BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1969

MÜNCHEN 1970

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Spline-Funktionen mehrerer Veränderlicher. I

Definition und Erzeugung durch Integration

Von Gerhard Heindl

Vorgelegt am 7. November 1969

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist der Ausarbeitung eines Vorschlags von G. Aumann gewidmet, Spline-Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher als p-te Integrale von (p-mal integrierbaren) simplizial-konstanten symmetrischen (= SKS-)Tensorfeldern der Stufe p zu konstruieren.

Eine Spline-Funktion dieser Art ist eine, auf einem Polyeder $P \subseteq R^n$ definierte, $(p-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $P \to R^m$, deren Einschränkung auf jedes n-dimensionale Simplex einer festen Triangulation von P ein Polynom vom Grad $q \leqq p$ ist (Def. I.3).

Auf einfach zusammenhängenden Polyedern lassen sich p-mal integrierbare SKS-Tensorfelder durch eine einfache Eigenschaft, die sog. Tangentialstetigkeit, kennzeichnen (Satz II.2.1 und Satz II.2.2). Dadurch kann die Struktur jeder Spline-Funktion, insbes. die Menge der verfügbaren Parameter, aus ihrer Integraldarstellung abgelesen werden, was für Approximationsprobleme wichtig ist.

I. Definition der Spline-Funktionen im R^n

I.1 Multilineare symmetrische Abbildungen und Polynome von Vektoren.

$A : (R^n)^p \to R^m$ sei eine p-fach multilineare symmetrische Abbildung. Ist $x \in R^n$, so ist im Falle $p \geqq 2$ durch

$$Ax : (h_1, \ldots, h_{p-1}) \mapsto A(x, h_1, \ldots, h_{p-1}),\ (h_1, \ldots, h_{p-1}) \in (R^n)^{p-1},$$

eine $(p-1)$-fach multilineare und symmetrische Abbildung definiert. Im Falle $p=1$ setzen wir $Ax := A(x) \in R^m$.

Mit $y \in R^n$ ist im Falle $p \geqq 3$ $Axy = Ayx$ $(p-2)$-fach multilinear und symmetrisch; für $p=2$ ist $Axy = A(x, y) \in R^m$. Axx bezeichnen wir mit Ax^2. Analog ist im Fall $j, k \in N$ und $j+k \leqq p$ $Ax^j y^k$ erklärt. $Ax^0 := A$.

Die Norm von A sei durch

$$\|A\| := \sup_{|h_1| = \ldots = |h_p| = 1} |A(h_1, \ldots, h_p)|$$

definiert. $|z|$ kennzeichnet die euklidische Norm von z, sowohl für $z \in R^n$, als auch $z \in R^m$.

Für die Norm von $Ax^j y^k$ hat man die Abschätzung

$$\|Ax^j y^k\| \leqq \|A\| \, |x|^j \, |y|^k. \tag{I.1}$$

Eine Abbildung

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{p} A_i x^i + c, \quad x \in R^n,$$

mit i-fach multilinearen symmetrischen A_i $(i = 1, \ldots, p)$, $A_p \neq 0$ und $c \in R^m$, heißt ein vektorielles Polynom vom Grad p.

I.2 Z- und EZ-Komplexe

Definition I.2.1

Eine Menge $\mathcal{K}$ von Simplexen des R^n heiße Z-Komplex, wenn gilt:

1. a) Mit jedem Simplex $s \in \mathcal{K}$ ist auch jede seiner Seiten in $\mathcal{K}$ enthalten.
   b) Sind s_1 und s_2 verschiedene Simplexe aus $\mathcal{K}$, so ist $s_1 \cap s_2$ entweder leer, oder eine gemeinsame Seite von s_1 und s_2.
2. Zu jedem k-dimensionalen Simplex $s_1 \in \mathcal{K}$, mit $k < n$, gibt es ein n-dimensionales Simplex $s_2 \in \mathcal{K}$, welches s_1 als Seite hat.
3. Zu je zwei verschiedenen Ecken von $\mathcal{K}$, das sind Punkte x, y mit $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{K}$, gibt es einen $\{x\}$ mit $\{y\}$ verbindenden Kantenweg $[x, x_1, \ldots, x_{l-1}, y]$ in $\mathcal{K}$; d. h. es gibt endlich viele Punkte $x_0 = x, x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l = y$, so daß für jedes $i = 0, \ldots,$

$l-1$ das eindimensionale Simplex $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ mit den Endpunkten x_i und x_{i+1} in $\mathcal{K}$ enthalten ist.

4. Jeder Punkt aus $\overline{\mathcal{K}} := \bigcup_{s_\lambda \in \mathcal{K}} s_\lambda$ besitzt eine Umgebung, die nur mit endlich vielen Simplexen aus $\mathcal{K}$ Punke gemeinsam hat.

