

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1987

MÜNCHEN 1988

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über eine einparametrische Familie von Mittelwerten

Von Horst Alzer in Waldbröl

Vorgelegt von Heinz Bauer am 12. 12. 1986

1. Einleitung

In einer kurzen Note aus dem Jahre 1975 hat K. B. Stolarsky [16] für positive reelle Zahlen x und y (mit $x \neq y$) sowie für reelle Parameter r und s (mit $r \neq s$, $rs \neq 0$) folgende zweiparametrische Familie von Mittelwerten eingeführt:

$$E(r, s; x, y) = \left[\frac{r}{s} \frac{x^s - y^s}{x^r - y^r} \right]^{1/(s-r)}.$$

Die Mittelwertfamilie E ist von besonderem Interesse, weil sie nahezu alle bekannten Mittelwerte als Spezialfälle enthält:

$$\begin{aligned} \text{Das logarithmische Mittel: } E(0, 1; x, y) &= \lim_{r \rightarrow 0} E(r, 1; x, y) \\ &= \frac{x - y}{\ln x - \ln y}, \end{aligned}$$

$$\text{das geometrische Mittel: } E(-r, r; x, y) = (xy)^{1/2},$$

$$\text{das arithmetische Mittel: } E(1, 2; x, y) = (x + y)/2,$$

$$\text{das harmonische Mittel: } E(-1, -2; x, y) = 2xy/(x + y),$$

$$\text{das Heron Mittel: } E(1/2, 3/2; x, y) = (x + (xy)^{1/2} + y)/3,$$

$$\text{das quadratische Mittel: } E(2, 4; x, y) = ((x^2 + y^2)/2)^{1/2},$$

$$\text{das Wurzel Mittel: } E(1/2, 1; x, y) = ((x^{1/2} + y^{1/2})/2)^2,$$

$$\text{das Lorentz Mittel: } E(1/3, 2/3; x, y) = ((x^{1/3} + y^{1/3})/2)^3.$$

Interessante Eigenschaften von E sind außer von Stolarsky vor allem von E. B. Leach und M. C. Sholander [6], [7] bewiesen worden.

Im Folgenden werden wir uns mit der Funktionenschar $E(r, r + 1; x, y)$ beschäftigen. Ziel dieser Note ist es, zu zeigen, wie sich die bekannte Doppelungleichung

$$\sqrt{xy} < \frac{x - y}{\ln x - \ln y} < \frac{x + y}{2}, \quad x \neq y,$$

mit Hilfe von $E(r, r + 1; x, y)$ auf eine neue Art verschärfen läßt.

2. Definition und elementare Eigenschaften von $F_r(x, y)$

Für positive voneinander verschiedene reelle Zahlen x und y definieren wir:

$$F_r(x, y) := \frac{r}{r+1} \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r} \quad \text{für reelle } r \neq 0, -1,$$

$$F_0(x, y) := \lim_{r \rightarrow 0} F_r(x, y) = \frac{x - y}{\ln x - \ln y},$$

$$F_{-1}(x, y) := \lim_{r \rightarrow -1} F_r(x, y) = xy \frac{\ln x - \ln y}{x - y}.$$

Stolarsky [16] hat gezeigt, daß $E(r, s; x, y)$ bezüglich beider Parameter r und s streng monoton steigt, wenn x, y und der jeweils andere Parameter festgewählte Zahlen sind (vgl. [6]). Somit besitzt $F_r(x, y)$ folgende Monotonieeigenschaft:

Wenn $x \neq y$ und $r_1 < r_2$, dann gilt: $F_{r_1}(x, y) < F_{r_2}(x, y)$.

