

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1989

MÜNCHEN 1990

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Das Verhalten von $\frac{1}{n^2}$ bei $n \rightarrow \infty$

Erklärung des Begriffs Grenzwert

Beispiel:  $\frac{1}{n^2}$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$

Man betrachte die Folge  $\frac{1}{n^2}$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Die Werte sind  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$ . Man sieht, dass die Werte gegen 0 hin tendieren.

Die Folge  $\frac{1}{n^2}$  ist eine Folge von reellen Zahlen. Die Grenzwert ist 0. Das bedeutet, dass für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n > N$  gilt  $|\frac{1}{n^2} - 0| < \epsilon$ .

$$\frac{1}{n^2} < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \sqrt{\epsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

$$\text{Für } \epsilon = \frac{1}{100} \text{ gilt } n > 10 \text{ und für } \epsilon = \frac{1}{10000} \text{ gilt } n > 100.$$

Man kann also zeigen, dass die Folge  $\frac{1}{n^2}$  gegen 0 konvergiert. Die Grenzwert ist 0.

Die Folge  $\frac{1}{n^2}$  ist eine Folge von reellen Zahlen. Die Grenzwert ist 0. Das bedeutet, dass für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n > N$  gilt  $|\frac{1}{n^2} - 0| < \epsilon$ .

$$\frac{1}{n^2} < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \sqrt{\epsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

Die Folge  $\frac{1}{n^2}$  ist eine Folge von reellen Zahlen. Die Grenzwert ist 0. Das bedeutet, dass für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n > N$  gilt  $|\frac{1}{n^2} - 0| < \epsilon$ .

in der Form  $z = x + iy$

$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \quad \text{mit}$$

$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} + i \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

gemäß 2.11.4. Nachfolgendes Ergebnis:

$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} + z \right) + \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z} - z \right) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) i$$

Nachfolgendes Ergebnis nach der Bedingung

$$z^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

erhalten wir, da  $z^n = (z^n)^{1/n}$

$$z^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha \quad z = \cos \frac{n\alpha}{n} + i \sin \frac{n\alpha}{n} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \dots$$

$$z^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = z^{n-1} + \dots$$

$$z^n - z^0 = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$$

$$z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} + z \right) + \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z} - z \right)$$

nachfolgendes Ergebnis nachfolgendes Ergebnis

$$z^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

$$z^n - z^0 = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$$

$$z^n - z^0 = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0 \quad z^n - z^0 = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$$

Die Gleichung  $z^n - 1 = 0$  hat die Lösungen  $z = 1, z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, z = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \dots, z = \cos \frac{(n-1)2\pi}{n} + i \sin \frac{(n-1)2\pi}{n}$ . Die Lösungen  $z = 1, z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, z = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \dots, z = \cos \frac{(n-1)2\pi}{n} + i \sin \frac{(n-1)2\pi}{n}$  sind die  $n$ -ten Einheitspotenzen. Die Gleichung  $z^n - 1 = 0$  hat die Lösungen  $z = 1, z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, z = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \dots, z = \cos \frac{(n-1)2\pi}{n} + i \sin \frac{(n-1)2\pi}{n}$ .

Die Gleichung  $z^n - 1 = 0$  hat die Lösungen  $z = 1, z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, z = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \dots, z = \cos \frac{(n-1)2\pi}{n} + i \sin \frac{(n-1)2\pi}{n}$ .

$$f(x) = \sum_{k=1}^x k^2 - 4x$$

Answer: Let  $z = 4 - \sum_{k=1}^x k^2$ . Then  $f(x) = z$ , so  $f'(x) = z'(x)$ .

Now

$$\sum_{k=1}^x k^2 = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^x k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^x k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^x k^2$$

Now differentiate both sides:  $f'(x) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^x k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^x k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^x k^2$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^x k^2$$

When  $x=2$ ,  $f'(2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 k^2 = \frac{1}{2} (1^2 + 2^2) = \frac{1}{2} (1 + 4) = \frac{5}{2}$ .

$$f'(2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 k^2 = \frac{1}{2} (1^2 + 2^2) = \frac{1}{2} (1 + 4) = \frac{5}{2}$$

2. The function  $f(x)$  is defined by the following table. Find  $f'(x)$  at  $x=2$ .

$$f(x) = \sum_{k=1}^x k^2 - 4x$$

Answer: Let  $z = 4 - \sum_{k=1}^x k^2$ .