Zu $x \in \overline{\mathcal{K}}$ gibt es in $\mathcal{K}$ ein eindeutig bestimmtes Simplex s, für das x im offenen Kern $\underset{-}{s}$ von s bzgl. seiner Trägerebene liegt. Dieses Simplex heißt der Träger von x in $\mathcal{K}$. $\hat{\mathcal{K}}$ sei die Menge aller $x \in \overline{\mathcal{K}}$, die in $\mathcal{K}$ einen n-dimensionalen Träger besitzen.

Definition I.2.2

Eine Menge $\mathcal{K}$ von Simplexen des R^n heiße EZ-Komplex, wenn sie ein Z-Komplex ist, und wenn sich jeder geschlossene Kantenweg in $\mathcal{K}$ durch Anwendung endlich vieler der Abbildungen (sog. elementarer Deformationen)

1. a) $I_1 := [x, \ldots, y, z, y, w, \ldots] \mapsto I_2 := [x, \ldots, y, w, \ldots]$
   b) $I_2 \mapsto I_1$
2. a) $I_3 := [x, \ldots, y, z, w, \ldots] \mapsto I_4 := [x, \ldots, y, w, \ldots]$
   b) $I_4 \mapsto I_3$

   falls y, z und w ein zweidimensionales Simplex $\langle y, z, w\rangle$ aus $\mathcal{K}$ aufspannen.
3. $$[x, y, \ldots, x] \mapsto [y, \ldots, x, y]$$

in einen Kantenweg $[u, v, u]$ in $\mathcal{K}$ überführen läßt.

Jede Menge $P \subseteq R^n$, zu der es einen $(E)Z$-Komplex $\mathcal{K}$ mit $\overline{\mathcal{K}} = P$ gibt, ist ein (einfach) zusammenhängendes Polyeder. (Darunter fallen insb. offene (einfach) zusammenhängende Mengen.) $\mathcal{K}$ heißt eine Triangulation von P.

I.3 Spline-Funktionen

Definition I.3

Eine Abbildung $\varphi : P \to R^m$, mit $P \subseteq R^n$, heißt Spline-Funktion vom Grad p $(p \in N)$, wenn gilt:

4*

1. Es gibt einen Z-Komplex $\mathcal{K}$ mit $\overline{\mathcal{K}} = P$.
2. Zu jedem n-dimensionalen $s \in \mathcal{K}$ gibt es ein vektorielles Polynom P_s, welches höchstens den Grad p hat und der Gleichung $P_s | s = \varphi | s$ genügt.
3. Es gibt ein n-dimensionales $s \in \mathcal{K}$, für das Grad $P_s = p$ ist.
4. φ ist $(p - 1)$-mal stetig differenzierbar.

Bemerkung:

Man könnte versucht sein, diese Definition zu „vereinfachen", indem man, falls P das erlaubt, $\mathcal{K}$ durch einen aus kantenparallelen Quadern bestehenden Zellenkomplex ersetzt. Die auf diese Weise gewonnenen Funktionen sind jedoch von sehr spezieller Natur und eignen sich deshalb nicht als Approximationsfunktionen, was Spline-Funktionen aber in erster Linie sein sollten.

Ist beispielsweise $P \subset R^2$ ein Rechteck, $\mathcal{K}$ eine Rechteckszerlegung von P, bzgl. der $\varphi : P \to R$, mit $p = 2$, die Eigenschaften 2., 3. und 4. der Definition I. 3 besitzt, so hat φ die Gestalt:

$$\varphi : (x, y) \mapsto \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + c\,xy, \ (x, y) \in P.$$

φ_{xy} hat nämlich im Inneren eines jeden (2-dim.) Rechteckes von $\mathcal{K}$ ein und denselben Wert c.

Die i-te Ableitung $D^i \varphi$ $(i = 1, \ldots, p-1)$ einer Spline-Funktion $\varphi : P \to R^m$ vom Grad p ist ein symmetrisches Tensorfeld der Stufe i auf P, d. h. eine Abbildung, die jedem $x \in P$ eine i-fach multilineare symmetrische Abbildung $A(x) : (R^n)^i \to R^m$ zuordnet.[1]

Für eine Triangulation $\mathcal{K}$ von P ist $D^{p-1} \varphi$ noch differenzierbar in allen Punkten $x \in P$, die in $\mathcal{K}$ einen n-dimensionalen Träger besitzen. $D^p \varphi$ ist im Inneren eines jeden n-dimensionalen Simplexes $s \in \mathcal{K}$ konstant, i. a. aber nicht auf P.

---

[1] Hier wird $p \geqq 2$ vorausgesetzt. Betrachtet man jedoch eine Abbildung $P \to R^m$ als Tensorfeld der Stufe 0 auf P, so lassen sich alle folgenden Definitionen und Sätze auch auf den Fall $p = 1$ übertragen.

