Theorie

von den

Projectionen der Kugel

zum

astronomischen und geographischen Gebrauch

von

W. J. G. Karsten

1766.

1 §.

Unter den besondern Vorwürfen, womit sich die ausübende Mathematik beschäftiget, ist zwar vieleicht keiner mehr übrig, worauf man die Analysin nicht bereits angewandt, und eben dadurch diese Wissenschaft zu einem neuen Grad der Vollkommenheit gebracht hätte. Inzwischen scheint es, daß man bey einigen sich bisher begnügt habe, nur zu zeigen, wie sich die Analysis darauf anwenden ließe, ohne der Theorie die gehörige Vollständigkeit zu geben, damit ihr Nutzen in der Ausübung unmittelbar in die Augen leuchte. Es ist gewiß, daß sich ganze Wissenschaften durch Hülfe analytischer Kunstgriffe auf sehr wenige allgemeine Formuln bringen lassen, die ein Meister in der Kunst allemal ohne große Schwierigkeit weiter entwickeln kann. Allein man kann doch nicht sagen, daß die Formuln schon brauchbar gemacht sind, bevor alle besondre in der Ausübung dienliche Regeln daraus sind hergeleitet worden. Man muß den ganzen Zusammenhang aller speciellen Fälle mit der allgemeinen Theorie zeigen, wenn die letztere für die Ausübung nutzbar werden soll. Diejenigen, welche sich mit der Ausübung beschäftigen, sind nur selten mit den nöthigen Känntnissen versehen, welche erfordert werden, die practischen speciellen Regeln aus der allgemeinen Theorie herzuleiten. Dadurch wird der Werth einer an sich schönen Theorie allemal erhöhet, wenn sie auf leichte und vortheilhafte Regeln für die Ausübung leitet.

2 §.

Die mancherley Arten, eine Kugel mit ihren Kreisen, die der Astronom und Geograph darauf verzeichnet, auf einer Ebene perspectivisch abzubilden, sind den Alten lange bekannt gewesen, bevor die Analysis zu der heutigen Vollkommenheit ist gebracht worden. Sie nannten diese Abbildungen Planisphæria, auch Astrolabia. Jetzt ist der Name der Projectionen am gewöhnlichsten. Man bedient sich ihrer häufig sowohl in der Astronomie, als Geographie, und die Verzeichnung der geographischen Charten ist ein wichtiges Stück in der Ausübung, bey dem diese Projectionen gebraucht werden. Unter den mancherley Arten diese Projectionen der Kugel zu zeichnen, sind vornehmlich folgende zwo merkwürdig. Die Tafel ist die Ebene eines größten Kreises der Kugel, und das Auge stehet in der Axe desselben. Nachdem man nun entweder voraussetzt, daß das Auge unendlich weit, oder nur um den Halbmesser der Kugel von der Tafel entfernt sey, nachdem heißt die Projection orthographisch oder stereographisch. Jene hat man beständig in der Astronomie gebraucht, die Erde abzubilden, bey den Verzeichnungen der Sonnenfinsternisse, und andrer ähnlicher Erscheinungen am Himmel; bis Herr Lambert nur im vorigen Jahr gewiesen hat, daß man sich hier der stereographischen Projection weit vortheilhafter bedienen könne, in seiner Beschreibung und Gebrauch einer neuen ecliptischen Tafel: nachdem der unter den deutschen Geographen so berühmte Herr Hase bereits eben den Gedanken gehabt, und überhaupt die Vorzüge dieser Projectionsart angezeigt hatte, in der Sciographia integri tractatus de constructione mapparum omnis generis Geographicarum, Hydrographicarum & Astronomicarum, Lipſ. 1717. Die Schrift

selbst,

selbst, wovon Hr. Hase hier den Abriß liefert, ist nie gedruckt worden, und es fehlet bis jetzt noch an einer vollständigen Ausführung dieser Theorie zum unmittelbaren Gebrauch in der Ausübung. Hr. v. Wolf trägt im IV Tomo seiner Element. Math. im IX Cap. der Geographie nur den leichtesten Fall davon vor.

3 §.

Das wichtigste, was von dieser Theorie seit der Zeit öffentlich bekannt geworden, ist ohne Zweifel die kaestnerische Ausführung in dem zu Leipzig herausgegebenen Programma: Perspectivæ & projectionum Theoriæ generalis analytica, welche der berühmte Hr. Verfasser auch nachher seiner deutschen Ausgabe von Smiths Optik angehängt hat. Allein dieser große Geometer begnügt sich damit, die Theorie im Allgemeinen ausgeführt zu haben, und macht nur eine kurze Anwendung auf den in den wolfischen Elementis gleichfalls berührten Fall der stereographischen Projection, nebst noch zween andern Fällen, da die Tafel die Kugel berührt. Ich glaube daher, daß es der Mühe nicht unwerth sey, diese allgemeine Theorie der Ausübung näher zu bringen. Bey Entwickelung der allgemeinen Theorie werde ich in der Hauptsache der Ausführung des Hrn. Kaestners folgen, jedoch mit einiger Veränderung der Formuln, um dadurch die Anwendung auf die speciellen Fälle desto mehr zu erleichtern.

Allgemeine Theorie der Projectionen.

4 §.

Wenn zwischen einer Sache LM (1 Fig.) und dem Auge O eine durchsichtige Ebene, oder die Tafel CD stehet, so werden alle Stralen, die von jedem Punct der Sache M, L, u. s. f. ins Auge O kommen, die Tafel in den so vielen Puncten I, K, u. s. f.

 durch-

durchboren. Das Auge hat einerley Empfindung, ob es die Stralen uumittelbar von der Sache LM, oder von den zugehörigen Puncten I, K, u. s. f. der Tafel empfängt. Deswegen heißt ein jeder Punct K, in welchem der Stral LO durch die Tafel ins Auge gehet, das **Bild** oder die **Projection** des Puncts L, und alle Puncte I, K, u. s. f. zusammen machen das Bild der Sache LM auf der Tafel aus.

5 §.

Wird die Ebene der Tafel CD von einer andern Ebene AB in der graden Linie CE senkrecht geschnitten, so heißt diese Ebene AB die Fundamentalebene, wovon man gemeiniglich annimmt, daß sie horizontal sey. Ihre Durchschnittslinie CE mit der Tafel heißt die **Fundamentallinie**. Dafern nun auf der Tafel die Fundamentallinie gegeben ist, und in derselben ein bekannter Punct C, so läßt sich die Lage des Auges O gegen die Tafel auf folgende Art bestimmen. Vom Auge O sey OS auf die Fundamentalebene senkrecht gezogen, und von S die Linie ST auf der Fundamentallinie, also auch auf der Tafel lothrecht. Wenn nun die Größe der dreyen Linien CT, ST, SO bekannt ist, so ist die Lage des Auges gegen die Tafel bekannt. Man lege durch OST eine Ebene OSTR, welche die Tafel in TR schneidet, so ist auch diese Ebene auf der Tafel und der Fundamentalebene senkrecht. Sie kann die Ebene des Auges heißen. Also ist RT auf der Ebene AB folglich auf ST senkrecht. Man ziehe OR auf RT also auf der Tafel senkrecht, so wird nun OS der Abstand des Auges von der Fundamentalebene, oder die **Höhe** des Auges, ST = OR der Abstand des Auges von der Tafel, CT der Abstand der Ebene des Auges von dem bekannten Punct C in der Fundamentallinie. Wenn die Lage der Ebene des Auges sonst schon bekannt ist, so braucht man CT nicht zur Bestimmung der Lage des

Auges, sondern nur OS und ST, da dann der Punct R, wo die Distanz des Auges die Tafel trift, der Augenpunct heißt.

6 §.

Wenn ein Punct M in der Fundamentalebene liegt, so bestimmt man seine Lage gegen die Tafel auf folgende Art. Von M sey MN auf der Fundamentallinie senkrecht gezogen: dieß wird der Abstand des Puncts M von der Tafel seyn. Weis man nun die Größe der Linien CN und CM, so ist die Lage des Puncts M gegen die Tafel bekannt. Und wenn die Lage der Ebene des Auges als bekannt angenommen wird, so ist die Lage des Puncts M bestimmt, wenn man TN und MN kennet. Geht nun der Lichtstral MO durch die Tafel in I, so daß I das Bild des Puncts M ist, so sey IW auf der Fundamentallinie senkrecht. Kennet man nun CW und WI, oder auch TW und WI, so ist die Lage des Bildes I auf der Tafel bekannt. Wäre L ein Punct außer der Fundamentalebene, so bedarf man dreyer Linien zur Bestimmung seiner Lage gegen die Tafel. Es sey nämlich LM auf der Fundamentalebene und MN auf der Fundamentallinie senkrecht, so ist die Lage des Puncts L bestimmt, wenn man CN oder TN, ferner NM und ML kennet. Zur Bestimmung der Lage des Bildes K auf der Tafel werden nur zwo Linien CW oder TW und WK erfordert, wenn KW auf der Fundamentallinie senkrecht ist.

7 §.

Die Lage des Auges *O* (1 Fig.) gegen die Tafel, und die Lage des Puncts *M* in der Horizontalebene sind gegeben: man soll das Bild *I* auf der Tafel finden.

Aufl. Wenn die Voraussetzungen des 5 und 6 §. bleiben, so ist IW auf CW senkrecht, also auch auf der Ebene AB,

 und

und deswegen sind IW und OS parallel. Die Ebene OSWI dieser Parallelen schneidet AB in der graden Linie SW; und weil M in der graden Linie OI liegt, so muß dieser Punct M in beyden Ebenen OSWI und AB zugleich, folglich in der verlängerten Durchschnittslinie SW liegen. Nun ist das Dreyeck MWNSTW, also MW : MN = WS: ST, und MW + WS: MN + ST = MW: MN, oder MS:MW = MN + ST:MN. Aber auch MS:MW = OS: IW, also 1) MN + ST : MN = OS : IW. Ferner ist TW : TS = WN:MN, also TN:TS + MN = TW:TS, oder auch 2) CN—CT:TS + MN = TW: TS. Es sey nun OS = a, ST = δ, CT = e, CN = f, MN = d, so wird 1) $d+\delta : d = a$: IW, und 2) $f-e: d+\delta$ = TW.δ: also ist 1) $IW = \frac{ad}{d+\delta}$, und 2) $TW = \frac{(f-e)\delta}{d+\delta}$. Wenn der Punct T selbst unmittelbar bekannt ist, so ist es soviel, als wenn C mit T zusammen fiele, oder T = e = o wäre. Dann ist TN = f, und $CW = TW = \frac{f\delta}{d+\delta}$.

8 §.