Ohne Schwierigkeiten beweist man:

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} F_r(x, y) = \min(x, y) < F_r(x, y) < \max(x, y) = \lim_{r \rightarrow \infty} F_r(x, y),$$

$$x \neq y,$$

$${}_c F_r(x, y) = F_r(cx, cy) \quad \text{für } c > 0,$$

$$F_r(x, y) = F_r(y, x).$$

Bei $F_r(x, y)$ handelt es sich also um eine einparametrische Familie von homogenen symmetrischen Mittelwerten, die neben den drei klassi-

schen Mittelwerten: dem harmonischen Mittel, dem geometrischen Mittel und dem arithmetischen Mittel auch das logarithmische Mittel von x und y als Spezialfall enthält:

$$H(x, y) = F_{-2}(x, y) = \frac{2xy}{x+y}, \quad G(x, y) = F_{-1/2}(x, y) = (xy)^{1/2},$$

$$A(x, y) = F_1(x, y) = \frac{x+y}{2}, \quad L(x, y) = F_0(x, y) = \frac{x-y}{\ln x - \ln y}.$$

Das logarithmische Mittel L spielt bei wirtschaftswissenschaftlichen und physikalischen Problemen (wie etwa bei Fragen des Wärmetransports oder der Ladungsverteilung bei elektrischen Leitern) eine wichtige Rolle (siehe [11], [14], [15]) und ist darüber hinaus Gegenstand zahlreicher rein-mathematischer Untersuchungen. Vor allem sind eine Vielzahl von Ungleichungen für L veröffentlicht worden. Aus der Monotonieeigenschaft von F_r folgt insbesondere, daß $L(x, y)$ zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel von x und y liegt:

$$G(x, y) < L(x, y) < A(x, y), \quad x \neq y. \quad (1)$$

Für diese Ungleichungen findet man in der Literatur eine Reihe verschiedener Beweise (siehe [2], [3], [9], [12], [13]). Daneben ist die Doppelungleichung (1) mehrfach verschärft worden (siehe [1], [5], [8], [10]). Eine besonders elegante Verschärfung von (1) haben B. C. Carlson sowie E. B. Leach und M. C. Sholander bewiesen:

$$\sqrt[3]{(G(x, y))^2 A(x, y)} < L(x, y) < \frac{1}{3} (2G(x, y) + A(x, y)), \quad x \neq y. \quad (2)$$

(Einen Beweis für die linke bzw. rechte Seite von (2) findet man in [7] bzw. [4].)

3. Ungleichungen für $F_r(x, y)$

Im Folgenden wollen wir zeigen: Für alle reellen Zahlen $r \neq 0$ liegt das geometrische Mittel von F_r und F_{-r} zwischen G und L , und das arithmetische Mittel von F_r und F_{-r} liegt für alle $r \neq 0$ zwischen L und A .

Um diese Aussagen beweisen zu können, benötigen wir Kenntnisse über das Monotonieverhalten der Funktionen $F_r F_{-r}$ und $F_r + F_{-r}$.

Lemma 1. Wenn x und y positive Zahlen sind mit $x \neq y$, dann fällt die Funktion $F_r(x, y) F_{-r}(x, y)$ bezüglich r in R^+ streng monoton.

Beweis. Für $r > 0$ und $t > 0$ definieren wir:

$$f(r, t) := F_r(e^t, e^{-t}) F_{-r}(e^t, e^{-t})$$

$$= \begin{cases} \frac{r^2}{r^2 - 1} \frac{\sinh(t(r+1)) \sinh(t(r-1))}{(\sinh(tr))^2} & \text{für } 0 < r \neq 1, \\ t \coth(t) & \text{für } r = 1, \end{cases}$$

und

$$g(r) = g_t(r) := \frac{r \sinh(t(\sqrt{r}+1)) \sinh(t(\sqrt{r}-1))}{(\sinh(t\sqrt{r}))^2}.$$

Auf Grund von

$$f(\sqrt{r}; t) = \begin{cases} \frac{g_t(r) - g_t(1)}{r - 1} & \text{für } 0 < r \neq 1, \\ g'_t(1) & \text{für } r = 1, \end{cases}$$

ist $f(\sqrt{r}; t)$ und somit auch

$$xy f(r, \tfrac{1}{2} \ln(x/y)) = F_r(x, y) F_{-r}(x, y) \quad (x > y > 0)$$

bezüglich r in R^+ streng monoton fallend, wenn – was wir beweisen werden – g in R^+ streng konkav ist.

