, deren allgemeines Integral nur feste Verzweigungspunkte besitzt, läßt sich aber nach den Untersuchungen von Fuchs und Poincaré

1. wenn das Geschlecht der Gleichung zwischen y und y' gleich null ist, durch rationale Transformation auf die Riccatische Gleichung zurückführen;

2. wenn das Geschlecht gleich eins ist, hängt das allgemeine Integral im wesentlichen von einer elliptischen Funktion ab;

3. wenn das Geschlecht größer als eins ist, hängt das allgemeine Integral algebraisch von den Koeffizienten der Gleichung ab.

Ganz andere Eigenschaften aber treten schon bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf; hier können auch bewegliche algebraische singuläre Stellen entstehen. Für die Klasse der Differentialgleichungen von der Gestalt

$$y'' = f(x, y, y'),$$

wo f in y' rational, in y algebraisch, in x analytisch ist, kennt man nach Painlevé alle Formen von f , bei denen das allgemeine Integral nur feste Verzweigungspunkte besitzt.

dungen von noch größerer Wichtigkeit erscheinen, noch nicht mit derselben Ausführlichkeit untersucht sind. Auch hier hat Cauchy schon 1842 die ersten Schritte getan, aber erst durch die Untersuchungen von Darboux und Sophie von Kowalewski ist wenigstens für eine ganz bestimmte Gattung von partiellen Differentialgleichungen die eindeutige Existenz der Lösungen, die gewissen Anfangsbedingungen genügen, erwiesen, während die Betrachtung einer besonderen Klasse, die für physikalische Untersuchungen wichtig ist, mittels des Dirichletschen Prinzips und später vermöge des Ersatzes desselben durch völlig strenge Methoden eine von den obigen Voraussetzungen gänzlich unabhängige Grundlage erhalten hat.

In den letzten zehn Jahren ist durch die mit J. Fredholms 1900 beginnenden, durch D. Hilberts große Gesichtspunkte so weit geförderten Arbeiten die Theorie der Integralgleichungen zu einer außerordentlichen Wichtigkeit gelangt, weil sich mittelst derselben namentlich Aufgaben der Theorie der Differentialgleichungen lösen lassen, die bisher nur in einzelnen Fällen wirklich durchführbar waren. Von einer Skizzierung derselben, welche sich der Betrachtung unendlicher Determinanten, die zu linearen Gleichungen mit unendlich viel Unbekannten gehören, von quadratischen Formen mit unendlich viel Variablen bedient, und der es gelingt, über die großen Aufgaben der reinen und angewandten Mathematik, insbesondere der mathematischen Physik, ein ganz neues Licht zu verbreiten, muß hier indes abgesehen werden.¹⁾

1) Die schon vor 80 Jahren von N. H. Abel behandelte, in ein mechanisches Gewand gekleidete Aufgabe, die der Gleichung

$$f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\lambda}, \quad a \leq t \leq x$$

genügende Funktion $\varphi(x)$ zu finden, ist der linearen Integralgleichung erster Art:

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt$$

ähnlich; die Hauptaufgabe der Potentialtheorie aber führt auf die Lösung der linearen Integralgleichung zweiter Art:

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt$$

Der Begriff des Integrals einer Funktion war zwar von Leibniz¹⁾ im Prinzip als Grenzwert einer Summe erkannt worden. Aber durch den Einfluß der Eulerschen großen Fundamentalwerke der Analysis wurde er in einen rein formalen, nämlich den der Umkehrung der Differentialoperation verwandelt.²⁾ Damit blieb er in allen Fällen, wo eine solche Umkehrung durch bekannte Operationen nicht geleistet werden konnte, eigentlich ganz zweifelhaft.³⁾ Es ist das große Verdienst Cauchys, den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe wieder eingeführt und zugleich Kriterien angegeben zu haben, wann ein solcher Grenzwert existiert.

Insbesondere ist dies immer der Fall, wenn die zu integrierende Funktion stetig ist. Eine ganz außerordentliche Erweiterung aber erhielt diese Vorstellung durch Riemann.⁴⁾ Dieser bemerkte, daß die Existenz eines solchen Grenzwertes keineswegs an die Stetigkeit der zu integrierenden Funktion gebunden ist, sondern auch dann noch erwiesen werden kann, wenn sie als eindeutig und zunächst auch noch als endlich vorausgesetzte Funktion im übrigen in sehr willkürlicher Weise definiert ist. Das Riemannsche Kriterium⁵⁾ stellt so den Be-

mit dem Parameter λ ; es gelingt, zu zeigen, daß die letzte Gleichung für jeden Wert von λ eine analytische Funktion von λ ist, mit Ausnahme gewisser Werte von λ , die man als „Eigenwerte“ des Kernes K bezeichnet, usw.

1) Vgl. Cantor, Bd. III p. 159 „Am 26. Okt. 1675 erfolgt der große Schritt der Erfindung des neuen Algorithmus: *Utile erit scribi $\int$ pro omni. ut $\int l$ pro omni. l id est summa ipsorum l ; $\int$ autem significat summam, d differentiam.*“

2) Euler, Integralrechnung, übersetzt von Salomon, Wien 1828, Bd. I, § 11: „Das Zeichen $\int$ spricht man gewöhnlich als Summe aus, welches aus dem irrigen Begriffe entsteht, als wäre das Integral gleichsam die Summe aller Differentialien, welches aber ebensowenig richtig ist, als die gewöhnliche Vorstellung, daß eine Linie aus lauter Punkten bestehe“; § 29: „Da die Integralrechnung das Umgekehrte der Differentialrechnung ist, so macht sie uns wie die übrigen umgekehrten Methoden, mit einer neuen Gattung von Größen bekannt.“

3) Man half sich hier durch die verschiedenen Methoden der Reihenentwicklung der zu integrierenden Funktion, die ja allerdings in jedem einzelnen Falle hinreichen können.

4) B. Riemann, Habilitationsschrift 1854, ges. Werke 1876, p. 225.

5) Über dasselbe vgl. die Auseinandersetzungen von U. Dini Grundlagen für eine Theorie der Funktionen, deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp, Leipzig 1892, p. 317–345.

griff des bestimmten Integrals auf eine in ihren wesentlichsten Gesichtspunkten von der Differentialrechnung gänzlich unabhängige Basis, und schuf damit aus der Integralrechnung eine Methode, die unvergleichlich viel weiter reicht, als die ganz speziellen Voraussetzungen der Differentialrechnung, welche von der Existenz der derivierten Funktion ausgehen. Hiermit war es denn auch möglich, von Flächeninhalten und Bogenlängen usw. zu sprechen, denen überhaupt gar keine der Anschauung zugängliche Gebilde entsprechen.

Andererseits läßt die vorhin angedeutete Bestimmung der Flächeninhalte usw. noch einen Zweifel übrig, da die ganze Untersuchung an die Teilung der Fläche durch ein bestimmtes System von Parallelen geknüpft ist, wodurch eben das Integral zu einem einfachen wird. Die Cauchysche Untersuchung hatte auch hier die Wege völlig geebnet; sie ließ sich ebenso auf die mehrfachen Integrale anwenden, zu denen man gelangt, wenn man die zu integrierenden Flächen, Volumina usw. auf irgend eine völlig willkürliche Weise in kleinere Theilen zerlegt.¹⁾

Aber hierdurch wurde man, wie allerdings auch schon beim einfachen Integral, darauf hingewiesen, daß die Untersuchung des Integralwertes ganz wesentlich von der Beschaffenheit des Gebietes abhängt, in welchem die Funktion definiert, im besonderen auch etwa durch Abweichungen von der Stetigkeit charakterisiert ist. Diese Betrachtungen haben zu einer ganz neuen Disziplin geführt, die sich erst seit den letzten 30 Jahren ausgebildet hat, zu der Mengenlehre. In ihren Grundlagen fast ganz das ausschließliche Werk G. Cantors²⁾, hat sich diese Theorie bald zu einer der wichtigsten Betrachtungen erhoben,

1) Hierdurch wird eigentlich der Begriff des Flächeninhalts völlig definiert, den die naive Auffassung von vornherein als existierende Größe oder angebbaren Znhlwert angesehen hatte.

2) Vgl. die wichtigen Abh. in den Math. Ann. 46 und 49. Die Anfänge der Mengenlehre finden sich bei B. Bolzano (Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851). B. hat das Wort Menge eingeführt (p. 14), er spricht bereits ebenso wie Dedekind von unendlichen Mengen (die Menge aller Wahrheiten ist eine unendliche p. 21), der Menge aller Zahlen, er kennt die charakteristische Eigenschaft unendlicher Mengen, auf einen ihrer echten Teile „abbildbar“ zu sein (p. 28) und entwickelt p. 34 den Begriff der Gleichheit von Mengen; die weiteren Betrachtungen aber ergeben ihm jene scheinbaren Widersprüche, die er als Paradoxien des Unendlichen bezeichnet.

die in alle Untersuchungen der Analysis und Funktionentheorie eingreift, und auch wegen ihres erkenntnistheoretischen Wertes die höchste Beachtung verdient.

Unter einer Menge versteht man nach G. Cantor den Inbegriff wohl unterschiedener Objekte unseres Denkens, der Elemente der Menge, von denen auf irgend eine Weise entscheidbar ist, ob sie zu derselben gehören oder nicht. Dabei treten zwei fundamentale Begriffe hervor, der der Mächtigkeit und der der Anordnung der Elemente.¹⁾

Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen gleichmächtig oder äquivalent, $M_1 \sim M_2$, wenn ihre Elemente ein-eindeutig aufeinander bezogen werden können; es sei gestattet, diese Beziehung hier als Abbildung zu bezeichnen. Wird dieser Allgemeinbegriff der Mächtigkeit durch das Symbol $\bar{M}$ bezeichnet, so ist die Äquivalenz durch $\bar{M}_1 = \bar{M}_2$ ausgedrückt; ist dagegen ein echter Teil M von M_1 äquivalent zu M_2 , gibt es aber keinen Teil in M_2 äquivalent zu M_1 , so heißt $\bar{M}_1 > \bar{M}_2$.²⁾

Während von Gauß, und mit Berufung auf seine Autorität auch

1) An und für sich kann man nicht von der Mächtigkeit einer Menge sprechen, diese ist vielmehr ein Klassenbegriff, der allen äquivalenten Mengen zukommt.

2) Diese Begriffe $\leq$ schließen sich gegenseitig aus. Aber daraus folgt nicht, daß die Mächtigkeiten zweier Mengen immer dieser für den Größenbegriff charakteristischen Disjunktion entsprechen müssen. Vielmehr findet allgemein nur É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris 1895 p. 102, G. Hessenberg, *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Abh. d. Friesschen Schule, Bd. I, 1906, p. 495) die vierfache Disjunktion statt:

- 1) M_1 ist einem Teil von M_2 , M_2 einem Teil von M_1
- 2) M_1 „ „ „ „ M_2 , M_2 keinem „ „ M_1
- 3) M_2 „ „ „ „ M_1 , M_1 „ „ „ M_2
- 4) M_1 „ keinem „ „ M_2 , M_2 „ „ „ M_1

äquivalent.

Zwei unendliche Mengen, welche dem Fall 1) entsprechen, sind äquivalent: Dies ist der von Cantor vermutete und von F. Bernstein (Borel a. a. O. p. 102, Hessenberg, a. a. O. p. 522) bewiesene Satz (der von E. Schröder fast gleichzeitig mit Bernstein gelieferte Beweis wird neuerdings von A. Korselt (Math. Ann. 70, p. 294, 1911) als nicht stichhaltig bezeichnet). Für endliche Mengen ist 1) niemals erfüllt; 2), 3), 4) entsprechen dann der Größenbeziehung.

namentlich von Philosophen¹⁾ gegen den Gebrauch von unendlichen Mengen als einer vollendeten Synthesis protestiert wird, ist es Cantor

1) Auf einem Mißverständnis scheint es zu beruhen, wenn z. B. J. Baumann (Kritische Bemerkungen zur modernen Mathematik, Ann. d. Naturphilosophie VI, p. 291, vgl. auch dessen Bemerkungen in der Zeitschrift f. philos. Kritik, Bd. 91) erklärt, Cantor schließe willkürlich einen Begriff ab, der nicht abgeschlossen werden kann, und behaupte seine Existenz. Allerdings sagt Gauß (Briefwechsel mit H. Schumacher Bd. II, p. 268, 1831): (Was nun ihren Beweis anbelangt), „so protestiere ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen gestattet ist“. Aber dieser Protest von Gauß bezieht sich zunächst auf den Gebrauch, den Schumacher von der Betrachtung unendlicher Winkelräume in ganz unbestimmter Weise zum Beweis von der Winkelsumme des Dreiecks gemacht hatte, oder auf ähnliche Versuche wie z. B. den von L. Bertrand (1812), das Parallelenaxiom zu beweisen. Sicher würde auch Gauß den Cantorsche Begriffsbildungen, welche feststellen, in welchem Sinne mit unendlichen Mengen exakt „gerechnet“ werden kann, seine Zustimmung nicht versagt haben, auch wenn einzelne Fragen dieser noch jungen Disziplin noch nicht völlig geklärt sind. Es gibt auch jetzt noch Paradoxien der Mengenlehre, d. h. widersprechende Aussagen, die nur auf einer unberechtigten Erweiterung oder Anwendung des Mengenbegriffs beruhen können. Daß die Cantorsche Definition zu allgemein ist, hat man schon oft bemerkt (vgl. namentlich J. Møllerup, Math. Ann. 64, p. 234). Unter sie fallen auch solche Mengen, wie z. B. die „Menge aller Dinge“ oder die „Menge aller Mengen“. Es gilt daher den Mengenbegriff angemessen zu beschränken; man wird zunächst solche Mengen betrachten, die sich genetisch aus anderen bereits wohl bestimmten konstruieren lassen.

Andere sehen den Grund für die Paradoxien in logisch unrichtigen Schlüssen, die bei der nötigen Vorsicht vermieden werden können. Wenn man mit A. Schönflies (die logischen Paradoxien der Mengenlehre, Jahresb. d. D. M. V. 15, p. 19 (1906), davon ausgeht, daß alle Schlüsse der Mathematik auf dem Principium Contradictionis wesentlich beruhen, so heißt das zunächst: Die beiden Behauptungen, dem Begriffe A kommt der Begriff a zu, und dem Begriffe A kommt der Begriff a nicht zu, sind unvereinbar. Daraus folgt aber nicht, daß nun ausnahmslos eines dieser beiden Urteile richtig sein müsse. Dies gilt nur dann, wenn die Begriffe A und a selbst widerspruchsfrei sind, und nur unter dieser Voraussetzung folgt aus der Unmöglichkeit des Gegenteils einer Behauptung diese letztere selbst. Ein solcher in

gelingen, nicht allein den Begriff einer solchen Menge als legitim einzuführen, d. h. genau anzugeben, in welchem Sinne transfinite Mengen (Zahlen) als gesicherte Begriffe angesehen werden können, sondern auch eine Theorie solcher Mengen zu entwerfen, die auf den beiden Prinzipien der Mächtigkeit und Anordnung beruht, die auch Dedekind bereits in seinen Untersuchungen über den Zahlbegriff benutzt hatte.

Es kann sich nicht darum handeln, auch nur einen bescheidenen Abriss von der großen Bedeutung der Mengenlehre hier zu geben; einige Andeutungen einfacher Art müssen hier genügen.

Einer endlichen Menge kommt eine bestimmte Anzahl, ihre Kardi-

sich widerspruchsvoller Begriff ist der von B. Russell eingeführte der „Menge M aller Mengen m , die sich selbst nicht als Element enthalten.“ Denn hier führt die Annahme, daß M sich selbst als Element enthalte, sowie ihr Gegenteil auf einen Widerspruch, und ähnlich liegt nach Schönflies der Fall bei der paradoxen Menge W aller wohlgeordneten Mengen.

Das Auftreten solcher Paradoxien, über die sich indes die Ansichten immer mehr geklärt haben, hat noch neuerdings Mathematiker von hervorragender Autorität dazu geführt, die Mengenlehre oder vielmehr den „Cantorismus“ als eine unberechtigte Entwicklung des Zahlenbegriffes zu bezeichnen. In der Rede „sur l'avenir des mathématiques“ (4. internat. Mathematikerkongreß Rom 1908, Rendiconti di Palermo 1908) sagt H. Poincaré, nachdem er den Nutzen der Mengenlehre für die Theorie der Funktionen hervorgehoben hat: „Mais il est arrivé qu'on s'est heurté à certains paradoxes, à certaines contradictions apparentes. Je pense pour mon compte, et je ne suis pas le seul, que l'important c'est de ne jamais introduire que des êtres que l'on puisse définir complètement en un nombre fini de mots.“

Trotzdem ist es nicht wahrscheinlich, daß man demnächst, wie Poincaré sagt, in der Mengenlehre nur noch einen interessanten „cas pathologique“ erblicken wird. Die Begriffe des Häufungspunktes oder der der Grenzstellen einer unendlichen Menge, die Äquivalenz und die Abzählbarkeit, die wohlgeordneten Mengen, usw. das sind fundamentale Bildungen unserer Vernunft, die bereits zu tief in das ganze Gebäude eingreifen, um sich je wieder beseitigen zu lassen. So sagt auch Schönflies (Jahresber. d. D. M. V. II, 1898, p. 38) „Die Mengenlehre hat die verschiedensten Gebiete der Mathematik befruchtet . . ., sie hat unser mathematisches Denken vertieft und seit ihrem Entstehen außerordentliche Resultate gezeitigt. Nirgends in den Anwendungen sind irgendwelche Widersprüche zutage getreten. Es ist unmöglich sich vorzustellen, daß sie je wieder aus der Welt der mathematischen Gedanken verschwinden könne.“

nalzahl zu; sie läßt sich nicht auf einen ihrer echten Teile „abbilden.“ Eine unendliche Menge dagegen, deren Elemente durch bestimmte Gesetze definiert, wenn auch niemals völlig angebbar sind, ist dadurch charakterisiert, daß ein echter Teil derselben mit ihr selbst äquivalent sein kann, wie z. B. die Menge aller positiven ganzen Zahlen mit der aus den geraden bestehenden Teilmenge. Diese unendliche oder transfinite Menge ist die einfachste, jede ihr äquivalente heißt abzählbar; ihre Mächtigkeit wird durch das Symbol $\aleph_0$ (Alef-Null) der transfiniten Kardinalzahl bezeichnet.

Und nun beweist Cantor den merkwürdigen Satz, daß auch die Menge aller rationalen, ferner aller algebraischen Zahlen abzählbar ist¹⁾, daß ferner jede abzählbare Menge von abzählbaren Mengen selbst wieder abzählbar ist.²⁾ Wie fruchtbar diese Ideen sind, zeigt Cantors Beweis für die Existenz unendlich vieler transzendenter Zahlen (von der Mächtigkeit des Kontinuums aller Zahlen), deren Existenz schon

1) Vermöge der Substitution

$$x = \frac{x'}{1-x'}, \quad x' = \frac{x}{1+x},$$

welche die Gesamtheit der positiven Zahlen x auf die Strecke x' von 0 bis 1 abbildet, genügt es derartige Beweise für Zahlen < 1 zu führen. Nun ist die Anzahl aller irreduziblen Brüche mit demselben Nenner q höchstens $q - 1$, nämlich in der Reihe

$$\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$$

enthalten, damit sind dieselben auf die natürliche Zahlenreihe, freilich unter Aufhebung der Größenordnung, abgebildet; ähnlich wird bei den algebraischen Zahlen geschlossen, auch hier läßt sich jeder ganzen Zahl eine endliche Zahl algebraischer Zahlen zuordnen, die sie alle erschöpft.

2) Zum Beweise dient das Cantorsche Diagonalverfahren. Wird die abzählbare Menge M von abzählbaren Mengen $M_1, M_2, M_3 \dots$ durch das Schema der Elemente a_{ik}

$$\begin{array}{l} M_1 : a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{13}, \quad a_{14}, \dots \\ M_2 : a_{21}, \quad a_{22}, \quad a_{23}, \dots \\ M_3 : a_{31}, \quad a_{32}, \quad a_{33}, \dots \\ M_4 : a_{41}, \quad . \quad . \quad . \dots \end{array}$$

dargestellt, so läßt sich die Menge dieser Elemente wie eine einfache numerieren, wenn man dieselben in Aggregate von gleicher Indizesumme zusammenfaßt.

J. Liouville 1851 durch Aufstellung von bestimmten Zahlklassen dieser Art erkannt hatte.¹⁾

Damit ist auch bewiesen, daß das lineare Kontinuum der reellen Zahlen nicht abzählbar, also von höherer Mächtigkeit als $\aleph_0$ ist, und zugleich ist $\aleph_0$ die kleinste transfinite Kardinalzahl, da man von jeder unendlichen nicht abzählbaren Menge M eine abzählbare Teilmenge aussondern kann, ohne daß M aufhört, unendlich zu sein (Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 12).

Hieran kann man nun den Kalkül der Kardinalzahlen vermöge der von Cantor eingeführten Begriffe der Vereinigungs-, Verbindungs- und Belegungsmenge von zwei oder mehr Mächtigkeiten anschließen; sein Algorithmus befolgt das assoziative, distributive und kommutative Gesetz im Sinne der gewöhnlichen Arithmetik.

Gibt es nun noch höhere Mächtigkeiten als die des linearen Kontinuums? Cantors merkwürdige Entdeckung (1877) war der Nachweis, daß das n -dimensionale Kontinuum, ja sogar jenes von abzählbar unendlich vielen Dimensionen, auf das lineare abbildbar ist.²⁾

Aber es gibt noch höhere Mächtigkeiten als das Linearkontinuum C_1 . Eine solche wird z. B. von allen Funktionen in einem be-

1) Der Cantorsche Beweis (zuerst J. f. Math. 77, p. 258, 1874) ist weit einfacher und allgemeiner wie der von Liouville (*Journ. de mathém.* 16, p. 136, vgl. Borel a. a. O. p. 26 ff.): Gäbe es keine transzendenten Zahlen zwischen 0 und 1, so müßte die Menge der algebraischen Dezimalbrüche:

$$0, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

in der jeder endliche Dezimalbruch als unendlicher (mit lauter Ziffern 9 endigend) geschrieben ist, alle Zahlen dort darstellen. Dies ist aber nicht der Fall, denn die Zahl

$$0, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \dots, \quad \text{wo} \quad \alpha_{ii} \neq a_{ii},$$

findet sich in der obigen abzählbaren Menge nicht vor.

2) Der Beweis dieses Satzes (vgl. Cantor, J. f. Math. 84, p. 242, 1878) beruht auf folgendem: Scheidet man aus der transfiniten Menge M eine abzählbare M_1 aus, so ist der Rest $M - M_1$ mit M gleichmächtig (vgl. z. B. Borel a. a. O., p. 17). Daher haben die irrationalen Zahlen die Mächtigkeit des Kontinuums, also ist die Mächtigkeit der Zahlenwerte mit irrationalen Koordinaten x, y im Innern des Quadrates von der Seitenlänge 1 dieselbe wie der aller dort befindlichen Zahlenpaare.

stimmten Intervall gebildet, während die Menge der stetigen Funktionen daselbst nur von der Mächtigkeit C_1 ist.¹⁾

Mit dieser Abbildung des C_m auf C_n ($m > n$) scheint die uns gewohnte Auffassung der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit als eines seit Descartes charakteristischen Begriffes ihren Sinn zu verlieren. Dies ist aber nicht der Fall, wenn man sich auf stetige Abbildungen beschränkt.²⁾

So ist denn die Abbildung des Quadrates auf die Strecke nicht stetig.³⁾ Damit entsteht die Aufgabe, zu zeigen, welche geometrischen Charaktere mit den stetigen Abbildungen einer Mannigfaltigkeit verknüpft sind. Es ist die Analysis situs, die so erst durch die Mengenlehre ihre prinzipielle Ausbildung erhält. A. Schönflies hat in zusammenhängender Weise die in den letzten Jahren auf diesem Gebiete gewonnenen Gesichtspunkte bearbeitet.⁴⁾

Eine zwischen 0 und 1 gelegene Irrationalzahl i aber ist ein unendlicher Kettenbruch

$$i = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots),$$

dessen Nenner man das Zahlenpaar

$$x = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots)$$

$$y = (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots)$$

eindeutig zuordnen kann. Da auch umgekehrt die irrationalen x, y die α_n , also auch die Zahl i eindeutig bestimmen, so folgt der Satz. Analog ist zu verfahren, wenn es sich um die Abbildung des m -dimensionalen Kontinuums auf das lineare handelt usw. (vgl. z. B. F. Klein, Elementarmath. von höherem Standpunkte aus, Leipzig 1911, p. 565.