II. Erzeugung der Spline-Funktionen durch Integration

II.1. Integrierbare symmetrische Tensorfelder

Definition II.1.1

Es sei $\mathcal{K}$ ein Z-Komplex und A ein symmetrisches Tensorfeld der Stufe p auf $\hat{\mathcal{K}}$. A heiße integrierbar bzgl. $\mathcal{K}$, wenn es ein stetiges Tensorfeld B der Stufe $(p-1)$ auf $\overline{\mathcal{K}}$ gibt, welches in jedem inneren Punkt x eines jeden n-dimensionalen Simplexes $s \in \mathcal{K}$ differenzierbar ist mit der Ableitung $A(x)$; d. h. für alle x, $x+h \in \underline{s}$ gilt

$$\| B(x+h) - B(x) - A(x)\, h \| = |h|\, \varepsilon(x, h),$$

wobei $\varepsilon(x, h)$ mit $|h|$ gegen Null konvergiert.

B werde als ein Integral von A bzgl. $\mathcal{K}$ bezeichnet.

Ein wichtiges Hilfsmittel, um aus gewissen Eigenschaften eines Tensorfeldes auf Eigenschaften seiner Integrale zu schließen, ist folgender

Mittelwertsatz II.1.1

Voraussetzung: B sei ein auf der Strecke $\langle x, y\rangle \subset R^n$ stetiges Tensorfeld $(p-1)$-ter Stufe, welches in jedem Punkt $z \in \rangle x, y\langle :=$ $:= \langle x. y\rangle \setminus \{x, y\}$ differenzierbar ist (bzgl. $\rangle x, y\langle$) mit der p-linearen symmetrischen Ableitung $A(z)$.

Behauptung:

1. Zu jedem $(h_1, \ldots, h_{p-1}) \in (R^n)^{p-1}$ und jedem $e \in R^m$ gibt es ein $\zeta \in \rangle x, y\langle$ mit

$$[\{B(y) - B(x) - A(\zeta)\,(y-x)\}\,(h_1, \ldots, h_{p-1})] \cdot e = 0.$$

($\bar{x} \cdot \bar{y}$ kennzeichnet das Skalarprodukt zweier Vektoren $\bar{x}, \bar{y}$ im R^m bzw. im R^n)

2. Es gibt ein $\zeta_1 \in \rangle x, y\langle$ mit

$$\| B(y) - B(x) \| \leqq \| A(\zeta_1) \|\; |y-x|.$$

3. Ist $z \in \rangle x, y\langle$, so gibt es ein $\zeta_2 \in \rangle z, y\langle$ mit

$$\| B(y) - B(z) - A(z)\,(y-z) \| \leqq \| A(\zeta_2) - A(z) \|\; |y-z|.$$

Beweis:

Es sei $(h_1, \ldots, h_{p-1}) \in (R^n)^{p-1}$ und $e \in R^m$. Die Funktion

$$\Phi : \tau \mapsto [B(x + \tau(y - x))\,(h_1, \ldots, h_{p-1})] \cdot e, \quad 0 \leqq \tau \leqq 1,$$

hat für $0 < \tau < 1$ die Ableitung

$$\Phi'(\tau) = [A(x + \tau(y - x))\,(y - x, h_1, \ldots, h_{p-1})] \cdot e.$$

1. folgt somit durch Anwendung des elementaren Mittelwertsatzes auf Φ.

Setzt man in 1. $e = \{B(y) - B(x)\}\,(h_1, \ldots, h_{p-1})$, so folgt 2. mit der Schwarzschen Ungleichung.

Analog erhält man 3. aus

$$[\{B(y) - B(z) - A(z)\,(y - z)\}\,(h_1, \ldots, h_{p-1})] \cdot e =$$
$$= [\{A(\zeta_2) - A(z)\}\,(y - z)\,(h_1, \ldots, h_{p-1})] \cdot e$$

mit $e = \{B(y) - B(z) - A(z)\,(y - z)\}\,(h_1, \ldots, h_{p-1})$.

Satz II.1.2

Sind B_1 und B_2 Integrale eines symmetrischen Tensorfeldes A bzgl. eines Z-Komplexes $\mathcal{K}$, so gilt $B_1 - B_2 = \text{const.}$

Beweis:

Zunächst folgt $(B_1 - B_2)\,|\,s = \text{const.}$ für jedes n-dimensionale Simplex $s \in \mathcal{K}$. Aus dem Mittelwertsatz ergibt sich nämlich

$$\|(B_1 - B_2)\,(y) - (B_1 - B_2)\,(x)\| \leqq \|(A - A)\,(\zeta)\|\,|y - x| = 0$$

für alle $x \in \underline{s}$, $y \in s$, mit einem $\zeta \in \rangle x, y\langle$.

Wegen der Eindeutigkeit von $B_1 - B_2$ und der Eigenschaft 3. der Z-Komplexe erhält man aber in jedem n-dimensionalen Simplex $s \in \mathcal{K}$ für $B_1 - B_2$ die gleiche Konstante.

Ist A bzgl. $\mathcal{K}$ integrierbar und $q \in \overline{\mathcal{K}}$, so bezeichne $\int^1_{\mathcal{K}, q} A$ das eindeutig bestimmte Integral B von A, für welches $B(q)$ die Nullabbildung ist.

