Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1923. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1923
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die nichteuklidischen Minimalflächen.

Von **F. Lindemann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 13. Januar 1923.

Die nichteuklidischen Minimalflächen kann man nach Darboux dadurch definieren, daß ihre Minimalkurven ein konjugiertes System sind, d. h. daß die Haupttangenten-Kurven ein Orthogonalsystem im nichteuklidischen Sinn bilden.[1]) Die Flächen haben dann auch die den euklidischen Minimalflächen analoge Minimumeigenschaft.

Darboux hat eine Transformation angegeben,[2]) welche den nichteuklidischen Raum auf das Innere einer Kugel abbildet, und nach Poincaré ist diese Transformation besonders anschaulich, wenn man das Innere der Kugel weiter auf den Halbraum abbildet (etwa den Halbraum oberhalb der Ebene $z = 0$); dabei gehen die nichteuklidischen Minimalkurven in die euklidischen Minimalkurven über. Man kann nach den von mir abgeleiteten älteren Bourschen Formeln[3]) jede Fläche durch ihre Minimalkurven (mit den Parametern α, β) darstellen; vermöge der Poincaréschen Transformation erhält man also auch die Darstellung einer Fläche im nichteuklidischen Raume durch die nichteuklidischen Minimalkurven; diese Darstellung bildet die Grundlage der folgenden Betrachtung.

---

[1]) Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 3, 1894, S. 471 ff.

[2]) Annales de l'école normale 1864; Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces 1873, S. 123; Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 3, 1894, S. 493.

[3]) Abhandlungen der Bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. 29, 1921. Auf einige Punkte dieser Arbeit komme ich demnächst zurück.

1. Die erwähnten Bour'schen Formeln geben für die Koordinaten x, y, z einer Fläche:

$$
\begin{aligned}
& x = i \int [\operatorname{cosin} \lambda \cdot W_\alpha \, d\alpha - \operatorname{cosin} \mu \cdot W_\beta \, d\beta], \\
(1) \qquad & y = i \int [\sin \lambda \cdot W_\alpha \, d\alpha - \sin \mu \cdot W_\beta \, d\beta, \\
& z = \int [W_\alpha \, d\alpha + W_\beta \, d\beta] = W,
\end{aligned}
$$

wo λ zu μ, α zu β konjugiert ist und W eine reelle Funktion von α, β bezeichnet. Zwischen λ, μ und W bestehen die folgenden Gleichungen:

$$
(2) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = -\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial \lg W_\beta}{\partial \alpha},
$$

wo $\omega = \lambda - \mu$; also auch:

$$
(3) \quad \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = -\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial \lg W_\beta}{\partial \alpha},
$$

und als Folge von (2) und (3):

$$
(4) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial \lg W_\beta}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta}.
$$

Die Fundamentalgrößen E, F, G der Fläche (1) sind:

$$
(5) \qquad E = 0, \quad F = 2 \operatorname{cosin}^2 \frac{\omega}{2} \cdot W_\alpha W_\beta, \quad G = 0
$$

und das Krümmungsmaß:

$$
(6) \qquad K = -\frac{1}{F} \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \, \partial \beta} = -\frac{\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha}{2 F \cdot \operatorname{cosin}^2 \frac{\omega}{2}}.
$$

2. Die vorhin erwähnte Darboux-Poincaré'sche Transformation habe ich in meinen Anmerkungen zu der Deutschen Übersetzung von Poincaré's „Wissenschaft und Hypothese" vollständig entwickelt. Sind x, y, z Koordinaten im euklidischen und ξ, η, ζ Koordinaten im nichteuklidischen Raume, und ist in letzterem

$$
(7) \qquad (k\zeta + 1)^2 - \xi^2 - \eta^2 - 1 = 0
$$

die Gleichung der unendlich fernen Fundamentalfläche, so hat man zu setzen:

$$
(8) \quad \xi = \frac{2kx}{r^2 - k^2}, \quad \eta = \frac{2ky}{r^2 - k^2}, \quad \zeta = \frac{2k}{r^2 - k^2}, \quad \text{wo } r^2 = x^2 + y^2 + z^2.
$$