1) Vgl. F. Klein, a. a. O. p. 568, G. Hessenberg, a. a. O. p. 553.

2) Bei stetigen Abbildungen bleibt aber der Dimensionsbegriff erhalten. Das hat zuerst J. Lüroth für $n \leq 3$ nachgewiesen; seitdem viele andere Untersuchungen; ein sehr einfacher Beweis für die Invarianz des Dimensionsbegriffes bei stetiger Abbildung von L. Brouwer, Math. Ann. 71, p. 365, 1912.

3) Die Unmöglichkeit davon erkennt man nach A. Schönflies (Jahresb. d. D. M. V. II, p. 20) so: Wäre eine stetige Abbildung möglich, so müßte jeder dem Quadrat angehörigen Strecke ein Intervall der Strecke (ab) entsprechen, Strecken, welche einer Seite des Quadrates parallel laufen, also Intervalle auf (ab) ohne gemeinsame Punkte. Solche gibt es aber nur eine abzählbare Menge, während jene Parallelen von der Mächtigkeit des Linearkontinuums sind. Vgl. auch F. Klein, a. a. O. p. 580ff.

4) A. Schönflies, a. a. O. p. 149–194.

Es gilt aber auch umgekehrt: Eine stetige Zuordnung des C_m auf das C_1 ist nie eine „Abbildung“. Eine Zuordnung dieser Art realisierte zuerst G. Peano durch den Nachweis, daß eine stetige, eindeutig auf die Strecke 0—1 bezogene Kurve alle Punkte eines Quadrates von der Seitenlänge Eins durchstreifen kann.¹⁾

Dies mußte eine genauere Umgrenzung des Kurvenbegriffes veranlassen. Dazu führt der Jordansche Kurvenbegriff, d. h. das Gebilde

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t),$$

das durch die stetigen Funktionen f, φ auf das lineare Kontinuum

$$t_0 \leq t \leq t_1, \quad t_0 \neq t_1$$

abgebildet ist, wenn die Gleichungen

$$f(t) = f(\tau), \quad \varphi(t) = \varphi(\tau)$$

gleichzeitig im Bereiche von t nur die eine Lösung $t = \tau$ haben. Diese Kurve ist ungeschlossen; geschlossene Kurven wird man auf die Punkte des Kreises $x = \cos t, y = \sin t$ durch die noch hinzugefügte Bedingung

$$f(0) = f(2\pi), \quad \varphi(0) = \varphi(2\pi)$$

abbilden. Die Jordan-Kurve hat nie einen mehrfachen Punkt, dadurch wird z. B. die scheinbare Paradoxie der Peano-Kurve ausgeschlossen. Und nun besteht der grundlegende Satz, daß eine derartige Kurve, die man sich der Einfachheit halber ganz im Endlichen gelegen denken mag, die Ebene immer in ein (endliches) inneres und ein un-

1) G. Peano, Math. Ann. 36, p. 157 (1890) „Dans cette note on détermine deux fonctions x, y uniformes et continues d'une variable réelle t , qui lorsque t varie dans l'intervalle 0, 1 prennent toutes les couples de valeurs telles que $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Si l'on appelle courbe continue le lieu de points, dont les coordonnées sont des fonctions continues d'une variable, on a ainsi un arc de courbe, qui passe par tous les points d'un carré.“ Vgl. F. Klein, Vorlesung über Diff.-u. Integralrechnung, p. 239—247, wo sich auch D. Hilberts geometrisches Beispiel einer solchen Kurve befindet, sowie A. Schönflies, Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Bd. I, p. 121. E. Cesàro hat Peanos Kurve durch ein arithmetisches Beispiel dargestellt (Bull. des sc. math. 21, p. 257). Vgl. H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration 1904, p. 44; nach letzterem müssen bei der stetigen Zuordnung einer Kurve zu einem C_n mindestens $n + 1$ fach durchstrichene Punkte in letzterem auftreten (Math. Ann. 70, p. 166).

endliches äußeres Gebiet zerlegt, dessen gemeinsame Grenze die Kurve ist.¹⁾

Von ebenso großer Bedeutung erscheinen Cantors Untersuchungen über den Begriff der Zahl überhaupt, insbesondere der Unterschied zwischen Kardinal- und Ordinalzahl, der in der Sprache zu so sinnenfälligem Ausdruck kommt, während er bei vielen mathematischen Betrachtungen völlig gleichgültig bleibt.

Eine Menge von Elementen heißt geordnet, wenn von je zwei Elementen derselben m_1, m_2 gesetzmäßig eines, etwa m_1 , als das frühere, das andere m_2 als das spätere bezeichnet werden kann. Man schreibt dann $m_1 < m_2$; dabei soll auch das Gesetz der Monotonie: „aus $m_1 < m_2, m_2 < m_3$ folgt $m_1 < m_3$ “ erfüllt sein. Zwei geordnete Mengen M_1 und M_2 heißen ähnlich ($M_1 \simeq M_2$), wenn ihre Elemente ohne Änderung des Rangverhältnisses aufeinander abgebildet sind. Damit entsteht der Begriff der allen ähnlichen Mengen gemeinsamen Anordnung, des Ordnungstypus oder Typus. Alle Mengen desselben Typus sind per definitionem äquivalent, aber äquivalente Mengen können von sehr verschiedenem Typus sein: zwei endliche äquivalente Mengen haben allerdings nur einen Typus, ihre Ordinalzahl, die mit der Kardinalzahl gleichbezeichnet wird.²⁾ Für diese Typen läßt sich, ähnlich wie früher für Mächtigkeiten ein Algorithmus aufstellen, der den formalen Gesetzen der Arithmetik gehorcht, doch kommt das kommutative Gesetz im allgemeinen in Wegfall.³⁾

Aus den Typen entstehen nun Cantors Ordinalzahlen vermöge des Begriffs der wohlgeordneten Mengen „ M_ω “, d. h. geordneter, bei denen jede Teilmenge ein erstes Element hat. In den M_ω hat also

1) Zuerst bei C. Jordan, Cours d'analyse III, p. 593, 1887. Vgl. A. Hurwitz, Über die Entwicklung der allg. Theorie der analyt. Funktionen, Internat. Mathematiker-Kongreß, Zürich 1897, Leipzig 1898, p. 91 und J. D. Ames, An Arithmetical treatment of some problems in analysis situs, Baltimore 1895, dgl. die Darstellung bei W. Osgood, Funktionentheorie I, 1; p. 120, 1906.

2) Die Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ bilden eine Menge vom Typus n ; der Typus von $1, 2, 3, \dots$ wird mit ω , der von $\dots, -3, -2, -1$ wird mit $^*\omega$ bezeichnet usw.

3) Der Typus von $1, 2, 3, \dots, 1, 2, \dots, m$ ist $\omega + m$, der von $1, 2, \dots, m (1, 2, \dots)$ ist $m + \omega$, beide sind wesentlich verschieden, denn der erste hat ein letztes Element m , der zweite kein solches.

jedes Element ein ihm unmittelbar folgendes (nur nicht das eventuell letzte).

Nennt man ferner die Menge der Elemente, die einem Elemente m vorangehen, den Abschnitt A_m , so ergeben sich die grundlegenden Sätze: „Eine M_ω ist keinem ihrer Abschnitte ähnlich, zwei M_ω aber sind entweder untereinander, oder die eine einem Abschnitt der anderen ähnlich.“¹⁾

Die Typen wohlgeordneter Mengen sind nun Cantors Ordinalzahlen, sie heißen transfinit, wenn sie sich auf transfinite Mengen beziehen. Für zwei solche Zahlen m, n die zu M_ω, N_ω gehören, kann jetzt nur die Größenbeziehung bestehen, und darin liegt das Recht, so allgemeine Symbole der Anordnung als Zahlen zu bezeichnen: ist $M_\omega \simeq N_\omega$, so ist $m = n$; ist aber nur ein Abschnitt von M_ω ähnlich mit N_ω , so ist $m < n$. Da die Menge der Ordinalzahlen, die kleiner als m sind, hiernach selbst wieder wohlgeordnet ist, so gibt es zu jeder Ordinalzahl n die nächst höhere, welche $n + 1$ genannt wird.

Diese Betrachtung liefert nun das Mittel, um zu immer höheren Ordnungszahlen zu gelangen. Die Ordnungszahl von $(1, 2, \dots, n)$ ist n ; die der transfiniten wohlgeordneten Menge $(1, 2, \dots)$ wird mit ω bezeichnet, sie heißt die Limeszahl der Ordinalzahlen der natürlichen Zahlenreihe. Von da aus schreitet man nun zu den Zahlen

$$\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + n$$

und durch Wiederholung des Limesbegriffes zu $\omega 2$, von dort zu

$$\omega 2 + 1, \omega 2 + 2, \dots, \omega 2 + n$$

oder $\omega 3$, allgemein zu $\omega m + n$ fort, von dort wieder zu $\omega \omega$ oder ω^2 usw.

Jeder transfiniten Ordnungszahl kommt, da sie sich auf eine ganz bestimmte wohlgeordnete Menge bezieht, eine gewisse Mächtigkeit zu. Die Gesamtheit aller Ordinalzahlen, die einer bestimmten Mächtigkeit zukommen können, bezeichnet Cantor als eine Zahlenklasse. So gehört zur Mächtigkeit $\aleph_0$ die Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$. Diese hat wieder

1) In der Menge $(1, 2, 3, \dots, 1', 2', 3', \dots, n')$ ist ein letztes Glied n' vorhanden, jedem Gliede außer n' folgt ein bestimmtes, aber $1'$ hat kein vorhergehendes. Instruktive Beispiele dieser Art, die allerdings für besondere axiomatische Betrachtungen aufgestellt sind, siehe bei E. V. Huntington, Annals of Math. 6, 7, 1905/06, p. 151).

eine Mächtigkeit $\aleph_1$, von der man zeigt, daß sie größer als $\aleph_0$ ist; dies führt zu der steigenden Klasse der Alefs.

Man konnte nun vielleicht hoffen, durch die Zahlklassen, die sich in immer gesteigerter Mächtigkeit fortsetzen, zu der Mächtigkeit des Kontinuums C_1 zu gelangen. Damit ist die vielbehandelte Frage nach der Möglichkeit der Wohlordnung des Linearkontinuums bezeichnet, allgemeiner die Frage nach der Wohlordnung einer unendlichen Menge überhaupt. Über dieselbe sind die Meinungen noch geteilt. Während E. Zermelo dieselbe auf das Prinzip der Auswahl reduzieren wollte, daß aus jeder Menge sich mindestens ein Element auswählen lassen muß (Math. Ann. 59, p. 514, 1904), haben sich alsbald andere Stimmen dagegen erhoben, und man wird wohl A. Schönflies beistimmen, wenn er in seinem Bericht II über die Mengenlehre p. 33 dies Prinzip nur als eine andere Wendung des zu beweisenden Satzes bezeichnet; andere Forscher, wie z. B. G. Hessenberg (Taschenbuch für Mathematiker und Physiker 1912, p. 79) halten dagegen die Wohlordnung jeder Menge für möglich und bewiesen.

Parallel mit diesen Betrachtungen geht nun die übrigens auch rein arithmetisch zu fassende Theorie der Punktmengen, die in irgendeinem Raum betrachtet werden. Indem wir uns vorzugsweise auf lineare Punktmengen, die durch Punkte auf einer geradlinigen Strecke, dem Intervall (ab) vorgestellt werden, beschränken, verstehen wir unter einer Punktmenge P den Inbegriff P von irgendwelchen auf derselben in (ab) liegenden Punkten, wobei dann freilich der Hintergrund des Kontinuums vorausgesetzt wird.

Ein Punkt A heißt in (ab) ein Häufungspunkt von P , wenn im Innern jedes A umgebenden beliebig kleinen Intervalles $(\alpha\beta)$ mindestens ein Punkt, also auch eine beliebig große Zahl von Punkten von P liegt. Jede in (ab) befindliche unendliche Menge hat mindestens einen Häufungspunkt.¹⁾ Derselbe braucht der Menge P nicht anzugehören, sondern ist nur eine Grenzstelle; tut er dies, so heißt P

1) Teilt man alle Punkte von (ab) , $b > a$, in zwei Klassen C_1 , C_2 derart, daß C_1 alle Punkte von (ab) enthält, die von unendlich vielen Punkten von P überschritten werden, C_2 die übrigen, so ist durch diese totale Disjunktion ein Dedekindscher Schnittpunkt A bestimmt; jedes A umgebende Intervall muß nun unendlich viele Punkte von P enthalten; A ist der größte Häufungspunkt von P in (ab) .

an jener Stelle abgeschlossen; sie heißt überhaupt abgeschlossen, wenn alle ihre Häufungspunkte ihr angehören. Sie heißt in sich dicht, wenn alle Punkte von (ab) Häufungspunkte sind, und perfekt, wenn sie abgeschlossen und in sich dicht ist, isoliert dagegen, wenn Häufungspunkte überhaupt nicht vorhanden sind.¹⁾

Eine abgeschlossene Punktmenge ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums. Die Punktmenge heißt ferner überall dicht in (ab) , wenn in jedem Teil $(\alpha\beta)$ von (ab) Punkte derselben sich finden, wie z.B. für die Punkte rationaler Abszissen in der Strecke $0-1$; nirgends dicht, wenn sie in keinem $(\alpha\beta)$ überall dicht ist.

Besonders wichtig ist die Theorie der aus einer Menge P abgeleiteten Punktmengen. Die Ableitung von P ist die Menge P' ihrer Häufungspunkte; dabei ist P' stets abgeschlossen, auch wenn P es nicht ist.²⁾

Hat nun P' wieder eine Ableitung P'' , so ist P'' ein Teil von P' ; diese Betrachtung liefert also eine Reihe sukzessiver Ableitungen $P', P'', P''' \dots$. Entweder endet dieselbe, dann heißt die Punktmenge P reduzibel, sie ist dann, wie gezeigt werden kann, auch abzählbar, oder dieser Fall tritt nie ein, so z. B. bei einer perfekten Menge, wo P mit P' und allen P^n identisch ist.

Die Mengenlehre ist wichtig geworden für den Funktionsbegriff. Nach Dirichlet besagt die Gleichung $y=f(x)$, daß zu jedem x innerhalb des linearen Kontinuums (ab) ein Wert von x gehört.³⁾ Jetzt aber kann x auch eine gesetzmäßig definierte Punktmenge bedeuten. Damit ergeben sich neue Fragen. So ist dort eine stetige Funktion von x bereits bestimmt, wenn man ihre Werte für alle rationalen Punkte

1) Die Menge $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ist bei 0 nicht abgeschlossen; sie wird es, wenn man 0 hinzufügt; die rationalen Punkte der Strecke $0-1$ bilden eine in sich dichte Menge, die Menge aller reellen Punkte dasselbe ist perfekt und abgeschlossen.

2) Dies heißt mit anderen Worten: Jeder Häufungspunkt A von P' gehört zu P' . Denn in einem beliebig kleinen A enthaltenden Intervall α liegen Punkte B von P' ; in einem beliebig kleinen B umgebenden Intervall β aber unendlich viel Punkte von P , also auch in dem Intervall α ; also ist A ein Häufungspunkt von P oder Punkt von P' .

3) J. Tannery gibt in seiner Introduction à la théorie des fonctions I, p. 220–256, Éd. II, 1904, eine ausführliche Darlegung dieses allgemeinen Funktionsbegriffes.

kennt¹⁾, allgemeiner, wenn dies für eine überall dichte abzählbare Menge der Fall ist.

Besonders wichtig aber sind die Begriffe der Mengenlehre für die Theorie der trigonometrischen Reihen und die Lehre vom bestimmten Integral geworden. Denn hier erkannte man bald, daß die analytische Existenz dieser Gebilde ganz wesentlich von der Verteilung der Unstetigkeiten U einer Funktion in einem gewissen Intervall, d. h. von der Menge der U , abhängt.

Der Begriff des Integrals einer Funktion beruhte zunächst auf der Forderung, zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ alle Funktionen $F(x)$ zu finden, die $f(x)$ zur Derivierten haben, so daß

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

ist. Alle Werte dieser notwendig stetigen Funktion $F(x)$ sind, sobald man einen derselben durch

$$F_1(x) = \int f x dx$$

bezeichnet, durch

$$F(x) = F_1(x) + \text{const}$$

gegeben. Integrieren und Differenzieren sind danach inverse Operationen; daß das Integral aber auch dann existiert, wenn man nicht imstande ist, ein $F_1(x)$ unmittelbar anzugeben, ließ sich nur aus der vorausgesetzten Existenz des Flächeninhaltes, den die Kurve $y = f(x)$ mit der X -Achse einschließt, entnehmen. Dadurch aber wird die Existenz des Integrals entweder auf die Fälle beschränkt, wo man $F_1(x)$ schon kennt, oder auf einen Begriff zurückgeführt, der alle Dunkelheiten der Kurvenvorstellung mit sich führt.

Leibniz faßte allerdings schon 1675 das Integral im Sinne des Archimedes als Grenzwert der Summe „unendlich kleiner“ Rechtecke auf. Diese durch Eulers Einfluß zurückgedrängte Auffassung wurde erst durch Cauchy für eine stetige Funktion $f(x)$ zum Begriff des bestimmten Integrals erhoben, welcher nun als völlig bestimmter Grenzwert der Summe

1) Denn der Wert $f(x_0)$ ist bei der in x_0 stetigen Funktion Grenzwert der aus der gegen x_0 konvergierenden Folge $x_1, x_2, x_3, \dots$ gebildeten Reihe $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$, was auch jene Folge ist; er ist daher bestimmt, wenn jene Reihe für rationale $x_1, x_2, x_3, \dots$ bekannt ist.

$$S = (a - x_1)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \dots (b - x_{n-1})f(\xi_n)$$

erscheint, falls alle Teilintervalle $x_i - x_{i-1}$ des Integrationsintervalles (ab) kleiner als eine noch so kleine Zahl werden, und ξ_i ein willkürliches Argument von $x_i - x_{i-1}$ ist.

Aber auch dann, wenn $f(x)$ Unstetigkeitspunkte U enthält, läßt sich dieser Cauchysche Integralbegriff aufrecht erhalten. Notwendig ist dazu, daß die Menge der U nicht in sich dicht ist, und daß in jedem von den U freien Intervalle $(\alpha\beta)$ eine Funktion $F(x)$ vorhanden sei, für die die Gleichung

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

einen bestimmten Sinn hat.¹⁾

Dieser Beschränkung der Menge U unterliegt der Riemannsche Begriff des bestimmten Integrals nicht.²⁾ Riemann beweist 1854 die eindeutige Existenz des Grenzwertes der Summe S unter Voraussetzung eines endlichen $f(x)$, falls nur die Summe

$$D = (a - x_1)D_1 + \dots (b - x_n)D_n,$$

in welcher D_i die Schwankung³⁾ von $f(x)$ im zugehörigen Intervall $x_i - x_{i-1}$ ist, bei irgendeiner Zerlegung von (ab) in Teilintervalle kleiner als ϵ gemacht werden kann, falls die $x_i - x_{i-1} < \delta$ genommen werden, oder auch wenn die Gesamtlänge der Intervalle, in denen die Schwankungen größer als η sind, kleiner als ϵ gemacht werden kann.⁴⁾ Eine solche Funktion heißt integrierbar.

Für stetige Funktionen fällt das Riemannsche Integral mit dem von Cauchy zusammen. Aber das berühmte Beispiel des ersten (1854)

1) Das Genauere bei Lebesgue a. a. O. p. 14; U muß reduzibel sein.

2) B. Riemann, Werke, 2. Aufl., p. 266.

3) Unter der Schwankung D_i versteht man die Differenz der oberen und unteren Grenze von $f(x)$ im Intervall $x_i - x_{i-1}$; ersichtlich ist es ganz gleichgültig, ob man dabei unter $f(\xi)$ in der Summe S die definierten Funktionswerte oder irgendwelche andere in jenen Grenzen eingeschlossene versteht, d. h. das Integral ändert sich nicht, wenn man auch $f(x)$ in den Punkten einer reduzibelen Menge unendlich vielfach abändert.

4) Vgl. die Darstellung bei U. Dini, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen, Leipzig 1892, p. 317, J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions, Paris 1904, tome II, p. 1–11.

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^2} + \dots,$$

in dem für (y) die y am nächsten kommende ganze Zahl, jedoch Null zu setzen ist, wenn y eine solche um $\frac{1}{2}$ übertrifft, bezieht sich schon auf ein $f(x)$, dessen Unstetigkeiten eine überall dichte Menge bilden. Die Integralfunktion hat daher in allen jenen Punkten keine Derivierte, wohl aber vor- und rückwärts genommene Ableitungen; sie lieferte das erste Beispiel einer stetigen Funktion, die in allen diesen Punkten nicht differentiierbar ist und gab Veranlassung zu H. Hankels Kondensationsprinzip der Singularitäten, bis Weierstraß das Beispiel einer stetigen für keinen Punkt differentiierbaren Funktion gab. Vgl. S. 82.

So sind nun Funktionen integrierbar, die gar nicht als Derivierte von anderen betrachtet werden können und das Integrieren erscheint, wie schon oben bemerkt wurde, nicht mehr als die inverse Operation des Differentiierens.¹⁾ Aber auch dann, wenn $F(x)$ eine Ableitung $f(x)$ hat, braucht $F(x)$ nicht bis auf eine Konstante gleich dem Integral von $f(x)$ zu sein; dieser Fundamentalsatz der Integralrechnung

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x) dx$$

ist natürlich illusorisch, wenn die Ableitung nicht integrierbar ist, er kann aber auch dann aufhören, wenn $f(x)$ integrierbar ist.

Diese Erwägungen haben nun zu derjenigen Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffes geführt, nach welcher eine stetige Funktion im allgemeinen für jeden Punkt vier Ableitungen besitzt.²⁾ Da gilt nun der Du-Boissche Satz³⁾:

Ist $F(x)$ in (ab) stetig und eine ihrer vier Derivierten $DF(x)$ endlich

1) Ein allerdings fast triviales Beispiel ist ein $f(x)$, das überall Null ist mit Ausnahme des Punktes $x = 0$; es gibt dann kein $F(x)$, welches differentiiert $f(x)$ liefert. Denn $F(x)$ könnte nur eine Konstante sein, deren Differentialquotient ist aber überall Null.

2) Diese vier Werte finden sich in allgemeinerem Sinne schon bei jeder Funktion $y = f(x)$ für $x = x_0$ vor. Denn sämtliche $f(x_0 + h)$ haben (h positiv) eine obere Grenze G_h , eine untere g_h ; nimmt h ab, so kann G_h nicht zu-, g_h nicht abnehmen. Daher gehören zu x_0 (bei positivem h) die beiden vorderen Grenzwerte G und g , ebenso die bei-

(Fortsetzung siehe Seite 80.)

3) Vgl. Abh. Münch. Akad. 1876, Matth. Ann. 16, 1880 und M. Pasch, Math. Ann. 30, p. 153.

und integrierbar, so gilt dies von allen, und es ist zugleich für alle diese:

$$F(x) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^x D F(x) dx.$$

Für eine zweite stetige Funktion $\Phi(x)$ gilt daher unter denselben Voraussetzungen

$$\Phi(x) - \Phi(\alpha) = \int_{\alpha}^x D \Phi(x) dx;$$

mithin ist

$$F(x) - \Phi(x) - (F(\alpha) - \Phi(\alpha)) = \int_{\alpha}^x D(F(x) - \Phi(x)) dx.$$

Wird nun Gleichheit und Endlichkeit entsprechender Derivierten unter dem $\int$ Zeichen an allen Stellen vorausgesetzt, so gilt natürlich der Fundamentalsatz: $F(x)$ und $\Phi(x)$ unterscheiden sich nur um eine Konstante. Er gilt aber auch nach L. Scheeffer dann, wenn die Menge der Punkte, in denen diese Voraussetzung der Gleichheit nicht gemacht wird, eine höchstens abzählbare ist.¹⁾

Der Umstand, daß die Integralbegriffe von Cauchy und Riemann verschieden sind, hat H. Lebesgue zu einem allgemeineren Integralbegriff geführt. Hier kann auf denselben nicht eingegangen werden, aber es scheint merkwürdig, daß es sich hier um eine scharfe Formulierung des Cavalierischen Inhaltsbegriffes mit Hilfe mengentheoretischer Untersuchungen handelt.²⁾

den hinteren. Und aus ihnen entstehen z. B., wenn $f(x_0 + h)$ durch die Werte des Differenzenquotienten einer stetigen Funktion $\varphi(x)$

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

ersetzt wird, die vier genannten Ableitungen.