Ist $\int_{\mathcal{K},q}^{1} A$ symmetrisch und integrierbar, so schreiben wir $\int_{\mathcal{K},q}^{2} A$ für $\int_{\mathcal{K},q}^{1}\left(\int_{\mathcal{K},q}^{1} A\right)$. Analog ist $\int_{\mathcal{K},q}^{i} A$ $(i=1,\ldots,p)$ erklärt.

Ist $\mathcal{K}$ ein Z-Komplex, $s \in \mathcal{K}$, so sei $St\,s$ als die Menge aller Simplexe aus $\mathcal{K}$ erklärt, welche s als Seite haben, oder welche Seiten von solchen Simplexen sind. $St\,s$ ist offenbar ein Z-Komplex.

Definition II.1.2

$\mathcal{K}$ sei ein Z-Komplex, A ein symmetrisches Tensorfeld auf $\hat{\mathcal{K}}$. A heiße lokal integrierbar bzgl. $\mathcal{K}$, wenn für alle Ecken x von $\mathcal{K}$ $A\,|\,\widehat{St\{x\}}$ bzgl. $St\{x\}$ integrierbar ist.

Bzgl. eines EZ-Komplexes ist lokale Integrierbarkeit gleich zu setzen mit Integrierbarkeit; d. h.

Satz II.1.3

Jedes bzgl. eines EZ-Komplexes $\mathcal{K}$ lokal integrierbare Tensorfeld A ist bzgl. $\mathcal{K}$ integrierbar.

Beweis:

Für jede Ecke x von $\mathcal{K}$ kennzeichne B_x ein Integral von $A\,|\,\widehat{St\{x\}}$ bzgl. $St\{x\}$. Wir zeigen zuerst:

Für jeden geschlossenen Kantenweg $[p_0, \ldots, p_{l+1} = p_0]$ in $\mathcal{K}$ ändert sich die Summe

$$S[p_0, \ldots, p_{l+1}] := \sum_{k=0}^{l} B_{p_k}(p_k) - B_{p_{k+1}}(p_k)$$

nicht, falls man auf $[p_0, \ldots, p_{l+1} = p_0]$ eine elementare Deformation anwendet.

Mit den Bezeichnungen der Definition I.2.2 hat man:

1. $$S I_1 - S I_2 = -B_z(y) + B_z(z) - B_y(z) + B_y(y).$$

$B_y\,|\,\widehat{St\langle y, z\rangle}$ und $B_z\,|\,\widehat{St\langle y, z\rangle}$ sind Integrale von $A\,|\,\widehat{St\langle y, z\rangle}$ bzgl. $St\langle y, z\rangle$, denn es ist $St\langle y, z\rangle \subseteq St\{y\} \cap St\{z\}$. Aus Satz II.1.2 folgt daher $S I_1 - S I_2 = 0$.

2. $$S I_3 - S I_4 = -B_z(y) + B_z(z) - B_w(z) + B_w(y).$$

$B_z | \overline{St\langle y, z, w\rangle}$ und $B_w | \overline{St\langle y, z, w\rangle}$ sind Integrale von $A | \overline{St\langle y, z, w\rangle}$ bzgl. $St\langle y, z, w\rangle$, denn es gilt $St\langle y, z, w\rangle \subseteq \subseteq St\{z\} \cap St\{w\}$. Mit Satz II.1.2 ergibt sich also auch in diesem Falle $S I_3 - S I_4 = 0$.

Daß 3. keine Änderung von $S[x, y, \ldots, x]$ bewirkt, ist klar.

Da sich jeder geschlossene Kantenweg $[p_0, \ldots, p_{l+1} = p_0]$ in $\mathcal{K}$ durch elementare Deformationen in einen Kantenweg $[u, v, u]$ in $\mathcal{K}$ überführen läßt, ergibt sich

$$S[p_0, \ldots, p_{l+1} = p_0] = S[u, v, u] = B_u(u) - B_v(u) + B_v(v) - B_u(v) = 0,$$

woraus sich jetzt folgern läßt, daß

$$B_I(x) := B_x(x) + \sum_{k=0}^{l} B_{p_k}(p_k) - B_{p_{k+1}}(p_k)$$

für jeden, ein festes $\{p_0\} \in \mathcal{K}$ mit $\{x\} = \{p_{l+1}\} \in \mathcal{K}$ verbindenden Kantenweg $I = [p_0, \ldots, p_l, x]$ in $\mathcal{K}$ den gleichen Wert $B(x)$ besitzt. Seien nämlich $I_1 = [p_0, \ldots, p_l x]$ und $I_2 = = [p_0, q_1, \ldots, q_r, x]$ zwei solche Kantenwege, so gilt, da $[p_0, \ldots, p_l, x, q_r, q_{r-1}, \ldots, q_1, p_0]$ geschlossen ist:

$$B_{I_1}(x) - B_{I_2}(x) = \left|\sum_{k=0}^{l} B_{p_k}(p_k) - B_{p_{k+1}}(p_k)\right| + B_x(q_r) - B_{q_r}(q_r) + \ldots.$$

$$\ldots + B_{q_1}(p_0) - B_{p_0}(p_0) = \left|\sum_{k=0}^{l} B_{p_k}(p_k) - B_{p_{k+1}}(p_k)\right| + B_x(x) - B_{q_r}(x) +$$

$$\ldots + B_{q_1}(q_1) - B_{p_0}(q_1) = 0.$$

Genauso folgert man, daß für jedes $x \in \overline{\mathcal{K}}$

$$\tilde{B}_q(x) := B_q(x) + (B(q) - B_q(q))$$

für jede Ecke q von $\mathcal{K}$, mit $x \in \overline{St\{q\}}$, den gleichen Wert hat, den wir, ohne mit der bisherigen Bezeichnung in Konflikt zu kommen, mit $B(x)$ bezeichnen können.