Die Lage des Puncts *L* (1 Fig.) über der Fundamentalebene ist gegeben, man soll seine Projection *K* auf der Tafel finden.

Aufl. Man setze die senkrechte Linie LM = α, und suche des Puncts M Projection I. Weil nämlich KW auf der Fundamentallinie, also auf der Ebene AB senkrecht ist, so sind OS, KW parallel; in der Ebene SOKW dieser Parallelen liegt OK, also auch L, und folglich LM, weil auch LM mit OS und KW parallel ist. Also liegt M wieder in der verlängerten Durchschnittslinie SW: und weil OM in der Ebene SOLM liegt, so wird KW von CM irgendwo in I geschnitten, so daß I des Puncts M Pro-

jection

jection ist. Bleiben demnach die Bezeichnungen des vorigen §. so ist $CW = \frac{(f-e)\delta}{d+\delta}$, und $Wf = \frac{ad}{d+\delta}$. Deswegen darf nur noch IK gesucht werden. Da dann IK dasjenige ist, was sonst die perspectivische Höhe des Puncts L heißt, dessen wahre Höhe LM ist. Nun hat man aus der Proportion $MW : MN = WS : ST$ (7 §.) auch diese $MS : MN + ST = WS : ST$. Ferner $MS : WS = OM : OI$, und $OM : OI = LM : IK$, also wird $MN + ST : ST = LM : IK$, und $IK = \frac{\alpha\delta}{d+\delta}$, folglich $WK = WI + IK = \frac{ad+\alpha\delta}{d+\delta}$.

9 §.

Es ist die Lage der Ebene *XY* (2 Fig.) gegen die Fundamentalebene *AB*, also auch gegen die Tafel *CD* gegeben; in dieser Ebene *XY* ist eine krumme Linie *Lm* verzeichnet, und ihre Natur durch eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Ordinaten bekannt, so daß die Durchschnittslinie *XF* die Abscissenlinie ist; die Lage des Auges gegen die Tafel ist gleichfalls gegeben: man soll eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten für die Projection *Kn* der Linie *Lm* suchen, so daß die Abscissen auf der Fundamentallinie genommen werden.

Aufl. Die Lage der Ebene XY gegen die Ebene AB muß auf folgende Art bestimmt seyn. Man setze ihre Durchschnittslinie Ff mit der Ebene AB stosse verlängert mit der Fundamentallinie in H zusammen, und schneide die Fundamentallinie unter dem Winkel $FHT = \eta$. Ueberdem sey der Neigungswinkel der Ebene XY gegen die Fundamentalebene $AB = d$. Weil nun die Lage der Ebene des Auges bekannt ist, so ist T ein bekannter Punct in der Fundamentallinie. Dafern also die Linie TH nebst den

Winkeln η und δ bekannt ist, so ist die Lage der Ebene XY völlig bekannt. Man ziehe ferner LF auf auf XF senkrecht, so wird LF eine rechtwinklichte Applicate der Linie Lm für Abscissen, die man auf der Axe XY von einem bekannten Punct rechnet. Ein solcher Punct, den man hiezu erwählen kann, ist bekannt, wenn von T auf XF die Linie TE senkrecht gezogen wird. Denn man setze HT $= b$, so ist ET $= b \sin\eta$, und HE $= b \cos\eta$, daß also des Puncts E Entfernung von H bekannt ist. Weil nun auch der Anfangspunct der Abscissen der Linie Lm durch seinen Abstand von H gegeben seyn muß, so ist auch der Abstand dieses Puncts von E bekannt, und man kann die Gleichung der Linie Lm leicht so einrichten, daß E der Anfangspunct der Abscissen wird. Wenn nun EF $= x$, FL $= y$ ist, so hat man eine Gleichung zwischen x und y. Nun sey K des Puncts L Projection, und KW auf der Fundamentallinie senkrecht, so ist WK eine rechtwinklichte Ordinate für die Linie Kn, wenn die Abscissen auf der Fundamentallinie von einem bekannten Punct genommen werden. Für diesen Punct kann man T nehmen, so daß die Sache nun darauf ankommt, eine Gleichung zwischen TW und WK zu finden. Setzt man demnach TW $= t$, WK $= u$, so muß man ein paar Gleichungen suchen, welche x und y durch t und u ausdrücken. Wenn man hiernächst diese Werthe statt x und y in der Gleichung der Linie Lm setzt, so hat man die gesuchte Gleichung zwischen t und u.

Um nun zu finden, wie t und u von x und y abhängen, darf man nur folgendes in Erwegung ziehen. Es sey LM auf der Ebene AB, und MN auf der Fundamentallinie senkrecht; so siehet man leicht, daß TN, NM, ML durch TE, EF, FL, und den Winkel δ bestimmt werden. Wie aber TW $= t$, und WK $= u$ von TN, NM, ML abhängen, ist aus dem vorigen 7 u. 8 §. bekannt. Setzt man demnach TN $= f$, NM $= d$, und ML $= \alpha$, so ist

$t =$

$t = \frac{f\delta}{d+\delta}$, und $u = \frac{ad + \alpha\delta}{d+\delta}$. Also darf man nur f, d, und α durch TE, EF, FL und d suchen. Zieht man aber MF so ist MFL $= d$, und man hat 1) $\alpha = y \sin d$, daß also nur noch d und f zu suchen sind. In solcher Absicht sey FR mit MN parallel, also auf TN senkrecht gezogen, FG aber sey mit TN parallel, und schneide MN in G, so wird FRNG ein Rechteck, und überdem das Dreyeck FHR bey R rechtwinklicht. Weil ferner FM mit TE und FG mit TH als der verlängerten TN parallel ist, so wird MFG $=$ HTE $= 90° - \eta$, also FMG $=$ EHT $= \eta$. Demnach ist MG $=$ MF $\cos\eta$, und FG $=$ MF $\sin\eta$. Aber MF $= y\cos d$, also MG $= y\cos d \cos\eta$, und FG $= y\cos d \sin d =$ NR, ferner GN $=$ MN $+$ MG $= d + y\cos d \cos\eta$. Aber im Dreyeck FHR hat man FR $=$ HF $\sin\eta$, und HF $= b\cos\eta + x$, also FR $= b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta =$ PN. Vorhin war GN $= d + y\cos d\cos\eta$, also erhält man $d + y\cos d\cos\eta = b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta$, und dieß giebt 2) $d = b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta - y\cos d\cos\eta$. Auf ähnliche Art ergiebt sich f. Denn im rechtwinklichten Dreyeck FHR ist auch HR $=$ HF $\cos\eta = b\cos\eta^2 + x\cos\eta$, und NR $=$ HT $+$ TN $-$ HR $= b + f - b\cos\eta^2 - x\cos\eta$. Vorhin war NR $= y\cos d\sin\eta$, also wird $b + f - b\cos\eta^2 - x\cos\eta = y\cos d\sin\eta$, oder $f + b\sin\eta^2 - x\cos\eta = y\cos d\sin\eta$. Daraus folgt 3) $f = y\cos d\sin\eta - b\sin\eta^2 + x\cos\eta$. Setzt man nun die gefundenen drey Werthe statt α, d und f in den beyden Gleichungen $t = \frac{f\delta}{d+\delta}$ und $u = \frac{ad + \alpha\delta}{d+\delta}$, so hat man t und u durch x und y, folglich auch umgekehrt x und y durch t und u. Es wird nämlich

$$t = \frac{\delta y\cos d\sin\eta - b\delta\sin\eta^2 + \delta x\cos\eta}{b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta - y\cos d\cos\eta + \delta}$$

$$u = \frac{ab\sin\eta\cos\eta + ax\sin\eta - ay\cos d\cos\eta + \delta y\sin d.}{b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta - y\cos d\cos\eta + \delta.}$$

Man

Man schaffe aus diesen beyden Gleichungen zuerst y weg, so giebt die erste:

$$bt\sin\eta\cos\eta + xt\sin\eta - yt\cos d\cos\eta + \delta t - \delta y\cos d\sin\eta + b\delta\sin\eta^2 - \delta x\cos\eta = 0$$

und die zweyte

$$bu\sin\eta\cos\eta + xu\sin\eta - yu\cos d\cos\eta + \delta u - ab\sin\eta\cos\eta - ax\sin\eta + ay\cos d\cos\eta - \delta y\sin d = 0.$$

Diese Gleichungen kann man so ordnen:

$$(t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta)\,y + \delta x\cos\eta - b\delta\sin\eta^2 - \delta t - xt\sin\eta - bt\sin\eta\cos\eta = 0,$$

$$(a\cos d\cos\eta - u\cos d\cos\eta - \delta\sin d)\,y + bu\sin\eta\cos\eta + xu\sin\eta + \delta u - ab\sin\eta\cos\eta - ax\sin\eta = 0.$$

Man multiplicire die erste mit $a\cos d\cos\eta - u\cos d\cos\eta - \delta\sin d$, die zweyte mit $t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta$ und subtrahire die letzte von der ersten, so wird

$$(\delta x\cos\eta - b\delta\sin\eta^2 - \delta t - xt\sin\eta - bt\sin\eta\cos\eta)(a\cos d\cos\eta - u\cos d\cos\eta - \delta\sin d)$$
$$-(bu\sin\eta\cos\eta + ux\sin\eta + \delta u - ab\sin\eta\cos\eta - ax\sin\eta) \times (t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta) = 0.$$

Hieraus folgt nach angestellter Rechnung

$$a\delta x\cos d - a\delta t\cos d\cos\eta - \delta ux\cos d - \delta\delta x\cos\eta\sin d + b\delta\delta\sin\eta^2\sin d + \delta\delta t\sin d + \delta xt\sin\eta\sin d + b\delta t\sin\eta\cos\eta\sin d - \delta\delta u\cos d\sin\eta = 0.$$

Also erhält man

$$x = \frac{at\cos d\cos\eta - b\delta\sin\eta^2\sin d - \delta t\sin d - bt\sin\eta\cos\eta\sin d + \delta u\cos d\sin\eta}{a\cos d - u\cos d - \delta\cos\eta\sin d + t\sin\eta\sin d}$$

oder auch

$$x = \frac{\delta u\sin\eta\cot d + (a\cot d\cos\eta - b\sin\eta\cos\eta - \delta)\,t - b\delta\sin\eta^2}{t\sin\eta - u\cot d + a\cot d - \delta\cos\eta},$$

wenn

wenn man nämlich Zehler und Nenner jenes Bruchs durch $\sin d$ dividirt, und dann alles nach t und u ordnet. Substituirt man dieses in einer der beyden vorigen Gleichungen zwischen x und y, so erhält man auch y durch t und u ausgedrückt. Es war aber

$$(t\cos d \cos\eta + \delta\cos d \sin\eta)\, y = (t\sin\eta - \delta\cos\eta)\, x + \delta t + b\delta\sin\eta^2 + bt\sin\eta\cos\eta,$$

$$\text{also } y = \frac{t\sin\eta - \delta\cos\eta}{t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta}\, x + \frac{\delta t + b\delta\sin\eta^2 + bt\sin\eta\cos\eta}{t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta}$$

In diese Gleichung setze man den ersten Werth von x und bringe beyde Brüche, die nun y ausdrücken, auf gleiche Benennung, so wird der Zehler des neuen Bruchs, der y ausdrückt

$$= att\cos d\cos\eta\sin\eta - \delta tu\cos d\cos\eta^2 + a\delta t\cos d\sin\eta^2 - \delta\delta u\cos d\sin\eta\cos\eta$$
$$+ ab\delta\cos d\sin\eta^2 - b\delta u\cos d\sin\eta^2 + abt\cos d\sin\eta\cos\eta - btu\cos d\sin\eta\cos\eta.$$

Dieser Zehler läßt sich durch den Factor $t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta$ des Nenners dividiren, und der Quotient wird $= at\sin\eta - bu\sin\eta - \delta u\cos\eta + ab\sin\eta$. Deswegen wird

$$y = \frac{at\sin\eta - (b\sin\eta + \delta\cos\eta)\, u + ab\sin\eta}{t\sin\eta\sin d - u\cos d + a\cos d - \delta\cos\eta\sin d}.$$

10 §.