Führt man homogene Koordinaten ξ, η, ζ, τ ein, deren absolute Werte durch die Gleichung

$$(9) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \tau^2 - (k\zeta + \tau)^2 = -1$$

festgelegt werden, so findet man für das Bogenelement $d\sigma$:

$$(10) \quad d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\tau^2 - (kd\zeta + d\tau)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2},$$

woraus sich ergibt, daß Minimalkurven ($d\sigma = 0$) in Minimalkurven ($ds = 0$) übergehen. Setzt man in die Gleichung (8) für x, y, z die Werte (1) ein, so hat man die Darstellung einer beliebigen Fläche im nichteuklidischen Raum durch ihre Minimalkurven.

3. Sollen die Minimalkurven ein konjugiertes System bilden, so muß bekanntlich die Determinante $\sum \pm \xi \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \alpha \partial \beta}$ verschwinden, wenn man hierin setzt:

$$\varrho\xi = 2kx, \quad \varrho\eta = 2ky, \quad \varrho\zeta = 2k, \quad \varrho\tau = r^2 - k^2,$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet. Berechnet man aus (1) die Elemente der Determinante, so ergibt sich das einfache Resultat:

$$W_\alpha W_\beta [F \cdot \sin(\lambda - \mu) + W W_\alpha \lambda_\beta (1 + \operatorname{cosin}(\lambda - \mu))] = 0;$$

die scheinbare Unsymmetrie der linken Seite entsteht daraus, daß nach (1) die Werte

$$\begin{aligned} x_{\alpha\beta} &= -i \sin\lambda \cdot W_\alpha \cdot \lambda_\beta + i \operatorname{cosin}\lambda \cdot W_{\alpha\beta} \\ &= i \sin\mu \cdot W_\beta \mu_\alpha - i \operatorname{cosin}\mu \cdot W_{\alpha\beta}, \\ y_{\alpha\beta} &= i \operatorname{cosin}\lambda \cdot W_\alpha \cdot \lambda_\beta - i \sin\lambda \cdot W_{\alpha\beta} \\ &= -i \operatorname{cosin}\mu \cdot W_\beta \mu_\alpha + i \sin\mu \cdot W_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

in doppelter Form darstellbar sind, von der nur eine Form benutzt wurde; es ist ferner zu beachten, daß an Stelle von $\tau_{\alpha\beta}$ nach elementarer Umformung der Determinante der Wert $F + zz_{\alpha\beta}$ tritt. Die Unsymmetrie verschwindet, wenn man den Wert λ_β aus (2) einsetzt; es wird:

$$F = -W \cdot W_{\alpha\beta} \cdot \left(\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}\right)^2,$$

und infolge von (5)

$$W \cdot W_{\alpha\beta} + 2\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2 W_\alpha W_\beta = 0. \tag{11}$$

Dies ist die Bedingung dafür, daß die Formeln (8) zusammen mit (7) eine nichteuklidische Minimalfläche darstellen, wobei α, β die Parameter der Minimalkurven sind.

4. Die Größen W, ω müssen den beiden Gleichungen (4) und (11) genügen. Mit Hilfe der Gleichungen (2) können wir W eliminieren. Es wird zunächst:

$$\frac{W_\beta}{W}\sin\omega + \lambda_\beta = 0, \quad \frac{W_\alpha}{W}\sin\omega - \mu_\alpha = 0, \tag{12}$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\lambda_\beta}{\sin\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\mu_\alpha}{\sin\omega}\right) = 0 \tag{13}$$

oder:

$$(\lambda_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta})\sin\omega - \operatorname{cosin}\omega\,(\lambda_\beta\,\omega_\alpha + \mu_\alpha\,\omega_\beta) = 0. \tag{14}$$

Dies ist die Bedingung für das Zusammenbestehen der Gleichungen (12); und da diese auseinander entstehen, indem man: mit $-i$ vertauscht, W aber ungeändert läßt, auch die Bedingung dafür, daß die gemeinsame Lösung W der Gleichungen (12) eine reelle Funktion von α, β ist.