Wir zeigen jetzt: Die Abbildung $x \mapsto B(x)$, $x \in \overline{\mathcal{K}}$, ist stetig und Integral von A.

Wegen der Stetigkeit der B_q genügt es nachzuweisen, daß es zu jedem Punkt $x \in \overline{\mathcal{K}}$ ein $\{q\} \in \mathcal{K}$ gibt, so daß die Menge $\overline{St\{q\}}$ Umgebung von x bzgl. $\overline{\mathcal{K}}$ ist. Sei s Träger von x in $\mathcal{K}$ und q Eckpunkt von s. Wegen der Eigenschaft 4. jedes Z-Komplexes gibt es eine Umgebung U von x mit $U \cap \overline{\mathcal{K}} = = U \cap \{s_1 \cup s_2 \cup \ldots \cup s_k\}$, $s_1, \ldots, s_k \in \mathcal{K}$. Wir können $s \subseteq s_i$, also $q \in s_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ annehmen, woraus $U \cap \overline{\mathcal{K}} \subseteq \overline{St\{q\}}$ folgt. Da sich B auf jedem n-dimensionalen Simplex aus $\mathcal{K}$ von einem B_q nur um eine additive Konstante unterscheidet, ist B Integral von A bzgl. $\mathcal{K}$.

Bemerkung:

Aus der Konstruktion von B erkennt man, daß aus der Symmetrie aller B_q die Symmetrie von B folgt.

Für stetiges A läßt sich Satz II.1.3 verschärfen und überall in $\overline{\mathcal{K}}$ die Differenzierbarkeit der Integrale von A nachweisen:

Satz II.1.4

Voraussetzung: $\mathcal{K}$ sei ein EZ-Komplex, A ein symmetrisches Tensorfeld auf $\overline{\mathcal{K}}$, welches in jedem Punkt aus $\overline{\mathcal{K}} \setminus \hat{\mathcal{K}}$ stetig ist. Ferner existiere für jedes n-dimensionale Simplex $s \in \mathcal{K}$ ein Tensorfeld $B_{\underline{s}}$ auf $\underline{s}$, welches in jedem $x \in \underline{s}$ differenzierbar ist mit der Ableitung $A(x)$.

Behauptung:

1. $A \,|\, \hat{\mathcal{K}}$ ist integrierbar bzgl. $\mathcal{K}$.
2. Die Integrale von $A \,|\, \hat{\mathcal{K}}$ bzgl. $\mathcal{K}$ sind in allen Punkten $x \in \overline{\mathcal{K}}$ differenzierbar mit der Ableitung $A(x)$.

Beweis:

a) Für jedes n-dimensionale Simplex $s \in \mathcal{K}$ konvergiert $B_{\underline{s}}$ in jedem Randpunkt x von s.

Bew.: Ist für alle y in $U_\delta(x) \cap \underline{s}$ $\|A(y) - A(x)\| < 1$, so gilt für zwei beliebige Punkte u, v aus $U_\delta(x) \cap \underline{s}$ mit einem $\zeta \in \rangle u, v \langle$:

$$\|B_{\underline{s}}(u) - B_{\underline{s}}(v)\| \leq \|A(\zeta)\| \, |u - v| < (\|A(x)\| + 1)\, 2\delta.$$

(Satz II.1.1,2). Die Existenz von $\lim\limits_{x' \to\to x} B_{\underline{s}}(x')$ folgt jetzt aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium.
B_s sei die stetige Erweiterung von $B_{\underline{s}}$ auf s.

b) B_s ist in jedem Randpunkt x von s differenzierbar mit der Ableitung $A(x)$.

Bew.: Ist $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ so bestimmt, daß für alle $u \in \underline{s} \cap U_\delta(x)$ $\|A(u) - A(x)\| < \varepsilon/4$ ist, so setzen wir $v := {}$ $:= x + \tau(u - x)$ mit $\tau = \varepsilon(8\|A(x)\| + 2\varepsilon)^{-1}$. Mit einem $\zeta_1 \in$ $\in\ \rangle u, v\langle$ und einem $\zeta_2 \in\ \rangle x, v\langle$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|B_s(u) - B_s(x) - A(x)(u-x)\| \leqq \|B_s(u) - B_s(v) - A(v)(u-v)\| + \\
&+ \|\{A(v) - A(x)\}(u-v)\| + \|A(x)(x-v)\| + \|B_s(v) - B_s(x)\| \leqq \\
&\leqq \|A(v) - A(\zeta_1)\|\ |u-v| + \|A(v) - A(x)\|\ |u-v| + \\
&\qquad\qquad + \|A(x)\|\ |x-v| + \|A(\zeta_2)\|\ |v-x| \leqq \\
&\leqq |u-x|\ \{(\varepsilon/2 + \varepsilon/4)(1-\tau) + (2\|A(x)\| + \varepsilon/4)\tau\} \leqq |u-x| \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

((I.1) und Satz II.1.1).