Die vornehmsten besondern Fälle, bey welchen diese Aufgabe ihre Anwendung findet, sind folgende. Wenn das Auge in der Fundamentalebene stehet, so ist $a = 0$,

$$\text{also } x = \frac{\delta u\sin\eta\cot d - (b\sin\eta\cos\eta + \delta)\, t - b\delta\sin\eta^2}{t\sin\eta - u\cot d - \delta\cos\eta},$$

$$\text{und } y = \frac{(b\sin\eta + \delta\cos\eta)\, u}{u\cos d - t\sin\eta\sin d + \delta\cos\eta\sin d}.$$

Für die orthographische Projection ist überdem $\delta = \infty$, also in diesem Fall $x = \dfrac{t + b\sin\eta^2 - u\sin\eta\cot d}{\cos\eta}$, oder $x = t\sec\eta + b\tan\eta\sin\eta - u\tan\eta\cot d$, und $y = \dfrac{u}{\sin d}$.

11 §.

Wenn FH mit NH parallel ist, (3 Fig.) so wird $b = x$, und $\eta = 0$, $\sin\eta = 0$, $\cos\eta = 1$. Sodann aber kann $b\sin\eta = \infty\, 0$ jede gegebene beständige Größe bedeuten, weil dieß nun der Abstand der Parallele FH von NH wird. Man setze TE $= c$, so ist $c = b\sin\eta$, auch noch wenn $b = \infty$, und $\eta = 0$ ist. Also wird in diesem Fall $x = \frac{(a\cot d - c - \delta)\,t}{a\cot d - u\cot d - \delta}$, oder auch $x = \frac{(a\cos d - c\sin d - \delta\sin d)\,t}{a\cos d - u\cos d - \delta\sin d}$, und $y = \frac{ac - (c + \delta)\,u}{ac\cos d - u\cos d - \delta\sin d}$. Für die orthographische Projection wird aus dem 10 §. $x = t$, und $y = \frac{u}{\sin d}$.

12 §.

Wenn die Ebene XY (3 Fig.) mit der Fundamentalebene parallel ist, so giebt es keine Durchschnittslinie FH, worauf man die Abscissen EF nehmen könnte. Um nun die Formuln so zu verändern, daß sie sich auch auf diesen Fall anwenden lassen, setze man die Ebene XY schneide die Tafel in De, die Fundamentalebene aber in FH, so daß FH mit TH parallel ist, damit die Formuln des vorigen §. gelten. Wenn nun Ee und Ff auf De senkrecht sind, und man ziehet eT fR, so ist EeT = FfR der Ebene XY Neigungswinkel gegen die Tafel. Und da die Ebenen ETe, FRf auf TH folglich auch auf der Parallele FH senkrecht sind, so ist TEe = RFf = d der Ebene XY Neigungswinkel gegen AB, und man hat EF $= x$, $= ef$, und FL $= y =$ Ff $-$ fL. Man setze Te $=$ Rf $= e$, und Ee $=$ Ff $= f$, so ist $c = \frac{e\cos d}{\sin d} = f\cos d$, und $e = f\sin d$. Wenn nun die Natur der Linie Lm durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten $ef = x$, $fL = z$ ausgedruckt ist; so wird

$x =$

$x = \frac{a\cos d - e\cos d - \delta\sin d}{a\cos d - u\cos d - \delta\sin d}$, und $z = f - y = \frac{\delta(u-e)}{a\cos d - u\cos d - \delta\sin d}$.
Nun drehe sich die Ebene XY um De bis in die Lage DZ mit AB parallel, so wird $d=o$, $\sin d = o$, $\cos d = 1$, also $x = \frac{(a-e)t}{a-u}$, und $z = \frac{\delta(u-e)}{a-u}$. Wenn man eben die Veränderung mit den Formuln für die orthographische Projection im vorigen §. vornimmt, so erhält man $x = t$, und $f - z = \frac{u}{\sin d}$, also $e - z\sin d = u$, und $z = \frac{e-u}{\sin d}$. Für die parallele Lage, wenn $\sin d = o$, wird $z = \frac{e-o.}{u}$ Dieser Ausdruck scheint zwar unendlich zu werden; weil aber z unbestimmt seyn muß, so kann die Gleichung nicht bestehen, dafern nicht auch $e - u = o$ also $z = \frac{o}{o}$, und folglich $u = e$ ist. Dieß letztere ist nun schon die Gleichung für die Projection, und es erhellet leicht, daß in diesem Fall die Projection die grade Linie De seyn müsse, die mit TW in der Entfernung $Te = e$ parallel liegt. Denn es ist so gut, als ob das Auge in der Ebene DZ selbst stehe, weil alle durch die Puncte von Lm mit ST parallele Linien in der Ebene DZ fallen.

13 §.

Man setze der Winkel η, (4 Fig.) der in der 2 Figur spitzig angenommen ist, wachse, indem sich die Linie FH und F herum drehet, und H gegen T zugehet: so wird H in R fallen, wenn η ein rechter Winkel ist, und es wird $TH = b$ nun negativ und $= c$, so wie $\sin\eta = 1$ und $\cos\eta = o$ wird. Also ist in diesem Fall

$$x = \frac{\delta u\cot d - \delta t + b\delta}{t - u\cot d + a\cot d}$$

$$y = \frac{t\sin d - u\cos d + a\cos d.}{at + bu - ab}$$

Für die orthographische Projection erhält man $x = \frac{t - c - u\cot d,}{o}$

und $y = \frac{u}{\sin d}$. Der Werth von x kann wiederum nicht unendlich seyn, also muß $t - c - u\cot d = o$ seyn, und dieß ist wiederum schon die Gleichung für die Projection selbst, welche keine andre als eine grade Linie seyn kann, weil es nun so gut ist, als wenn die Ebene der Linie Lm durchs Auge gehet.

Es steht nämlich nun LK auf der Tafel senkrecht, und die Ebene XY auch, also liegt LK und jeder andre Lichtstral in der Ebene XY, und alle diese Lichtstralen sind mit OT parallel. Die Puncte H, E und R fallen zusammen, so daß TH = TE = TR $= b = c$ wird. Wenn nun die Ebene XY die Tafel in KR schneidet, so ist FRK = 90° = LFR, also FL mit HK parallel. Die Ebene KLM steht auf der Fundamentalebene AB senkrecht: wenn jene also die Tafel in KN schneidet, so ist KN auf TN senkrecht, so daß W und N zusammen fallen. Demnach wird t = TW = TN, u = WK = NK, und HK = TL = y, EF = RF = x. Nun ist der Winkel KRM = LFM = d, und KW = LG = $y\sin d = u$. Ueberdem HN = $y\cos d$, also TN = TH + HN oder $t = c + y\cos d$, und wenn man $y = \frac{u}{\sin d}$ substituirt, so wird $t = c + u\cot d$, oder $4 - c - u\cot d = o$, wie vorhin.

Anwendung der bisherigen Theorie auf die Projectionen der Kugel.

14 §.

Die Tafel sey der Aequator *ÆQ*, (5 Fig.) sein Halbmesser $= r$, und das Auge o stehe in einem Pol des Aequators.

tors. Die Fundamentalebene sey ein Meridian, der von einem andern Meridian *OLP* unter einem gegebenen Winkel *LOC* geschnitten wird: man sucht die Projection des Meridians *OLP*.

Aufl. Die Puncte E und H fallen hier in t zusammen, weil FX durch T gehet, und es ist $\eta=90°$, $a=o$, $b=c=o$, $\delta=r$. Wenn man nun im 13 §. wo bereits $\eta=90°$ gesetzt ist, nach $b=o$, $a=o$, und $\delta=r$ setzt, so wird $x=\frac{r(u\cot d-t)}{t-u\cot d}$ und $y=\frac{o}{t\sin d-u\cos d}$, wo es scheint, daß x und y bestimmte Werthe bekommen, so daß $x=-r$, und $y=o$ wäre. Allein x und y sind unbestimmt, also können diese Gleichungen nicht bestehen, wofern nicht der Zehler und Nenner beyder Brüche $=o$ ist. Also muß $t-u\cot d=o$, und $t\sin d-u\cos d=o$ seyn. Beyde Gleichungen sind einerley, und drücken schon die Natur der Projection aus, welches hier die grade Linie TK ist. Weil hier der sphärische Winkel LOC $=d$ ist, so giebt die Gleichung $\frac{u}{t}=\frac{\sin d}{\cos d}=\tang d=\frac{WK}{TW}$, also LOC = KTW, wie auch aus andern Gründen bekannt ist.

Für die orthographische Projection erhält man eben die Gleichung, wie aus dem vorigen §. folgt, wenn man in der dortigen Gleichung $t-c-u\cot d=o$ auch $c=o$ setzt: und es erhellet unmittelbar aus der Zeichnung, wenn OL mit OP parallel wird, daß nun das Bild x des Puncts L mit K und T in grader Linie liege. Demnach ist in diesem Fall einerley grade Linie sowohl die orthographische, als auch stereographische Projection des Meridians.