1) Läßt man die Voraussetzung der Endlichkeit der Ableitungen hier fallen, so besteht nach H. Hahn unser Fundamentalsatz nicht mehr (Monatsh. f. Math. 16, p. 317, 1905).

2) Wesentlich ist dabei der Begriff der Meßbarkeit von Punktmengen. Ist einer linearen Punktmenge M im Intervall (a, b) eine Funktion $f(x)$ derart zugeordnet, daß sie für jeden Punkt der Menge gleich Eins, sonst aber gleich Null ist, so wird das obere Integral

$$\int f(x) dx$$

gleich dem Grenzwert der Summe der Intervalle, in denen sich über-

Noch einer anderen Erweiterung des Riemannschen Integralbegriffes ist hier zu gedenken. Wird über die Funktion $f(x)$ nur die Voraussetzung der Endlichkeit gemacht, so existieren immer noch zwei völlig bestimmte Grenzwerte, die man als oberes und unteres Integral bezeichnet; sie ergeben sich als Grenzwerte der Summe S (Seite 78), wenn man jedes $f(\xi_i)$ durch die obere resp. untere Grenze des Funktionswertes im zugehörigen Intervall ersetzt; sind dieselben untereinander gleich, so ist die Funktion im Riemannschen Sinne integrierbar.

Es ist nun noch zu erörtern, welchen Einfluß die Entwicklung der reinen Mathematik auf die Anwendungsgebiete gehabt hat. Zunächst betrachten wir die Geometrie. Denn für diese haben die Arbeiten des 19. Jahrhunderts die Fragen in den entscheidendsten Punkten völlig aufgeheilt.

Zunächst ist darauf aufmerksam zu machen, daß die Schärfe des Zahlbegriffs weit über das, was wir geometrische Anschauung nennen, hinausgeht, auch dann, wenn wir nicht von der direkten sinnlichen Wahrnehmung reden, sondern von den idealen anschauungsmäßigen Vorstellungen, die wir in uns von den einfachsten Gebilden, dem Punkt, der Linie, der Fläche, dem Körper vielleicht zu haben glauben. Wir ordnen den Punkten einer Strecke nach dem Cantorsche Axiom umkehrbar eindeutig die Werte der reellen Zahlen zu; aber unsere Anschauung erlahmt schon, wenn wir uns zwischen je

haupte Punkte der Menge befinden: dies ist der äußere Inhalt der Punktmenge. Das untere Integral ist aber in bezug auf die Intervalle zu bilden, die nur Punkte der Menge enthalten, und liefert den inneren Inhalt. Die Punktmenge heißt meßbar, wenn die beiden Inhalte gleich sind, (bei der Menge der rationalen Punkte in (ab) liegen in jedem Teilintervall rationale Zahlen, also ist der äußere Inhalt $b - a$, der innere aber gleich Null, weil kein Intervall nur rationale Punkte enthält). Bezeichnet man diese beiden Inhalte durch J_e und J_i und betrachtet die zu der Punktmenge M komplementäre Menge M_1 , so werden die Intervalle, die nur Punkte von M_1 enthalten, keinen Punkt von M einschließen, alle anderen aber müssen solche aufweisen; so ergeben sich bei entsprechender Bezeichnung der Inhalte für die Komplementärmenge die Formeln

$$J_e' + J_i = b - a$$

$$J_i' + J_e = b - a$$

so daß der Inhalt der Menge $J_e - J_i$ auch durch $J_e - (b - a - J_e')$ ausgedrückt wird.

zwei noch so nahe beieinander liegenden rationalen Punkten der Strecke noch wieder unbegrenzt viele neue rationale Punkte vorstellen sollen; sie hört geradezu auf, wenn wir gezwungen werden, zwischen diesen rationalen Punkten noch unzählig viele irrationale einzuschalten. Ebenso ist es völlig unmöglich, uns den Verlauf einer Kurve vorzustellen, welche in einem einzigen Punkte eine hebbare Unterbrechung der Stetigkeit aufweist, während wir uns wohl ein graphisches Bild davon machen können, daß einem Punkte der x -Achse zwei Kurvenpunkte, die zu verschiedenen Zweigen gehören, zugeordnet sind. Unsere Anschauung ist hier nicht nur ungenau, wie man wohl gesagt hat, sondern sie ist überhaupt nicht imstande, dem Zahlbegriff zu folgen. Da wir nun aber gleichwohl durch das Axiom der Stetigkeit uns hierzu verpflichtet haben, so ist es nicht auffallend, wenn Aussagen entstehen, die unserer Anschauung zwar nicht direkt widersprechen, aber sich ihr doch entziehen. Die durch den schon den Alten rätselhaften Bewegungsprozeß geleitete Anschauung scheint uns zu zeigen, daß jede krumme Linie eine Richtung, eine Tangente haben müsse, in der sie sich fortsetzt; die Analyse der reellen Funktionen zeigt uns, daß dies gar nicht in allen Punkten einer krummen Linie stattzufinden braucht, ja daß es sogar stetige Kurven gibt, die an keiner Stelle ihres Verlaufes eine Tangente besitzen.¹⁾ Rein

1) Von H. Hankel sind bereits 1870, siehe Math. Ann. 20, p. 63, Kurven angegeben, die für alle rationalen Abszissen keine Tangente, dagegen für alle irrationalen nur solche besitzen (Hankel a. a. O. p. 80) oder die für jede rationale Abszisse unendlich viele unendlich kleine Oszillationen, jedoch mit bestimmter Tangentenrichtung haben (ibid. p. 83).

Das bekannte Beispiel von Weierstraß stammt schon aus dem Jahre 1861, veröffentlicht wurde es jedoch erst 1874 durch P. du Bois-Reymond (Journ. f. Math. 79). Chr. Wiener hat 1881 (Journ. f. Math. 90) die anschauliche Vorstellung der Weierstraßschen Kurve (vgl. auch F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Leipzig 1902, p. 83–101) durch Zeichnungen zu erläutern gesucht; so nützlich dies ist, erscheint doch eine wirkliche Vorstellung des Grenzfalles ebensowenig möglich, wie z. B. die des Auftretens von unendlich vielen Maximis und Minimis, die in einem beliebig kleinen Intervall überall dicht liegen. — Über die Konstruktion solcher Kurven vergleiche außer dem bekannten Werke von U. Dini auch E. Steinitz, Stetigkeit und Differentialquotient, Math. Ann. 52, 1899, p. 58. Man konnte noch glauben, daß die Nichtdifferenzierbarkeit durch die An-

geometrische Fragen, wie z. B. das von Klein¹⁾ mit solchem Erfolge in der Theorie der automorphen Funktionen behandelte System von Kreisen, die beständig aneinander gespiegelt werden, zeigen aufs deutlichste die Existenz von Gebilden, die arithmetisch vollkommen definiert, und gleichwohl der Anschauung gänzlich entzogen sind; weitere Beispiele in beliebiger Zahl liefert die Mengenlehre. Wir sehen uns also genötigt, zuzugeben, daß Anschauung und Begriff sich überhaupt gar nicht vertreten können, wenn auch die Anschauung bei der Bildung und Belebung der Begriffe eine wesentliche Rolle spielt.

Von besonderem Einfluß sind nun diese Betrachtungen nicht allein auf die Form der Beweismethoden gewesen, in denen man alle auf die Anschauung zurückgehenden Momente zu entfernen hatte, sondern auch auf die Grundlagen der Geometrie selbst. Die Geometrie des Euklid hat seit alter Zeit die höchste Bewunderung durch ihre logische Strenge erregt. Gab man ihre Axiome und Postulate zu, so schien man mit Notwendigkeit zu allen weiteren Lehrsätzen geführt zu werden. Eine genauere Untersuchung hat allerdings gezeigt, daß trotzdem gewisse Voraussetzungen, die nicht in den Axiomen allein enthalten sind, der sogenannten unmittelbaren Anschauung entnommen werden²⁾, wie z. B. die Vorstellung der Bewegung, der von beliebig weit entfernten Teilen des Raumes, dann jene Aussagen, welche wir gegenwärtig als Axiome der Anordnung bezeichnen, sowie auch die Beurteilung der Inhaltsgleichheit von Figuren. Diese Einwürfe waren auch schon im Altertum zum Teil nicht unbekannt. Vorwiegend aber richtete die ma-

wesenheit von unendlich vielen Oszillationen in jedem Intervall mit bedingt sei; nach R. Köpcke (Math. Ann. 34 p. 161 [1889]) ist indes Differentiierbarkeit möglich, auch wenn in jedem endlichen Intervall unendlich viele Oszillationen auftreten.

Über den modernen Kurvenbegriff vgl. noch: J. Pierpoint, On the arithmetization of mathematics, Bull. Americ. Math. Society, V, 1899, § 3 und 4, desgleichen E. Kasner, The present problems of geometry, Bull. Americ. math. soc. 11, p. 283.

1) Vgl. z. B. F. Klein, The Evanston Colloquium, Lectures of mathematics, New-York 1894, namentlich Lect. VI, sowie p. 212–233 in der Vorlesung, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Leipzig 1902.

2) Man vgl. außer den Vorlesungen über neuere Geometrie von M. Pasch, Leipzig 1882, auch die Angaben von F. Lindemann in Wissenschaft und Hypothese von Poincaré, p. 270.

thematische Kritik sich gegen die Berechtigung des elften, nach jetziger Zählung fünften Axioms, das in etwas veränderter Fassung den Grundsatz ausspricht, daß zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt nur eine einzige Parallele gezogen werden könne.

Immer aufs neue wurde versucht¹⁾, dasselbe als eine Folge der übrigen Axiome und Definitionen nachzuweisen, doch vergeblich. Da zeigte zuerst Lobatschewskij 1829, nachdem Gauß bereits seit 1792²⁾, ohne freilich sich anders als in Briefen an vertraute Freunde darüber zu äußern, zu derselben Erkenntnis gekommen war, daß dieses Axiom keine Folge der übrigen sei und daß man eine in sich widerspruchslose Geometrie auch dann aufbauen könne, wenn man anstatt des Euklidischen Parallelenaxioms die Voraussetzung einführt, daß durch jeden Punkt in der eine Gerade enthaltenden Ebene zwei eigentliche Parallelen zu dieser Geraden gezogen werden können, während außer-

1) Siehe außer dem Enzyklopädieartikel, IIIA, B, 1 von F. Enriques die Werke von P. Stäckel und F. Engel, *Die Theorie der Parallelinien*, Leipzig 1895, und R. Bonola, *Die nichteuklidische Geometrie*, deutsch von H. Liebmann, Leipzig 1908, 2. Aufl. 1912.

2) Gauß' Anteil an der Ausbildung der Lobatschewskijschen Geometrie läßt sich jetzt vollständig übersehen. Im Briefe an F. A. Taurinus, 8. Nov. 1824 schreibt er: Bei mir ist es jetzt über 30 Jahr, daß ich mich mit diesem Gegenstand beschäftigt habe. „Die Annahme, daß die Summe der 3 Winkel kleiner sei als 180° , führt auf eine eigene von der unsrigen ganz verschiedene Geometrie... Alle meine Bemühungen, einen Widerspruch in dieser nicht-euklidischen Geometrie zu finden, sind fruchtlos gewesen, und das einzige, was unserem Verstande darin widersteht, ist, daß es, wäre sie wahr, im Raume eine an sich bestimmte (obwohl uns unbekannte) Lineargröße geben müßte.“ Desgleichen im Briefe an F. Bessel, 27. Jan. 1829: „Meine Überzeugung, daß wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist womöglich noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böoter scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte“; desgleichen an Schumacher, Briefwechsel, Bd. II, 1831, p. 260: „Von meinen eigenen Meditationen, die zum Teil schon 40 Jahre alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe..., habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, daß es nicht mit mir unterginge.“

dem noch unendlich viele dieselbe überhaupt nicht schneidende Geraden vorhanden sind.

Riemann machte in seiner Habilitationsschrift darauf aufmerksam, daß, wenn man die Ansicht fallen läßt, der Raum sei unendlich ausge dehnt, sondern annimmt, er sei nur unbegrenzt oder schrankenlos fortsetzbar, noch eine zweite Geometrie existiere, bei welcher durch einen Punkt gar keine Parallele zu einer solchen Geraden vorhanden sei.¹⁾

1) Nach Kants Auffassung (Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre Teil 1, Abschn. 1) „ist der Raum eine notwendige Vorstellung a priori, die allen äußeren Anschauungen zugrunde liegt. Er wird also als die Bedingung der Möglichkeit der Erscheinungen und nicht als eine von ihnen abhängige Bestimmung angesehen“. Der hierin enthaltenen, im einzelnen vielleicht etwas zu modifizierenden Lehre von der transzendenten Idealität des Raumes schließt sich auch H. v. Helmholtz (die Tatsachen der Wahrnehmung, Vorträge und Reden, Bd. II, 1378, p. 217) in Hinblick auf das physiologische Gesetz der spezifischen Sinnesenergien an. Doch sei darauf hingewiesen, daß jenes Gesetz, welches z. B. die empirische Tatsache behauptet, daß bei jeder Reizung des Sehnerven nie etwas anderes durch denselben als eine Lichtempfindung ausgelöst werde, grundverschieden ist von Kants Lösung der erkenntnistheoretischen Frage, wie es möglich sei, daß die apodiktischen Aussagen der Geometrie, die doch erst auf einer ganz besonderen „Verarbeitung“ der sinnlichen Eindrücke beruhen, zugleich Anwendung auf die Außenwelt finden können. Über die Beziehungen von Helmholtz' Ansichten zur Kantschen Philosophie vgl. namentlich A. Riehl, Kant et Helmholtz, *Revue de métaphysique et de morale*, XII, p. 570, 1904.

Des weiteren aber wendet sich Helmholtz gegen Kants Auffassung, und seine Ansichten werden wahrscheinlich von vielen geteilt. Nach H. betrachtet Kant die angebliche Tatsache, „die geometrischen Sätze sind insgesamt apodiktisch, d. h. mit dem Bewußtsein ihrer Notwendigkeit verbunden“ als einen Beweis dafür, daß sie auch in ihren einzelnen Aussagen vor aller Erfahrung gegeben sind, während Helmholtz die Lehre von der transzendenten Idealität des Raumes als allgemeiner Form der Anschauung wohl für möglich, a. a. O. (p. 234, vgl. auch Beilage II p. 256) hält, keineswegs aber die speziellen Axiome als apodiktische Aussagen anerkennt. Nach ihm ist „Kants Lehre von den a priori gegebenen Formen ein klarer Ausdruck des Sachverhältnisses. Aber diese Formen müssen inhaltslos und frei genug sein, um jeden Inhalt, der in die Form der Wahrnehmung eintreten kann, aufzunehmen. Die Axiome aber beschränken die Anschauung so, daß nicht mehr jeder denkbare Inhalt aufgenommen werden kann“.

Die Unhaltbarkeit von Kants speziellen Ansichten über die Natur der

Es ist möglich, diese Geometrien, soweit sie sich auf zweidimensionale Mannigfaltigkeiten beziehen, wenn auch nicht ganz vollständig,

Axiome als synthetischer Sätze a priori, z. B. die Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten, zu denen K. zweifellos auch das Parallelenaxiom gerechnet haben wird, geht aus der widerspruchsslosen Möglichkeit verschiedener geometrischer Systeme hervor, die auf gegenseitig sich widersprechenden Urteilen oder Anschauungen a priori beruhen müßten. Auch würde bei dieser Ansicht eine feste Grenze zwischen den „evidenten“ und den eines Beweises bedürftigen Sätzen nicht zu ziehen sein.

Daß A. Schopenhauer später das System des Euklid für eine überflüssige sophistische Spitzfindigkeit den souveränen Aussagen der a priorischen Anschauung gegenüber ansieht, kann nicht überraschen. (Dies war keineswegs die Ansicht von Kant, der überall die begriffliche Konstruktion der Elemente der allgemeinen Raumanschauung betont, wenn auch diese selbst bei ihm eine etwas schwankende Stellung einnehmen. Eine ganz andere Frage aber ist es, in wie weit durch die obigen Einwände die Grundlagen des Kantschen Gedankenganges erschüttert werden, was man allerdings häufig behaupten hört. Wird sie mit nein beantwortet, so muß natürlich eine andere Interpretation der Behauptungen Kants eintreten. In wie weit dies möglich ist, darüber ist man noch zu keinem allgemeineren Einverständnis gelangt.) — Neuerdings haben auch Mathematiker, wie K. Zindler (Sitzb. der k. k. Wiener Akademie, phil.-hist. Klasse, Bd. 118, 1889, p. 1) dieser Ansicht sich angeschlossen, die dem Trieb nach Erkenntnis aus möglichst wenigen unbewiesenen Voraussetzungen widerspricht. Nach ihm ist die neuere Geometrie mit ihrer früheren Gleichgültigkeit gegen prinzipielle Erörterungen diejenige Disziplin (p. 43), die sich am meisten dem Ideal der math. Wissenschaft nähert. Diese Ansicht dürfte wohl nur von wenigen geteilt werden; sie wird am besten durch die ausgezeichnete Darstellung widerlegt, welche M. Pasch in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, gegeben hat.

Vielleicht darf noch folgender Punkt berührt werden. Den älteren Ansichten über die exakte Anschauung wenigstens der einfachsten geometrischen Gebilde (Punkt, geradlinige Strecke, ebene begrenzte Fläche, auch wohl der einfachsten krummen Linien und Flächen, wie Kreis und Kugel) steht eine moderne gegenüber: Wir besitzen überhaupt keine Anschauung selbst von den einfachsten Gebilden; das einzige was wir tatsächlich vorfinden, ist die Vorstellung des Körperlichen, die allerdings aus sehr verschiedenartigen psychologisch-physiologischen Erfahrungen zusammengesetzt ist.

Mit besonderem Nachdruck hat H. Poincaré dieser Ansicht Ausdruck gegeben (Wissenschaft und Hypothese, 2. Aufl., 1906, übersetzt von F. und L. Lindemann, p. 86ff.; der Wert der Wissenschaft, 1906,

in der Ebene zur anschaulichen¹⁾ Darstellung zu bringen, indem man für die Lobatschewskijsche Geometrie die pseudosphärische Fläche

übersetzt von E. und H. Weber, p. 56 ff.; man vergleiche auch die ausführliche Behandlung dieser Fragen bei J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. II, Leipzig 1905, p. 123–147); nach ihm ist der Punkt nichts anderes als ein ganz abstrakter Begriff, der sich bei der Betrachtung der Untergruppen der Bewegungsgruppe ergibt.

Ob diese Ansichten sich dauernd erhalten werden, ist schwer zu sagen. Den rein logischen Standpunkt der modernen Axiomatik, den die Mathematik einnehmen muß, bezeichnet es jedenfalls, wenn Hilbert seine Grundlagen der Geometrie mit den Worten beginnt: „Wir denken Punkte, Gerade und Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue Beschreibung durch die Axiome der Geometrie erfolgt.“ Zweifellos gelingt es so, ein Lehrgebäude zu errichten, das formal der Anschauung nicht weiter bedarf, welches also für jeden Fall gültig ist, in dem man sich gestattet oder veranlaßt sehen kann, jene impliziten Definitionen als zu Recht bestehend in Anspruch zu nehmen. (Vgl. H. Wiener, Deutsche Mathemat. Verein. 1, 1891, p. 45.) Wenn aber diese Axiome unmittelbar darauf als Grundtatsachen der Anschauung von Hilbert bezeichnet werden, so scheint das doch die Voraussetzung einzuschließen, daß man für diese logischen Beziehungen ein anschauliches Substrat finden könne. Und wenn F. Klein (Zur nicht-euklidischen Geometrie, Math. Ann. 37, p. 571) geradezu es als Tatsache hinstellt: „Eine geometrische Betrachtung rein logisch zu führen, ohne mir die Figur, auf welche dieselbe Bezug nimmt, fortgesetzt vor Augen zu halten, ist jedenfalls mir unmöglich“, so scheint zu folgen, daß wenigstens für die einfachsten Gebilde eine exakte, wenn auch vielleicht nur beschränkte Auffassung vorhanden sein muß. Ohne das Vorhandensein einer solchen würde die Zuziehung derselben bei der Untersuchung vollkommen nutzlos, ja unmöglich sein. Mir wenigstens entgleitet die Anschauung oder Vorstellung eines Körpers völlig, wenn ich nicht seine Grenze gegen andere Körper zu erkennen imstande bin; dies führt aber zur Vorstellung der Oberfläche, diese wieder zur Linie, die Linie zum Punkte, wenn auch dabei die Vorstellung der Linie oder Fläche an ganz speziellen Beispielen haften mag. Ich muß es daher für eine psychologische Täuschung halten, wenn die Vorstellung des Körpers als eine ursprüngliche und z. B. der Punkt nur als ein Körper, dessen Teilung sich mit den Beobachtungsgrenzen nicht verträgt, bezeichnet wird, vgl. z. B. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, p. 3.

Doch dies sind Fragen, welche einem Gebiet angehören, in dem, wie É. Picard sagt, „on risque vite de ne se comprendre qu'à demi-mot.“

1) Hilbert zeigte 1901 (Grundlagen der Geometrie, Anhang V, p. 162), daß keine reguläre analytische Fläche vollständig zur Darstel-

Beltrami, für die Riemannsche Geometrie die Kugel wählt. Für die dreidimensionale Auffassung wird man dagegen bequemer sich der Darlegung von Klein bedienen, der ganz allgemein diese verschiedenen Geometrien auf Grund der projektiven Maßbestimmung hergeleitet hat.¹⁾

lung der Lobatschewskijschen Ebene dienen kann, sondern daß jede solche Fläche singuläre Punkte oder Linien haben muß, durch welche die Fortsetzung der geometrischen Konstruktionen gehindert wird, wie wir sie ja auch bei den einfachsten Rotationsflächen dieser Art, z. B. der Pseudosphäre Beltrami kennen. Diese Behauptung läßt sich sogar auf gewisse nicht analytische Flächen ausdehnen.

Die Kugel ist zwar eine singularitätenfreie Fläche konstanter positiver Krümmung, sie bildet aber mit ihrer Geometrie nicht ein umkehrbar eindeutiges Bild der elliptischen Ebene im Sinne von F. Klein, der zuerst in der Geometrie des Strahlenbündels ein vollkommenes Abbild der elliptischen ebenen Geometrie erkannte. Um so merkwürdiger ist es daher, daß diese letztere durch eine von Singularitäten freie ganz im Endlichen liegende geschlossene Fläche im Sinne der Analysis situs dargestellt werden kann. Dies ist von W. Boy (Diss. Göttingen, 1901, Math. Ann. 57, p. 151) gezeigt worden, welcher die projektive Ebene eindeutig umkehrbar auf eine solche Fläche abbildete.

1) Die von Klein gegebene Begründung der projektiven Maßbestimmung (vgl. dessen Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Leipzig 1894, sowie die allgemeinen Bemerkungen in den Math. Ann. 50, p. 583, zur ersten Verteilung des Lobatschewskij-Preises; desgleichen F. Lindemann, Vorl. über Geometrie, Bd. II, Teil 1, p. 432, 1891) wird jetzt auch von philosophischer Seite, z. B. P. Natorp, Zu den logischen Grundlagen der Mathematik, Archiv f. system. Philosophie 2, 7. 1901, p. 201 ff. anerkannt. Allerdings will N. nicht zugeben, daß die metrische Geometrie des Euklid der projektiven untergeordnet sei; dies dürfte aber auf einen bloßen Wortstreit hinauslaufen. Auch seine Bemerkungen a. a. O. p. 382, daß in den nicht-euklidischen Theorien Widersprüche gegen letzte logische Voraussetzungen, z. B. gegen die Stetigkeit und Homogenität des Raumes auftreten, dürfte wohl nur auf einem Mißverständnis beruhen. Ähnliche Einwürfe finden sich auch trotz der sorgfältigen Übersicht über die rein mathematischen Fragen in der Schrift von P. Milau, Beitrag zur Untersuchung der erkenntnistheoretischen Wahrheit der verschiedenen analytisch möglichen Raumformen, Archiv für Math. und Physik 3, 9, 1905, p. 157 und 345.