Läßt man u in $\underline{s} \cap U_\delta(x)$ gegen einen Randpunkt von s konvergieren, so erkennt man, daß sogar für alle $u \in s \cap U_\delta(x)$

$\|B_s(u) - B_s(x) - A(x)(u-x)\| \leqq |u-x| \cdot \varepsilon$ gilt.

c) Ist q eine Ecke von $\mathcal{K}$ und sind $s_1, \ldots, s_k$ alle n-dimensionalen Simplexe aus $\mathcal{K}$, die q enthalten, so ist

$$B_q : x \mapsto B_{s_i}(x) - B_{s_i}(q) \quad \text{falls } x \in s_i,\ \ i = 1, \ldots, k,$$

Integral von $A\,|\,\widehat{St\{q\}}$ bzgl. $St\{q\}$.

Bew.: Ist $x \in s_i \cap s_j$, so hat $\Delta := \{B_{s_i} - B_{s_i}(q)\} -$ $- \{B_{s_j} - B_{s_j}(q)\}$ in jedem Punkt $z \in \langle x, q\rangle$ die Nullabbildung als Ableitung. Aus Satz II.1.1 und $\Delta(q) = 0$ folgt, daß B_q eindeutig und stetig ist. Wegen b) ist B_q nicht nur im Inneren der Simplexe $s_1, \ldots, s_k$ differenzierbar mit der Ableitung $A(x)$, sondern auch auf deren Rändern.

Satz II.1.4 folgt jetzt aus Satz II.1.3.

Wir wenden uns jetzt denjenigen Tensorfeldern zu, von denen man durch wiederholte Integration zu Spline-Funktionen gelangt.

II.2 Integrierbare simplizial-konstante symmetrische Tensorfelder und deren Integrale.

Definition II.2.1

Ist $\mathcal{K}$ ein Z-Komplex und A ein symmetrisches Tensorfeld auf $\hat{\mathcal{K}}$, so heißt A simplizial-konstant bzgl. $\mathcal{K}$ oder SKS-Tensorfeld bzgl. $\mathcal{K}$, wenn für jedes n-dimensionale Simplex $s \in \mathcal{K}$ $A|\underline{s}$ konstant ist.

Satz II.2.1

Es sei $\mathcal{K}$ ein EZ-Komplex, A ein SKS-Tensorfeld bzgl. $\mathcal{K}$. A ist genau dann integrierbar bzgl. $\mathcal{K}$, wenn es bzgl. $\mathcal{K}$ tangentialstetig ist, d. h. wenn

$$A(z_1)(y-x) = A(z_2)(y-x) \tag{II.2.}$$

gilt, falls $\langle x, y\rangle$ gemeinsame Kante zweier n-dimensionaler Simplexe $s_1, s_2 \in \mathcal{K}$ und $z_i \in \underline{s}_i$, $i = 1, 2$, ist.

Beweis:

a) Es gelte (II.2.).

Ist $\{q\} \in \mathcal{K}$, $\overline{St\{q\}}$ Vereinigung der n-dimensionalen Simplexe $s_1, \ldots, s_k \in \mathcal{K}$ und $z_i \in \underline{s}_i$, $i = 1, \ldots, k$, so erweist sich

$$B_q : x \mapsto A(z_i)(x-q) \qquad \text{falls } x \in s_i,\ i = 1, \ldots, k,$$

als ein Integral von $A|\overline{St\{q\}}$ bzgl. $St\{q\}$. Eindeutigkeit und Stetigkeit von B_q in einem Punkt $x \in s_i \cap s_j$ folgen aus der Darstellung $x = q + \lambda_1(x_1 - q) + \cdots + \lambda_l(x_l - q)$, wobei q, $x_1, \ldots, x_l$ die gemeinsamen Eckpunkte von s_i und s_j bezeichnen. Es ist dann

$$\begin{aligned} A(z_i)(x-q) &= \lambda_1 A(z_i)(x_1-q) + \cdots + \lambda_l A(z_i)(x_l-q) = \\ &= \lambda_1 A(z_j)(x_1-q) + \cdots + \lambda_l A(z_j)(x_l-q) = \\ &= A(z_j)(x-q). \end{aligned}$$

Für $x, x+h \in \underline{s}_i$, $i = 1, \ldots, k$, ist

$$B_q(x+h) - B_q(x) = A(z_i)(x+h-q) - A(z_i)(x-q) = A(z_i)h.$$

Damit ist A lokal integrierbar bzgl. $\mathcal{K}$, also auch integrierbar.

b) Ist B ein Integral von A bzgl. $\mathcal{K}$, so ist für je zwei n-dimensionale Simplexe $s_1, s_2 \in \mathcal{K}$ mit gemeinsamer Kante $\langle x, x+h \rangle$:

$$B(x+h) - B(x) = \lim_{h' \twoheadrightarrow h} A(z_i)\, h'$$

falls $z_i \in \underline{s}_i$, $i = 1, 2$, also $A(z_1)h = A(z_2)h$.