Wäre die Tafel irgend ein andrer größter Kreis der Erde, z. E. des Orts P wahrer astronomischer Horizont, und das Auge O im Nadir dieses Orts auf der Erde, um den Halbmesser der Erde von der Tafel entfernt, die Fundamentalebene aber der erste

Verticalkreis; so wäre OLP ein andrer Verticalkreis, der den ersten unter dem Winkel d schnitte. Die orthographische sowohl als stereographische Projection dieses Verticalkreises wird ebenfalls eine grade Linie seyn, welche die Fundamentallinie im Augenpunct unter eben dem Winkel t schneidet, unter welchem der Verticalkreis OLP gegen die Fundamentalebene geneigt ist.

15 §.

Bey eben der Lage des Auges gegen den Aequator als der Tafel, wie im vorigen §. sey XLY ein Parallelkreis mit dem Aequator, der vom Pol P um den Bogen $PL=\alpha$ absteht: man sucht seine Projection.

Aufl. Dieß ist der Fall des 11 §. wo $\eta=o$ ist, weil Fx mit TN parallel liegt. Nun fällt E in e mit F zusammen, und es ist T$e=c=r\cos\alpha$: überdem $a=o$, $\delta=r$, $d=90°$. Man setze also in den Formuln des 11 §. $d=90°$, $a=o$, $\delta=r$, $c=r\cos x$, so wird $x=(1+\cos x)t$, und $y=(1+\cos x)u$. Aber zwischen $x=ef$ und $y=f$L hat man die Gleichung $xx+yy=rr\sin\alpha^2$, und dieß giebt zwischen t und u folgende Gleichung $(1+\cos x)^2\,(tt+nu)=rr\sin\alpha^2$, oder $tt+uu=\dfrac{rr\sin\alpha^2}{(1+\cos\alpha)^2}$. Demnach ist die Projection ein Kreis, dessen Halbmesser $=\dfrac{r\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=r\tan g\,\tfrac{1}{2}\alpha$, wie auch sehr leicht aus blos geometrischen Gründen folgt.

Für die orthographische Projection wird $x=t$, und $y=u$, also $tt+uu=rr\sin\alpha^2$, und die Projection ist ein Kreis von eben dem Halbmesser, wie der Parallelkreis selbst, wie auch sonst bekannt ist. Die orthographische Projection k des Puncts L liegt, mit der stereographischen K eben dieses Puncts in einer graden Linie, die durch T gehet. (14 §.) Wenn demnach k des Puncts L

ortho-

orthographische Projection auf der Tafel gegeben ist, so darf man nur auf der graden Linie Tk das Stück $TK = \frac{\tan\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha}\, TK$ nehmen, so ist K desselben Puncts L stereographische Projection.

Wenn ÆQ der Horizont des Orts P ist, und das Auge steht im Nadir desselben; so werden die Projectionen der Parallelkreise des Horizonts oder der Almucantharat eben so gefunden.

16 §.

Die Tafel sey der erste Meridian der Erdkugel, (6 Fig.) deren Halbmesser $= r$ ist, und die Fundamentalebene sey der Aeqnator: überdem sey der Abstaud $GPL = \gamma$ eines Meridians AP vom ersten, oder seine geogrophische Länge gegeben: man soll seine Projection auf der Tafel suchen, wenn das Auge O im Pole des ersten Meridians stehet, welcher die Tafel abgiebt.

Aufl. Da hier die Puncte H und E in T zusammen fallen; so wird $b = c = o$. Ueberdem ist $a = o$, $\delta = r$, $\eta = \gamma$, und $d = 90°$, also erhält man $x = \frac{rt}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$, und $y = \frac{r\cos\gamma u}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$. Zwischen $TF = x$, und $FL = y$ hat man die Gleichung $xx + yy = rr$, also wird zwischen t und u folgende Gleichung gefunden $\frac{rrtt + rr\cos\gamma^2 uu}{(r\cos\gamma - t\sin\gamma)^2} = rr$, und daraus folgt $tt + \cos\gamma^2 uu = rr\cos\gamma^2 - rrt\sin\gamma\cos\gamma + tt\sin\gamma^2$, oder $tt + uu = rr - rrt.\tan\gamma$. Die Projection ist also eine Linie der zweyten Ordnung, und weil beyde Factoren des höchsten Theils $tt + uu$ unmöglich sind, so gehört sie in die Classe der Ellipsen, dahin auch der Kreis zu rechnen ist. Diese Gleichung giebt $u = \pm\sqrt{(rr - 2rt.\tan\gamma - tt)}$, also $u = \pm r$,

wenn

wenn $t=o$ ist. Folglich gehet die Projectionen durch P und Q, so daß $TP=TQ=r$, wie auch aus der Zeichnung erhellet.

Es sey nun die Projection PDQ (8 Fig.) auf der Ebene der Tafel gezeichnet, so daß GH die Fundamentallinie, T der Augenpunct, und $TP=TQ=r$ ist, so sind TD und Td die Werthe von t wenn $u=o$ ist. Aber diese Voraussetzung giebt $tt+2rt.\,\mathrm{tang}\gamma=rr$, also $t=-r\mathrm{tang}\gamma\pm r\sqrt{(1+\mathrm{tang}\gamma^2)}$ oder $t=-r\mathrm{tang}\gamma \mp r\sec\gamma$. Man nehme also $TC=-r\mathrm{tang}\gamma$, $CD=+r\sec\gamma$, und $Cd=-r\sec\gamma$, so sind die Puncte D und d in der Projection, und es wird $TD=r(\sec\gamma-\mathrm{tang}\gamma)=r\mathrm{tang}\,(45^\circ-\frac{1}{2}\gamma)=r\mathrm{tang}\,\frac{90^\circ-\gamma}{2}$,

$Td=-r(\sec\gamma+\mathrm{tang}\gamma=r\mathrm{tang}\,(45^\circ+\frac{1}{2}\gamma)=r\mathrm{tang}\,\frac{90^\circ+\gamma}{2}$.

Man rechne nun die Abscissen von dem Anfangspunct C; weil nämlich $CT=r\mathrm{tang}\gamma$, so hat man $r\mathrm{tang}\gamma+t=Cw$, und $t=Cw-r\mathrm{tang}\gamma$. Dieß in die gefundene Gleichung zwischen t und u gesetzt, giebt zwischen CW und u diese Gleichung $Cw^2+uu=rr+rr\mathrm{tang}\gamma^2$, oder $Cw^2+uu=rr\sec\gamma^2$. Also ist die Projection ein Kreis, dessen Halbmesser $=r\sec\gamma$, und der Mittelpunct C liegt in der Fundamentallinie in der Entfernung $TC=-r\mathrm{tang}\gamma$ vom Augenpunct. Also fällt C auf der andern Seite von T, wenn $\gamma>90^\circ$ ist. Für $\gamma=90^\circ$ wird die Projection die grade Linie PQ, weil der Halbmesser $r\sec\gamma$ unendlich wird.

Wenn das Auge in der Axe der Tafel unendlich weit wegrückt, (6 Fig.) und also die Projection orthographisch wird; so fällt die Projection des Puncts L in K mit T und K in grader Linie. Ist nämlich LO mit OZ parallel, so bleibt doch LO in der Ebene eines Verticalkreises ZLO, der bey beyden Arten der Projection eine grade Linie wird, die durch T gehet. (14 §.) Der Winkel dieses Verticalkreises mit dem Meridian PZL, oder das

Azi-

Azimuth des Puncts L, und sein Abstand von Scheitel ZL ist bestimmt, wenn man des Puncts L geographische Breite AL $= \psi$ weis, da LPZ der Stunden Winkel $= 90° - \gamma$ ist. Man hat nämlich im sphärischen Dreyeck LPZ die Seite PL $= 90° - \psi$, und die Ergänzung der Polhöhe ZP $= 90°$. Also $tang.\ PZL = \frac{\sin PL \sin LPZ}{\cos PL} = \frac{\cos\psi \cos\gamma}{\sin\psi} = cotang.\ KTW$, und $\cos PL = \cos ESZ$ $\sin PL = \sin\gamma \cos\psi$. Setzt man nun $x = TF = r\cos\psi$, $y = FL = r\sin\psi$, so erhält man $r\cos\psi = \frac{rt}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$, $r\sin\psi = \frac{r\cos\gamma u}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$. Hieraus folgt $t = \frac{r\cos\psi \cos\gamma}{1 + \cos\psi \sin\gamma}$, $u = \frac{r\sin\psi}{1 + \cos\psi \sin\gamma}$, also $\frac{u}{t} = \frac{WK}{TW} = tang\ KTW = \frac{\sin\psi}{\cos\psi \cos\gamma}$, und $cot.\ KTW = \frac{\cos\psi \cos\gamma}{\sin\psi}$, wie vorhin, und $\surd(tt + uu) = TK = \frac{r\surd(\sin\psi^2 + \cos\psi^2 \cos\gamma^2)}{1 + \cos\psi \sin\gamma} = \frac{r\surd(1 - \cos\psi^2 \sin\gamma^2)}{1 + \cos\psi \sin\gamma} = \frac{r\sin ZL}{1 + \cos ZL} = r tang \tfrac{1}{2} ZL$, wie nach dem 15 §. erfordert wird.

17 §.

Die Gleichung für die orthographische Projection ergiebt sich so. Man setze in den Formuln für die orthographische Projection des 10 §. hier $\delta = r$, $b = o$, $\eta = \gamma$, $d = 90°$, so wird $x = \frac{t}{\cos\gamma}$, und $y = u$. Dieß in $xx + yy = rr$ gesetzt giebt $\frac{tt}{\cos\gamma^2} + uu = rr$, oder $tt + uu\cos\gamma^2 = rr\cos\gamma^2$. Für $u = o$, ist $t = \pm r\cos\gamma = TB$, und für $t = o$, wird $u = \pm r = TP$. Man setze also $r\cos\gamma = TB$, so wird $\cos\gamma = \frac{TB}{r}$, und $tt + \frac{TB^2}{rr} uu = TB^2$, oder $tt = TB^2 - \frac{TB^2}{rr} uu$, oder auch $uu = rr - \frac{rr}{TB^2}tt$. Demnach ist die Projection eine Ellipse, deren halbe Zwergaxe $= r = TP$ und halbe conjugirte Axe $= TB = r\cos\gamma$. Die Abscissen t sind auf der conjugirten Axe vom Mittelpunct T gerechnet. Für diese orthographische Projection sey nun $Tw = t$, $wk = u$, und wie vorhin $x = TF = r\cos\psi$, $y = FL = r\sin\psi$, so wird $r\cos\psi = \frac{t}{\cos\gamma}$; also $t = r\cos\psi\cos\gamma$; und $r\sin\psi = u$, folglich $\frac{u}{t} = \frac{WK}{TW} = \frac{\sin\psi}{\cos\psi\cos\gamma}, = \frac{WK}{TW}$, wie erfordert wird, weil T, K und k in grader Linie liegen müssen. Ferner wird $Tk = r\surd(\sin\psi^2 + \cos\psi^2\cos\gamma^2) = r\surd(1 - \cos\psi^2\sin\gamma^2) = r\surd(1 - \cos ZL^2) = r\sin ZL$, wie dem 15 §. gemäß ist.