In den „logischen Grundlagen“ p. 309 ff. hat Natorp seine Ansichten von der „Notwendigkeit des euklidischen Raumes“ noch schärfer ausgesprochen. Sie scheint ihm weder eine absolute Denknötwendigkeit, noch eine reine Erfahrungstatsache noch eine Hypothese zu sein,

Diese Begründung der nicht-euklidischen Geometrien ist nicht den Einwänden ausgesetzt, welchen die auf zweidimensionale Mannigfaltigkeiten bezogenen Untersuchungen zum Teil unterliegen (vgl. Anmerkung 1), die noch immer als Argumente gegen die mathematischen Raumtheorien beliebt sind. Sie ist überdies prinzipiell weit einfacher, weil die geraden Linien und Ebenen als solche und mit ihnen der ganze Inhalt der projektiven Geometrie, den F. Klein als vom Parallelenaxiom unabhängig erkannte, erhalten bleibt, während nur die metrischen Eigenschaften, die Messung der Längen und Winkel, der Begriff der Bewegung und der auf ihm beruhende der Kongruenz in besonderer Weise gefaßt werden müssen.

Seit Riemanns grundlegender Arbeit knüpfen sich diese drei Geometrien, die Euklidische, Lobatschefskijsche und Riemann-Kleinsche, oder die parabolische, hyperbolische und elliptische Geometrie an den Wert einer gewissen Zahl, die bezüglich gleich, größer oder kleiner als Null ist, das schon von Gauß¹⁾ gekannte Krümmungsmaß des Raumes. Bei einem beträchtlichen Werte desselben unterscheiden sich die Aussagen der elliptischen und hyperbolischen Geometrie allerdings wesentlich von denen, die in der euklidischen Geometrie gelten, wo das Krümmungsmaß null ist; der Unterschied wird aber um so geringer ausfallen, je weniger diese positive oder negative Konstante von null verschieden ist. Das heißt aber mit

„sondern eine „notwendige“ Voraussetzung in dem bestimmten Sinne, daß (der euklidische Raum) bedingend ist für „mögliche Erfahrung“ bestimmter: für die eindeutige gesetzmäßige Bestimmtheit von Existenz in der Erfahrung. Er beruht also nicht auf einer Notwendigkeit des Denkens, wohl aber des Erfahrungsdenkens, des Denkens von Existenz. Das Unterscheidende liegt in dem Hinzutritt der Bedingung der Einzigkeit, nicht irgend welcher besonderer räumlicher Bestimmungen, sondern des Zusammenhanges aller der Bestimmungen, die mitsammen die Koexistenz der Dinge gesetzmäßig darstellbar machen. . . . Es bleibt auch richtig, daß der euklidische Raum eine notwendige Bedingung nicht des (allgemeinen, diskursiven) Denkens, sondern der „Anschauung“ sei. Aber die Forderung der Einzigkeit ist selbst eine Forderung des Denkens, nur eben nicht des Denkens überhaupt, sondern des bestimmtesten Denkens, des Denkens der Existenz . . .“ p. 312. — Wo solche schwerwiegende Gründe, wie die Berufung auf „bestimmtestes Denken und Denken von Existenz“ herangezogen werden, hat der Mathematiker freilich zu schweigen.

1) Siehe Anmerkung 3, Seite 84.

anderen Worten: Es kann überhaupt nicht entschieden werden, welche der drei Geometrien notwendig unseren Betrachtungen zugrunde gelegt werden muß; sie sind alle drei gleich brauchbar, wenn es sich um eine widerspruchslose Darstellung geometrischer Verhältnisse handelt, vorausgesetzt, daß Aussagen über Maßverhältnisse, d. h. Beziehungen zwischen Entfernungen und Winkeln usw. nur für die nicht allzuweit entfernten Teile des Raumes, die unserer Anschauung überhaupt allein zugänglich sind, in Anspruch genommen und als gleichwertig angesehen werden, wenn sie in ihren Zahlwerten hinreichend wenig voneinander abweichen. Das euklidische Dreieck hat z. B. als Winkelsumme genau zwei rechte Winkel, das elliptische resp. hyperbolische Dreieck eine etwas größere, resp. kleinere, überhaupt variable Winkelsumme; in der Euklidischen Geometrie gibt es in strengem Sinne ähnliche Figuren, während sie in den beiden anderen Geometrien, solange das Krümmungsmaß nicht zu weit von null sich entfernt, nur näherungsweise auftreten können. Nur das Prinzip der Ökonomie des Denkens legt es uns nahe, die Euklidische Geometrie¹⁾ als die einfachste zu bevorzugen. Und wenn wir uns gestatten, was wir auch bei der Annahme der Euklidischen Geometrie tun müssen, die in uns

1) An den Ergebnissen der nichteuklidischen Theorien, soweit sie dem engeren mathematischen Gebiet angehören, wird gegenwärtig von niemandem gezweifelt; in weiterer Beziehung mögen besonders charakteristisch die Äußerungen eines so hervorragenden Physikers, wie F. Mach (*Erkenntnis und Irrtum*, Leipzig 1905, p. 380–414) über den erkenntnistheoretischen Wert dieser Untersuchungen erscheinen. Um so beharrlicher haben die Philosophen, obwohl sie die begriffliche Möglichkeit der nichteuklidischen Räume nicht länger bestreiten, daran festgehalten, daß denselben die Anschaulichkeit mangelt.

Unter Anschaulichkeit im geometrischen Sinne wird man wohl die Möglichkeit verstehen, gewisse begriffliche Aussagen an den Gegenständen unserer Sinneswahrnehmungen resp. Vorstellungen zu verfolgen. Daß diese geometrische Anschauung nur eine recht dürftige ist, sich zunächst nur auf die bekanntesten und einfachsten Figuren bezieht, ist wohl eine nicht zu bestreitende Tatsache. Sie ist aber entwicklungsfähig. Jeder kennt die eigentümlichen Schwierigkeiten, die das Verständnis stereometrischer Sätze dem Anfänger bereitet. Sie treten im verstärkten Maße auf, wenn wir die nach dem Prinzip der Dualität erzeugten Gebilde, oder die Natur der Singularitäten algebraischer Flächen verfolgen wollen, wenn wir das Verhalten Riemannscher Flächen mit mehrfachem Zusammenhang untersuchen. Hieraus

so erzeugte geometrische Anschauung auf die Beurteilung des sogenannten wahrgenommenen Raums zu übertragen, so werden wir

dürfte folgen, daß über die Anschaulichkeit nur der urteilen kann, der sich mit der Ausbildung der Anschauung beschäftigt hat. In Rücksicht hierauf aber erscheinen die Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie ebenso anschaulich wie die der euklidischen.

Was namentlich nicht-mathematische Schriftsteller als nicht-anschaulichen Charakter der „metageometrischen“ Betrachtungen bezeichnen, beruht darauf, daß dieselben geneigt sind, die Aussagen der nicht-euklidischen Geometrie im Lichte der von vornherein als unbedingt anschaulich vorausgesetzten euklidischen zu betrachten. Daher sei hier noch einmal betont, daß es sich in den nicht-euklidischen Theorien keineswegs nur um eine Umdeutung handelt, die nur auf Grund der euklidischen Geometrie möglich erscheint — allerdings kommen gelegentlich auch solche Darstellungen vor —, sondern um eine der Euklidischen vollkommen gleichberechtigte Entwicklung.

In der neuesten Zeit hat W. Wundt (Logik, 3. Aufl., 1907, Bd. I, p. 478 ff.) seine schon früher gemachten Einwürfe gegen die nicht-euklidischen Raumtheorien wiederholt. Sein erster Einwurf, daß uns nur ein völlig bestimmter Raum, der unserer Anschauung, gegeben sei, und daß, wenn sich in unseren Sinneswahrnehmungen Abweichungen von den Eigenschaften dieses Raumes vorfinden, diese nicht als qualitativ verschiedene Räume, sondern als Sinnestäuschungen aufzufassen seien, scheint mir die Frage überhaupt zu verkennen, um die es sich handelt. Es ist ja gerade die Absicht der Mathematik, zu zeigen, daß über den tatsächlich unserer Anschauung zugrunde liegenden Raum nicht notwendig das ausgesagt werden muß, was die Geometrie des Euklid lehrt. Sie setzt daher den Raum des letzteren nicht fingierten anderen entgegen, sondern behauptet, es sei unmöglich zu entscheiden, welches Axiom der besonderen Natur des Anschauungsraums zugrunde gelegt werden müsse.

Wenn ferner Wundt die Anschaulichkeit der mathematischen Theorie bestreitet, weil sie nur vermöge der Fiktion von zweidimensionalen Wesen (p. 482, 484) gelinge, diese Annahme aber ebensowenig zulässig sei, wie die Beschränkung unserer gegebenen Raumanschauung auf die Ebene, so geht daraus hervor, daß derselbe die allgemeine Entwicklung der nichteuklidischen Verhältnisse im dreidimensionalen Raume, wie sie z. B. von F. Klein schon vor mehr als dreißig Jahren ausgeführt ist, völlig übersehen hat.

Der Mathematiker wird es stets dankbar anerkennen, wenn ihm von anderer Seite Aufklärung über die Vorstellungen und Begriffe seiner Wissenschaft zuteil wird. Was soll man aber mit den Darlegungen Wundts, p. 492 ff., über den Raum anfangen? Es heißt dort: „Nur

gezwungen, der Aussage beizupflichten, daß die Mathematik die Möglichkeit von physischen Räumen lehrt, die von dem Euklidischen

weil der Raum ein Begriff ist, kann er definiert werden; eine Anschauung, die keine begrifflichen Elemente enthielte, würde sich jeder Definition widersetzen. In diese Definition aber dürfen keine Begriffe aufgenommen werden, die den Raum schon voraussetzen.“ Solche (wirklich brauchbare) Begriffe sind die Größe, die Richtung, die Stetigkeit, die Veränderung, die Zahl usw.

Man wird sich vergebens bemühen, einen klaren Sinn mit diesen Worten zu verbinden. Denn was ist Größe und was ist Richtung, Veränderung oder Stetigkeit? Hierüber werden wir auch nicht belehrt, wenn Wundt fortfährt: die allgemeine Definition des Raumes mit Einschluß der fundamentalen Begriffe des Punktes, der Lage, der Geraden und der Raumgebilde, läßt sich hiernach in die vier folgenden Sätze zusammenfassen:

1. Der Raum ist eine stetige und unbegrenzte Größe, in welcher das Einzelne, das nicht in weitere Bestandteile zerlegt werden kann, durch drei unabhängig voneinander veränderliche Richtungen bestimmt wird. Das unzerlegbare Einzelne im Raum heißt Punkt; die Bestimmung irgend eines Einzelnen im Raum durch die drei unabhängigen Richtungen heißt Lage.

2. Jeder beliebige Teil des Raumes kann vom übrigen Raum abgesondert gedacht werden. Ein solcher abgetrennter Teil des Raumes (ein zusammengesetztes Einzelnes) heißt ein Raumgebilde.

3. Jedes Raumgebilde kann in veränderter Lage gedacht werden, ohne daß dadurch das wechselseitige Lageverhältnis beliebig in ihm angenommener Punkte verändert wird. Diese Eigenschaft des Raumes heißt Kongruenz.

4. Zu jeder Richtung im Raume existiert eine entgegengesetzte Richtung von übereinstimmender Lage, und die Lage zweier zusammengehöriger entgegengesetzter Richtungen heißt eine Gerade.

Schließlich heißt es a. a. O., p. 493: „Der Raum ist eine stetige, in sich kongruente, unendliche Größe, in der das unzerlegbare Einzelne durch drei Richtungen bestimmt wird. Die Möglichkeit, den Raum in dieser Weise vollständig durch allgemeinere Begriffe zu definieren, beweist aber unzweideutig, daß derselbe nicht bloß angeschaut, sondern auch begrifflich gedacht werden kann. Da nun weiterhin der Raum als solcher, insofern wir ihn unabhängig denken von einzelnen räumlichen Vorstellungen, nur in dieser begrifflichen Form zu denken ist, so ist die reine Anschauung, die den Gegenstand der Geometrie bildet, in Wahrheit keine Anschauung, sondern ein Begriff“ usw.

Es ist hier nicht der Ort, an einzelnen Wendungen des Ausdruckes Anstoß zu nehmen. So wird z. B. in Nr. 1 „Richtung“ als ein primitiver Begriff aufgefaßt, der erst die Lage bestimmt, während in Nr. 4

Räume abweichen, ohne daß sie die Mittel liefern kann und will, zu entscheiden, ob irgend einem dieser Räume das zukomme, was die

von der „Lage zweier Richtungen“ gesprochen wird. Wesentlich scheint mir das Folgende zu sein. Wenn der Raum eine in Bestandteile zerlegbare Größe ist (die übrigens bald als unbegrenzt, bald als unendlich bezeichnet wird), welchen begrifflichen Inhalt soll nun das „unzerlegbare Einzelne“, welches Punkt heißt, haben? Da ein abgetrennter Teil des Raumes ein „zusammengesetztes Einzelnes“ genannt wird, scheint der Raum aus Punkten zusammengesetzt zu sein. Was soll man nun aber unter der Stetigkeit verstehen? Und wie kann jenes unzerlegbare Einzelne durch „drei unabhängig voneinander veränderliche Richtungen“ bestimmt werden, deren begriffliche Auffassung völlig rätselhaft bleibt? Man kann wohl von zwei gegebenen Punkten aus durch Richtungen (diese Worte im gewöhnlichen Sinne genommen) die Lage eines Punktes bestimmen; wie aber durch „Richtungen“ allein dies möglich sei, erfahren wir leider nicht.

Und mit welchem Rechte kann man überhaupt von der Richtung als einem fundamentalen Anordnungsprinzip sprechen? Ein Haufen gleichartiger Geldstücke hat Größe, das unzerlegbare Einzelne ist hier die einzelne Münze, der Punkt. Sind die Münzen geordnet, so kann man von einer Richtung „vor“ oder „nach“ sprechen, es ist aber unmöglich, von Richtungen überhaupt zu reden. Offenbar liegt dieser Bestimmungsweise des Punktes durch drei Richtungen ein verhüllter Koordinatengedanke zugrunde; dieser verliert aber seine Berechtigung, wenn man den Begriff des Raumes erst beschreiben will. Ähnliche Bedenken hat übrigens schon E. Killing, (Einführung in die Grundlagen der Geometrie II, p. 198) gegen Wundts Raumanalyse geäußert, was ich früher übersehen hatte.

Da der Verfasser den Anspruch erhebt, durch seine Darstellung gewisse von Riemann und Helmholtz gewählte Ausdrucksweisen von ihren logischen Fehlern zu befreien, so durfte man wohl erwarten, hier einer besonders sorgfältigen Darlegung zu begegnen.

Tatsächlich gehören die angewendeten Begriffe, wie Größe, Richtung, Stetigkeit usw. zu den schwierigsten und dunkelsten.

Wie vorsichtig man aber mit solchen allgemeinen Phrasen, wie Stetigkeit oder Kontinuität usw. sein muß, möge noch folgende Betrachtung zeigen.

Die Geometrie des Euklid — und um diese handelt es sich hier ja wohl — untersucht die Beziehungen der gegenseitigen Lage von geraden und krummen Linien, welche durch algebraische Gleichungen zwischen den Koordinaten gegeben sind, in Rücksicht auf die metrischen Verhältnisse, welche von der Entfernung abhängen, die selbst durch den Satz des Pythagoras bestimmt wird. Bei allen diesen Untersuchungen werden nur algebraische Zahlen eingeführt, daher wird auch

naive Ansicht unter Wirklichkeit versteht¹⁾; jeder dieser Räume kann

das räumliche Kontinuum nicht völlig in Anspruch genommen, sondern nur das abzählbare algebraische „Kontinuum erster Art“ nach Poincarés Bezeichnung, sowie man sich verpflichtet, als Elemente der geometrischen Forschung nur solche Gebilde (Punkte, Linien, Flächen) anzunehmen, die durch algebraische Gleichungen mit rationalen Koeffizienten definiert sind, oder deren Bestimmungskonstanten von solchen Gleichungen abhängen.

Dieser Dedekindsche Raum (R. Dedekind, Was sind, und was sollen die Zahlen, 2. Aufl., Braunschweig 1893, p. XII), der aus den Punkten P aufgebaut werden kann, deren Entfernungsverhältnisse von drei Punkten A, B, C durch algebraische Zahlen ausgedrückt werden, während die Verhältnisse der AB, BC, CA ebenfalls algebraische Zahlen sind, würde sogar für alle geometrischen Untersuchungen des praktischen Lebens ausreichen, obgleich wir in ihm die Vorstellung der Bewegung, die der nicht algebraischen Zahlen und damit die allgemeine theoretische Trigonometrie, sowie endlich die Methoden der Differential- und Integralrechnung nebst ihren Anwendungen auf Mechanik und Physik entbehren müßten. Wie wenig angebracht erscheint es daher, von der Stetigkeit des Raumes als einem ganz selbstverständlichen Begriffe zu sprechen, wenn man nicht vorher genau angegeben hat, was damit gemeint sein soll.

Es sei gestattet, noch folgenden Punkt zu berühren. Auf p. 483 sagt Wundt: „Gauß meinte, der Begriff der Zahl sei, unabhängig von den Eigenschaften der empirischen Dinge, ein reines Produkt der logischen Funktion, die Raumgebilde dagegen seien abstrakte Verallgemeinerungen der empirischen Eigenschaften der Körper. Ein Unterschied zwischen den Begriffen der Zahl und des Raumes, wie ihn hier Gauß

(Fortsetzung siehe Seite 95.)

1) Man hat zuweilen gesucht, die tatsächliche Wahrheit der euklidischen Geometrie durch Messungen, z. B. von der Summe der drei Winkel im Dreieck, zu bestätigen. Auch Gauß soll sich so ausgedrückt haben (Sartorius von Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis, p. 81). Indessen bemerkt schon Helmholtz, daß eine solche Messung — ganz abgesehen davon, daß eine empirische Messung nie einen geometrischen Satz liefern kann — immer auf der Voraussetzung von der Unveränderlichkeit der Meßwerkzeuge bei der Bewegung beruht, so daß ein Zirkelschluß vorzuliegen scheint (Helmholtz, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, 1870, Vorträge und Reden, Bd. II, p. 23). Poincaré sagt (Bull. des Sc. Mathém., Bd. 37, 1902, p. 249) „Plusieurs personnes croyaient même que l'expérience pouvait leur donner une réponse à cette question. Inutile, d'ajouter, que c'était là méconnaître complètement la nature de la géométrie, qui n'est une science expérimentale.“

also mit demselben Rechte als ein hinreichend vollkommenes Bild derselben angesehen werden.¹⁾

statuierte, existiert aber tatsächlich nicht. Die Eigenschaften der Zahlen sind genau in demselben Sinne von der Erfahrung abhängig, wie die des Raumes. Denn ohne die empirische Existenz

(Fortsetzung siehe Seite 96.)

1) Demgegenüber spricht v. Helmholtz, a. a. O., p. 259 der Beilage III zu dem Vortrage über die Tatsachen der Wahrnehmung von einer physischen Geometrie. Ich kann trotz der ausführlichen Erörterungen, welche H. in bezug auf diese Fragen gegenüber dem Einwurfe von Land (daß er die Begriffe des Objektiven und Realen verwechselt habe) angestellt hat (a. a. O., p. 266), eine klare Vorstellung mit dieser physischen Geometrie nicht verbinden. Zweifellos gibt es eine Menge von sogenannten „Tatsachen der Wahrnehmung“, welche auf der unbestimmten Idee von kongruenten Räumen und der Beziehungen in denselben beruhen. Aber die Behauptung, „daß die Axiome der Geometrie bestimmt werden nicht bloß von Formen des Vorstellens, sondern von Verhältnissen der realen Welt“, wird jedem widerstreben, der in den Axiomen zwar nicht gänzlich willkürliche, aus der Luft gegriffene begriffliche Vorstellungen, aber doch über jede Wahrnehmung hinausgehende Aussagen unseres begrifflichen Denkens erkennt. Helmholtz verlängert zwei Seiten eines „gleichseitigen Dreieckes“ über ihre gemeinsame Ecke um gleiche Stücke, so daß ein neues Dreieck entsteht. Ist dies nun wieder „gleichseitig“? Das Resultat von Messungen kann zu dieser Entscheidung niemals führen, sondern nur die Vermutung aufkommen lassen, daß es so sein könne. Wohl aber läßt sich mit Hilfe der Kongruenzsätze und des Parallelenaxioms zeigen, daß dies begrifflich so sein müsse, und erst dann hat man einen geometrischen Satz. Was H. physische Geometrie nennt, sind nur unbestimmte Gebilde unserer durch einzelne Wahrnehmungen geleiteten Phantasie, denen keine Bestimmtheit zukommt, wenn gleich sich aus solchen die Wissenschaft der Geometrie herausbildet.

Alle Sätze dieser sogenannten physischen Geometrie werden erst Lehrsätze eines geometrischen Systems, wenn wir sie aus allgemeinen Prinzipien unserer Gedankenbildung als notwendig erkennen. Keine noch so große Anzahl wiederholter Beobachtungen kann uns die Existenz auch nur der einfachsten Sätze verbürgen.

Dagegen gibt es wohl eine Vorstufe der geometrischen Ideenbildung, welche als propädeutischer Unterrichtsgegenstand nützlich sein kann, wie sie z. B. E. Mach in seinem Werke Irrtum und Erkenntnis, zur Psychologie und natürlichen Entwicklung der Geometrie, p. 347–381, so anregend geschildert hat; man vergleiche auch die Darstellung von J. Wellstein in der Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. II, Buch 1, Abschnitt 1 und 2.

Aber wir haben noch einen Einwurf zurückzuweisen. Woher stammt die Überzeugung von der Widerspruchslosigkeit dieser fremd-

diskreter Gegenstände würden die Zahlen ebensowenig existieren, wie der Raum der Geometrie ohne Körper mit annähernd ebenen Flächen“ usw.

Die triviale Wahrheit, daß ohne das Vorhandensein von diskreten sinnlich empfundenen Objekten, zu denen übrigens Wundt p. 510 auch Ereignisse, Eigenschaften usw. rechnet, eine Veranlassung zum Zählen wohl nicht eintrete, ist ja nicht zu bestreiten; daß aber auch die Eigenschaften der Zahlen nun in demselben Sinne von der Erfahrung abhängig seien, wie die des Raumes, ist damit keineswegs bewiesen, und die bloße Behauptung Wundts bleibt um so unverständlicher, als er p. 510 geradezu ausspricht: „der eigentliche Träger des Begriffes der Einheit ist der einzelne Denkakt; die Funktion des Zählens besteht immer in einer Verbindung einer Denkakte zu zusammengesetzten Einheiten“, und ebenso heißt es p. 489: „wir reflektieren bei der Zahl nur auf den Akt der Apperzeption.“ Das heißt doch mit anderen Worten, daß die „Eigenschaften“ der Zahlen nicht mehr von den empirischen Gegenständen, sondern insoweit sie überhaupt der Reflexion unterliegen, auf einer Verarbeitung der Apperzeption beruhen.

Und nun ist es eine Tatsache, daß die Verknüpfung dieser Denkakte beim Zählen in einer völlig bestimmten und in sich abgeschlossenen Weise sich ausführen läßt, deren Inbegriff die arithmetischen Regeln bilden, während die begriffliche Verwendung der geometrischen Fundamentalgebilde, Punkt, Ebene und gerade Linie außer den durch die üblichen Axiome festgelegten Definitionen derselben noch immer (mindestens) ein weiteres Axiom erfordert, wenn eine abgeschlossene und für die tatsächlichen Anforderungen ausreichende Geometrie entwickelt werden soll. Dies ist gerade das was Gauß „meinte“, und es ist schwer begreiflich, wie Wundt dies völlig übersehen konnte.

