BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1989

MÜNCHEN 1990

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eine Bemerkung zu Koechers Reihen für die Eulersche Konstante

Von **Friedrich L. Bauer**

Sitzung vom 14. Juli 1989

Nach Euler ('Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali', 1736) existiert $C_{\text{Euler}} = \lim\limits_{n \to \infty} (\zeta_n - \log n)$, $\zeta_n = \sum\limits_{1 \leqq k \leqq n} 1/k$ [3].

Euler gab dafür, auf die asymptotische Entwicklung gestützt, eine Näherung auf 16 Dezimalstellen an. Mascheroni ('Adnotationes ad Calculum Integralem Euleri', vor 1800) wurde bei der Behandlung des Integralsinus ebenfalls auf die Eulersche Konstante geführt. Er gewann jedoch eine Reihe mit rationalen Gliedern

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu+1} k_\mu, \text{ wo } k_0 = \frac{1}{2} \text{ und}$$

$$k_i = \frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1} k_0 - \frac{1}{i} k_1 - \ldots - \frac{1}{2} k_{i-1},$$

$$\text{also } \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72} + \frac{19}{2880} + \frac{3}{800} + \frac{863}{362880} + \frac{275}{169344} + \ldots .$$

Wohl wegen der Kompliziertheit der Berechnung der Reihenglieder und wegen der schlechten Konvergenz geriet diese Reihe in Vergessenheit.

1. In einer Arbeit in den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften [1] hat Max Koecher zwei Reihen für C_{Euler} behandelt: Eine, die nur auf log 2 zurückgreift und eine, die sogar rationale Reihenglieder hat. Die erstere kann man erhalten, wenn man benützt daß

$$\lim_{n \to \infty} (\zeta_n - \log (n+1))$$

ebenfalls C_{Euler} ergibt. Wie Tabelle 1 zeigt, konvergieren beide Reihen ungefähr gleich gut.[1]

---

[1] Zwar konvergiert, wie Koecher 1986 gezeigt hat [2], $\zeta_n - \log\left(n + \frac{1}{2}\right)$ wesentlich schneller – die nachfolgende Betrachtung vermag das jedoch nicht auszunützen.

In der Tat gilt neben

$$\zeta_n - \log n - \frac{1}{2n} = C_{\text{Euler}} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{auch}$$

$$\zeta_n - \log(n+1) + \frac{1}{2n+2} = C_{\text{Euler}} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(vergl. [2] S. 91 (3)). Genauer gilt

$$\zeta_n - \log(n+1) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1} + \frac{1}{12}\,\frac{1}{(n+1)^2} = C_{\text{Euler}} + 0\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Nun liegt es nahe, nur die Teilfolge

$$(\zeta_{2^n-1} - \log 2^n)$$

zu betrachten. Sie ergibt die Reihe

$$(\zeta_1 - \log 2) + (\zeta_3 - \zeta_1 - \log 2) + (\zeta_7 - \zeta_3 - \log 2) + \ldots .$$

Sei $\delta_n = \sum_{1 \leqq k \leqq n} (-1)^{k+1}/k$.

Wegen $\zeta_{2n-1} - \delta_{2n-1} = \zeta_{n-1}$ gilt

$$\delta_n - \log 2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(n+1)^2} + 0\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

und es ergibt sich die Reihe [1], (18) direkt:

$$C_{\text{Euler}} = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n, \tag{1}$$

$$\text{wo } \ell_n = \delta_{2^n-1} - \log 2 = \sum_{1 \leqq k < 2^n} (-1)^{k+1}/k - \log 2$$

d. h. $(\delta_1 - \log 2) + (\delta_3 - \log 2) + (\delta_7 - \log 2) + (\delta_{15} - \log 2) + \ldots$

Die Konvergenz ist linear (Tabelle 2) mit einem Konvergenzfaktor 1/2; pro Glied gewinnt man eine Dualstelle. log 2 braucht nur einmal auf genügend hohe Genauigkeit berechnet zu werden; der Aufwand zur Berechnung der inneren Summen wächst jedoch exponentiell.