18 §.

Unter den Bedingungen des vorigen §. die Projectionen so vieler Meridiane als verlangt wird auf der Tafel durch Zeichnung zu finden.

Aufl. Der Kreis GPHQ (8 Fig.) stelle die Tafel vor, GH die Fundamentallinie, welche durch den Mittelpunct T der Tafel gehet, der zugleich der Augenpunct ist, und PQ sey auf der Fundamentallinie senkrecht, so ist PQ die Projection des Meridians von 90° Länge. Den Halbkreis PHQ theile man in gleiche Theile von 20 zu 20 oder von 10 zu 10 Graden, nachdem die Meridiane sich unter Winkel von 10° zu 10° oder von 5° zu 5° schneiden sollen. Durch alle Theilungspuncte, 20, 40, u. s. f. ziehe man grade Linien nach P, welche TH in C, D, E, F u. s. f. schneiden, so sind die Durchschnittspuncte nach der Ordnung die gesuchten Projectionen der Meridiane von 10°, 20°, 30°, 40° Länge u. s. f. und CP, DP, EP, FP, u. s. f. die zugehörigen Halbmesser. Beschreibt

man

man demnach aus C, D, E, F, u. s. f. mit den Halbmessern CP, DP, EP, FP, u. s. f. die Bogen PBQ, P20Q, P30Q, P40Q, u. s. f. so sind dieß die gesuchten Projectionen. Die Richtigkeit der Verzeichnung fällt leicht in die Augen. Es ist nämlich $TC = r\,\text{tang}\,10°$, $CP = r\sec 10°$, $TD = r\,\text{tang}\,20°$, $DP = r\sec.20°$, u. s. f. wie nach dem §. erfordert wird. Diese Verzeichnung scheint mir leichter und in der Ausübung bequemer zu seyn als diejenige, welche sonst gewöhnlich vorgeschrieben wird, und auch von Herrn v. Wolf beybehalten ist, obgleich letztere ebenfalls aus den erwiesenen Formuln fließt. Es schneidet nämlich jede Projection PBQ die Fundamentallinie in der Entfernung TB vom Augenpunct, so daß $TB = r\,\text{tang}\,\frac{90° - \gamma}{2}$. Deswegen kann man auch den Quadranten GP von 10° zu 10° oder von 5° zu 5° eintheilen, und die graden Linien Q10, Q20, Q30, u. s. f. ziehen, welche GT in B, 20, 30, 40, u. s. f. schneiden. Durch diese Puncte gehen die Projectionen nach der Ordnung durch, und man muß zu den Kreisen PBQ, P20Q, u. s. f. die Mittelpuncte suchen. Es ist nämlich $TB = r\,\text{tang}\,\frac{90° - 10°}{2}$, $T20 = r\,\text{tang}\,\frac{90° - 20°}{2}$ u. s. f. Die Alten sind auf diese Verzeichnung durch den synthetischen Vortrag gekommen. Sie erwiesen, daß die Projection ein Kreis seyn müsse, und daß die drey Puncte P, B, Q; P, 20, Q, u. s. f. in diesen Kreisen liegen. Also durften sie nur zu diesen Kreisen durch die bekannte Verzeichnung die Halbmesser suchen. Aber die vorige Verzeichnung ist ohne Zweifel kürzer und bequemer, indem sich die Mittelpunete auf einmal unmittelbar ergeben.

Für die Projectionen der Meridiane, deren Länge nicht viel von 90° unterschieden ist, fallen die Mittelpuncte sehr weit hinaus, und die Linien durch P schneiden TH unter sehr spitzigen Winkeln, daß also der eigentliche Durchschnittspunct etwas unbequem, und dabey zugleich etwas unsicher bestimmt wird, obgleich noch allemal sicherer, als bey der letztgedachten Verzeichnung. Will man diese Unbequemlichkeit ganz vermeiden, so darf man nur den Halbmesser $r\sec\gamma$ berechnen, welches durch Hülfe der Logarithmen sehr leicht ist. Auf solche Art bleibt keine andre Unbequemlichkeit übrig, als diejenige, welche in der Ausübung der Verzeichnung sehr großer Kreise unvermeidlich ist, und welche die Theorie eigentlich nicht weiter heben kann, weil sie die Verzeichnung eines Kreises als eine Forderung annimmt, wenn der Mittelpunct und Halbmesser gegeben sind.

Man bedient sich bey den übrigen krummen Linien, zu deren Verzeichnung man keine so bequeme Instrumente hat, wie beym Kreise, dieses Vortheils. Man sucht für jede Abscisse die zugehörige Ordinate entweder durch Verzeichnung, oder durch Rechnung, und bestimmt auf solche Art mehrere Punete, die in der krummen Linie einander so nahe liegen, daß man durch sie die krumme Linie aus freyer Hand ziehen kann. Eben dieses Hülfsmittels kann man sich hier bedienen, wenn die Halbmesser der Kreise so groß ausfallen, daß die Verzeichnung des Kreises deswegen beschwerlich wird. Bey einerley Mittagskreis ändert sich γ nicht, also ist es leicht $\tan PZL = \cot KTW = \frac{\cos\psi \cos\gamma}{\sin\gamma}$; oder $\tan KTW = \frac{\tan\psi}{\sin\psi}$ und $\cos ZL = \cos\psi \sin\gamma$ vermittelst der Logarithmen zu finden, indem man für ψ nach und nach 10°, 20°, oder auch 5°, 10°, u. s. f. nimmt, weil nun $WK = TW \tan KTW$, $= \frac{TW}{\tan PZL}$, so kann man leicht WK berechnen, wenn man TW so annimmt, wie es die jedesmalige Voraussetzung von $\psi = 10°$, $\psi = 20°$, u. s. f. erfordert. Es ist aber $TW = \frac{r\cos\psi \cos\gamma}{1 + \cos\psi \sin\gamma}$, und

WK

$WK = \frac{r\sin\psi}{1+\cos\psi\sin\gamma}$, und $\cos\psi\sin\gamma = \cos ZL$, $1 + \cos\psi\sin\gamma = 1 + \cos ZL = \frac{\sin ZL}{\tang\frac{1}{2}ZL}$, also $TW = \frac{r\cos\psi\cos\gamma\tang\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$, und $WK = \frac{r\sin\psi\tang\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$. Durch Hülfe dieser beyden letzten Ausdrücke kann man für jede Voraussetzung von $\psi = 10°$, $\psi = 20°$, u. s. f. sowohl TW, als auch WK sehr leicht berechnen. Es sey z. E. $\gamma = 85°$, und $\psi = 54°$, $r = 10000$, so giebt die Rechnung

$l\cos\psi = 9,7692187$ | $l\sin ZL = 9.9087814$
$l\sin\gamma = 9,9983442$ | $l\tang\frac{1}{2}ZL = 9.7085699$
$l\cos ZL = 19.7675629 - 10$ | $l\frac{\sin ZL}{\tang\frac{1}{2}ZL} = 0,2002115$
also $ZL = 54°9'$, $\frac{1}{2}ZL = 27°4\frac{1}{2}'$.

$lr = 4.0000000$
$l\cos\psi = 9.7692187$
$l\cos\gamma = 8.9402960$
22.7095147
$l\frac{\sin ZL}{\tang\frac{1}{2}ZL} = 0.2002115$
$lt = 22.5093032 - 20$
also $TW = 323$.

$lr = 4.0000000$
$l\sin\psi = 9.9079576$
13.9079576
$l\frac{\sin ZL}{\tang\frac{1}{2}ZL} = 0,2002115$
$lu = 13.7077461 - 10$
folglich $WK = 5102$.

Demnach nehme man $TY = 5102$ und $YK = 323$, so ist K in der Projection des Mittagskreises von 85° Länge, und K ist die Projection eines Puncts L von 54° Breite in diesem Mittagskreise.

Wenn L die Projection eines gegebenen Puncts in einem Meridian, z. E. von 40° Länge ist; so läßt sich die orthographische Projection eben dieses Puncts leicht auf folgende Art finden. Man ziehe TL, so ist $TL = r\tang\frac{1}{2}ZL$, (15 §.) man nehme ferner

$TM = r\sin ZL$, so ist M die orthographische Projection eben des Puncts, wovon L die stereographische ist. Man darf demnach nur auf TH ein Stück TE = TL nehmen, sodann PE ziehen, welche den Halbkreis PBQ in V schneidet, hierauf VX auf PQ senkrecht ziehen, und TM = VX nehmen.

19 §.

Es bleibe alles wie im 16 §. (9 Fig.) in Ansehung der Lage der Tafel und des Auges: aber statt des Meridians sey ein Parallelkreis *DLd* des Aequators gegeben, dessen geographische Breite, oder Abstand vom Aequator $DG = \psi$ ist: man soll seine Projection auf der Tafel suchen.

Aufl. Es ist dieß der Fall des 12 §. da die Ebene von L*m* mit der Fundamentalebene parallel ist. Also hat man $Te = e$, und überdem $a = o$, $\delta = r$. Folglich wird $x = \frac{et}{u}$, und $z = \frac{r(e-u)}{u}$ $= \frac{re}{u} - r$. Da nun hier $ef = x$, $fL = z$, $eL = eD = ed = r\cos\psi$ ist, so hat man zwischen x und z die Gleichung $xx + zz = rr\cos\psi^2$. Ueberdem wird $Te = e = r\sin$, also $x = \frac{rt\sin\psi}{u}$, $z = \frac{rr\sin\psi}{u} - r$, und man erhält zwischen t und u die Gleichung $\frac{rr\,tt\sin\psi^2}{uu}$ $+ \left(\frac{rr\sin\psi}{u} - r\right)^2 = rr\cos\psi^2$, oder $\frac{tt\sin\psi^2}{uu} + \frac{r\sin\psi}{u} - 1)^2 = \cos\psi^2$, oder auch $tt\sin\psi^2 + (r\sin\psi - u)^2 = uu\cos\psi^2$. Dieß giebt $tt\sin\psi^2 + rr\sin\psi^2$ $-2ru\sin\psi + uu\sin\psi^2 = o$, oder $tt + uu - \frac{2r}{\sin\psi}u + rr = o$. Als ist die Projection wiederum eine Linie der zweyten Ordnung, die in die Classe der Ellipsen gehört, dahin man auch den Kreis rechnen muß.