Differentiation von g ergibt:

$$(\sinh(t))^{-2} g'(r) = (\coth(t))^2 - (\coth(t\sqrt{r}))^2 + t\sqrt{r} [(\coth(t\sqrt{r}))^3 - \coth(t\sqrt{r})]$$

sowie

$$(\sinh(t\sqrt{r}))^4 (\sinh(t))^{-2} \frac{2\sqrt{r}}{t} g''(r)$$

$$= -3 \cosh(t\sqrt{r}) (\sinh(t\sqrt{r}))^3 + 3 (\cosh(t\sqrt{r}))^3 \sinh(t\sqrt{r}) -$$

$$\begin{aligned}
& t \sqrt{r} (\sinh(t \sqrt{r}))^4 + 4 t \sqrt{r} (\cosh(t \sqrt{r}))^2 (\sinh(t \sqrt{r}))^2 - \\
& 3 t \sqrt{r} (\cosh(t \sqrt{r}))^4 \\
& = [3 \cosh(t \sqrt{r}) \sinh(t \sqrt{r}) - 3 t \sqrt{r} (\cosh(t \sqrt{r}))^2 + \\
& t \sqrt{r} (\sinh(t \sqrt{r}))^2] [(\cosh(t \sqrt{r}))^2 - (\sinh(t \sqrt{r}))^2] \\
& = \frac{3}{2} \sinh(2 t \sqrt{r}) - 2 t \sqrt{r} - t \sqrt{r} \cosh(2 t \sqrt{r}).
\end{aligned}$$

Wir entwickeln $\sinh$ und $\cosh$ in Potenzreihen und erhalten dann:

$$(\sinh(t \sqrt{r}))^4 (\sinh(t))^{-2} \frac{2 \sqrt{r}}{t} g''(r) = - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{(2 t \sqrt{r})^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Folglich gilt: $g''(r) < 0$.

Lemma 2. Wenn x und y positive Zahlen sind mit $x \neq y$, dann steigt die Funktion $F_r(x, y) + F_{-r}(x, y)$ bezüglich r in R^+ streng monoton.

Beweis. Für $r > 0$ und $t > 0$ definieren wir:

$$\begin{aligned}
u(r, t) &:= F_r(e^t, e^{-t}) + F_{-r}(e^t, e^{-t}) \\
&= \begin{cases} \frac{2r}{r^2-1} [r \cosh(t) - \coth(tr) \sinh(t)] & \text{für } 0 < r \neq 1, \\ \cosh(t) + \frac{t}{\sinh(t)} & \text{für } r = 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

und

$$v(r) = v_t(r) := \sqrt{r} \coth(t/\sqrt{r}).$$

Wenn v in R^+ streng konkav ist, dann fällt

$$w(r, t) := \begin{cases} \frac{v_t(r) - v_t(1)}{r-1} & \text{für } 0 < r \neq 1, \\ v'_t(1) & \text{für } r = 1, \end{cases}$$

bezüglich r in R^+ streng monoton, so daß auf Grund von

$$u(r, t) = 2 \sinh(t) w(1/r^2; t)$$

die Funktion u und somit auch

$$F_r(x, y) + F_{-r}(x, y) = \sqrt{xy} \, u(r; \tfrac{1}{2} \ln(x/y)) \quad (x > y > 0)$$

bezüglich r in R^+ streng monoton steigt.

Es bleibt zu zeigen, daß v in R^+ streng konkav ist.