2. Die zweite Reihe (Vacca [4]) gewinnt man aus (1) durch eine Teleskopsumme. Sei

$$c_n = \sum_{2^n \leqq k < 2^{n+1}} (-1)^k/k$$

Dann ist $\log 2 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ und $\ell_n - \ell_{n+1} = c_n$, $n \geqq 1$.

Somit

$$\sum_{1 \leqq \mu \leqq n} \mu \cdot c_\mu = \left(\sum_{1 \leqq \mu \leqq n} \ell_\mu \right) - n \cdot \ell_{n+1} .$$

Nun gilt aber $\lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \ell_n \right) = 0$. Es ergibt sich die Reihe [1], (1)

$$C_{\text{Euler}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \qquad (2)$$

Diese Reihe konvergiert geringfügig schlechter als (1), wie Tabelle 3 zeigt. Sie hat jedoch rationale Reihenglieder. Die ersten fünf Werte von c sind

$$c_0 = -1,\ c_1 = \frac{1}{6},\ c_2 = \frac{31}{420},\ c_3 = \frac{12307}{360360},\ c_4 = \\ = \frac{1180906852403}{72201776446800} .$$

Die Rationalität der Reihenglieder verliert man, wenn man die in [1] angesprochene Konvergenzverbesserung

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left(\sum_{1 \leqq \mu \leqq n} \ell_\mu \right) + \ell_n \right)$$

benützt (Tabelle 2 rechts).

3. Um eine weitere Reihe herzuleiten, betrachten wir die Summe der Reziproken ungerader Zahlen:

$$u_n = \sum_{2^n \leqq k < 2^{n+1},\ k \text{ ungerade}} {}^{1}/k$$

Dabei ist $u_0 = 1,\ u_1 = \frac{1}{3},\ u_2 = \frac{12}{35},\ u_3 = \frac{2224}{6435},\ u_4 = \\ = \frac{10929047744}{31556720475}$.

Elementar gilt

$$c_n = \frac{1}{2^n}\ u_0 + \frac{1}{2^{n-1}}\ u_1 + \ldots + \frac{1}{2}\, u_{n-1} - u_n$$

und

$$\sum_{1 \leqq \mu \leqq n} c_\mu = 1 - \frac{1}{2^n}\, u_0 - \frac{1}{2^{n-1}}\, u_1 - \ldots - \frac{1}{2}\, u_{n-1} - u_n\,.$$

Damit ergibt sich für $s_n = \delta_{2^{n+1}-1}$

$$s_n = 1 - \sum_{1 \leqq \mu \leqq n} c_\mu = \frac{1}{2^n}\, u_0 + \frac{1}{2^{n-1}}\, u_1 + \ldots + \frac{1}{2}\, u_{n-1} + u_n \ (s_0 = 1)$$

und für s_n, c_n die Rekurrenz

$$s_n = \frac{1}{2}\, s_{n-1} + u_n \quad , \ c_n = \frac{1}{2}\, s_{n-1} - u_n\,.$$

Da $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \log 2$, hat man aus der ersten Beziehung

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \dfrac{1}{2}\ \log 2$; die Asymptotik für u_n erhält man aus der für $\delta_{2^{n+1}-1}$.

Tabelle 4 belegt, daß die lineare Konvergenz den Konvergenzfaktor 1/4 besitzt. Durch Induktion beweist man fernerhin

$$\sum_{1 \leqq \mu \leqq n} \mu \cdot c_\mu = 2 \cdot \left(\sum_{0 \leqq \mu \leqq n} u_\mu \right) - (n+2)\, s_n.$$

Daraus entsteht

$$\sum_{1 \leqq \mu \leqq n} \mu \cdot c_\mu =$$

$$2 + 2 \cdot \sum_{1 \leqq \mu \leqq n} \left(u_\mu - \frac{1}{2}\log 2 \right) - n \cdot (s_n - \log 2) - 2 \cdot s_n$$

Im Limes gilt, da $n \cdot (s_n - \log 2)$ gegen Null geht,

$$C_{\text{Euler}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n - \frac{1}{2}\log 2 \right) + 2 - 2 \cdot \log 2 \tag{3}$$

Tabelle 4 zeigt, wie auch diese neue Reihe linear mit dem Konvergenzfaktor 1/4 konvergiert.