Man

Man kann die Gleichung auch so ausdrücken $tt + uu - 2r \operatorname{cosec}\psi\, u + rr = o$, und für $t = o$ wird $u = r\operatorname{cosec}\psi + r\sqrt{(\operatorname{cosec}\psi^2 - 1)}$, oder $u = r(\operatorname{cosec}\psi \pm \cot\psi)$. Es sey demnach auf der Ebene der Tafel die Projection DKd (10 Fig.) gezeichnet, und TW $= t$, WK $= u$; man nehme TC $= r\operatorname{cosec}\psi$, C$a = - r\cot\psi$, C$b = + r\cot\psi$, so sind a und b in der Projection. Wenn man Kw mit Tw parallel ziehet, und in der gefundenen Gleichung TW = WK $= u$, wK = TW $= t$ setzet, so erhält man $\mathrm{WK} + \mathrm{TW}^2 - 2r\operatorname{cosec}\psi\,\mathrm{TW} + rr = o$. Da nun TC $= r\operatorname{cosec}\psi$, so erhält man TW + CW $= r\operatorname{cosec}\psi$, und TW $= r\operatorname{cosec}\psi - $ CW. Dieß setze man statt TW in der letzten Gleichung, so erhält man zwischen CW und WK folgende Gleichung $\mathrm{WK}^2 + \mathrm{CW}^2 = rr(\operatorname{cosec}\psi^2 - 1)$ oder $\mathrm{WK}^2 + \mathrm{CW}^2 = rr\cot\psi^2$, und diese ergiebt, daß die Projection ein Kreis sey, dessen Mittelpunct in C fällt, und dessen Halbmesser $= r\cot\psi$ ist. Der Mittelpunct C liegt in der graden Linie PQ, die durch den Augenpunct T auf der Fundamentallinie senkrecht steht; er ist vom Augenpunct um den Abstand TC $= r\operatorname{cosec}\psi$ entfernt, und die Projection schneidet die Linie PQ in a so, daß Ta $= r(\operatorname{cosec}\psi - \cot\psi) = r\tan\tfrac{1}{2}\psi$. Wenn man mit dem Halbmesser TP $= r$ einen Kreis aus dem Mittelpunct T beschreibt, und auf demselben die Bogen PD = Pd $= 90° - \psi$ nimmt, so sind die Puncte D und d in der Projection. Dieß ergiebt die Zeichnung unmittelbar, weil die Puncte D und d der Parallelkreise mit ihren Projectionen zusammen fallen. Eben dieß ergiebt auch die Gleichung $tt + uu - 2ru\operatorname{cosec}\psi + rr = o$. Man ziehe nämlich DE auf TW senkrecht, und setze $t = $ TE $= r\cos\psi$, so wird $uu - 2ru\operatorname{cosec}\psi = - rr - rr\cos\psi^2$, oder $uu - 2ru\operatorname{cosec}\psi + rr\operatorname{cosec}\psi^2 = rr(\operatorname{cosec}\psi^2 - 1 - \cos\psi^2)$. Hieraus folgt $u = r\operatorname{cosec}\psi \pm r\sqrt{(\cot\psi^2 - \cos\psi^2)}$, und es wird ED $= r\operatorname{cosec}\psi - r\sqrt{(\cot\psi^2 - \cos\psi^2)}$. Es ist aber $\operatorname{cosec}\psi - \sqrt{(\cot\psi^2 - \cos\psi^2)} = \frac{1}{\sin\psi} - \cos\psi\sqrt{\frac{1}{\sin\psi^2} - 1)} = \frac{1}{\sin\psi} - \cos\psi\cot\psi$

=

$= \frac{1}{\sin\psi} - \frac{\cos\psi^2}{\sin\psi} = \frac{\sin\psi^2}{\sin\psi} = \sin\psi$; also $ED = r\sin\psi$. Demnach ist der Punct D des Kreises DPd zugleich in der Projection DKd.

Die Projection des Aequators wird eine grade Linie, die mit der Fundamentallinie einerley ist: denn das Auge steht in der Ebene des Aequators. Es wird auch $Ta = r\tang\frac{1}{2}\psi = 0$, wenn $\psi = 0$ ist, und der Halbmesser $r\cot\psi = \infty$.

Es entferne sich nun das Auge O in der Axe der Tafel unendlich von T, so wird die Projection orthographisch. Des Puncts L orthographische Projection K fällt mit eben dieses Puncts stereographischer Projection und dem Augenpunct T in grader Linie; wie dann auch leicht erhellet, daß die ganze orthographische Projeetion des Parallelkreises DLd eine grade Linie sey, die mit der Fundamentallinie in der Entfernung $Te = r\sin\psi$ parallel ist. So hat man auch nach dem 12 §. $e - u = 0$, oder $u = e$ für die Gleichung der Projection.

Die Lage des Puncts L hängt von seiner geographischen Länge mit ab. Es sey PLA ein Mittagskreis durch L, und $GPA = \gamma$, so ist $ef = x = r\cos\psi\cos\gamma$, und $z = fL = r\cos\psi\sin\gamma$. In dieser Voraussetzung wird $r\cos\psi\cos\gamma = \frac{rt\sin\psi}{u}$ und $r\cos\psi\sin\gamma = \frac{rr\sin\psi}{u} - r$, also $u = \frac{r\sin\psi}{1 + \cos\psi\sin\gamma}$ und $t = \frac{r\cos\psi\cos\gamma}{1 + \cos\psi\sin\gamma}$. Dieß sind eben die Ausdrücke, welche im 16 §. gefunden worden, wie es denn auch eben dieselben Data sind. Es liegt nämlich L zugleich in einem Meridian, dessen Länge $= \gamma$, und in einem Parallelkreis, dessen Breite $= \psi$ ist, eben so, wie im 16 §. vorausgesetzt worden. Es bleibt auch ZL der Abstand vom Zenith, und

PZL

PZL das Azimuth, also ist $\cos ZL = \sin\gamma \cos\psi$, $u = \frac{r \sin\psi \tang \frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$, und $t = \frac{r \cos\psi \cos\gamma \tang \frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$.

20 §.

Unter den Bedingungen des vorigen §. die Projectionen so vieler Parallelkreise, als verlangt wird, die um gleiche Bogen, z. Ex. von 10 zu 10, oder 5 zu 5 Graden, von einander abstehen, auf der Tafel durch Zeichnung zu finden.

Aufl. Es sey (7 Fig.) GH die Fundamentallinie, T der Augenpunct, so ist GH zugleich die Projection des Aequators. Man theile den Quadranten HP von 10 zu 10 oder 5 zu 5 Graden ein, und ziehe die graden Linien G80, G70, G60, u. s. f. welche PT in a, b, u. s. f. schneiden. Durch diese Puncte nach der Ordnung gehen die Projectionen der Parallelkreise von 80°, 70°, 60° Breite, u. s. f. denn es ist $Ta = r \tang \frac{1}{2} 80°$, $Tb = r \tang \frac{1}{2} 70°$, u. s. f. Weil nun die Bogen P80, P70, u. s. f. auf beyden Seiten von P gleich groß genommen werden; so hat man für die Parallelkreise von 80°, von 70°, und eben so für alle folgende drey Puncte, durch welche ihre Projectionen durchgehen, daß man also die zugehörigen Mittelpuncte durch Zeichnung suchen kann. Allein man kann auch dieser Mühe überhoben seyn, wenn man, wie im 18 §. den Halbkreis PHQ gehörig eingetheilt, und die Linien P20, P40, u. s. f. gezogen hat. Denn es ist $TC = r \cot 80°$, $TD = r \cot 70°$, u. s. f. Also sind TC, TD, u. s. f. nach der Ordnung die Halbmesser der Projectionen der Parallelkreise von 80°, 70°, 60° Breite u. s. f. Deswegen nehme man nach der Ordnung $ac = TC$, $bd = TD$ u. s. f. so sind c, d, u. s. f. die Mittelpuncte der Kreise, welche die Projectionen der Parallelkreise von 80°, 70° Breite, u. s. f. abgeben.

Die Halbmesser fallen desto größer aus, je kleiner die Breite des Parallelkreises ist, und man kann die Unbequemlichkeit, worinn man hiedurch bey der Verzeichnung geräth, leicht vermeiden, wenn man diese Halbmesser durch Hülfe des Ausdrucks $r\cot\psi$ vermittelst der Logarithmen berechnet: da dann wiederum die Schwierigkeit nur bleibt, so große Kreise zu zeichnen. Allein auch diese läßt sich ziemlich heben, wenn man, wie im 18 §. t und u aus γ und ψ berechnet, und auf solche Art mehrere Puncte nach einander sucht, durch welche der gesuchte Kreisbogen durchgehen muß, da sich hier für einerley Parallelkreis nur γ ändert. Man hat auch hier $\cos ZL = \sin\gamma\cos\psi$, $u = \dfrac{r\sin\psi\ \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$, $t = \dfrac{r\cos\psi\cos\gamma\ \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$. Es sey z. Ex. $r = 10000$, $\psi = 5°$ und $\gamma = 54°$, so giebt die Rechnung

$l\sin\gamma = 9,9079576$	$l\sin ZL = 9.7723314$
$l\cos\psi = 9.9983442$	$l\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL = 9.5156309$
$l\cos ZL = 19.9063018 - 10$	$l\dfrac{\sin ZL}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL} = 0,2567005$
$ZL = 36°\ 18'$	
$\frac{1}{2}ZL = 18°\ 9'$	
	$lr = 4,0000000$
$lr = 4.0000000$	$l\cos\psi = 9.9983442$
$l\sin\psi = 8.9402960$	$l\cos\gamma = 9.7692187$
$lr\sin\psi = 12.9402960$	23.7675629
$l\dfrac{\sin ZL}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL} = 0.2567005$	$l\dfrac{\sin ZL}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}ZL} = 0,2567005$
$lu = 12.6835955 - 10$	$lt = 23.5108624 - 20$
$u = 482,6.$	$t = 3242,4$

Man nehme also TW = 3242, 4, und WK = 482, 6, so ist K in der Projection des Parallelkreises von 5° Breite und zugleich in der Projection eines Meridians von 54° Länge.

21 §.