Es ist aber der Ableitung nach die Gleichung (14) auch die Bedingung für das Zusammenbestehen der Gleichungen (2) mit der Gleichung (11) und folglich auch für das Zusammenbestehen der Gleichung (4), die aus (2) folgte, mit der Gleichung (11); in der Tat ist die zweite Gleichung eine Folge der ersten, wenn W reell ist, und somit auch die aus beiden folgende Gleichung (4) erfüllt. Sobald die Gleichung (14) erfüllt ist, ergibt sich in der Tat aus (12) derselbe Wert von W, wie aus (2). Aus (12) folgt nämlich durch Differentiation:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}\sin\omega + W_\beta\,\omega_\alpha \operatorname{cosin}\omega + W_\alpha\lambda_\beta + W\lambda_{\alpha\beta} &= 0 \\ -W_{\alpha\beta}\sin\omega - W_\alpha\,\omega_\beta \operatorname{cosin}\omega + W_\beta\,\mu_\alpha + W\mu_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}$$

und durch Addition wegen (14):

$$\sin\omega\,(W_\beta\,\omega_\alpha - W_\alpha\,\omega_\beta) + W(\lambda_\beta\,\omega_\alpha + \mu_\alpha\,\omega_\beta) = 0$$

oder wegen (2)

$$(W_\beta \omega_\alpha - W_\alpha \omega_\beta)\left[\sin\omega \cdot W_\alpha W_\beta + W W_{\alpha\beta} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\right] = 0$$

oder, da die erste Klammer im allgemeinen nicht Null ist:

$$W \cdot W_{\alpha\beta} + 2 W_\alpha W_\beta \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2 = 0;$$

das aber ist die für eine nichteuklidische Minimalfläche charakteristische Gleichung (11), welche eben aussagt, daß λ_β aus (2) und aus (12) berechnet, je den gleichen Wert ergibt:

$$\lambda_\beta = \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} \cdot \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha} = -\frac{W_\beta}{W}\sin\omega.$$

5. Zur Lösung der Gleichung (14) setzen wir $\lambda = p + iq$, $\mu = p - iq$; dann ergibt sich (da $\omega = \lambda - \mu = 2iq$):

$$\text{(15)} \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial\alpha\,\partial\beta}\operatorname{tang}(2iq) - i\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}\frac{\partial q}{\partial\alpha} + \frac{\partial p}{\partial\alpha}\frac{\partial q}{\partial\beta}\right) = 0,$$

eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für q, wenn p als reelle Funktion von α, β beliebig angenommen wird; die Integration verlangt die Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\text{(16)} \qquad \frac{d\alpha}{p_\beta} = \frac{d\beta}{p_\alpha} = \frac{i\,dq}{p_{\alpha\beta} \cdot \operatorname{tang}(2iq)}.$$

Sind λ und μ gefunden, so ergibt sich W aus (12) durch Quadratur.

Die Aufstellung aller Minimalflächen im nichteuklidischen Raum ist hiermit auf die Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung (15), bzw. des Systems totaler Gleichungen (16) zurückgeführt.

6. Nach Darboux verlangt dies Problem die Lösung der beiden partiellen Gleichungen zweiter Ordnung[1])

$$\text{(17)} \qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = C \cdot \Theta \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \log C}{\partial\alpha\,\partial\beta} = C - \frac{1}{C}.$$

---

[1]) Loc. cit. S. 476. Einen besonderen Fall hat Schübel behandelt: Aufstellung von nichteuklidischen Minimalflächen. Inauguraldissertation, München 1906.