$\log 2 - 1 + \frac{1}{2}\, C_{\text{Euler}}$ hat auf 15 Stellen den Wert

$- 0.0182449869892883.$

Die Asymptotik ergibt, daß $u_n + 1/(16 \cdot 2^{2n})$ und

$$\sum_{1 \leqq \mu \leqq n} \left(u_\mu - \frac{1}{2} \log 2\right) - 1/(48 \cdot 2^{2n})$$

deutlich rascher, nämlich mit dem Konvergenzfaktor 1/16, konvergieren.

Herrn J. Todd, Pasadena, danke ich für Literaturhinweise.

Literatur

[1] M. Koecher, Einige Bemerkungen zur Eulerschen Konstanten. Sitz. Ber. Bayr. Akad. d. Wiss., im Erscheinen (1989)

[2] M. Koecher, Klassische elementare Analysis. Basel, Birkhäuser 1987

[3] L. Euler, Opera omnia, Bd. XIV, S. 118ff.

[4] G. Vacca, A new series for the Eulerian constant. 577 . . . . Quarterly Journal Math. *41*, 363–364 (1910).

SUMMARY

The Series $\sum_{n=1} \left(u_n - \frac{1}{2} \log 2\right)$, where $u_n = \sum_{2^n \leqq k < 2^{n+1},\, k \text{ odd}} 1/k$

converges and has the limit $\log 2 - 1 + \frac{1}{2}\, C_{\text{Euler}}.$

n	ζ_n	$\zeta_n - \log n$	$\zeta_n - \log(n+1)$
1	1.0000000000000	1.0000000000000	0.3068528194401
2	1.5000000000000	0.8068528194401	0.4013877113319
5	2.2833333333333	0.6738954208992	0.4915738641053
10	2.9289682539683	0.6263831609742	0.5310729811699
20	3.5977396571437	0.6020073835897	0.5532172194203
50	4.4992053383294	0.5871823329013	0.5673797056051
100	5.1873775176396	0.5822073316515	0.5722570007984
200	5.8780309481214	0.5797135815734	0.5747260400624
500	6.7928234299905	0.5782153315683	0.5762173289057
1000	7.4854708605503	0.5777155815682	0.5767160812351
2000	8.1783681036103	0.5774656440682	0.5769657690266
5000	9.0945088529844	0.5773156615682	0.5771156815655
10000	9.7876060360444	0.5772656640682	0.5771656690679
20000	10.4807282172293	0.5772406646932	0.5771906659432
50000	11.3970039492785	0.5772256648682	0.5772056650682
100000	12.0901461298634	0.5772206648932	0.5772106649432
200000	12.7832908104296	0.5772181648994	0.5772131649119
500000	13.6995800423055	0.5772166649012	0.5772146649032
1000000	14.3927267228656	0.5772161649014	0.5772151649019
2000000	15.0858736534258	0.5772159149015	0.5772154149017
5000000	16.0021642352999	0.5772157649015	0.5772155649015
10000000	16.6953113658595	0.5772157149012	0.5772156149012