Es sey GBHb (11 Fig.) ein größter Kreis der Erdkugel, dessen Pole Z und O sind, so wird er der wahre Horizont des Orts Z seyn, dessen Scheitellinie OZ ist. Es sey ferner pq die Axe des Aequators, so wird der größte Kreis ZpOQ der Meridian des Orts Z, und Bb die Mittagslinie seyn. Wenn nun der Aequator EGQH den Horizont in GH schneidet, so ist GH auf der Ebene des Meridians senkrecht, und GZHO der erste Verticalkreis. Nun sey $GBHb$ die Tafel, das Auge stehe in O im Nadir des Orts Z, und durch die Axe pq des Aequators sey ein Stundenkreis pLA gelegt, der mit dem Meridian einen gegebenen Winkel $ZpV = \phi$ einschließt: man soll seine Projection auf der Tafel suchen, wenn auch des Orts Z geographische Breite $QZ = \lambda$ gegeben ist.

Aufl. Der Stundenkreis pLV schneide die Fundamentalebene in TV, so ist GTV $= \eta$, und der sphärische Winkel pVG $= d$. Ueberdem ist $a = o$, $b = c = o$, und $\delta = r$. Also geben die Formuln des 9 §. folgende Ausdrücke

$$x = \frac{ru \sin\eta \cot d - rt}{t \sin\eta - u \cot d - r\cos\eta}, \text{ oder auch}$$

$$x = \frac{ru \sin\eta \cos d - rt \sin d}{t \sin\eta \sin d - u \cos d - r \cos\eta \sin d}, \text{ und}$$

$$y = \frac{ru \cos\eta}{u \cos d - t \sin\eta \sin d + r \cos\eta \sin d}.$$

Im sphärischen Dreyeck VpZ sey der Winkel pVZ $= \xi$, die Seite VZ $= \varepsilon$, so ist $\eta + \varepsilon = 90°$, $d + \xi = 180°$, also $\sin\eta = \cos\varepsilon$, $\cos\eta = \sin\varepsilon$, $\sin d = \sin\xi$, $\cos d = -\cos\xi$, und es wird

$$x = \frac{rt\sin\xi + ru\cos\varepsilon\cos\xi}{r\sin\varepsilon\sin\xi - t\cos\varepsilon\sin\xi - u\cos\xi} = \frac{rt + ru\cos\varepsilon\cot\xi}{r\sin\varepsilon - t\cos\varepsilon - u\cot\xi},$$

$$y = \frac{ru\sin\varepsilon}{r\sin\varepsilon\sin\xi - t\cos\varepsilon\sin\xi - u\cos\xi} = \frac{ru\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin\xi}}{r\sin\varepsilon - t\cos\varepsilon - u\cot\xi}.$$

Wenn nun LF auf TV senkrecht ist, so hat man $TF = x$, $FL = y$, und $xx + yy = rr$, da dann die gefundenen Werthe statt x und y gesetzt folgende Gleichung zwischen t und u geben.

$$\frac{(rt + ru\cos\varepsilon\cot\xi)^2 + rruu\dfrac{\sin\varepsilon^2}{\sin\xi^2}}{(r\sin\varepsilon - t\cos\varepsilon - u\cot\xi)^2} = rr$$

Hieraus folgt

$$tt + 2tu\cos\varepsilon\cot\xi + uu\cos\varepsilon^2\cot\xi^2 + uu\frac{\sin\varepsilon^2}{\sin\xi^2} = rr\sin\varepsilon^2 - 2tr\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$-2ru\sin\varepsilon\cot\xi - tt\cos\varepsilon^2 - 2tu\cos\varepsilon\cot\xi - uu\cot\xi^2$$

oder auch

$$tt\sin\varepsilon^2 - uu\sin\varepsilon^2\cot\xi^2 + uu\frac{\sin\varepsilon^2}{\sin\xi^2} = rr\sin\varepsilon^2 - 2tr\sin\varepsilon\cos\varepsilon - 2ru\sin\varepsilon\cot\xi$$

Man multiplicire alles mit $\sin\xi^2$ und setze $\cot\xi\sin\xi = \cos\xi$, so wird $tt\sin\varepsilon^2\sin\xi^2 + uu\sin\varepsilon^2\sin\xi^2 = rr\sin\varepsilon^2\sin\xi^2 - 2tr\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\xi^2 - 2ru\sin\varepsilon\cos\xi\sin\xi$.

Nun kann man alles mit $\sin\varepsilon\sin\xi$ dividiren, und es wird $tt\sin\varepsilon\sin\xi + uu\sin\varepsilon\sin\xi = rr\sin\varepsilon\sin\xi - 2tr\cos\varepsilon\sin\xi - 2ru\cos\xi$.

Aber im sphärischen Dreyeck ZpV, das bey Z rechtwinklicht ist, hat man $\frac{\sin VZ}{\sin VpZ} = \frac{\sin pZ}{\sin pVZ}$, $\sin VpZ = \frac{\cos pVZ}{\cos pZ}$, $\cos VpZ = \cos VZ \sin pVZ$. Weil nun $VZ = \varepsilon$, $pZ = 90° - \lambda$, $VpZ = \phi$, $pVZ = \xi$, so wird $\frac{\sin\varepsilon}{\sin\phi} = \frac{\cos\lambda}{\sin\xi}$, $\sin\phi = \frac{\cos\xi}{\sin\lambda}$, $\cos\phi = \cos\varepsilon\sin\xi$. Folglich auch $\sin\varepsilon\sin\xi = \sin\phi\cos\lambda$ und $\cos\xi = \sin\phi\sin\lambda$. Man substituire die drey letzten Werthe in der gefundenen Gleichung, so erhält man

$(tt+uu)$

$(tt+uu)\sin\phi\cos\lambda = rr\sin\phi\cos\lambda - 2tr\cos\phi - 2ru\sin\phi\sin\lambda$,

oder $tt+uu = rr - 2tr\dfrac{\cot\phi}{\cos\lambda} - 2ru\tan\lambda$

oder auch $tt+uu = rr - 2tr\dfrac{\sec\lambda}{\tan\phi} - 2ru\tan\lambda$,

und diese Gleichung ergiebt, daß die Projection wiederum in die Classe der Ellipsen gehöre, die auch hier ein Kreis wird.

Man ordne nämlich die Gleichung nach den Potenzen von u, so hat man $uu + 2ru\tan\lambda + tt + \dfrac{2r\sec\lambda}{\tan\phi}t - rr = 0$.

Auf der Ebene der Tafel sey die Projection PK (13 Fig.) gezeichnet, und GH die Fundamentallinie, T der Augenpunct, $TW = t$, $WK = u$. Man setze $t = 0$, so wird $uu + 2ru\tan\lambda - rr = 0$, also $u = -r\tan\lambda \pm r\sec\lambda$. Man nehme demnach TD $= -r\tan\lambda$, $DP = +r\sec\lambda$, $DQ = -r\sec\lambda$, so liegen die Puncte P und Q in der Projection. Man ziehe EF mit GH parallel, und nachdem WK bis W verlängert worden, sey $WK = x$, so wird $x = r\tan\lambda + u$, also $u = x - r\tan\lambda$. Dieß in die vorige Gleichung zwischen t und u gesetzt, giebt zwischen $Dw = t$, und $wK = x$ diese Gleichung

$$xx - 2rx\tan\lambda + rr\tan\lambda^2 + tt + \frac{2r\sec\lambda}{\tan\phi}t - rr = 0, \quad + 2rx\tan\lambda$$
$$- 2rr\tan\lambda^2$$

oder $xx - rr(\tan\lambda^2 + 1) + tt + \dfrac{2r\sec\lambda}{\tan\phi}t = 0$.

Man setze $x = 0$, so hat man $tt + \dfrac{2r\sec\lambda}{\tan\phi}t = rr\sec\lambda^2$, und dieß giebt $t = -\dfrac{r\sec\lambda}{\tan\phi} + r\sec\lambda\,\mathrm{cosec}\,\phi$. Nimmt man demnach DC $= -\dfrac{r\sec\lambda}{\tan\phi}$, $CE = +r\sec\lambda\,\mathrm{cosec}\,\phi$, $CF = -r\sec\lambda\,\mathrm{cosec}\,\phi$, so sind die Puncte E und F in der Projection. Es sey nun $Cw = s$, so ist $t + \frac{r\sec\lambda}{\tan g\phi} = s$, und $t = s - \frac{r\sec\lambda}{\tan g\phi}$. Setzt man dieß in der letzten Gleichung statt t, so wird $zz + ss - \frac{rr\sec\lambda^2}{\tan g\phi^2} - rr\sec\lambda^2 = o$, oder $zz + ss = rr\sec\lambda^2 \operatorname{cosec}\phi^2$. Demnach ist die Projection ein Kreis, dessen Halbmesser $= r\sec\lambda \operatorname{cosec}\phi$. Der Mittelpunct dieses Kreises liegt in der Tafel unter der Fundamentallinie, und wird so gefunden. Durch den Augenpunct setze man TD auf der Fundamentallinie senkrecht, und nehme $TD = r\tan g\lambda$. Durch D ziehe man mit der Fundamentallinie eine Parallele, und nehme $DC = \frac{r\sec\lambda}{\tan g\phi}$ auf der Seite die TW entgegen gesetzt ist, so ist C der Mittelpunct. Wäre ϕ negativ, oder fiele pV auf der andern Seite des Meridians pZ, so müßte DC auf der entgegengesetzten Seite von D genommen werden, weil nun $\tan g\gamma$ negativ ist. Für $\phi = 90°$ fällt C in D, weil $\tan g\phi = \infty$, und also $DC = \frac{r\sec\lambda}{\tan g\phi} = o$ wird. Der Halbmesser ist nun $= r\sec\lambda = DP$.

22 §.