Macht man $\log C = 2\,i\,\gamma$, so geht letztere Gleichung in die bekannte Form

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \sin(2\,\gamma)$$

über, von der die Darstellung der Flächen konstanten Krümmungsmaßes abhängt.[1]) Man hat zunächst aus ihr C zu bestimmen und dann solche Lösungen X, Y, Z, T der ersten Gleichung (17) zu suchen, die der Bedingung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 1 \tag{18}$$

genügen; dann sind X, Y, Z, T die Koordinaten der Punkte einer nichteuklidischen Minimalfläche. Um diese Veränderlichen mit den unsrigen in Beziehung zu bringen, haben wir zu setzen:

$$X = i\,\xi, \quad Y = i\,\eta, \quad Z = i\,\tau, \quad T = k\,\zeta + \tau, \tag{19}$$

wodurch die Bedingung (18) in (9) übergeführt wird. Die Größe C ist bei Darboux ursprünglich durch die Gleichung

$$\begin{aligned} -C &= X_\alpha X_\beta + Y_\alpha Y_\beta + Z_\alpha Z_\beta + T_\alpha T_\beta \\ &= -\xi_\alpha \xi_\beta - \eta_\alpha \eta_\beta - \zeta_\alpha \zeta_\beta - (k\,\zeta_\alpha + \tau_\alpha)(k\,\zeta_\beta + \tau_\beta) \end{aligned} \tag{20}$$

definiert. Die Lösung der zweiten Gleichung (17) geschieht also, indem man in den Ausdrücken (1) für x, y, z zuerst λ und μ durch die partielle Gleichung (15) bestimmt, sodann W aus den Gleichungen (12) berechnet und die so aus (1) gewonnenen Werte von x, y, z in (8) einsetzt; hieraus berechnet sich endlich C mittels der Gleichung (20), und die Ausdrücke (19) sind Lösungen der ersten Gleichung (17).

7. Bei der Transformation (8) entsprechen den geraden Linien des nichteuklidischen Raumes Kreise im euklidischen Halbraume ($z > 0$), deren Mittelpunkt in der Ebene $z = 0$ liegen, und deren Ebenen der Z-Axe parallel sind. Den Haupttangenten einer Fläche im Raume (ξ, η, ζ) entsprechen also im Raume (x, y, z) Kreise der bezeichneten Art, welche die entsprechende Fläche von der zweiten Ordnung berühren; und es gibt für jede Fläche zwei solche Systeme von Kreisen; die Tangenten derselben im Berüh-

[1]) Über deren Integration nach anderer Methode vgl. meinen Aufsatz im Jahrgang 1922 dieser Sitzungsberichte über die partielle Gleichung $s = \sin z$.

rungspunkte bilden auf der Fläche zwei Systeme von Kurven, die den Haupttangentenkurven der Fläche im Raum (ξ, η, ζ) entsprechen. Da letztere Kurven auf den nichteuklidischen Minimalflächen ein Orthogonalsystem bilden, so entspricht einer solchen Minimalfläche im Halbraum eine Fläche, auf welcher die soeben bezeichneten (von zur Ebene $z = 0$ orthogonalen Kreisen umhüllten) Kurven ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden; denn bei der Abbildung (8) gehen nichteuklidische Winkel in gleiche euklidische Winkel über.

Diese Bildflächen kann man in folgender Weise durch eine partielle Differentialgleichung direkt charakterisieren.

8. Es werde z als Funktion von x und y gedacht, so daß in üblicher Weise

$$(21) \quad dz = p\,dx + q\,dy, \quad d^2 z = r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2$$

gesetzt wird. Wir legen durch den Punkt x, y, z einen ebenen Schnitt, dessen Ebene senkrecht zur Ebene $z = 0$ steht, und berechnen zunächst den Krümmungsradius R dieses Schnittes; es ist bekanntlich

$$R = \cos\vartheta \cdot \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\cdot\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2},$$

wobei ϑ den Winkel bedeutet, den die Normale des ebenen Schnittes mit der Flächennormale bildet, also

$$\cos\vartheta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cdot\cos\mu + \cos\gamma\cdot\cos\nu,$$