Bei dem großen Interesse, welches die ausführliche Berücksichtigung der Mathematik in dem großen Werke eines so ausgezeichneten Forschers, wie Wundt, erfahren hat, wäre es sehr zu wünschen, wenn von dazu berufener Seite eine eingehende Kritik seiner Darlegungen, soweit sie die Mathematik betreffen, unternommen würde. Einen Anfang dazu hat H. Burkhardt (siehe Anm. 2, S. 39) gemacht, leider sind dessen eingehende Bemerkungen von Wundt völlig unbeachtet gelassen. Es ist das umsomehr zu bedauern, als wegen der zahlreichen Mißverständnisse, welche namentlich der zweite Teil des Werkes, der sich ausführlicher mit den speziellen Disziplinen der Mathematik beschäftigt, auch manche an sich feinsinnige und richtige Bemerkung Wundts für den Mathematiker ihren Wert zu verlieren scheint, an den sie doch nach der Meinung des Verfassers gerichtet ist, während eine gemeinsame Verständigung über die Grundbegriffe der Mathematik gerade in der Gegenwart von dem größten Interesse sein würde.

artigen Räume, zu denen sich sogar noch andere hinzufügen ließen. Wir entnehmen sie zunächst aus der Tatsache, daß jedem Satze der euklidischen Geometrie ein analoger Satz in den beiden anderen Geometrien zur Seite steht, der widerspruchslos ist, wenn er im euklidischen Raum gilt und umgekehrt. Entweder führt also jede dieser Geometrien auf Widersprüche oder keine derselben. Nun ist aber die euklidische Geometrie in sich widerspruchslos, denn wir können ihr vermöge der analytischen Geometrie ein rein intelligibles Reich der Zahlen derart zuordnen, daß jeder Satz der euklidischen Geometrie seine Begründung in einem rein arithmetischen Satze findet. Damit ist aber die Widerspruchslosigkeit der nichteuklidischen Geometrie dargetan, falls nur für die arithmetischen Sätze dieselbe stattfindet.¹⁾

Aber dies sind nur die ersten Anfänge einer weit tiefer gehenden Forschung, welche durch die Untersuchungen der italienischen Mathematiker, Peanos und seiner Schule, sowie durch Hilberts berühmte Grundlagen der Geometrie, eingeleitet ist. Der Zweifel an dem euklidischen Parallelenaxiom ist nur ein zufälliger, durch die geschichtliche Entwicklung veranlaßter Ansatz; wir haben offenbar zu fragen: Welches sind die notwendigen Postulate der Anschauung, auf die sich überhaupt eine in sich widerspruchsslose vollständige Geometrie aufbauen läßt? Unter notwendigen Postulaten verstehen wir dabei solche, die an sich ausreichend sind zur Beantwortung aller Fragen, die wir aufwerfen wollen, und die zugleich voneinander als unabhängig sich erweisen, d. h. nicht auf eine noch kleinere Anzahl reduziert werden können.

Wir können hier nicht auf die scharfsinnigen Untersuchungen der genannten Mathematiker eingehen, sondern bemerken nur das Prinzip, das bei der Beantwortung dieser rein logischen Fragen mit dem glänzendsten Erfolge angewandt ist: Um zu beweisen, daß ein Postulat q von einer Reihe anderer Postulate $q_1, q_2, \dots, q_n$ unabhängig ist, muß man die Existenz einer Mannigfaltigkeit dartun, in welcher alle Postulate $q_1, q_2, \dots, q_n$ mit Ausnahme des einzigen q erfüllt sind.

Auf diesem Wege ist es gelungen, eine ganze Reihe neuer, zum Teil recht fremdartiger Geometrien auszubilden, je nachdem man das eine oder andere für unsere Vorstellung zunächst wesentlich scheinende Po-

1) Siehe Hilbert, Grundlagen der Geometrie, p. 18; man vgl. auch F. Hausdorff, das Raumproblem, Ann. d. Naturphilosophie, III, p. 1 (1903).

stulat fortläßt, und zugleich jede dieser Geometrien auf ihre Grundlagen zurückzuführen.

Zu so allgemein übereinstimmenden Auffassungen wie in der Geometrie, ist man bisher auf dem zweiten großen Anwendungsgebiete der reinen Mathematik, der Mechanik, noch nicht gelangt. Hier stehen sich noch immer grundverschiedene Ansichten gegenüber. Wir weisen darauf hin, daß, während einige das Vorhandensein eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit im Sinne Newtons als ein notwendiges Postulat ansehen, anderen diese Vorstellungen als in sich widersprechend, ja unmöglich, erscheinen. Auf diese und ähnliche Fragen, die wie es scheint gegenwärtig noch ein jeder nach seiner persönlichen Auffassung mit den Forderungen an eine Mechanik, die nicht nur ein abstraktes Lehrgebäude sein, sondern vermöge der rationellen Entwicklung oder Darlegung ihrer Grundbegriffe zugleich eine sichere Anwendung auf die Beschreibung der Veränderungen in der physischen Welt verbürgen will, werden wir hier nicht eingehen.¹⁾

1) Siehe die Äußerungen von H. Weber, Enzyklopädie der Elementarmathematik Bd. II p. 589, und von H. Poincaré, der Wert der Wissenschaft, deutsch von E. und H. Weber, Leipzig 1906, p. 217 ff. Übrigens geht die Mechanik von weit spezielleren Voraussetzungen hinsichtlich der in ihr zur Verwendung kommenden geometrischen Gebilde aus; wird eine Kurve durch Bewegung eines Punktes im Sinne der Mechanik beschrieben, und ordnen wir gleichzeitig derselben die Bewegung in den Evoluten dieser Kurve zu, so handelt es sich um unbeschränkt differenzierbare Kurven, die meistens wohl als analytisch vorausgesetzt werden.

Es gibt allerdings, außer diesen begrifflichen wohl nur durch geeignete erkenntnistheoretische Konventionen zu lösenden Schwierigkeiten, noch manche andere Gründe, welche eine allgemeine Untersuchung der Grundlagen der Mechanik gegenwärtig mehr denn je erschweren. Ich rechne dahin insbesondere die hypothetische Annahme einer konstanten Masse, welche für die Newtonsche Mechanik wesentlich ist.

Diese Annahme, welche eine völlig befriedigende Theorie der Bewegung der ponderablen Materie im alten Sinne — bis etwa auf die Erscheinungen, die beim Stoß auftreten — liefert, kann allerdings auch dann noch festgehalten werden, wenn es sich um ein von ponderabler Materie freies, lediglich nach den Gesetzen der elektromagnetischen Strahlungstheorie aufgebautes System handelt. Jeder ponderable Körper aber, der sich im Bewegungszustande befindet, enthält neben der Energie seiner fortschreitenden Bewegung noch einen zweiten Energiebestandteil, die an jener Bewegung teilnehmende Energie

Auch hier haben die Grundsätze, von denen die Axiomatik ausgeht, schon zu manchen schönen Resultaten geführt¹⁾, freilich auch die Anzahl der bisher stillschweigend als „selbstverständlich“ angesehenen Voraussetzungen immer größer erscheinen lassen. Aber noch immer erwarten wir den Geist, der es verstehen wird, hier in ähnlicher Weise, wie es Cauchy in der Infinitesimalrechnung gelang, bahnbrechend aufzutreten.²⁾

der strahlenden Wärme, und diese beiden Teile der Energie lassen sich nicht so von einander trennen, daß der eine ausschließlich durch den gewohnten Massenbegriff bestimmt bleibt.

Definiert man nämlich die Masse durch die kinetische Energie, so geht in die letztere ein von dem thermodynamischen Zustand des Systems, also auch von seiner Temperatur, abhängiger Betrag ein, und dies bedingt, daß die Masse nicht mehr als konstant angesehen werden kann. Zu demselben Resultat gelangt man aber auch dann, wenn man die Bewegungsgröße definieren wollte.

Wenn nun H. Hertz noch die analytische Mechanik auf den drei fundamentalen Begriffen des Raumes, der Zeit und der ihrem Wesen nach konstanten Massenzahl — welch letztere, als Zahl der Atome in einem bestimmten Volumen gefaßt, wie ein letzter Rest scholastischer Vorstellungen seinen Darlegungen noch anzuhaften scheint — aufbaute, so wird man sich doch daran gewöhnen müssen, diese Vorstellung als eine erste Annäherung anzusehen, welche allerdings zur Beurteilung der Fragen, bei denen die thermodynamischen Verhältnisse sich nur wenig von einem mittleren Zustande, ausreicht. Die Schwierigkeit kann auch nicht, wie M. Planck hervorhebt, durch die Unterscheidung von wahrer und scheinbarer Masse beseitigt werden. Denn die wahre Masse, als rein begriffliche Vorstellung, hat denn wohl Unveränderlichkeit erlangt, aber ihr fehlt dann die Beziehung zur kinetischen Energie oder der Bewegungsgröße, welche die Mechanik nicht aufgeben kann.

Und so entsteht nun die Aufgabe, die Mechanik so auszubilden, daß ihre Grundlagen auch mit den oben bezeichneten erweiterten Anforderung, welche das allgemeine Energieprinzip stellt, in Einklang gesetzt werden. Man vergleiche die neuerdings erschienenen Darlegungen von M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, Ber. d. Berliner Akad. 1907, Wiedemanns Annalen Bd. 25, 1908 und Annalen d. Naturphilosophie Bd. VII p. 296, 1908.

1) So namentlich die Untersuchungen G. Hamels, man vgl. auch dessen Elementare Mechanik, Leipzig 1912.

2) Vgl. A. Voß, die Prinzipien der rationellen Mechanik, Enzyklopädie d. Math. Wiss. Bd. IV, 1. Inzwischen beginnt dieser Aufsatz, durch die Sorgfalt von E. und F. Cosserat in ausgezeichnete Weise bereichert, in der französischen Bearbeitung der deutschen Enzyklopädie zu erscheinen.

Indes dürfen wir wohl nicht an den so tief eingreifenden Gesichtspunkten der Relativitätstheorie, der „*mécanique nouvelle*“ nach Poincaré, vorbeigehen.

Die Gleichungen der „klassischen“ Mechanik gelten, wenn auch zunächst auf ein als absolut ruhend gedachtes System bezogen, für jedes andere das sich zu dem genannten in einer gleichförmigen geradlinigen Translation befindet. In dieser Mechanik, welche die Begriffe des Ortes x, y, z , der Zeit t und der Masse m als von einander unabhängig voraussetzt, sind die Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes

$$mx'' = X, my'' = Y, mz'' = Z$$

wobei die Newtonschen Kraftkomponenten X, Y, Z Funktionen der Koordinaten, der Geschwindigkeitskomponenten und der Zeit sind. Als Vektorgleichungen sind sie invariant bei allen zeitlosen Änderungen des Koordinatensystems, aber auch in bezug auf die Koordinaten x_1, y_1, z_1 , der Galilei-Transformation $x = x_1 + ut, y = y_1 + vt, z = z_1 + wt$ bleiben die linken Seiten ungeändert, und zugleich die rechten, wenn die Kräfte nur von den Differenzen der Koordinaten und Geschwindigkeiten gegen andere Punkte, die an der Transformation teilnehmen, abhängen.

Aber die elektromagnetische Lichttheorie und die mit der tatsächlichen Bewegung des Lichtes zusammenhängenden Erscheinungen drängen zu einer allgemeineren Vorstellung. Aus den Versuchen von A. Michelson (seit 1881) schließt man, daß die Lichtbewegung des Äthers sich nach allen Richtungen gleichförmig mit der Geschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm, sec. fortpflanzt. Hierin läge keine Schwierigkeit, wenn man annehmen dürfte, daß der Äther bei bewegter Lichtquelle an der Bewegung derselben teilnimmt. Eine „Mitführung“ des Äthers in diesem Betrage ist aber nach Fizeaus Versuchen nicht vorhanden und steht auch im Widerspruch mit der Aberration des Lichtes und anderen Erscheinungen.

Zu einer widerspruchsslosen Auffassung führen dagegen die kühnen Ideen, welche H. A. Lorentz 1895, A. Einstein 1905 und H. Minkowski 1908 entwickelt haben. Sie beseitigen den Begriff einer für alle gleichförmig gegeneinander translatorisch bewegte Koordinatensysteme verbindlichen Zeit und führen an Stelle derselben den Begriff des Weltpunktes, d. h. der Vorstellung eines Systems von vier Zahlen x, y, z, t ein, welches den ort-zeitlichen Zustand eines Raumpunktes bezeichnet.

Damit entsteht die Frage, wie man die Erscheinungen in der Natur in bezug auf gegeneinander so bewegte Systeme beschreiben kann. Dabei handelt es sich in Analogie zu den linearen Galilei-Transformationen der klassischen Mechanik um die sogenannten Lorentztransformationen.

Die Einführung läßt sich auf verschiedene Art bewirken, je nachdem man eine auf axiomatischen Begriffen oder eine direkt auf physikalischen Tatsachen beruhende Theorie gewinnen will.

Nach Minkowski¹⁾ sind „Gegenstand unserer Wahrnehmungen immer nur Orte und Zeiten verbunden. Es hat niemand einen Ort anders bemerkt als zu einer Zeit, eine Zeit anders als an einem Orte.“ Die Zeit nun kann an jedem Orte — zunächst in bezug auf ein im „Äther“ ruhendes System — durch ein Zählwerk, eine Uhr gemessen werden, aber damit ist weder die Gleichförmigkeit der Angaben jeder einzelnen Uhr, noch die Vergleichbarkeit der Angaben verschiedener Uhren an verschiedenen Standorten noch die Angabe eines Koordinatensystems, durch welches jene Uhren fixiert sind und der Begriff der Geschwindigkeit gesichert. Dies wird ermöglicht durch die Methode der Lichtsignale, und durch eine genaue Analyse der Begriffe Zeit, Raum, Geschwindigkeit, gelangt E. V. Huntington²⁾ in einer äußerst klar geschriebenen

1) Naturforscherversammlung zu Köln, 1908. Jahresb. d. D. Math. Verein. Bd. 18, p. 75, 1909.

2) E. V. Huntington, Festschrift zu H. Webers siebenzigstem Geburtstag, Leipzig 1912, p. 147. Man vgl. auch die schon früher erschienene, eine ähnliche Tendenz verfolgende gründliche Darlegung bei H. v. Mangoldt, Längen- und Zeitmessung in der Relativitätstheorie, Physikal. Zeitschrift Bd. 11, p. 737, 1910, sowie die populäre Darstellung von H. Poincaré, die neue Mechanik, Leipzig 1911. Bei von Mangoldt lauten die Transformationen

$$x = \beta (x_1 + v t_1)$$

$$t = \beta \left(x_1 \frac{v}{c^2} + t_1 \right),$$

wo die Konstante β bei passender Festsetzung der Zeiteinheit im gestrichenen Koordinatensystem mit der als Lichtgeschwindigkeit zu deutenden Konstanten c durch die Gleichung $\beta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$ verbunden ist und das bewegte System $S' (x_1, y_1, z_1)$ mit dem Anfange O' sich parallel mit den Achsen des ruhenden $S (x, y, z)$ sich so verschiebt, daß O' auf der X -Achse des letzteren mit der Geschwindigkeit v fort-

Arbeit zu den Beziehungen, welche die „Zeitorte, x, y, z, t eines Systemes S mit den Zeitorten x_1, y_1, z_1, t_1 , eines gegen dasselbe gleichförmig translatorisch bewegten Systemes S' verbinden, d. h. zu den Lorentztransformationen, wobei eine spezielle Bewegung von S' gegen S ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden kann.

Dabei ergibt sich, daß in jedem der beiden Systeme S, S' die zu einem Punkte mit den bezüglichen Koordinaten $x, y, z; x_1, y_1, z_1$, deren Abstände von den Anfängen O und O' der Systeme r und r' sind, gehörigen Zeiten durch $\frac{r}{c}, \frac{r_1}{c}$ ausgedrückt werden, falls man den Anfangspunkten O und C' beidemale die Zeit $t = t_1 = 0$ zuerteilt. Die Betrachtung ist aber auch im Einklang mit Einsteins Definition des Zeitbegriffes.¹⁾ Definiert man nämlich wie vorhin die Zeit in einem ruhenden Koordinatensystem durch ein System „identischer“ an allen Punkten aufgestellter Uhren, derart, daß, falls im Anfang A desselben die Uhr die Zeit t_A zeigt, die Uhr in B die Zeit $t_A + \frac{AB}{c}$ markiert, in dem Augenblicke, wo das von A ausgehende Lichtsignal den Punkt B erreicht, so laufen diese Uhren „synchron“ inbezug auf den Normalpunkt A ; sie verhalten sich aber ebenso inbezug auf jeden anderen Punkt A_1 ²⁾.

schreitet. Bei Huntington sind die Formeln noch unter etwas allgemeineren Annahmen entwickelt.

1) A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. d. Physik, Bd. 17, p. 891, 1905.

2) Denn im Augenblicke, wo das A zur Zeit t_A mit der Geschwindigkeit C ausgesandte Signal den Punkt B erreicht, zeigt dort definitionsmäßig die Uhr $t_A + \frac{AB}{c}$ und die Uhr in A zeigt dieselbe Stellung. Ebenso ist es für einen zweiten Punkt C , und so folgt, daß im Augenblicke, wo die Uhr in A auf $t_A + \frac{AB + AC}{c}$ steht in beiden Punkten B und C dieselbe Zeigerstellung stattfindet. Läßt man nun ein Signal von A nach A_1 in diesem Momente gehen, so zeigen die Uhren in A und A_1 beim Empfange derselben in A_1 die Zeit $t_A + \frac{AB + AC + AA'}{c} = (t)_A$; geht in diesem letzten Momente, wo die Uhren in B und C dieselbe Zeit $(t)_B = (t)_C = (t)_A$ aufweisen ein Strahl von B nach C , so langt er dort nach der Zeit $\frac{BC}{c}$ in C an. Es ist also die Zeit beim Ablassen des Signals in B gleich $(t)_B$, während im Augenblicke des Empfanges die Uhr in C die Zeit $(t)_C + \frac{BC}{c}$ zeigt. Das heißt aber: auch in bezug auf den Punkt A_1

Stellt man jetzt mit Einstein die Forderung, daß die partiellen Differentialgleichungen der kugelförmigen Lichtwellen in sich transformiert werden müssen, so ergeben sich ebenfalls die Lorentztransformationen. Und zwar sind sie hier charakterisiert als diejenigen linearen Transformationen, welche die Identität

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 t_1^2$$

bewirken, während bei der vorhergehenden Betrachtung diese Gleichung als eine notwendige Folge erscheint. Damit werden aber nun die Gesetze der Mechanik invariant in bezug auf alle zu einander in gleichförmiger Translationsbewegung befindliche Systeme, wie es das Relativitätsprinzip verlangt.

Die Folgerungen aus dieser Theorie erscheinen zunächst ungewöhnlich. (Indes ist darauf hinzuweisen, daß auch schon die Vorgänge, welche bei beliebig gegeneinander bewegten Systemen in der Galilei-Newtonschen je nach dem Standpunkte des Beobachters eintreten, nicht unmittelbar verständlich, voraussehbar und anschaulich sind.) Ereignisse, die in einem System gleichzeitig sind, sind es nicht mehr in einem zu ihm bewegten. Vielmehr scheint eine Uhr im bewegten System für den Beobachter im ruhenden langsamer zu gehen; auch die Längenabmessungen erfahren für den letzteren eine scheinbare Verkürzung. Das Parallelogramm der Geschwindigkeiten, d. h. die Addition der Vektoren muß durch Einsteins „Additionstheorem der Geschwindigkeiten“ ersetzt werden. Dafür werden nun aber gerade die Erscheinungen der Aberration, das Dopplersche Prinzip und andere, wie Fizeaus Mitführungskoeffizient, widerspruchlos begreiflich.¹⁾

So wird nun die Gesamtheit der Lorentztransformationen, für die Minkowski in der abstrakten Idee eines vierdimensionalen Raumes x, y, z, t ein für den Mathematiker und Physiker übersichtliches Bild geschaffen hat, nicht allein für die elektromagnetische Lichttheorie, sondern für die Mechanik selbst von dem größten Interesse.

ist der Unterschied der Zeigerstellungen in B und C beim Abgange von B und bei der Ankunft in C gleich $\frac{BC}{c}$ oder die Uhren sind synchron auch für den beliebigen Punkt A_1 .

1) Vgl. z. B. M. Laue, das Relativitätsprinzip, Braunschweig 1911, p. 89, 133.

Während die klassische Mechanik von den Formeln

$$\frac{d}{dt}(mx') = X, \quad \frac{d}{dt}(my') = Y, \quad \frac{d}{dt}(mz') = Z$$

ausgeht, in denen x', y', z' die Geschwindigkeits-, X, Y, Z die Kraftkomponenten, m eine von Ort und Zeit unabhängige Konstante, die Masse ist, tritt an Stelle derselben ein ganz anderes System, welches wieder invarianten Charakter in bezug auf die Lorentzgruppe besitzt, nämlich

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x' \right) = X \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad 1)$$

oder kürzer

$$\frac{d}{dt} (\mu k x') = \frac{X}{k}$$

nebst den entsprechenden Gleichungen für y und z ; dabei ist $v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ und $k \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$ gesetzt, und μ ist die sogenannte „Ruhmasse“.

Nun entsteht also ein neuer Massenbegriff, denn als Masse des sich bewegenden Punktes wird man zunächst den Faktor $m = \mu k$ anzusehen geneigt sein. Aber noch weiter: die Formel selbst macht die Masse nicht nur von der Größe der Geschwindigkeit v des sich bewegenden Punktes, sondern auch von ihrer Richtung abhängig.²⁾

Die Lorentztransformationen sind nur dann reell, wenn c größer (im extremen Falle gleich) v ist. So ist man gezwungen, c als eine un-

1) Vgl. die umfassende Behandlung bei M. Laue, und die Darstellung von A. Brill, das Relativitätsprinzip, Jahresb. d. D. Math. Verein. Bd. 21, p. 60 (1912).

2) Multipliziert man die Differentialgleichungen der Bewegung im Text mit den Richtungskosinus α, β, γ , so folgt:

$$\frac{1}{k} (\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = (\alpha x' + \beta y' + \gamma z') \frac{d(\mu k)}{dt} + \mu k (\alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'').$$

Das heißt, für alle zur Geschwindigkeit v senkrechten Richtungen $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = v$ ist die Masse μk ; sie heißt die transversale Masse.

Wählt man dagegen die $\alpha \beta \gamma$ gleich $\frac{x'}{v}, \frac{y'}{v}, \frac{z'}{v}$, so folgt

$$\frac{Xx' + Yy' + Zz'}{vk} = v \frac{d}{dt} (\mu k) + \frac{\mu k}{v} (x'x'' + y'y'' + z'z'');$$

da nun

überschreitbare Geschwindigkeit anzusehen, d. h. dem c die Rolle des Unendlichen zuzuweisen, was übrigens damit im Einklang ist, daß auch bei der Zusammensetzung von Unterlichtgeschwindigkeiten v_1, v_2 nach dem Additionstheorem niemals die Resultante $\geq c$ werden kann.

Damit erweist sich die klassische Mechanik als Grenzfall der neuen für $c = \infty$, wie aus den vorhin angegebenen Formeln ersichtlich ist. Und so wird verständlich, daß, solange die Geschwindigkeiten v — wie dies bei den „gewöhnlichen“ Bewegungen ponderabler Teilchen zutrifft — gegen c genügend klein sind, die Folgerungen der Relativitätstheorie, so paradox sie auch zu sein scheinen, niemals im Widerspruch mit denen der alten Mechanik stehen. Würde man $\frac{1}{c^2}$ als „Krümmungsmaß“ bezeichnen, so hat man in allen diesen paradoxen Erscheinungen ein Analogon zu den nichteuklidischen Theorien der Geometrie¹⁾.

Nach diesen Ausblicken auf Untersuchungen, die durch die Beziehungen, welche sie zwischen scheinbar ganz getrennten mathematischen Spekulationen eröffnen, von mannigfachem Interesse erscheinen, wenden wir uns wieder der reinen Mathematik zu.

Da erhebt sich endlich noch eine fundamentale Frage. Sind denn die arithmetischen Regeln oder Postulate selbst untereinander widerspruchsslos vereinbar, sind sie auch formal voneinander unabhängig? Wäre es nicht möglich, daß hier ein ähnlicher Prozeß der Sichtung eintreten könne, wie wir ihn an den Postulaten

$$\frac{d}{dt}(\mu k) = \frac{\mu v k^3}{c^2} \frac{dv}{dt} \text{ und } x'x'' + y'y'' + z'z'' = v \frac{dv}{dt},$$

so wird aus der rechten Seite $\mu k^3 \frac{dv}{dt}$, so daß als longitudinale Masse μk^3 bezeichnet werden muß.