Bemerkung:

Die im ersten Teil des Beweises von Satz II.2.1 konstruierten Tensorfelder B_q sind symmetrisch. Daher ist nach der Bemerkung im Anschluß an Satz II.1.3 jedes Integral von A symmetrisch, welches in einem $q \in R^n$ mit $\{q\} \in \mathcal{K}$ verschwindet.

In Verallgemeinerung von Satz II.2.1 zeigen wir jetzt, daß für jedes $\{q\} \in \mathcal{K}$ $\int^i_{\mathcal{K}, q} A$ für jedes $i = 1, \ldots, p$ existiert, falls A die Stufe p hat.

Satz II.2.2

$\mathcal{K}$ sei ein EZ-Komplex. Für ein bzgl. $\mathcal{K}$ tangentialstetiges symmetrisches Tensorfeld A der Stufe p auf $\hat{\mathcal{K}}$ existieren für jede Ecke q von $\mathcal{K}$ die Integrale $\int^i_{\mathcal{K}, q} A$, $i = 1, \ldots, p$. Falls $i < p$ ist, sind diese Integrale symmetrisch.

Beweis:

Existenz und Symmetrie von $\int^1_{\mathcal{K}, q} A$ wurden bereits nachgewiesen. Für ein beliebiges n-dimensionales $s \in \mathcal{K}$ ist, mit einer symmetrischen $(p-1)$-linearen Abbildung C_1,

$$\left\{\int^1_{\mathcal{K}, q} A\right\}(x) = A_s(x-y) + C_1$$

für alle $x \in \underline{s}$, wenn y Eckpunkt von s ist und $A_s = A(x)$. Nehmen wir an, wir hätten für $\int^i_{\mathcal{K}, q} A$ auf $\underline{s}$ die Darstellung

$$\left\{\int_{\mathfrak{K},q}^{i} A\right\}(x) = \frac{1}{i!}\, A_s(x-y)^i + \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{(i-j)!}\, C_j(x-y)^{i-j}$$

gefunden, mit symmetrischen $(p-j)$-linearen Abbildungen C_j, $j = 1, \ldots, i$; dann wäre $\int_{\mathfrak{K},q}^{i} A$ symmetrisch und, wie jetzt gezeigt werden soll, im Fall $i \leqq p-1$ auch integrierbar.

Setzt man für $x \in \underline{s}$

$$B_s(x) = \frac{1}{(i+1)!}\, A_s(x-y)^{i+1} + \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{(i+1-j)!}\, C_j(x-y)^{i+1-j},$$

so erhält man infolge der Linearität und Symmetrie von A und der C_j:

$$B_s(x+h) = \frac{1}{(i+1)!} \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} A_s(x-y)^{i+1-j}\, h^j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{(i+1-j)!} \sum_{\varkappa=0}^{i+1-j} \binom{i+1-j}{\varkappa} C_j(x-y)^{i+1-j-\varkappa}\, h^\varkappa =$$

$$= B_s(x) + \frac{1}{i!}\, A_s(x-y)^i\, h + \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{(i-j)!}\, C_j(x-y)^{i-j}\, h + \varepsilon(x-y, h),$$

$$\text{mit } \|\varepsilon(x-y,h)\| \leqq |h|^2 \left\{ \frac{1}{(i+1)!} \sum_{j=2}^{i+1} \binom{i+1}{j} \|A_s\|\, |x-y|^{i+1-j}\, |h|^{j-2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{\varkappa=2}^{i+1-j} \frac{1}{\varkappa!\,(i+1-j-\varkappa)!} \|C_j\|\, |x-y|^{i+1-j-\varkappa}\, |h|^{\varkappa-2} \right\}.$$

Wegen der Beschränktheit der Summen in der geschweiften Klammer gilt

$$\left\| B_s(x+h) - B_s(x) - \left\{\int_{\mathfrak{K},q}^{i} A\right\}(x)\, h \right\| \leqq M\, |h|^2$$

mit einer Konstanten M. Aus Satz II.1.4 folgen daraus Existenz und (für $i+1 < p$) Symmetrie von $\int_{\mathfrak{K},q}^{i+1} A$, ferner für $x \in \underline{s}$ die Darstellung

$$\left\{\int_{\mathfrak{K},q}^{i+1} A\right\}(x) = \frac{1}{(i+1)!}\, A_s(x-y)^{i+1} + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{(i+1-j)!}\, C_j(x-y)^{i+1-j}$$

mit symmetrischem C_{i+1} falls $i+1 < p$, mit $C_{i+1} \in R^m$, falls $i+1 = p$ ist. Damit ist aber der Nachweis für die Richtigkeit von Satz II.2.2 durch Induktion erbracht.