wenn λ, μ, ν die Richtungswinkel der Flächennormale und α, β, γ diejenigen der Normale des ebenen Schnittes bezeichnen; es ist hier

$$\cos\lambda = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos\mu = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$
$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Die Normale mit den Richtungswinkeln α, β, γ werde durch die Gleichungen

$$\frac{X - x}{\cos\alpha} = \frac{Y - y}{\cos\beta} = \frac{Z - z}{\cos\gamma}$$

dargestellt; die Richtungs-Cosinus genügen den beiden Bedingungen

$$\cos\alpha \cdot dx + \cos\beta \cdot dy + \cos\gamma \cdot dz = 0,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

jene Linie soll in einer zur Ebene $z = 0$ senkrechten Ebene

$$(X - x)\,dy - (Y - y)\,dx = 0$$

liegen; folglich kann man

$$\text{cosin}\,\alpha = \varrho \cdot dx, \quad \cos\beta = \varrho \cdot dy$$

setzen; dann folgt

$$\varrho\,(dx^2 + dy^2) + \cos\gamma \cdot dz = 0, \quad \varrho^2\,(dx^2 + dy^2) + \cos^2\gamma = 1,$$

und hieraus

$$\varrho = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{dx\,dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{dy\,dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

also schließlich

$$\text{cosin}\,\vartheta = -\frac{p\,dx\,dz + q\,dy\,dz + dx^2 + dy^2}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

und der Krümmungsradius wird

$$\text{(22)} \qquad R = \frac{-(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{3/2}}{(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt x_0, y_0, z_0 hat die Koordinaten

$$x_0 = x + R\cos\alpha, \quad y_0 + R\cos\beta, \quad z_0 = z + R\cos\gamma.$$

Soll derselbe (damit der Kreis die Ebene $z = 0$ orthogonal schneidet) in der Ebene $z = 0$ liegen, so folgt

$$z + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2} = 0, \qquad \text{oder:}$$

$$(zr+1+p^2)\,dx^2+2\,(zs+pq)\,dx\,dy+(zt+1 \\ +q^2)\,dy^2=0. \tag{23}$$

Diese Differentialgleichung bestimmt auf der gegebenen Fläche $z=f(x,y)$ ein System von Kurven, die von den zur Ebene $z=0$ senkrechten oskulierenden Kreisen umhüllt werden, deren es in jedem Punkte der Fläche (zueinander orthogonal) zwei gibt.

Für die Bildflächen der nichteuklidischen Minimalflächen verlangen wir, daß die durch einen Punkt x, y gehenden Kurven sich dort orthogonal schneiden, daß also die Bedingung

$$dx\,d'x+dy\,d'y+dz\,d'z=0$$

oder wegen der ersten Gleichung (21) die Bedingung

$$(1+p^2)\,dx\,d'x+pq\,(dx\,d'y+dy\,d'x)+(1+q^2)\,dy\,d'y=0 \tag{24}$$

erfüllt sei, wobei mit $dy:dx$ und $d'y:d'x$ die beiden durch die quadratische Gleichung (23) bestimmten Richtungen bezeichnet sind. Nun ist

$$\frac{dy}{dx}+\frac{d'y}{d'x}=-2\,\frac{zs+pq}{zt+1+q^2},\quad \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d'y}{d'x}=\frac{zr+1+p^2}{zt+1+q^2}.$$

Folglich erhalten wir aus (24)

$$(zr+1+p^2)(1+q^2)-2\,(zs+pq)pq+(zt+1+q^2)(1+p^2)=0$$

oder:

$$z\,[r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)]+2\,(1+p^2+q^2)=0. \tag{28}$$

Durch diese partielle Differentialgleichung sind unsere euklidischen Bildflächen der nichteuklidischen Minimalflächen charakterisiert.

Die Integration derselben ist durch die vorstehenden Entwicklungen auf die Integration der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (15), die eine willkürliche Funktion enthält, zurückgeführt.