1) Schon A. Sommerfeld hat auf den Zusammenhang des Einsteinschen Additionstheorems mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie mit imaginären Seiten hingewiesen, während Minkowski durch Einführung der imaginären Zeit $t = i\tau$ den Anschluß an die nicht-euklidische Geometrie im Raum von vier Dimensionen erreichte. Man vgl. insbesondere F. Klein, Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe, Jahresb. d. D. M. V. Bd. 19, p. 281, 1910; desgl. L. Heffter, Zur Einführung in die vierdimensionale Welt Minkowskis, daselbst Bd. 21, p. 1, 1912. Am lebhaftesten hat eine nicht bloß formale nicht-euklidische Interpretation der Relativitätstheorie ihren Ausdruck gefunden durch v. Varicák, daselbst Bd. 21, p. 103.

der Geometrie haben entstehen sehen? Es gilt also, die Aussagen der Arithmetik in solche zu verwandeln, welche den rein logischen Schließformen völlig adäquat sind. Ist dies gelungen, so gelangen wir zur allgemeinsten Auffassung vom Wesen der Mathematik: Mathematik ist die Gesamtheit aller rein logischen Schlüsse, die vermöge der durch axiomatische Festsetzungen über die Verknüpfung gewisser Symbole, den Zahlzeichen — dieselben im weitesten Sinne genommen — aus diesen sogenannten „impliziten Definitionen“ gezogen werden können, insofern kann man sie auch symbolische Logik nennen.¹⁾

1) Der deduktive Aufbau der Geometrie, dann aber auch der Arithmetik, ist wohl zuerst von den italienischen Mathematikern in Angriff genommen; er beginnt mit Peanos Schriften, *Arithmetices principia nova Methodo exposita*, *I Principii di geometria logicamente exposita*, Turin 1889. Jede Wissenschaft muß gewisse letzte undefinierte Vorstellungen als geläufig voraussetzen. In der Arithmetik werden diese bezeichnet durch gewisse undefinierte Symbole, deren Verknüpfung durch ein System von Postulaten beschrieben wird. Von dem System der letzteren fordert A. Padoa, *Un nouveau système irréductible de postulats pour l'algèbre*, Congrès intern. à Paris (1900), erstens die widerspruchsslose Verträglichkeit, zweitens die Irreduzibilität, drittens die Irreduzibilität der Symbole in ihrer Beziehung zum System der Postulate.

In Deutschland hat Hilbert hauptsächlich diese Untersuchungen gefördert. Wenn man, sagt derselbe (Göttinger Nachr. 1900, p. 204), „die Grundlagen einer Wissenschaft aufstellen will, so hat man ein System von Axiomen aufzustellen, welche eine genaue und vollständige Beschreibung derjenigen Beziehungen enthalten, die zwischen den elementaren Begriffen jener Wissenschaft stattfinden. Die aufgestellten Axiome sind zugleich die Definitionen jener Begriffe, und jede Aussage gilt nur dann als richtig, wenn sie sich mittels einer endlichen Zahl logischer Schlüsse aus jenen herleiten läßt. Da entsteht die Frage, ob nicht gewisse Aussagen einzelner Axiome sich gegenseitig bedingen, oder ob sie voneinander unabhängig sind.“ Vor allem gilt es zu beweisen, daß die Axiome widerspruchsslos sind, d. h. daß man nie zu widersprechenden Aussagen vermöge derselben gelangen kann. Hilbert hat (Deutsche Math. Verein. 8, 1900, p. 180) den Inhalt dieser axiomatischen Aussagen oder Postulate in vier Gruppen, den Axiomen der Verknüpfung, der Rechnung, der Anordnung, der Stetigkeit zusammengestellt. Während die drei ersten Gruppen die bekannten Rechnungsgesetze wiedergeben, besteht die letzte aus dem Axiom des Eudoxus und dem Vollständigkeitsaxiom: „Die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher anderen Axiome keiner

Aber wird damit, hören wir sagen, die Mathematik nicht zu einer ungeheuren Tautologie? Wenn alles auf der Zahlenlehre, d. h. auf den als Postulaten bezeichneten Verknüpfungsgesetzen der Zahlen beruht, so müßte es ja für einen besonders stark entwickelten Verstand möglich sein, alle Konsequenzen mit einem Blicke zu übersehen. Eine wirkliche Erkenntnis, d. h. ein stetig wachsendes Reich von Wahrheiten könnte gar nicht eigentlich zustande kommen, sondern alles wäre bereits in der logischen Entfaltung der Axiome eingeschlossen, ähnlich wie die naive Vorstellung aus einem Samenkorn ohne Hinzutritt äußerer Agentien eine Welt lebendiger Organismen entstehen läßt.

In der Tat ist diese Frage schon öfter gestellt und auch verschiedenartig beantwortet worden.¹⁾ Nach Poincaré²⁾ würde dieselbe unbedingt mit ja zu beantworten sein, wenn nicht der mathematischen Schlußweise selbst eine schöpferische Kraft vermöge des Schlusses von n auf $n + 1$ innewohnte. Derselbe besteht bekanntlich in der folgenden Aussage³⁾:

Erweiterung mehr fähig ist.“ Dieses Axiom scheint zwar den gordischen Knoten eher zu zerhauen, als zu lösen, da es eine negative Aussage enthält, welche in keiner Weise zu einer beschreibenden Definition der Grundbegriffe beiträgt, und damit einen bloß formalen gewaltsamen Abschluß bildet, der sich unserem Denken schwer aufzwingen läßt. Später hat Hilbert (Verhandl. d. 3. intern. Math. Kongresses, Heidelberg 1904, Leipzig 1905), die Widerspruchslösigkeit der arithmetischen Grundgesetze logisch zu deduzieren gesucht, a. a. O. p. 174–185; man darf wohl vermuten, daß diese Untersuchungen inzwischen weiter entwickelt sind. Man vergleiche indes zu den Erörterungen Hilberts die Bemerkungen von J. Møllerup (Math. Annalen 64, p. 234, 1907), welche sich insbesondere auf das Vollständigkeitsaxiom beziehen.

1) Wir lassen die auf völligen Mißverständnissen beruhenden Einwände dieser Art von A. Schopenhauer, W. Hamilton, Huxley, Oliver Holmes und anderen (vgl. die Festrede von A. Pringsheim, Deutsche Math. Vereinigung, 13, p. 357, und C. Keyser, Mathematics, a lecture delivered at the Columbia university, New-York 1907) bei Seite.

2) Siehe Poincaré, Wissenschaft und Hypothese, p. 1, 10–15.

3) Der „Schluß von n auf $n + 1$ “ tritt merkwürdigerweise erst sehr spät in der Mathematik auf. Nach Cantor (Bd. II, p. 684) hat Pascal denselben schon vor 1654 ausgesprochen, wohl unabhängig von Maurolycus, der ihn schon in seiner arithmetica 1557 benutzt hat; von Jacob Bernoulli ist er dann in der Ars Conjectandi etwa 1680 unabhängig von Pascal eingeführt. Diese Methode der vollständigen Induktion hat eigentlich erst in der neueren Zeit ihre ganze Kraft entfaltet;

Erweist sich eine Behauptung für den Fall $n + 1$ gültig, wenn sie für den Fall n als gültig angenommen wird, und ist sie richtig für irgend einen Fall n_0 , so trifft sie auch für alle weiteren Fälle $n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ zu. Poincaré behauptet, diese Methode der sogenannten vollständigen Induktion, in der er einen synthetischen Satz a priori im Sinne Kants erblickt, vereinige, in einer einzigen Formel zusammengedrängt, eine unendliche Menge von Syllogismen, und es sei ohne sie nicht möglich, allgemeine Lehrsätze aufzustellen.

Man wird sich wohl nicht leicht entschließen, dieser Ansicht beizustimmen. Denn wir sehen nicht, wie uns die Anwendung dieses Satzes jemals in das aktual Unendliche hineinführen könne, während Poincaré ausdrücklich hervorhebt, daß der bloße Satz des Widerspruches uns zwar gestatten würde, für „beliebig viele“ Fälle einen Satz als richtig darzutun; im Gegensatz dazu soll aber das Prinzip der vollständigen Induktion auch vor dem Unendlichen nicht halt machen. Indessen mag dies auf einen Wortstreit hinauskommen; eine Ausführung, inwiefern man mittels der angegebenen Methode die Mathematik über die Grenzen dessen, was er selbst eine ungeheure Tautologie nennt, erhebt, hat Poincaré jedenfalls nicht gegeben.¹⁾

man vgl. nur die Virtuosität, mit der C. Jordan im *traité des substitutions*, P. Gordan in seinen invariantentheoretischen Untersuchungen, H. Weber in den Vorlesungen über Algebra, von derselben Gebrauch machen. Während Poincaré sie für ein synthetisches Urteil a priori erklärt, das der Mathematik eigentümlich sei, gehen die Bestrebungen anderer darauf aus, diesem Satze seine bestimmte Stellung im logischen Aufbau des Zahlenbegriffs anzuweisen. So entwickelt G. Frege in seinen Grundlagen der Mathematik, Breslau 1884, den Begriff der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe, „durch den es gelingt, diesen Schluß auf die allgemeinen logischen Schlußweisen zurückzuführen“; dasselbe Ziel verfolgt auf Grund der Mengenlehre Dedekind 1887 in seiner bekannten Schrift „Was sind und was wollen die Zahlen“ (dasselbst Artikel 59 und 80) sowie H. Weber in der Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. I, p. 1–12; man vgl. übrigens die ausführliche Darstellung in der Anmerkung zu S. 35.

1) Es gibt allerdings in der Mengenlehre eine transfinite Induktion, die sich des Grenzbegriffs bedient, der als Kategorie unserer Vernunft den Abschluß für eine sich unserer anschaulichen Vorstellung entziehende wohlgeordnete gesetzmäßige Folge von Begriffen bildet. Das von G. Cantor ausgesprochene Prinzip derselben stellt sich (vgl. F. Hausdorff, Leipz. Ber. 58, p. 127 1906) so dar: Wenn eine Behauptung $\varphi(\alpha)$

Zu einer ganz entgegengesetzten Ansicht kommt eine andere Auffassung.¹⁾ Einen festen Besitz unverrückbarer Axiome kann man vielleicht einem Mobiliar vergleichen, mit dem man in sehr verschiedener Weise seine Wohnräume den mannigfaltigsten Zwecken dienstbar machen kann. Es sind dann nur kombinatorische Prinzipien, die eine neue Anordnung gestatten. Auch wenn es sich nur um eine vielleicht geringe Zahl von Axiomen handelt, kann das Resultat dieser fortgesetzten Kombinatorik in einer unbegrenzten Reihe von Behauptungen bestehen, aber das ganze Verfahren beruht schließlich nur auf wenigen allgemeinen formalen Gesichtspunkten, denen der Analogie, der Gruppenbildung, der Ökonomie, der künstlerischen Auffassung, des Geschmacks, — wirklich neue Erkenntnisse kommen nicht zustande, und die ganze Wissenschaft reduziert sich auf ein großartiges Schachspiel, das mit seinen zahllosen Partien, seinen stets sich erneuernden Verstandesaufgaben hinreicht, für jede Möglichkeit denkbarer Verhältnisse eine sichere Vorschrift zur Beurteilung zu geben.

Mir scheinen diese beiden Ansichten mit den Tatsachen der historischen Entwicklung der Mathematik allein schon nicht übereinzustimmen. Daß die Anwendung der Regeln der formalen Arithmetik, mag sie auch zu noch so schönen Identitäten führen, und manche andere Teile der Mathematik wirklich nur eine formale Erweiterung unserer Kenntnisse in dem soeben geschilderten Sinne herbeiführen, ist sicherlich zuzugeben. Aber noch niemals hat man in der Herstellung von Identitäten allein oder Analogien ein wahres Element des Fortschrittes gesehen, wenn dieselben nicht zu einem bestimmten Zwecke gebraucht wurden.

Wenn wir aber fragen, wodurch eigentlich die Mathematik sich weiter entwickelt, so werden wir auf ganz andere treibende Kräfte verwiesen.²⁾

den Bedingungen 1. $\varphi(0)$ ist richtig, 2. aus $\varphi(\alpha)$ folgt $\varphi(\alpha + 1)$, 3. aus $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \varphi(\alpha_3) \dots$ folgt $\varphi(\alpha_\omega)$, so ist $\varphi(\alpha)$ für jedes α richtig; den Grenzprozeß der limes-Zahl α_ω einmal zugegeben, handelt es sich aber nur um den gewöhnlichen Schluß.

1) Fr. Meyer, Kant und das Wesen des Neuen in der Mathematik, ein Beitrag zu der Lehre von den synthetischen Urteilen, Archiv Math. Phys. (3), 8, p. 287, 1905.

2) Man könnte darauf hinweisen, daß es offenbar einer schöpferischen Kraft bedarf, die geeigneten Kombinationen der Grundvorstellungen zu bilden, welche wir als neue Gedanken der einzelnen großen Mathematiker bewundern. Solche erblicken wir z. B. in dem Prinzip des Schlusses von n auf $n + 1$, dem Begriffe des bestimmten Integrals, der Riemann-

Die Mathematik der Ägypter entsprach noch der rein auf gewisse praktische Kenntnisse gerichteten Tendenz, wie sie dem engen Gesichtskreise dieses Volkes eigen war. Aber unter den Hellenen erwacht die geometrische Begabung, welche zunächst nicht auf die Arithmetik sich gründet, sondern die Tatsachen der inneren räumlichen Anschauung logisch zu formulieren sucht. Schon bei ihnen treten die tiefsinnigen Vorstellungen der Größenlehre, der Stetigkeit, des Irrationalen, der Grenze, vielleicht die Ahnung des Funktionsbegriffes auf; aber ihre Weisheit war nicht imstande, diese Konzeptionen rein arithmetisch zu erfassen. Erst mit der außerordentlichen Erweiterung unserer Erfahrungen und Anschauungen, die durch das Studium der Natur vermöge Beobachtung und Experiment in den menschlichen Geist einzogen, treten neue Gedankenreihen auf, die eine Vertiefung der von den Alten geahnten Konzeptionen erforderten. Nun gelingt es durch die Vorstellungen, welche Mechanik und Geometrie vermitteln, eine mathematische Sprache zu ersinnen, die des Newton und Leibniz, welche wenigstens bis zu einem hinreichenden Grade die Rätsel der Analyse des Unendlichen der Mathematik zugänglich macht. Allerdings erhoben sich die Klagen, mit dieser neuen Wendung sei die Strenge der Alten verloren gegangen: wir haben zu zeigen versucht, wie diese Einwürfe definitiv zum Schweigen gebracht sind. Durch einen solchen Rückblick offenbaren sich uns die Kräfte, von denen der Fortschritt der Wissenschaft in Wahrheit abhängt. Die bloße Benutzung der Axiome würde jener Begriffsmaschine von Stanley-Jevons gleichen, die nur ein mehr oder minder sinnvolles Spiel der Kombinatorik entstehen lassen würde. In der Fähigkeit des menschlichen Geistes, neue Erfahrungen zu machen, aus ihnen allgemeine Anschauungen zu gewinnen, und diese wieder in rein mathematische Begriffe umzusetzen, d. h. dem Zahlbegriffe unterzuordnen, beruht das stete Wachstum der Wissenschaft¹⁾, die sich selbst so mit

schen Funktionentheorie, dem Prinzip des Diskontinuitätsfaktors, in sehr vielen Fragen der eigentlichen Zahlentheorie usw.; sie erleuchten plötzlich wie ein Blitz Pfade, die der Wissenschaft bisher verschlossen waren. In Wirklichkeit wäre damit der im Text gemachte Einwand nicht widerlegt, denn jene Kombinationen, einmal aufgestellt, würden doch nur wieder als selbstverständlich erscheinen.

1) Man vergleiche die Äußerungen von Hilbert über die Entwicklung der math. Probleme in seiner Rede auf dem Internationalen Math.

immer reicheren Inhalte erfüllt, und deren Wesen sonach in einer unbegrenzten Entwicklung beruht. Ließe sich der Gesamthalt der ganzen Mathematik als ein abgeschlossenes System von Wahrheiten ansehen, so würde der „Poincarésche Verstand“ allerdings hinreichen, um dieselben sämtlich als „selbstverständlich“ zu begreifen. Aber das ist eine in sich widerspruchsvolle Vorstellung: das Wesen des Wissens besteht in einem beständigen Fortschritt.

Wie wäre es möglich gewesen, den Begriff der irrationalen Zahlen, ohne die Anschauung der Kontinuität, den Begriff der Grenze ohne den der Bewegung zu gewinnen! Auch der Begriff der variablen Zahl und der Funktion tritt erst da auf, wo der Kausalitätsbegriff als das leitende Prinzip für das Verständnis aller Naturerscheinungen angesehen wird. Und in der neuesten Zeit haben wir die Mengenlehre entstehen sehen, welche ersichtlich der räumlichen Anschauung ihre Entstehung, ihre prinzipielle Begründung aber dem reinen Zahlenreich verdankt, die Theorie der Integralgleichungen, der Formen von unendlich vielen Variablen, welche neue Probleme der Analysis zu erledigen gestatten. Und wer vermöchte zu sagen, ob nicht auch künftig neue Anschauungen wieder zu neuen Begriffsbildungen Veranlassung geben, die geeignet sind, die vielfachen Schwierigkeiten, welche der gegenwärtige Zustand der Wissenschaft noch vorfindet, in einfacherer Weise zu überwinden?

Die Anschauung, eine gewisse Divinationsgabe unserer schaffenden Phantasie, die dem eigentlichen künstlerischen Schaffen, dem ποιεῖν, der Poetik, zu vergleichen ist¹⁾, bildet in letzter Instanz immer den Keim,

Kongreß zu Paris, Göttinger Nachr., phys. math. Cl. p. 257, 1900, sowie die Bemerkung von A. Schönflies, Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II, p. 2, „Denn die fortschreitende Vertiefung und Erweiterung des math. Wissens ist nur so möglich, daß von Zeit zu Zeit Ideen und Begriffe auftreten, die über den vorhandenen Gedankenkreis hinausgehen und damit neue axiomatische Grundlagen in die Mathematik einführen. Sie aber kommen wesentlich auf intuitiver Basis zustande, sind sie doch den verallgemeinernden Trieben des Intellekts, sowie der von der Anschauung geleiteten Phantasie zu danken. Daß der kritische Verstand erst ihre Prüfung und Durcharbeitung zu leisten hat, ehe sie mathematisches Bürgerrecht erhalten können, liegt auf der Hand.“

1) Über diesen Zusammenhang zwischen künstlerischem Schaffen und mathemat. Produktion, den schon Maupertuis 1742 in seiner Antritts-

aus dem alle großen Fortschritte der Mathematik entspringen, während die Verwandlung in die arithmetische oder Zahlensymbolik das Geschäft der reinen Wissenschaft ausmacht.

Und hierin erblicken wir den objektiven, d. h. unvergänglichen, Wert der reinen Mathematik, den sie trotz ihres weltabgewandten Gewandes besitzt. Wir haben vielfach darauf hingedeutet, daß der Trieb nach Erkenntnis der Naturvorgänge die Entwicklung der Mathematik hervorgerufen hat. Dies könnte die Meinung hervorrufen, es sei unsere Ansicht, daß die Mathematik nur insofern eine allgemein wertvolle Bedeutung habe, als sie diesen Zielen dienstbar bleibt. Diese Ansicht ist gewiß im 18. Jahrhundert vielfach verbreitet gewesen, und jedenfalls ist diese Bedeutung der Mathematik keineswegs zu unterschätzen. Aber genau die entgegengesetzte Überzeugung von dem einzigartigen und jeden materiellen Erfolg überragenden Werte der rein logischen Spekulation hat schon die Griechen vor mehr als 2000 Jahren beseelt. Sie erschaffen eine Geometrie, die so völlig abstrakt gedacht war, daß sie nur an sich, als freies Erzeugnis des menschlichen Geistes einen Wert haben konnte, der ihr auch in den Zeiten wilder Epochen der Zerstörung und des Krieges nie bestritten worden ist. Und während der Erstürmung seiner Vaterstadt Syrakus sehen wir den greisen Archimedes sein Wissen zur Verteidigung der Stadt verwenden; höher aber als das Leben selbst steht ihm die Ausbildung der Anfänge jener Untersuchungen, die sich erst in der neueren Zeit zur Analysis des Unendlichen herausgebildet haben. Es ist das Verdienst des 19. Jahrhunderts, dieser Überzeugung von dem absoluten Werte der höchsten Verstandestätigkeit, die bis in die Blütezeit der Araber der Menschheit nie ganz verloren gegangen war, wieder zu ihrem vollen Rechte verholfen zu haben.¹⁾

rede an der Pariser Akademie betont hatte, vgl. die Angaben bei E. Lampe, die Entwicklung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur, Festrede Berlin 1893 (Hoffmanns Zeitschrift für Math., Jahrgang 24, 1893, p. 287).

1) Einen besonders prägnanten Ausdruck hat ihr C. G. J. Jacobi (Correspondance math. avec A. Legendre, Journ. f. Math. 80, p. 272); Brief v. 2. Juli 1830 an Legendre verliehen: „Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir, que le but unique de la science c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre une question

Es sei mir endlich gestattet, noch ganz kurz die Folgerungen zu berühren, welche sich aus den vorstehenden Betrachtungen für diejenigen

de nombre vaut autant qu'une question du système du monde.“ Unzweifelhaft war das auch die Ansicht von Gauß, der die Mathematik die Königin der Wissenschaften, die Arithmetik die Königin der Mathematik nannte (Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis, p. 79). Unter der Arithmetik hat Gauß hier wohl die von ihm selbst mit so großem Erfolge gepflegte Zahlentheorie verstanden. Die Untersuchungen über die Beziehungen zwischen den ganzen Zahlen zeigen ein eigenartiges Paradoxon. Da sie ausschließlich auf der gesetzmäßigen Erzeugung und Verbindung derselben zu neuen Zahlen durch die Operation $+ 1$ beruhen, so sollte man glauben, daß für einen scharfen Verstand diese Beziehungen vollkommen durchsichtig erscheinen müßten. Gerade das Gegenteil ist der Fall. Schon die Anfänge der Zahlentheorie, dann der Legendresche Reziprozitätssatz, die Kettenbruchentwicklung einer quadratischen Irrationalität, verlangen eine ganz besondere Vertiefung der geistigen Tätigkeit, der Schwierigkeiten, welche bei der Untersuchung der Verteilung der Primzahlen, dem Beweise des Dirichletschen Satzes, daß in der Reihe $ar + b$ (a und b zueinander prim) unendlich viele Primzahlen mit abschätzbarer Verteilung in einem Intervalle auftreten, gar nicht zu gedenken, die bisher nur mit den höchsten Mitteln der Analyse bewältigt sind. Dies scheint darauf hinzuweisen, daß schon in den einfachsten Tätigkeiten unserer ordnenden Vernunft Zusammenhänge obwalten, die der unmittelbaren Erkenntnis ganz verborgen sind. Hierin liegt wohl der ganz besondere Reiz, den diese abstrakte mathematische Disziplin auf ihre Erforscher ausübt; in Wirklichkeit liegt etwas ähnliches übrigens bei allen mathematischen Spekulationen vor; sie enthüllen uns Wahrheiten, die in der Natur unseres Geistes selbst begründet sind, und als solche von absoluter Bedeutung erscheinen. Keine andere Wissenschaft hat ein damit vergleichbares Reich der Gedanken aufzuweisen. Nur auf dem Gebiet der künstlerischen Produktion finden wir eine ähnliche Objektivierung unseres innersten Wesens vor. Damit steht es keineswegs in Widerspruch, wenn wir auch in den grundlegenden Formen, die das menschliche Leben gestalten (Familie, Staat, Kultus) Offenbarungen des Geistes erkennen. Es sei hier auch noch die Bemerkung von A. Pringsheim (Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik, Festrede gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayerischen Akademie d. Wiss. zu München, 14. Mai 1904, auch Jahresber. der Deutsch. Math. Verein. 13, p. 357) angeführt: „Wir sehen in dem tiefgreifenden Einflusse, welchen die Errungenschaften der Mathematik auf die Fortschritte der Naturwissenschaften und die Vervollkommenung der Lebensbedingungen ausüben, lediglich das charakteristische Symptom einer dem menschlichen Geiste zukommenden höheren Ver-

Fragen ergeben, die den Unterricht in der Mathematik insbesondere an unseren höheren Schulen betreffen.

Wenn allgemeine Bildung, wie einer unserer geistreichsten neueren Schulmänner, B. Schwalbe, ausgesprochen hat, die Fähigkeit ist, unsere gesamte Kulturentwicklung zu verstehen, so ist klar, daß ohne mathematische Kenntnisse dieses Ziel unmöglich erreicht werden kann. Alsdann erscheint es aber auch ratsam, die Jugend, insoweit sie bestimmt sein soll, an dieser Entwicklung dereinst mitzuwirken, wenigstens in den oberen Klassen unserer höheren Schulen zu einem allgemeineren Verständnis dessen vorzubereiten, was den eigentlichen Gegenstand der Mathematik ausmacht, was sie leisten kann.