Tabelle 1

n	ℓ_n	$\sum^n \ell_\mu$	$(\sum^n \ell_\mu) + \ell_n$
1	0.3068528194401	0.3068528194401	0.6137056388801
2	0.1401861527734	0.4470389722134	0.5872251249868
3	0.0663766289639	0.5134156011773	0.5797922301412
4	0.0322246698119	0.5456402709892	0.5778649408011
5	0.0158690216476	0.5615092926368	0.5773783142844
6	0.0078735277093	0.5693828203461	0.5772563480554
7	0.0039215083235	0.5733043286696	0.5772258369930
8	0.0019569396682	0.5752612683377	0.5772182080059
9	0.0009775161725	0.5762387845102	0.5772163006827
10	0.0004885196685	0.5767273041787	0.5772158238471
11	0.0002442002296	0.5769715044083	0.5772157046380
12	0.0001220852137	0.5770935896220	0.5772156748356
13	0.0000610388815	0.5771546285035	0.5772156673851
14	0.0000305185094	0.5771851470130	0.5772156655224
15	0.0000152590219	0.5772004060349	0.5772156650567
16	0.0000076294527	0.5772080354876	0.5772156649403
17	0.0000038147118	0.5772118501994	0.5772156649112
18	0.0000019073523	0.5772137575517	0.5772156649039
19	0.0000009536752	0.5772147112269	0.5772156649021
20	0.0000004768374	0.5772151880643	0.5772156649016
21	0.0000002384186	0.5772154264829	0.5772156649015
22	0.0000001192093	0.5772155456922	0.5772156649015

Tabelle 2

n	c_n	$\sum^{n} c_\mu$	$\sum^{n} \mu c_\mu$
1	0.1666666666667	0.1666666666667	0.1666666666667
2	0.0738095238095	0.2404761904762	0.3142857142857
3	0.0341519591520	0.2746281496281	0.4167415917416
4	0.0163556481643	0.2909837977925	0.4821641843989
5	0.0079954939383	0.2989792917308	0.5221416540903
6	0.0039520193858	0.3029313111166	0.5458537704053
7	0.0019645686553	0.3048958797719	0.5596057509924
8	0.0009794234957	0.3058753032676	0.5674411389577
9	0.0004889965040	0.3063642997716	0.5718421074940
10	0.0002443194388	0.3066086192104	0.5742853018823
11	0.0001221150160	0.3067307342264	0.5756285670581
12	0.0000610463321	0.3067917805585	0.5763611230435
13	0.0000305203721	0.3068223009306	0.5767578878807
14	0.0000152594876	0.3068375604182	0.5769715207065
15	0.0000076295692	0.3068451899873	0.5770859642438
16	0.0000038147409	0.3068490047282	0.5771470000985
17	0.0000019073595	0.3068509120878	0.5771794252108
18	0.0000009536770	0.3068518657648	0.5771965913976
19	0.0000004768378	0.3068523426027	0.5772056513166
20	0.0000002384187	0.3068525810214	0.5772104196916
21	0.0000001192093	0.3068527002308	0.5772129230876
22	0.0000000596047	0.3068527598354	0.5772142343900

Tabelle 3

n	u_n	$u_n - \frac{1}{2}\log 2$	$1 - \log 2 + \sum^{n}(u_\mu - \frac{1}{2}\log 2)$
1	0.3333333333333	-0.0132402569466	0.2936125624934
2	0.3428571428571	-0.0037164474228	0.2898961150706
3	0.3456099456099	-0.0009636446700	0.2889324704006
4	0.3463302770216	-0.0002433132584	0.2886891571422
5	0.3465126071655	-0.0000609831145	0.2886281740277
6	0.3465583347488	-0.0000152555312	0.2886129184965
7	0.3465697757864	-0.0000038144936	0.2886091040029
8	0.3465726366184	-0.0000009536616	0.2886081503414
9	0.3465733518622	-0.0000002384178	0.2886079119236
10	0.3465735306754	-0.0000000596046	0.2886078523190
11	0.3465735753788	-0.0000000149012	0.2886078374178
12	0.3465735865547	-0.0000000037253	0.2886078336925
13	0.3465735893487	-0.0000000009313	0.2886078327612
14	0.3465735900471	-0.0000000002328	0.2886078325284
15	0.3465735902218	-0.0000000000582	0.2886078324702
16	0.3465735902654	-0.0000000000146	0.2886078324556
17	0.3465735902763	-0.0000000000036	0.2886078324520
18	0.3465735902791	-0.0000000000009	0.2886078324511
19	0.3465735902797	-0.0000000000002	0.2886078324508
20	0.3465735902799	-0.0000000000001	0.2886078324508
21	0.3465735902800	-0.0000000000000	0.2886078324508
22	0.3465735902800	-0.0000000000000	0.2886078324508

Tabelle 4