Differentiation von v ergibt:

$$\begin{aligned} v'(r) &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \coth(t/\sqrt{r}) - \frac{t}{2r} [1 - (\coth(t/\sqrt{r}))^2], \\ 4r^{3/2} v''(r) &= (t/\sqrt{r}) - (1 + 2(t/\sqrt{r})^2) \coth(t/\sqrt{r}) - \\ &\quad (t/\sqrt{r}) (\coth(t/\sqrt{r}))^2 + 2(t/\sqrt{r})^2 (\coth(t/\sqrt{r}))^3, \\ (\sinh(t/\sqrt{r}))^3 4r^{3/2} v''(r) &= (t/\sqrt{r}) (\sinh(t/\sqrt{r}))^3 + \\ 2(t/\sqrt{r})^2 (\cosh(t/\sqrt{r}))^3 &- ((t/\sqrt{r})^2 + 1/2) \sinh(t/\sqrt{r}) \sinh(2t/\sqrt{r}) - \\ (t/2\sqrt{r}) \cosh(t/\sqrt{r}) \sinh(2t/\sqrt{r}). \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Formeln:

$$\begin{aligned} (\sinh(a))^3 &= \tfrac{1}{4} \sinh(3a) - \tfrac{3}{4} \sinh(a), \\ (\cosh(a))^3 &= \tfrac{1}{4} \cosh(3a) + \tfrac{3}{4} \cosh(a), \\ \sinh(a) \sinh(2a) &= \tfrac{1}{2} \cosh(3a) - \tfrac{1}{2} \cosh(a), \\ \cosh(a) \sinh(2a) &= \tfrac{1}{2} \sinh(3a) + \tfrac{1}{2} \sinh(a), \end{aligned}$$

folgt nach elementaren Umformungen:

$$\begin{aligned} (\sinh(t/\sqrt{r}))^3 4r^{3/2} v''(r) &= -(t/\sqrt{r}) \sinh(t/\sqrt{r}) - \\ (1/4) \cosh(3t/\sqrt{r}) &+ (2(t/\sqrt{r})^2 + 1/4) \cosh(t/\sqrt{r}). \end{aligned} \quad (3)$$

Wir entwickeln die rechte Seite von (3) in eine Potenzreihe und erhalten:

$$\begin{aligned} (\sinh(t/\sqrt{r}))^3 4r^{3/2} v''(r) &= \\ \tfrac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} [8(n+1)(4n+1) - 9^{n+1} + 1] &\frac{(t/\sqrt{r})^{2n+2}}{(2n+2)!}. \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion beweist man:

$$8(n+1)(4n+1) - 9^{n+1} + 1 < 0 \quad \text{für } n \geq 2;$$

also gilt

$$v'''(r) < 0 \quad \text{für } r > 0.$$

Wir sind nun in der Lage, die oben formulierte Verschärfung der Ungleichungen

$$G(x, y) < L(x, y) < A(x, y), \quad x \neq y,$$

zu beweisen.

Satz. Wenn x und y positive Zahlen sind mit $x \neq y$, dann gilt für $r \neq 0$:

$$G(x, y) < \sqrt{F_r(x, y) F_{-r}(x, y)} < L(x, y) \\ < \frac{1}{2} (F_r(x, y) + F_{-r}(x, y)) < A(x, y).$$

Beweis. Nach Lemma 1 ist

$$S_r(x, y) = [F_r(x, y) F_{-r}(x, y)]^{1/2}, \quad x \neq y,$$

bezüglich r in R^+ streng monoton fallend, so daß wir auf Grund von

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_r(x, y) = G(x, y) \quad \text{und} \quad S_0(x, y) = L(x, y)$$

für $r \neq 0$ die Doppelungleichung

$$G(x, y) < S_r(x, y) < L(x, y)$$

erhalten.

Nach Lemma 2 ist

$$T_r(x, y) = \frac{1}{2} [F_r(x, y) + F_{-r}(x, y)], \quad x \neq y,$$

bezüglich r in R^+ streng monoton steigend.