Selbstverständlich kann es sich hier nicht um eine Betonung der Schwierigkeiten handeln, welche in unserer bisherigen Betrachtung, wenn auch in ganz populärer Form, vorzugsweise zum Ausdruck kommen mußten; dies würde wohl als ein sehr törichtes Unternehmen erscheinen. Ist aber der Schüler durch die geistige Gymnastik, welche der seit alter Zeit in seinen Grundzügen doch wohl bewährte mathematische Unterricht bietet, weiter herangereift, so wird ihm auch das Verständnis der Gesichtspunkte, welche den Anfängen der Infinitesimalrechnung zugrunde liegen, keine Schwierigkeit mehr bereiten, sobald man sich auf das Wesentliche zu beschränken und die richtige Mitte zwischen Anschauung und Abstraktion einzuhalten weiß. Der Koordinatenbegriff, welcher das unerläßliche Schema für die Veranschaulichung aller Vorgänge bildet, mit seinen vielseitigen und anregenden Anwendungen auf alle Gebiete des täglichen Lebens, mögen sie nun der Medizin, der physikalischen Geographie, der Nationalökonomie, der Statistik, dem Versicherungswesen, den technischen Wissenschaften angehören, die ersten Anfänge der Infinitesimalrechnung im Anschluß an ihre historische Entwicklung, die Entwicklung des Funktions- und Grenzbegriffes an den Elementen der Lehre von den krummen Linien, das alles sind Dinge, ohne die in der gegenwärtigen Zeit auch nicht das leiseste Verständnis der Naturerscheinungen gewonnen werden kann, deren Kenntnis uns aber

pflichtung, die Gesetze und wechselseitigen Beziehungen der Zahl und Raumgebilde in ihrem weitesten Umfange zu begründen. Die mathematischen Erkenntnisse erscheinen uns daher als an sich wertvoll.“

wie mit einem Zauberschlage befähigt, eine Einsicht zu erlangen, mit der sich an Tiefe und Tragweite, vor allem aber an Sicherheit, wohl kaum eine andere vergleichen läßt. Im Mittelpunkt aller der Fortschritte des wissenschaftlichen Denkens, welche seit der Mitte des 17. Jahrhunderts in so überwältigender Fülle hervorgetreten sind, steht der Funktionsbegriff, diese von allen transzendenten Spekulationen losgelöste Vorstellung einer Zuordnung von veränderlichen Zahlen, durch welche die gegenseitigen Beziehungen aller Erscheinungen zu durchsichtiger Klarheit gelangen: diese Welt der Gedanken im jugendlichen Geiste hervorzurufen und zu entwickeln, ist die große Aufgabe der mathematischen Pädagogik unserer gegenwärtigen Zeit. Einsichtsvolle Schulmänner versichern aus eigener Erfahrung¹⁾, daß diese grundlegenden Begriffe bei zweckmäßiger Einführung dem Schüler oft weniger Schwierigkeit bereiten, wie die in manchen Beziehungen weit abstrakteren Methoden der Alten, die in verhüllter, zuweilen auch mißverständener Gestalt noch immer unserem Elementarunterricht zugrunde liegen, und deren wahres Verständnis den ganzen Scharfsinn des Gelehrten herausfordert.

Wünsche und Vorschläge zu einer Reform des mathematischen Unterrichts in diesem Sinne sind daher auch schon oft ausgesprochen worden. Namentlich haben Physiologen wie H. v. Helmholtz, A. Fick, J. Bernstein²⁾, und Chemiker wie A. von Baeyer, L. Hermann, im-

1) Vgl. den schon genannten Aufsatz von E. Götting, Deutsch. Math. Verein. 11, 1902, p. 189, der namentlich methodische Andeutungen zur Einführung der Grundvorstellungen der neueren Mathematik gibt.

2) H. v. Helmholtz, Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts..., Berlin 1891, p. 203.

J. Bernstein (Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, Jahrg. 33, p. 582), Über den math. naturw. Unterricht an den höheren Lehranstalten. Er weist mit besonderer Rücksicht auf das medizinische Studium darauf hin, daß so wichtige Lehren, wie die Vorstellung der Pulskurve, der Zuckungskurve des Muskels, die Verhältnisse des Blutdruckes, der Temperaturschwankungen, nicht ohne die Anfangsgründe der Differentialrechnung verstanden werden können.

A. Fick, Über die Vorbildung zum Studium der Medizin (gesammelte Schriften, Bd. IV, p. 106, Würzburg 1906) bemerkt, daß auch die med. Fakultät zu Bonn sich dahin ausgesprochen habe, daß bei dem gegenwärtigen Zustande der math. Vorbildung es unmöglich sei, eine Spezialvorlesung über Physiologie der Sinne zu halten. Man vergleiche auch die weiteren Aufsätze von Fick, a. a. O., p. 76, 94, 122. Mit einem be-

mer aufs neue auf die außerordentlichen Vorteile hingewiesen, welche den Studierenden der Medizin und in weiterem Sinne allen, die ein Verständnis für die treibenden Kräfte unserer gegenwärtigen Entwicklung besitzen sollten, durch eine Erweiterung des Schulunterrichtes nach dieser Richtung hin geboten würden. Immer mächtiger sind diese Stimmen in der Neuzeit geworden; in den Versammlungen der Deutschen Naturforscher und Ärzte sind sie seit Jahren nicht mehr verstummt. Insbesondere hat auch die Deutsche Mathematiker-Vereinigung, die gegenwärtig gegen 770 Mitglieder zählt, den Anregungen Kleins folgend, das Programm einer sachgemäßen und vorsichtigen Erweiterung des mathematischen Lehrstoffes entfaltet.¹⁾ Es handelt sich hier nicht um eine im Augenblicke mit übertriebenem Eifer ergriffene, oder aus einer Überschätzung des Wertes der Mathematik entspringende Idee, sondern um ein tief liegendes Bedürfnis unseres ganzen Volkes, das

sonders prägnanten Ausdruck sind die Forderungen, welche an die Vorbildung zum Studium der Medizin, dann aber auch in allgemeinerem Sinne gestellt werden müssen, hervorgehoben worden in den Verhandlungen des Ärztlichen Vereins München (Münch. mediz. Wochenschrift 19 (1910), man sehe insbesondere das umfassende Referat von F. v. Müller daselbst.

1) Den ersten Anstoß gab wohl die von F. Klein u. E. Riecke verfaßte Schrift über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung an den höheren Schulen (Vorträge, gesammelt von Klein und Riecke, Leipzig 1900); sodann ein Vortrag Kleins auf der Versammlung der deutschen Mathematiker (Deutsch. Math. Ver. 11, 1902, p. 128) über den math. Unterricht an den höheren Schulen, vgl. auch E. Götting, Über das Lehrziel im math. Unterricht der höheren Realanstalten (Deutsch. Math. Verein. 11, 1902, p. 189). In eigentlichen Fluß kamen diese Fragen namentlich seit der Breslauer, 1904, dann der Meraner Versammlung, 1905; die weitere historische Entwicklung siehe bei F. Klein u. R. Schimmack, der math. Unterricht an den höheren Schulen, Leipzig 1907. Seit dem letzten internationalen Mathematiker-Kongresse in Rom (1908) haben diese Bestrebungen, an denen die mathematische Pädagogik, wie die Fülle der namentlich auch in Deutschland entstandenen Lehrbücher und didaktischen Schriften auf diesem Gebiete zeigt, mit dem größten Eifer sich beteiligt, eine erhöhte Bedeutung gewonnen durch die Bildung einer internationalen mathematischen Unterrichtskommission, welche über die praktischen Ziele und die zu ihrer Erreichung erforderlichen Wege in gemeinsamer Arbeit zu beraten hat; in dem Kongreß zu Cambridge (September 1912) kommen diese Fragen durch die Vertreter einer großen Zahl verschiedener Nationen der alten und neuen Welt zur Behandlung.

nur auf diesem Wege auch in Zukunft in erfolgreichen Wettbewerb mit den anderen Nationen treten kann, die uns in dieser Beziehung schon zum Teil voraus sind.¹⁾

Und wer diese Erkenntnis einmal gefaßt hat, wird auch die Überzeugung gewinnen, daß die hiermit eingeleitete Bewegung nicht wieder erlöschen wird, und daß es der vereinigten Wirkung aller derer, denen die Erziehung des heranwachsenden Geschlechtes anbefohlen ist, gelingen wird, die richtigen Formen zu finden, in denen eine zeitgemäße Reform des mathematischen Unterrichts ihr Ziel sehen muß, eine Reform, bei der Lehrende und Lernende gleichviel gewinnen würden. Denn das, was jedem Lehrer, in welcher Stellung er sich auch befinden möge, die wahre Freude in seinem Berufe verleiht, ist die Überzeugung, seinen Schülern Elemente der Geisteswelt mitzuteilen, die für ihr ganzes ferneres Leben wahrhaft wertvoll und unvergänglich sind. Diese Überzeugung wird ihn dazu drängen, sich immer aufs neue in die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik zu vertiefen, und sodann seine Hauptaufgabe darin zu sehen, die pädagogische Mitte zwischen der Forderung der eigentlichen mathematischen Strenge und der Fassungskraft seiner Schüler zu suchen.

Doch kehren wir nach dieser Abschweifung wieder zu unserem Thema, der Wissenschaft von der Zahl zurück. Noch immer ist die Mathematik die Wissenschaft, welche, wie schon vor fast 4000 Jahren der Schreiber des Papyrus Rhind aufgezeichnet hat, in die Geheimnisse aller dunklen Dinge einführt²⁾, und so das glänzendste Beispiel für die Macht des menschlichen Geistes abgibt, durch seine eigene Tätigkeit ein jeden Zweifel ausschließendes Reich der Wahrheit zu erkennen. In einem höheren Lichte erscheint uns gegenwärtig die Lehre der Pythagoreer, welche in mystischer Weise in der ganzen Zahl die alles beherrschende Harmonie und das eigentliche Wesen der Dinge zu erblicken glaubten. „Die Geistesarbeit“, sagt A. v. Humboldt³⁾, „zeigt sich in ihrer er-

1) Vgl. den soeben erwähnten Bericht v. Müllers, der auf das gründliche praktische und theoretische Wissen hinweist, das der Unterricht z. B. in Holland dem Studierenden der Medizin und Naturwissenschaften mit auf den Weg gibt.

2) Der Titel des Papyrus Rhind lautet nach A. Eisenlohr (Kommentar p. 27) „Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge, aller Geheimnisse, welche enthalten sind in den Dingen.“

3) Siehe A. v. Humboldts Kosmos, Stuttgart u. Tübingen 1847, Bd. II p. 384.

habensten Größe da, wo sie, statt äußerer materieller Mittel zu bedürfen, ihren Glanz allein von dem erhält, was der mathematischen Gedankenwelt entquillt. Es wohnt inne ein fesselnder, von dem ganzen Altertum gefeierter Zauber in der Anschauung mathematischer Wahrheiten, der ewigen Verhältnisse der Zeit und des Raumes, wie sie sich in Tönen, Zahlen und Linien offenbaren.“ Und ein weit Größerer wie Humboldt, Gauß, faßt seine tiefsten Gedanken in dem Worte zusammen, $\delta \theta \epsilon \delta \varsigma \acute{\alpha} \omicron \iota \theta \upsilon \nu \tau \iota \xi \epsilon \iota$.¹⁾ Das heißt, ein Teil des göttlichen Wesens liegt in der Zahl beschlossen; die Möglichkeit, diese Seite desselben zu erkennen, ist die höchste Gabe, die dem Verstande des Menschen verliehen ist. Auch das Wissen des Mathematikers ist Stückwerk, immer aufs neue treten Fragen auf, die unbeantwortet sind, und unbeantwortbar scheinen. Aber uns leitet die bisher nie getäuschte Überzeugung, daß die Vernunft diejenigen Fragen, deren Veranlassung sie ausschließlich ihrem eigenen selbst geschaffenen Reiche entnimmt, auch zu beantworten fähig sein muß.²⁾

Nach unserer gegenwärtigen Einsicht müssen wir zugeben, daß die Lösung der großen Fragen, welche den Ursprung des organischen Lebens

1) Nach Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis, p. 97, hat G. jenen Ausspruch so verstanden, daß einer höheren als der menschlichen Intelligenz auch dasjenige unter der Form des Zahlbegriffs erscheine, was unserem Geiste verschlossen ist.

2) Man kann indessen die folgende Frage aufwerfen, ohne damit die angegebene moralische Überzeugung erschüttern zu wollen.

Es sei eine gewisse Zahl nicht definierter (weil hinsichtlich ihrer Anwendung auf gegebene Objekte unzweideutig bekannter) Symbole und eine gewisse Zahl widerspruchsloser Postulate der Verknüpfung dieser Symbole gegeben. Muß nun notwendig jede Frage, welche hinsichtlich jener Symbole oder Objekte aufgeworfen wird, mittels eines mathematischen Beweises entschieden werden können? Mit Sicherheit wird man dies nur behaupten können, wenn man voraussetzt, daß diese Entscheidung auf Grund der durch die Postulate gegebenen Verknüpfungsgesetze möglich sei. Ist dies z. B. gewiß für jeden zahlentheoretischen Satz, wie z. B. für das Goldbachsche Gesetz, daß jede gerade Zahl mindestens auf eine Art als Summe von zwei Primzahlen darstellbar sei, der zunächst empirisch aber problematisch ausgesprochen wird? Muß es für jede bestimmt definierte Zahl eine Methode geben, ihre Transzendenz oder ihre algebraische Natur zu entscheiden? Eine Antwort hierauf besitzen wir, wie man zu sagen pflegt „bei dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft“ nicht. Man erkennt aber aus dem soeben Ausgeführten, daß ein logischer Grund für die angegebene Überzeugung

und die Äußerungen desselben in Empfindungen, Vorstellungen und Gedanken, ja alle Äußerungen des geistigen Lebens überhaupt betreffen, unserer begrifflichen Erkenntnis auf immer verschlossen ist, ignoramus, ignorabimus: wir verstehen sie nicht und werden sie vielleicht nie verstehen. Aber in der Mathematik gibt es kein ignorabimus, sondern nur die Gewißheit eines Fortschrittes, der alle Schwierigkeiten überwindet.

nicht vorhanden ist, sondern daß hier nur ein auf die Erfahrung gestütztes Selbstvertrauen vorliegt, ohne welches allerdings überhaupt keine fortschreitende Entwicklung möglich ist.

Neuerdings haben sich viele mit dem Beweise des Fermatschen Satzes, wie es scheint bislang ohne Erfolg, beschäftigt. Aber trotzdem zweifeln wir nicht, daß diese Frage völlig beantwortbar ist; sie wird ihre Antwort finden, wenn ihre Zeit gekommen ist. Einen treffenden Beleg dazu bilden die zahllosen vergeblichen Bemühungen um die Quadratur des Kreises; sie fanden erst dann ihren Abschluß, als es Lindemann gelang, mit Hilfe des durch Ch. Hermite's Untersuchungen über die Exponentialfunktion vorbereiteten Weges den Beweis zu führen, daß π nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein könne. Mathematische Beweise ergeben sich oft nicht an der Stelle, wo man sie zunächst sucht, sondern bei der Verfolgung ganz anderer Gebiete. In der Fähigkeit, dies zu erkennen, scheinbar entfernte Gedankengänge miteinander zu verknüpfen, besteht ein großer Teil der Erfolge, die große Mathematiker erreicht haben; in ihr liegt die eigentliche Kraft mathematischer Produktion.

NAMEN- UND SACHREGISTER

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten; ein * bedeutet, daß der Gegenstand nur in einer Anmerkung erwähnt ist.

A

Abakanowicz, A. 17
 Abel, N. H. 41, 63*
 Abbildung 66*
 — stetige 71 ff.
 Ableitung von Punktmengen 76
 Abschnitt 74
 Abzählbar 76
 Ägypter 6, 7*
 Agrimensoren 12*
 Ahmes 6* ff.
 Alef 69, 75
 d'Alembert, J. 23, 31*, 47
 Algebra d. Logik 24, 49*
 Ames, J. D. 73*
 Analysis situs 24, 71
 An-Nairizi 9*
 Anschaulichkeit 90*
 Anschauung 24, 81 ff., 87 ff., 90* ff., 97
 Apollonius 12*
 Approximationsmathematik 45*
 Araber 9 ff.
 Archimedes 8, 10, 51*, 77, 112
 Argand, F. 38*
 Arithmetisierung 31
 Aryabhatta 9
 Ausdehnungslehre 14*, 53
 Axiom, v. Archimedes u. Eudoxus 47*, 51 ff.
 — v. G. Cantor 50*, 81
 — v. R. Dedekind 50*
 — der Vollständigkeit 106*
 Axiomatik 99, 106* ff.

B

Babylonier 6* ff., 10*
 Baeyer, A. v. 115
 Barrow, J. 17*, 21

Baumann, J. 34*, 67*
 Beltrami, E. 88
 Bernoulli, Jac. 107*
 Bernoulli, Joh. 54*
 Bernstein, F. 66*
 Bernstein, J. 115*
 Beschleunigung 16, 18 ff., 30*
 Bessel, F. 56*, 84*
 Böcher, M. 26* ff.
 Boltzmann, L. 14*
 Bolzano, B. 25*, 34*, 48*, 65*
 Bonola, R., 84*
 Borchardt 7*
 Borel, É. 66, 70
 Boy, W. 88*
 Brandes, C. 9*
 Brill, A. v. 104*
 Briot u. Bouquet 57 ff.
 Brix, W. 10*
 Brouwer, L. 71*
 Bubendey, G. H. 39*
 Bürk, A. 8*
 Burmester, L. 17*

C

Calcul des limites 60
 Cantor, G. 12*, 49 ff., 65 ff., 70, 74, 108
 Cantor, M. 5, 6*, 9, 12*, 64*, 68*
 Cardanus, H. 37*
 Carnot, L. N. 30*
 Cauchy, A. L. 16*, 24*, 41, 47 ff., 56 ff., 60 ff., 80, 99
 Cavalieri, B. 10, 21*, 80
 Cesàro, E. 48*, 72*
 Clavius, Chr. 37
 Cohen, H. 50*
 Cosserat, E. 99*
 Cosserat, F. 99*
 Couturat, L. 27*

D

Dantscher, V. v. 49*
 Darboux, G. 63
 Dezimalbrüche 10
 Dedekind, R. 32*, 42, 44, 48, 65*, 68*, 100*
 Derivierte, allgemeine 80
 Desargues, G. 58*
 Descartes, R. 11, 12, 14*, 37* 60*, 71
 Determinanten, unendliche 63*
 Differential 47
 Differentialgeometrie 14*, 43*, 55
 Differentialgleichung 17, 18, 33, 59, 61
 Differentialgleichung, partielle 63
 Differentialquotient 15, 16, 18, 22
 Dimensionsbegriff 71
 Dini, U. 64*, 78*, 82*
 Diophantus 11*
 Dirichlet, P. G. 54*, 56, 76, 113*
 Dreikörperproblem 23*
 Drobisch, M. W. 41*
 Du-Bois Reymond, P. 54, 82*
 Düring, E. 54*
 Duhem, P. 15*

E

Einstein, A. 100 ff.
 Eisenlohr, A. 6*, 7*, 117*
 Eneström, G. 5
 Engel, E. 84*
 Enriques, F. 50*, 84*
 Erkenntnis, mathematische 5
 — der Natur 66*
 Erweiterung der Zahlen 39

Euklid 8, 9*, 13*, 30, 83
Eudoxus 46*, 53, 58*
Euler, L. 23, 31, 47*, 51,
59, 64*, 77
Exhaustionsmethode 46*

F

Fechner, G. Th. 25*
Fermat, P. 8*, 12*, 41*,
119*
Fick, A. 115*
Fizeau, A. H. L. 100ff.,
103
Fluxion, 20, 22, 30*
Fluxionsrechnung 19, 20,
21*
Flächeninhalt 18, 65
Föppl, A. 53*
Fontenelle, B. 31*
Foucault, A. 26*
Fourier, J. B. 56
Fredholm, J. 63
Frege, G. 33*, 108*
Frobenius, G. 42*
Fuchs, L. 61*ff.
Funktion, analytische 57
— differentiierbare 55
— gesetzlose 54*
— stetige 55
— willkürliche 56
Funktionsbegriff 57, 76
Funktionselement 57, 61

G

Galilei, G. 2, 15
Galilei - Transformation
100
Gauß, C. F. 20*, 25, 40ff.,
52*, 56*, 61, 67*, 84,
89, 94, 96*, 113*, 118
Geometrie, analytische
13*
— darstellende 7*
— nichteuklidische 84*ff.,
89
— physische 95*
— praktische 7
— projektive 24
— synthetische 13*
Geschwindigkeit 16
Gesetz, v. Goldbach 118*
Gesetze, formale 38*
Gibbs, W. 53*
Girard, A. 37*
Gmeiner, J. A. 24*, 40*,
53*
Gmunden, J. v. 10*

Götting, E. 115*ff.
Gordan, P. 108*
Goursat, E. 58*
Graßmann, H. G. 34*, 52*
Graßmann, J. G. 26*
Gravitationsgesetz 19*
Greensche Funktion 60*
Grenzbegriff 20*, 47, 111,
114
Grenze, obere u. untere 78*
Grenzwert 16, 29, 46, 48,
64
Griechen 8, 42
Größe 12, 51*
— intensive u. extensive
25*
Größenbegriff 66*, 74
Grundlagen d. Geometrie
43
Gruppentheorie 14*

H

Häufungspunkt 68*, 75ff.
Hahn, H. 80*
Hamel, G. 99*
Hamilton, W. R. 18*, 33*,
36*, 38*, 42, 52*
Hankel, H. 8*, 37*, 39*,
79, 82*
Harpedonaptien 12*
Harriot, Th. 11*
Hausdorff, F. 97*, 108*
Heffter, L. 105*
Heiberg, J. L. 8*
Heine, E. 46*, 49
Helmholtz, H. v. 16*, 33*,
82*, 94*ff., 115*
Hermann, L. 115
Hermite, Ch. 119*
Heron 8*, 12*, 37*
Hertz, H. 99*
Hessenberg, G. 66*, 71*,
75
Hilbert, D. 50*, 53, 54*,
58*, 63, 66, 87*, 97*,
106*
Hilprecht, K. H. 6*, 10*
Hipparch 12*
Hodograph 18*
Höfler, A. 3*
Hölder, O. 34, 51*, 56*
Hoppe, R. 30*
Horn, J. 62*
Humboldt, A. v. 117
Huntington, E. V. 74*, 101
Hurwitz, A. 73*
Husserl, E. G. 33*

I

Idealität d. Raumes 85*
Illigens, E. 46*
Inder 8, 33, 37
Induktionsprinzip 35*, 107*
Induktion, transfinite 108*
Infinitesimalrechnung 8,
22, 30*, 104
Inhaltsbestimmung 11, 18
Integral 64
— bestimmtes 77ff.
Integralrechnung 65, 79
Integralgleichungen 63,
111
Integral, oberes u. unteres
80*ff.
Integraph 17
Integrierbar 78
Intervall 75
Invariantentheorie 14*
Invarianz 21*, 71*
Itelson, G. 26*

J

Jacobi, C. G. J. 41, 112*
Jahnke, E. 53*
Jordan, C. 48*, 73*, 108*
Jordan-Curve 72
Jourdain, Ph. 48*

K

Kalkül d. Kardinalzahlen
70
— — Ordinalzahlen 73
Kant, J. 2, 25*, 33*, 85ff.
Kardinalzahl 33, 35*, 68*,
73ff.
— transfinite 69
Kasner, E. 83*
Kempe, B. 27*
Kepler, J. 8*, 10, 12*, 22
Keyser, C. 107*
Killing, E. 93*
Klassenbegriff 66*
Klein, F. 31*, 45*, 58*,
71*ff., 82*ff., 89, 105*,
116*
Köpcke, R. 83*
Kondensationsprinzip 79
Kontinuum, lineares, n -
dimensionales 70ff.
Konvergenzgebiet 55
Konvergenzprinzip 48
Koordinatenbegriff 13, 14,
114
Korselt, A. 66*
Kowalewski, G. 5*, 48*