II.3 Spline-Funktionen als Integrale von tangentialstetigen SKS-Tensorfeldern

Die Sätze II.1.4 (Beh. 2) und II.2.2 zeigen, daß man durch p-fache Integration eines SKS-Tensorfeldes, welches bzgl. eines EZ-Komplexes $\mathcal{K}$ tangentialstetig ist und nicht identisch verschwindet, zu einer Spline-Funktion vom Grad p gelangt. Umgekehrt sind, wie schon früher bemerkt, alle Ableitungen einer Spline-Funktion vom Grad p symmetrisch. Die $(p-1)$-te Ableitung ist Integral eines tangentialstetigen SKS-Tensorfeldes A, welches nicht überall verschwindet. A ist wegen der Eigenschaft 2. der Z-Komplexe eindeutig bestimmt. Zusammenfassend ergibt sich der

Darstellungssatz II.3

Voraussetzung: $\mathcal{K}$ sei ein EZ-Komplex, $\mathcal{P}^p_{\mathcal{K}}$ die Menge aller $(p+1)$-tupel $(A; C_1, \ldots, C_{p-1}; C_p)$, in denen A ein nicht identisch verschwindendes, bzgl. $\mathcal{K}$ tangentialstetiges SKS-Tensorfeld der Stufe p bezeichnet, C_i $(i = 1, \ldots, p-1)$ symmetrische $(p-i)$-lineare Abbildungen $(R^n)^{p-i} \to R^m$ bedeuten, und $C_p \in R^m$ ist.

Behauptung: Für jedes $\{q\} \in \mathcal{K}$ ist

$$\Omega : (A; C_1, \ldots, C_{p-1}; C_p) \mapsto \left\{ x \mapsto \left\{ \int^p_{\mathcal{K}, q} A \right\}(x) + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i!} C_{p-i} x^i + C_p, \; x \in \overline{\mathcal{K}} \right\}, \; (A; C_1, \ldots, C_{p-1}; C_p) \in \mathcal{P}^p_{\mathcal{K}}$$

eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathcal{P}^p_{\mathcal{K}}$ auf die Menge $\gamma^p_{\mathcal{K}}$ aller Spline-Funktionen vom Grad p, welche die Eigenschaften 2., 3. und 4. der Definition I.3 bzgl. $\mathcal{K}$ besitzen.

Beweis:

Daß Ω eine Abbildung von $\mathcal{P}^p_{\mathcal{K}}$ in $\gamma^p_{\mathcal{K}}$ ist, ist nach dem oben gesagten klar. Seien nun $\varphi \in \gamma^p_{\mathcal{K}}$ und $\{q\} \in \mathcal{K}$ beliebig vorgegeben. Für $D^{p-1}\varphi$ hat man dann die Integraldarstellung

$$D^{p-1}\varphi : x \mapsto \left\{\int_{\mathcal{K},q} A\right\}(x) + C_1, \quad x \in \overline{\mathcal{K}},$$

mit einem eindeutig bestimmten bzgl. $\mathcal{K}$ tangentialstetigen SKS-Tensorfeld A und einer ebenfalls eindeutig bestimmten symmetrischen $(p-1)$-linearen Abbildung C_1.

$D^{p-j}\varphi$ $(j = 1, \ldots, p)$ ergibt sich daraus induktiv in der Gestalt

$$D^{p-j}\varphi : x \mapsto \left\{\int_{\mathcal{K},q}^{j} A\right\}(x) + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i!} C_{j-i} x^i + C_j, \quad x \in \overline{\mathcal{K}},$$

mit eindeutig bestimmten symmetrischen $(p-i)$-linearen Abbildungen C_i $(i = 1, \ldots, j)$. Dabei ist unter einer symmetrischen 0-linearen Abbildung ein Punkt im R^m zu verstehen.

Es folgt daher $\varphi \in \Omega\left(\mathcal{P}^p_{\mathcal{K}}\right)$ und die Umkehrbarkeit von Ω.

Satz II.3 zeigt, daß sich Spline-Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher in völlig analoger Weise aufbauen lassen wie Spline-Funktionen einer reellen Veränderlichen. Es ist daher naheliegend zu fragen, welche Probleme, die im Zusammenhang mit Spline Funktionen auftreten und im eindimensionalen Fall bereits gelöst sind, im Fall mehrerer Veränderlicher entsprechende Lösungen zulassen. Insbesondere dürften dabei Interpolation und Approximation durch Spline-Funktionen interessieren. Darüber soll in einer folgenden Arbeit berichtet werden.

Literatur

T. N. E. Greville: Theory and Applications of Spline Functions. New York–London 1969

G. Heindl: Über verallgemeinerte Stammfunktionen und LC-Funktionen im R^n. Diss., TH München 1968.

F. u. R. Nevanlinna: Absolute Analysis. Berlin 1959.