Wegen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T_r(x, y) = A(x, y) \quad \text{und} \quad T_0(x, y) = L(x, y)$$

folgt für $r \neq 0$:

$$L(x, y) < T_r(x, y) < A(x, y).$$

Bemerkung. Auf Grund der Identität

$$\frac{1}{2} (F_{1/2}(x, y) + F_{-1/2}(x, y)) = \frac{1}{3} (2 G(x, y) + A(x, y))$$

und der Abschätzung

$$\begin{aligned} & ((G(x, y))^2 A(x, y))^{1/3} - (F_{1/2}(x, y) F_{-1/2}(x, y))^{1/2} \\ &= (G(x, y))^{1/2} \left[(G(x, y) (A(x, y))^2)^{1/6} - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{G(x, y) + 2 A(x, y)}{3} \right)^{1/2} \right] \\ &< 0 \quad \text{für } x \neq y, \end{aligned}$$

erhalten wir folgende Verschärfungen der Doppelungleichung (2):

$$\sqrt[3]{(G(x, y))^2 A(x, y)} < \sqrt{F_r(x, y) F_{-r}(x, y)} < L(x, y)$$

für $x \neq y$ und $0 < r \leq 1/2$,

und

$$L(x, y) < \frac{1}{2} (F_r(x, y) + F_{-r}(x, y)) < \frac{1}{3} (2 G(x, y) + A(x, y))$$

für $x \neq y$ und $0 < r < 1/2$.

Herrn Prof. Dr. H. Bauer danke ich herzlich für seine Verbesserungsvorschläge zu dieser Arbeit.

Literatur

- [1] Alzer, H.: Über Mittelwerte, die zwischen dem geometrischen und dem logarithmischen Mittel zweier Zahlen liegen. *Anz. d. Österr. Akad. d. Wiss., math.-naturwiss. Kl.* **123**, 5–9 (1986).
- [2] Burk, F.: By all means. *Amer. Math. Monthly* **92**, 50 (1985).
- [3] Carlson, B. C.: Some inequalities for hypergeometric functions. *Proc. Amer. Soc.* **17**, 32–39 (1966).
- [4] Carlson, B. C.: The logarithmic mean. *Amer. Math. Monthly* **79**, 615–618 (1972).
- [5] Karamata, J.: Sur quelques problèmes posés par Ramanujan. *J. Indian Math. Soc.* **24**, 343–365 (1960).
- [6] Leach, E. B. and Sholander, M. C.: Extended mean values. *Amer. Math. Monthly* **85**, 84–90 (1978).
- [7] Leach, E. B. and Sholander, M. C.: Extended mean values II. *J. Math. Anal. Appl.* **92**, 207–223 (1983).
- [8] Lin, T. P.: The power mean and the logarithmic mean. *Amer. Math. Monthly* **81**, 879–883 (1974).
- [9] Marshall, A. W. and Olkin, I.: *Inequalities: Theory of majorization and its applications*. New York 1979 (chapter 3, section I.4).
- [10] Mascioni, V.: Logarithmische Konvexität und Ungleichungsscharen. *El. Math.* **40**, 149–150 (1985).
- [11] McAdams, W. H.: *Heat transmission*. New York 1954.
- [12] Mitrinović, D. S.: *Analytic inequalities*. Berlin 1970 (sections 3.6.15; 3.6.17).
- [13] Ostle, B. and Terwilliger, H. L.: A comparison of two means. *Proc. Montana Acad. Sci.* **17**, 69–70 (1957).
- [14] Pittenger, A. O.: The logarithmic mean in n variables. *Amer. Math. Monthly* **92**, 99–104 (1985).
- [15] Pólya, G. and Szegő, G.: *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. Princeton 1951.
- [16] Stolarsky, K. B.: Generalizations of the logarithmic mean. *Math. Mag.* **48**, 87–92 (1975).