- Kowalewski, S. v. 63
 Kronecker, L. 32*
 Krümmungsmaß d. Mechanik 105
 Krümmungsmaß d. Räum-
 es 20*, 89
 Kugel 88*
 Kultur 2, 114
- L**
- Lacroix, F. 54*
 Lagrange, J. L. 23, 30 ff.
 Lambert, J. H. 7*
 Lampe, E. 112*
 Laplace, P. S. 23
 Laue, M. 103* ff.
 Lebesgue, H. 72*, 78*, 80
 Leibniz, G. W. 4*, 12*, 17
 20* ff., 54*, 64, 77, 110
 Leonardo Pisano 11*
 Leonardo da Vinci 7*, 11*,
 15
 Lichtsignal 101 ff.
 Lie, S. 66
 Liebmann, H. 54*
 Limeszahl 74
 Lindemann, F. 4*, 83*, 88*
 119*
 Linearkontinuum 75
 Liouville J. 70
 Lipps, F. G. 49* ff.
 Lobatschewskij, N. I., 84, 89
 Löffler, E. 10*
 Logarithmen 10
 Logarithmentabelle 54*
 Logikkalkül 28*
 Lorentz, H. A. 100
 Lorentztransformationen
 101 ff.
 Lüroth, J. 64*, 71*
- M**
- Mach, E. 15*, 39*, 90*, 95*,
 100
 Maclaurin, C. 30*
 Mächtigkeit 66*
 Mahlo, P. 9*
 Mangoldt, H. v. 101*
 Maspero, G. 5*
 Masse, konstante 98* ff.
 — longitudinale, trans-
 versale 104*
 Mathematik u. Kultur 106,
 114
 — angewandte 29, 40*
 — elementare 3
 — objektiver Wert der 112
- Mathematik, Wesen der
 3, 5, 24, 26, 28
 Maupertuis, P. M. de 111*
 Maurolycus, F. 107*
 Maxwell, J. C. 52*
 Mechanik 18, 22, 98
 — klassische u. neue 100
 Menge, abzählbare 76
 — abgeschlossene 75
 — äquivalente 34*
 — endliche 66*
 — geordnete 34, 73
 — in sich dichte usw. 76
 — reduzibele 78*
 — transfinite 66*
 — wohlgeordnete 34*, 36*,
 73
 Méray, Ch. 49
 Meyer, E. 6*
 Meyer, Fr. 109*
 Michelson, A. 100
 Milau, P. 48*
 Minkowski, H. 100*
 Mollerup, J. 67*, 107*
 Mozzi, G. 16*
 Müller, F. v. 116* ff.
- N**
- Natorp, P. 49*, 66, 88*
 Newton 4*, 19, 20* ff., 110
 Null 9, 10*
- O**
- Ökonomieprinzip 39, 109
 Ohm, M. 39*
 Operationszeichen 9
 Ordinalzahl 33*, 35*, 73 ff.
 — transfinite 74
 Ordinate 12*, 35*
 Ordnungstypus 73
 Oresme, N. 12*
 Osgood, W. 58*, 73*
- P**
- Padoa, A. 106*
 Painlevé, P. 60*, 62*
 Papperitz, E. 26*
 Papyrus Rhind 6
 — v. Kahun, Achmim 6*
 Paradoxien 25*, 65*, 67*
 Parallelenaxiom 84, 89
 Pascal, B. 8*, 21, 107*
 Pasch, M. 80*, 81*, 83*
 Peacock, G. 39*
 Peano, G. 28*, 61*, 72,
 107*
 Peano-Kurve 72
- Peirce, B. 26*
 — C. S. 34*
 Peurbach, G. 10*
 Picard, É. 31*, 56*, 58*,
 61*, 87*
 Pierpoint, J. 83*
 Planck, M. 99*
 Poincaré, H. 19*, 23*, 54*,
 62*, 68*, 86*, 94*, 98*,
 101*, 108*
 Poisson, S. D. 14*, 47*
 Positionssystem 10*
 Potenzreihe 25*, 65*, 67*
 Präzisionsmathematik 45*
 Primzahl, komplexe 41*
 Pringsheim, A. 46*, 45*,
 107*, 113*
 Prinzip der Auswahl 75
 — v. Dirichlet 63
 — v. Doppler 103
 — der Permanenz 37*, 39
 Produkt, inneres 52*
 Proportionen 57 ff.
 Psychophysik 25*
 Punktmenge 75
 — Inhalt der 80*
 Pythagoreischer Satz 9*
 Pythagoreische Schule 9*,
 43, 117
- Q**
- Quadratur 59
 Quaternionen 52*
- R**
- Raum v. Dedekind 94*
 Rechnen 38
 Recorde, R. 11*
 Relativitätsprinzip 103
 Relativitätstheorie 100
 Révillout E. 7*
 Riecke, E. 116*
 Riehl, A. 85*
 Riemann, B. 57, 64, 77,
 78*, 80, 85
 Riese, A. 10*
 Roberval, G. P. de 16*,
 17*
 Rolle, M. 30*
 Rothe, H. 28*
 Rudolff, C. 10*
- S**
- Sartorius v. Walterschau-
 sen 25*, 118*
 Scheeff, L. 44*, 80
 Scheffers, G. 60*

- Schell, W. 17*
- Schematismus des Rech-
nens 39
- Schepp, A. 64*
- Schimmack, R. 116*
- Schlesinger, L. 62
- Schneider, H. 7*
- Schnitt 44, 75*
- Schoene, H. 8*
- Schönflies, A. 67 ff., 71*,
75, 111*
- Schopenhauer, A. 86*
- Schröder, E. 66*
- Schumacher, H. 67*, 84*
- Schwalbe, B. 114
- Schwering, K. 3*
- Senkereh 6*
- Servois, F. 38*
- Sexagesimalsystem 6*, 10
- Simon, M. 3*, 7*, 9*, 20*,
39*, 56*
- Sommerfeld, A. 105*
- Stäckel, P. 20*, 84, 107*
- Steinitz, E. 82*
- Stern, M. A. 47*
- Stetigkeit 29, 43
- Stolz, O. 24*, 40*, 42*, 53*,
54*
- Study, E. 16*, 42*
- T**
- Tangentenproblem 11, 14,
17
- Tannery, J. 26*, 36*, 48*,
76*, 78*
- Taurinus, F. A. 84*
- Taylor's Reihe 55, 59
- Teilmenge 35*
- Thibaut, G. 9*
- Thieme, H. 3*
- Thomae, J. 53*
- Transformationsgruppen
60
- Translationsbewegung
100 ff.
- Tropfke, J. 10*, 11* ff., 36*
- Typus 73
- U**
- Unendlich der Funktionen
54
- Unendlich Groß, Klein 21,
42*
- Unterricht, mathemati-
scher 3 ff., 114
- Reform desselben
115 ff.
- V**
- Varicák, V. v. 105*
- Vektorbegriff 14*, 52*
- Vektorprodukt 52*
- Veronese, G. 50*
- Vieta, V. 9, 11*
- Voß, A. 99*
- W**
- Wallis, J. 47*
- Weber, E. H. 25*
- Weber, H. 34*, 35*, 98*,
108*
- Weierstraß, K. 32*, 42,
49*, 57, 79, 82*
- Wellstein, J. 6*, 87* 95*
- Wessel, C. 38*
- Weltpunkt, 100
- Weyr, E. 7*
- Whewell, W. 19*
- Widerspruchlosigkeit der
Arithmetik 107*
- der Geometrie 97
- Widmann, J. 9, 11*
- Wiener, Chr. 82*
- H. 87*
- Wilson, E. B. 29*
- Winter, M. 28*
- Wundt, W. 33*, 91* ff.
- Z**
- Zahl, algebraische 69
- ganze 30, 32*, 35, 69
- gebrochene 36, 40
- hyperkomplexe 41, 59
- imaginäre, 37
- irrationale 9, 42 ff., 111
- komplexe 40 ff., 42*,
53, 56
- negative 9, 10*, 36, 40
- nichtarchimedische
56*
- reelle 50
- stetige 45
- transzendente 69
- variable 30, 111
- Zahlbegriff, 28*, 29, 31,
39, 73, 81 ff.
- Zahlenebene 40
- Zahlenklasse 74
- Zahlenkörper 38*, 41
- Zahlentheorie 24, 113*
- Zeit 33*
- Zeitbegriff 102
- Zerlegungsgleichheit 9*
- Zermelo, E. 75
- Zeuthen, H. G. 7* ff., 9*,
11*
- Ziffern 10*
- Zweistromland 5

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Wissenschaft und Hypothese

Sammlung von Einzeldarstellungen
aus dem Gesamtgebiet der Wissenschaften mit besonderer
Berücksichtigung ihrer Grundlagen und Methoden, ihrer
Endziele und Anwendungen.

8. In Leinwand geb.

Die Sammlung will die in den verschiedenen Wissensgebieten durch rastlose Arbeit gewonnenen Erkenntnisse von umfassenden Gesichtspunkten aus im Zusammenhang miteinander betrachten. Die Wissenschaften werden in dem Bewußtsein ihres festen Besitzes, in ihren Voraussetzungen dargestellt, ihr pulsierendes Leben, ihr Haben, Können und Wollen aufgedeckt. Andererseits aber wird in erster Linie auch auf die durch die Schranken der Sinneswahrnehmung und der Erfahrung überhaupt bedingten Hypothesen hingewiesen.

I. Band: **Wissenschaft und Hypothese.** Von H. Poincaré in Paris. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann in München. 2., verbesserte Auflage. 1906. Geb. M. 4.80.

II. Band: **Der Wert der Wissenschaft.** Von H. Poincaré in Paris. Deutsch von E. und H. Weber in Straßburg i. E. 2. Auflage. 1910. Geb. M. 3.60.

III. Band: **Mythenbildung und Erkenntnis.** Eine Abhandlung über die Grundlagen der Philosophie. Von G. F. Lipps in Leipzig. 1907. Geb. M. 5.—

IV. Band: **Die nichteuklidische Geometrie.** Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Von R. Bonola in Pavia. Autorisierte deutsche Ausgabe von H. Liebmann in München. Mit 76 Figuren. 1908. Geb. M. 5.—

V. Band: **Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem.** Von G. H. Darwin in Cambridge. Deutsch von A. Pockels in Braunschweig. Mit einem Einführungswort von G. v. Neumayer in Hamburg. 2. Auflage. Mit 52 Illustrationen. 1911. Geb. M. 8.—

VI. Band: **Das Prinzip der Erhaltung der Energie.** Von M. Planck in Berlin. 3. Aufl. 1913. Geb. M. 6.—

VII. Band: **Grundlagen der Geometrie.** Von D. Hilbert in Göttingen. 4. Auflage. 1913. Geb. ca. M. 6.—

VIII. Band: **Geschichte der Psychologie.** Von O. Klemm in Leipzig. 1911. M. 8.—

IX. Band: **Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart.** Von P. Volkmann in Königsberg i. P. 2. Auflage. 1910. Geb. M. 6.—

X. Band: **Wissenschaft und Religion in der Philosophie unserer Zeit.** Von É. Boutroux in Paris. Deutsch von E. Weber in Straßburg i. E. 1910. Geb. M. 6.—

XI. Band: **Probleme der Wissenschaft.** Von F. Enriques in Bologna. Deutsch von K. Grelling in Göttingen. 2 Teile. 1910. Geb. I. Teil: **Wirklichkeit und Logik.** M. 4.— II. Teil: **Die Grundbegriffe der Wissenschaft.** M. 5.—

XII. Band: **Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.** Von P. Natorp in Marburg. 1910. Geb. M. 6.60.

XIII. Band: **Pflanzengeographische Wandlungen der deutschen Landschaft.** Von H. Haus-
rath in Karlsruhe. 1911. Geb. M. 5.—

XIV. Band: **Das Weltproblem vom Standpunkte des relativistischen Positivismus aus.** Historisch-kritisch dargestellt von J. Peizoldt in Charlottenburg. 2., vermehrte Auflage. 1911. Geb. M. 3.—

XV. Band: **Wissenschaft und Wirklichkeit.** Von M. Frischeisen-Köhler in Berlin. 1912. Geb. M. 8.—

XVI. Band: **Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft.** Von E. Picard in Paris. Deutsch von F. u. L. Lindemann in München. 1913. M. 6.—

Weitere Bände unter der Presse bzw. in Vorbereitung.

===== Ausführlicher Prospekt über die Sammlung unentgeltlich =====

Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Von Henri Poincaré.

Mit 6 Figuren. gr. 8. Geh. *M* 1.80, in Leinwand geb. *M* 2.40.

Inhalt: 1. Über die Fredholmschen Gleichungen. 2. Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf die Flutbewegung des Meeres. 3. Anwendung der Integralgleichungen auf Hertzsche Wellen. 4. Über die Reduktion der Abelschen Integrale und die Theorie der Fuchs'schen Funktionen. 5. Über transfinite Zahlen. 6. La mécanique nouvelle.

„Da Poincaré mit seinem umfassenden und tiefen Wissen die Gabe vereinigt, schwierige Dinge ohne Beeinträchtigung der Strenge in allgemein verständlicher Weise darzustellen, dürfen die Vorträge auf eine starke Verbreitung rechnen; der Mathematiker sowohl wie der Physiker werden wertvolle Anregungen aus dieser Schrift schöpfen, für die im besten Sinne das Wort gilt: ‚Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen!‘“

(Naturwissenschaftliche Wochenschrift.)

Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Von Dr. Kurt Geißler. gr. 8. Geh. *M* 14.—, in Leinwand geb. *M* 16.—

Das Werk will zuerst, mit den einfachsten Vorstellungen beginnend, die Widersprüche und Rätsel des Unendlichen in der niederen und höheren Mathematik (Parallelen, Paradoxon der Winkelflächen, Gerades und Krummes, Berührung, Harmonie, Grenzbegriffe, Maximum, Differentiale, Oskulation, Inflexion, Beschleunigung usw.) durch eine neue, ausführlich entwickelte Theorie von Weitenbehaftungen lösen, mit endlichen (sinnlich vorstellbaren) und unter- wie übersinnlich vorstellbaren anschaulichen Größen. Dann begründet es, nach einem Abriss der Geschichte des Unendlichen bis heute, die Stellung dieser Lehre innerhalb der Philosophie, die Beziehungen zur Lehre von den Empfindungen, das Sein der Mannigfaltigkeitsverhältnisse ohne und mit diesen Weitenbehaftungen, die einen weiteren Ausbau von Kants kritischer Zerlegung bedeuten, freilich ohne den Anspruch alleiniger Richtigkeit, sondern nur mit dem Streben nach Widerspruchlosigkeit und damit nach Möglichkeit. Alle Gebiete, die mit dem Unendlichen zu tun haben, werden herangezogen, und zum Schluß wird das Ganze aufgefaßt vom Standpunkte einer Metaphysik der Möglichkeiten.

Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Eintrittsvorlesung gehalten am 22. Juli 1899. Von Prof. Dr. Otto Hölder. gr. 8. Geh. *M* 2.40.

Der Verfasser analysiert an einigen Beispielen den Aufbau der Geometrie und die ihr zugrunde liegenden Voraussetzungen. Dabei erörtert er namentlich auch die Bedeutung, welche der Anschauung in der Geometrie zukommt, und untersucht, ob die Anschauung, nachdem die geometrischen Grundsätze einmal angenommen sind, bei den einzelnen Schritten des deduktiven Beweises noch weiter mitwirkt. Die soviel behandelte Frage nach dem Ursprung der Grundsätze wird auch berührt. Die geometrische Deduktion wird durch den Vergleich mit der arithmetischen und mechanischen Deduktion näher charakterisiert.

Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften.

Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. E. Weinstein. 8. Geb. *M* 9.—

„Weinstein versteht es meisterhaft, auch einen spröden Gegenstand für seine Zuhörer schmackhaft zu machen. Es liegt dies in seiner gegenständlichen Redeweise, die zum Hörer hinabzusteigen scheint, während sie ihn unmerklich auf die Höhe führt. Das Buch ist warm zu empfehlen.“ (Der Tag.)

Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 2. Aufl. In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb. I. Band. Mit 200 Figuren. *M* 7.50. II. Band. [In Vorbereitung.] Kleine Ausgabe: Mathematische Spiele. 170. Bändchen der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“. Mit einem Titelbild und 69 Figuren. 8. Geh. *M* 1.—, in Leinwand geb. *M* 1.25.

„Das mit großem Fleiße äußerst sorgfältig gearbeitete Werk ist als zuverlässiger Führer des Beifalls der Mathematiker sicher und wird sich gewiß auch bei allen Nichtmathematikern einbürgern, die einen Einblick in die geistvollen Gedanken nehmen, aus denen seit langer Zeit nach Art der Rätselfragen mannigfaltiger Stoff zu fröhlicher und befriedigender Unterhaltung entstanden ist...“ (Deutsche Literaturzeitung.)

Scherz und Ernst in der Mathematik. Gezügelte und ungezügelte Worte. Von Dr. W. Ahrens. gr. 8. In Leinwand geb. *M* 8.—

„Ein ‚Büchmann‘ für das Spezialgebiet der mathematischen Literatur... Manch ein kurzes treffendes Wort verbreitet Licht über das Streben der in der mathematischen Wissenschaft führenden Geister. Hierdurch aber wird das sorgfältig bearbeitete Ahrensche Werk eine zuverlässige Quelle nicht allein der Unterhaltung, sondern auch der Belehrung über Wesen, Zweck, Aufgabe und Geschichte der Mathematik.“

(Monatsschrift für höhere Schulen.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Die Kultur der Gegenwart

ihre Entwicklung und ihre Ziele

Herausgegeben von Professor Paul Hinneberg

Die „Kultur der Gegenwart“ soll eine systematisch aufgebaute, geschichtlich begründete Gesamtdarstellung unserer heutigen Kultur darbieten, indem sie die Fundamentalergebnisse der einzelnen Kulturgebiete nach ihrer Bedeutung für die gesamte Kultur der Gegenwart und für deren Weiterentwicklung in großen Zügen zur Darstellung bringt. Das Werk vereinigt eine Zahl erster Namen aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis und bietet Darstellungen der einzelnen Gebiete jeweils aus der Feder des dazu Berufensten in gemeinverständlicher, künstlerisch gewählter Sprache auf knappstem Raume.

III. Teil. Die mathematischen und naturwissenschaftlichen Kulturgebiete

Anfang 1913 erscheint zunächst: Abt. III, 2: Chemie, Abt. IV, 2: Biologie.

Abt. I. Die mathematischen Wissenschaften. Abteilungsleiter: F. Klein - Göttingen. Lieferung 1. [94 S.] 1912. M. 3.—

Abt. II. Die Vorgeschichte der modernen Naturwissenschaften und der Medizin. Bandredakteure: J. Ilberg - Leipzig, K. Sudhoff - Leipzig.

Abt. III. Anorganische Naturwissenschaften. 6 Bände. Abteilungsleiter: E. Lecher - Wien. Bandredakteure: E. Warburg - Berlin, E. v. Meyer - Dresden, J. Hartmann, F. R. Helmerl - Potsdam, u. weil. J. B. Messerschmidt - München, A. Rothpletz - München, E. Brückner - Wien.

Abt. IV. Organische Naturwissenschaften. 4 Bände. Abteilungsleiter: R. v. Wettstein - Wien. Bandredakteure: K. Chun - Leipzig, W. Johannsen - Kopenhagen,

O. Hertwig - Berlin, weil. E. Strasburger - Bonn, M. Rubner - Berlin, G. Haberland - Graz, R. v. Wettstein - Wien.

Abt. V. Anthropologie, einschl. naturwissenschaftliche Ethnographie. Bandredakteur: G. Schwalbe - Straßburg.

Abt. VI. Die medizinischen Wissenschaften. 3 Bände. Abteilungsleiter: F. v. Müller - München. Bandredakteure: K. Sudhoff - Leipzig, F. Marchand - Leipzig, W. His - Berlin, Max Gruber - München.

Abt. VII. Naturwissenschaftliche Erkenntnistheorie. Psychologie. Abteilungsleiter: unbestimmt. Bandredakteure: C. Becker - Münster i. W., C. Stumpf - Berlin.

Abt. VIII. Organisation der Forschung und des Unterrichts. Bandredakteur: A. Gutzmer - Halle a. S.

IV. Teil. Die technischen Kulturgebiete

Im Januar 1913 erscheint zunächst Band XII: Kriegswesen.

Abteilungsleiter: W. v. Dyck - München und O. Kammerer - Charlottenburg.

Bd. I. Vorgeschichte der Technik. Bandred.: C. Matschoß - Berlin.

Bd. II. Verwertung der Naturkräfte zur Gewinnung mechanischer Energie. Red.: M. Schröter - München.

Bd. III. Umwandlung und Verteilung der Energie. Red.: M. Schröter - München.

Bd. IV. Bergbau und Hüttenwesen. (Stoffgewinnung auf anorganisch. Wege.) Red.: W. Bornhardt - Charlottenburg.

Bd. V. Land- und Forstwirtschaft. (Stoffgewinnung auf organisch. Wege.) Red.: R. Beck-Tharandt, H. Martin-Tharandt.

Bd. VI. Mechanische Technologie. (Stoffbearb. auf maschinentechnischem Wege.) Red.: A. Wallichs - Aachen, E. Pfuhl - Riga.

Bd. VII. Chemische Technologie. Red.: H. Bunte - Karlsruhe.

Bd. VIII/IX. Siedelungen. Red.: W. Franz - Charlottenburg, C. Hocheder - München.

Bd. X/XI. Verkehrswesen. Red.: O. Kammerer - Charlottenburg.

Bd. XII. Technik des Kriegswesens. Red.: M. Schwarte - Oppeln.

Bd. XIII. Die technischen Mittel des geistigen Verkehrs. Red.: A. Miethe - Charlottenburg.

Bd. XIV. Die technischen Mittel der Beobachtung und Messung. Red.: A. Miethe - Charlottenburg.

Bd. XV. Entwicklungslinien der Technik. Red.: W. v. Dyck - München.

Bd. XVI. Organisation der Forschung. Unterricht. Red.: W. v. Dyck - München.

Bd. XVII. Die Stellung der Technik zu den anderen Kulturgebieten. I. Red.: W. v. Dyck - München.

Bd. XVIII. Die Stellung der Technik zu den anderen Kulturgebieten. II. Red.: W. v. Dyck - München.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Mathematische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der
Elementar-Mathematik für Schule und Leben

Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von

Dr. W. Lietzmann und

Dr. A. Witting

Oberlehrer an der Oberrealschule
zu Barmen

Professor am Gymnasium
zum Heiligen Kreuz zu Dresden

In Kleinoktavbändchen kart. je *M* — .80.

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an der Mathematik im weitesten Sinne des Wortes haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren und zu unterrichten. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung und eingehendere Bearbeitung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes mathematisches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser — ohne zu große Anforderungen an seine mathematischen Kenntnisse zu stellen — in neue Gebiete der Mathematik einführen.

Bisher erschienen:

1. E. Löffler, Ziffern und Ziffersysteme bei den Kulturvölkern in alter und neuer Zeit. 1912.
2. H. Wieleitner, der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Mit 10 Figuren. 1911.
3. W. Lietzmann, der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Mit 44 Figuren. 1912.
4. O. Meißner, Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Anwendungen. Mit 6 Figuren. 1912.
5. H. E. Timerding, die Fallgesetze. 1912.
6. M. Zacharias, Einführung in die projektive Geometrie. Mit 18 Figuren. 1912.
7. H. Wieleitner, d. sieben Rechnungsarten mit allgem. Zahlen. 1912.
8. P. Meth, Theorie der Planetenbewegung. Mit 17 Figuren. 1912.
9. A. Witting, Einführung in die Infinitesimalrechnung. Mit 40 Figuren. 1912.

In Vorbereitung bzw. unter der Presse befinden sich:

E. Beutel, Die Quadratur d. Kreises.
M. Gebhardt, Zur Geschichte der quadratischen Gleichungen.
W. Lietzmann, Der Eulersche Polysatz.
— u. V. Trier, Wo steckt der Fehler?
R. Rothe, Die zeichnerische Behandlung der Geländeflächen.
A. Schreiber, Ortbestimmung auf dem Lande, zur See und in der Luft.
H. Wieleitner, Elemente d. Mengenlehre.
— Höhere Kurven in einf. Darstellung.

M. Winkelmann, Der Kreisel.
A. Witting, Funktionsbegriff und graphische Darstellung.
— Abgekürztes Rechnen.
— Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Verschraubung.
— Drehmoment u. Trägheitsmoment.
— u. M. Gebhardt, Beispiele zur Geschichte der Mathematik.
P. Zühlke, Konstruktionen in begrenzter Ebene.
— Stereometrische Konstruktionen.