3. The function  $f(x)$  is defined by the following table. Find  $f'(x)$  at  $x=2$ .

$$f(x) = \sum_{k=1}^x k^2 - 4x$$

Answer: Let  $z = 4 - \sum_{k=1}^x k^2$ . Then  $f(x) = z$ , so  $f'(x) = z'(x)$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^x k^2$$

Case 1.  $m = 0$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^m} + \dots + 1 + \dots$$

and

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^m} + \dots + \frac{1}{x^m} + \dots + 1 + \dots$$

It can be seen that  $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x) = 1$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^m} + \dots + \frac{1}{x^m} + \dots + 1 + \dots \right) = 1$$

and so  $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x) = 1$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^m} + \dots + 1 + \dots \right) = 1$$

As  $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x) = 1$ , the series converges to 1 for all  $x$ .

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^m} + \dots + 1 + \dots \right) = 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

It can be seen that  $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x) = 1$  for all  $x$ . The series converges to 1 for all  $x$ .

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^m} + \dots + 1 + \dots \right) = 1$$

It can be seen that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^m} + \dots + 1 + \dots \right) = 1$$

It can be seen that  $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x) = 1$  for all  $x$ .

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^m} + \dots + 1 + \dots \right) = 1$$

Es gilt  $f(x) = (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ . Die Binomische Formel lautet

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

oder

$$(x + a)^2 - x^2 = 2ax + a^2$$

Die Binomische Formel lautet  $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ . Die Binomische Formel lautet

oder

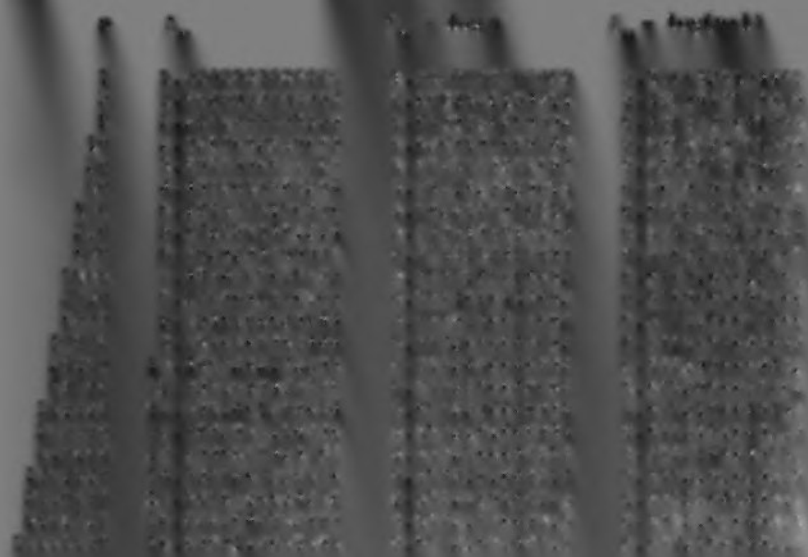
### Herleitung

1. Die Binomische Formel lautet  $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ .
2. Die Binomische Formel lautet  $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ .
3. Die Binomische Formel lautet  $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ .
4. Die Binomische Formel lautet  $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ .

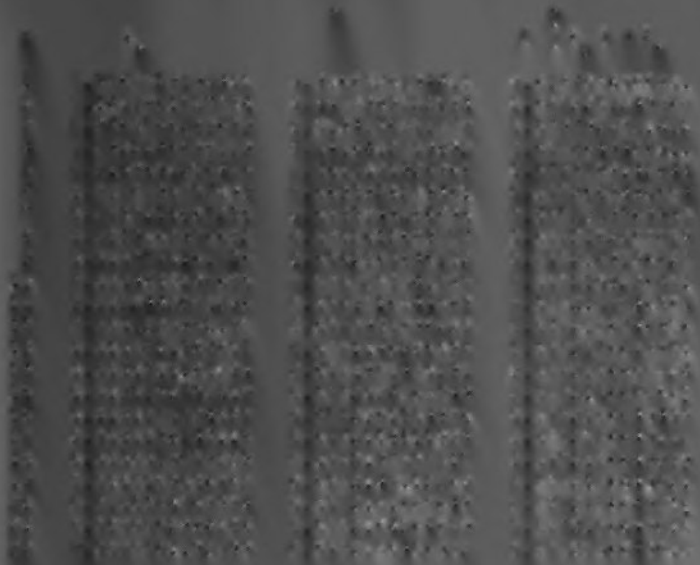
oder

$$(x + a)^2 - x^2 = 2ax + a^2$$

$$(x + a)^2 - x^2 = 2ax + a^2$$



S. S.



S. S.