Bey dieser Auflösung sind folgende Umstände merkwürdig. Die Linie TD wird allein durch den Winkel λ und nicht durch ϕ bestimmt. Demnach werden die Mittelpuncte der Projectionen aller Stundenkreise in der Linie EF liegen, wenn λ einerley bleibt. Ziehet man in der 11 Fig. die grade Linie Op, welche die Tafel in P durchbohret, so ist P die Projection des Pols p und dieser liegt in Bb, dem Durchschnitt des Meridians und der Tafel, oder der Mittagslinie, worinn sich der Meridian des Orts Z projicirt, wie auch die Gleichung ergiebt, weil für $\phi = o$, $\operatorname{cosec}\phi = \infty$ also der Kreis eine grade Linie wird. Man hat also TP, wenn man in

der

der Gleichung zwischen t und u die Abscisse $t=0$ setzt. Dieß gab $u=-r\text{tang}\lambda \pm r\sec\lambda$, also ist $TP=r(\sec\lambda - \text{tang}\lambda) = r\text{tang}\frac{90^\circ-\lambda}{2} = r\text{tang}\frac{1}{2}pZ$, wie auch unmittelbar aus der Zeichnung erhellet. Wenn man die Linie Oq zöge, und bis sie mit der Tafel zusammen stieße verlängerte, so würde der Durchschnittspunct π unterwärts in der verlängerten TD fallen, und dieser wäre dann die Projection des entgegengesetzten Pols q. Diesen giebt die andre Applicate für $u=0$. Es wird nämlich $T\pi = -r(\sec\lambda + \text{tang}\lambda) = -r\text{tang}\frac{90^\circ+\lambda}{2} = r\text{tang}\frac{qZ}{2}$, wie ebenfalls auch aus der Zeichnung erhellet. Da nun diese beyden Ordinaten ebenfalls nicht von ϕ abhängen, so sind die Puncte P und Q für alle Stundenkreise einerley, und die Projectionen aller Stundenkreise schneiden einander in diesen Puncten. Wenn nun in der Tafel die Linie PC gezogen ist, so wird $PD:DC = 1:\text{tang}\,CPD = r\sec\lambda : \frac{r\sec\lambda}{\text{tang}\phi} = 1:\cot\phi$. Also ist $\text{tang}\,CPD = \cot\phi$, folglich $CPD = 90^\circ - \phi$. Hat man demnach $TD = r\text{tang}\lambda$ genommen, und durch D eine Parallele EF mit der Fundamentallinie gezogen, so setze man an P den Winkel $DPC = 90^\circ - \phi$, und es wird PC die Linie EF im Mittelpunct des Kreises schneiden, der der Projection des Stundenkreises zugehört, welcher mit dem Mittagskreise einen Winkel $=\phi$ einschließt.

23 §.

Es rücke nun das Auge in der Axe der Tafel (11 Fig.) von der Tafel weg, bis LO mit OZ parallel und die Projection orthographisch wird; so fällt die orthographische Projection K des Puncts L mit T und K in grader Linie. Es ist nämlich TK die Projection des Verticalkreises ZL, und es wird pZL das Azimuth des Puncts L, so wie ZL sein Abstand vom Zenith ist. Dafern nun noch $AL = \psi$ des Puncts L geographische Breite gegeben ist, so hat man die Lage des Puncts L völlig bestimmt. Im sphärischen Dreyeck pZL ist nun $LpZ = \phi$, $pZ = 90^\circ - \lambda$, $pL = 90^\circ - \psi$, und $\cos ZL = \cos pL \cos pZ + \cos ZpL \sin pL \sin pZ$, $\tang pZL =$

$$\frac{\sin pL \sin ZpL}{\cos pL \sin pZ - \cos ZpL \cos pZ \sin pL},$$ also wird $\cos ZL = \sin\psi \sin\lambda + \cos\phi \cos\psi \cos\lambda$, und $\tang pZL = \dfrac{\cos\psi \sin\phi}{\sin\psi \cos\lambda - \cos\phi \sin\lambda \cos\psi}$.

Ferner hat man im sphärischen Dreyeck VLZ auch $\cos ZL = \cos VZ \cos VL + \cos ZVL \sin VZ \sin VL$ und

$$\tang VZL = \frac{\sin VL \sin ZVL}{\cos VL \sin VZ - \cos ZVL \cos VZ \sin VL}.$$ Es war aber

$$x = \frac{rt \sin\xi + ru \cos\varepsilon \cos\xi}{r \sin\varepsilon \sin\xi - t \cos\varepsilon \sin\xi - u \cos\xi},\quad y = \frac{ru \sin\varepsilon}{r \sin\varepsilon \sin\xi - t \cos\varepsilon \sin\xi - u \cos\xi},$$

und $\varepsilon = VZ$, $\xi = LVZ$. Ferner ist $x = r \cos VL$

$$= \frac{rt \sin\xi + ru \cos VZ \cos\xi}{r \sin VZ \sin\xi - t \cos VZ \sin\xi - u \cos\xi},$$ und $y = r \sin VL$

$$= \frac{ru \sin VZ}{r \sin VZ \sin\xi - t \cos VZ \sin\xi - u \cos\xi}.$$ Aus den beyden letzten Gleichungen folgt diese $\dfrac{\cos VL}{t \sin\xi + u \cos VZ \cos\xi} = \dfrac{\sin VL}{u \sin VZ}$, oder $u \sin VZ \cos VL - t \sin\xi \sin VL - u \cos\xi \cos VZ \sin VL = 0$. Wenn man ferner die erste mit $\cos VL$, die letzte mit $\sin VL$ multiplicirt, und beyde addirt, so wird $u \sin VZ \sin VL + t \sin\xi \cos VL + u \cos VZ \cos\xi \cos VL = r \sin VZ \sin\xi - t \cos VZ \sin\xi - u \cos\xi$. Man multiplicire diese wiederum mit $\sin VL$ und die nächst vorhergehende mit $\cos VL$, addire sodann beyde zusammen, so erhält man

$$u \sin VZ = r \sin\xi \sin VZ \sin VL - t \sin\xi \cos VZ \sin VL - u \cos\xi \sin VL$$

oder $u(\sin VZ + \cos\xi \sin VL) = r \sin\xi \sin VZ \sin VL - t \sin\xi \cos VZ \sin VL$

und

und $u = \frac{r\sin\xi \sin VZ \sin VL - t\sin\xi \cos VZ \sin VL.}{\sin VZ + \cos\xi \sin VL}$

Aber aus der Gleichung $u\sin VZ \cos VL - t\sin\xi \sin VL - u\cos\xi \cos VZ \sin VL = 0$ folgt $u = \frac{t\sin\xi \sin VL}{\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL.}$ Beyde Werthe gleich gesetzt geben

$$\frac{t}{\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL} = \frac{r\sin VZ - t\cos VZ}{\sin VZ + \cos\xi \sin VL},$$

und daraus folgt

$(\sin VZ + \cos\xi \sin VL + \sin VZ \cos VZ \cos VL - \cos\xi \sin VL \cos VZ^2)t =$
$= r(\sin VZ^2 \cos VL - \cos\xi \sin VZ \cos VZ \sin VL)$. Setzt man nun $1 - \cos VZ^2 = \sin VZ^2$, so kann man alles mit $\sin VZ$ dividiren, und es wird $t = \frac{r(\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL)}{1 + \cos VZ \cos VL + \cos\xi \sin VZ \sin VL}$.

Dieß in den letzten Ausdruck für u statt t gesetzt giebt

$$u = \frac{r\sin\xi \sin VL}{1 + \cos VZ \cos VL + \cos\xi \sin VZ \sin VL}.$$

Nun war $\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL = \frac{\sin VL \sin\xi}{\tang VZL}$ und $\cos VZ \cos VL + \cos\xi \sin VZ \sin VL = \cos ZL$, also wird $t = \frac{r\sin VL \sin\xi}{\tang VZL\,(1 + \cos ZL)}$, $u = \frac{r\sin VL \sin\xi}{1 + \cos ZL}$. Weil nun überdem $\frac{\sin VL}{\sin VZL} = \frac{\sin ZL}{\sin\xi}$, also $\sin VL \sin\xi = \sin ZL \sin VZL$, so erhält man $t = \frac{r\sin ZL \sin VZL}{\tang VZL\,(1 + \cos ZL)}$, $u = \frac{r\sin ZL \sin VZL}{1 + \cos ZL}$; oder $t = r\tang\frac{1}{2}ZL \cos VZL$, $u = r\tang\frac{1}{2}ZL \sin VZL$. Aber im sphärischen Dreyeck pZL hat man $pZL = 90° - VZL$, und $\frac{\sin ZL}{\sin\phi} = \frac{\sin pL}{\sin pZL} = \frac{\cos\psi}{\cos VZL}$, also $\cos VZL = \frac{\cos\psi \sin\phi}{\sin ZL}$. Dieß giebt $t = \frac{r\cos\psi \sin\phi \tang\frac{1}{2}ZL.}{\sin ZL}$

Endlich hat man im sphärischen Dreyeck pZL auch $\cos pZL$ $= \frac{\cos pL - \cos ZL \cos pZ}{\sin ZL \sin pZ} = \sin VZL$, also $\sin VZL = \frac{\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda}{\sin ZL \cos\lambda}$, und $u = \frac{r \tan g \frac{1}{2} ZL (\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda)}{\sin ZL \cos\lambda}$.

24 §.

Wenn man die Formuln des 21 §. und die daraus im vorigen 23 §. hergeleiteten mit dem 16 §. vergleicht, so findet man allenthalben eine völlige Uebereinstimmung, und es hätte die Auflösung des 16 §. aus dieser hergeleitet werden können, weil jene von dieser nur ein besondrer Fall ist. Im 16 §. ward angenommen, daß Z im Aequator selbst stehe. Wenn man demnach $\lambda = ZF = o$ setzt, so müssen die jetzigen Formuln insgesammt mit denjenigen übereinkommen, die im 16 §. erwiesen sind. Es war hier der Halbmesser der Projection $= r \sin\lambda \operatorname{cosec}\phi$, und dieser wird $= r \operatorname{cosec}\phi$ wenn $\lambda = o$ ist. Es fällt nun F in Z und p in B, und ϕ wird das Complement des Winkels, den der Meridian pL mit der Tafel macht. Dieser war im 16 §. $= \gamma$, also ist $\operatorname{cosec}\phi$ $= \sec\gamma$, und der Halbmesser der Projection wird $= r \sec\gamma$, wie im 16 §. Ferner wird $TD = r \tan g\lambda = o$, und $DC = -\frac{r \sec\lambda}{\tan g\phi}$ $= -\frac{r}{\cot\gamma} = -r \tan g\gamma = TC$ im 16 §. Aus $t = \frac{r \cos\psi \sin\phi \tan g \frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$, und $u = \frac{r \tan g \frac{1}{2} ZL (\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda)}{\sin ZL \cos\lambda}$ wird $t = \frac{r \cos\psi \cos\gamma \tan g \frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$ und $u = \frac{r \sin\psi \tan g \frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$, wenn $\lambda = o$ und $\phi = 90° - \gamma$ gesetzt wird, so wie man auch $\cos ZL = \cos\phi \cos\psi = \sin\gamma \cos\psi$ erhält, wie dem 16 §. gemäß ist.

25 §.

Bey eben der Lage des Meridians oder Stundenkreises pLA gegen die Tafel, wie im 21 §. die orthographische Projection desselben zu finden.

Aufl. Wenn man in den Formuln des 10 §. für die orthographische Projection, wo $a=o$ ist, auch $b=c=o$, setzt, wie es den Voraussetzungen des 20 §. gemäß ist, so wird $x = t\sec\eta - u\tang\eta\cot d$, und $y=\frac{u}{\sin d}$. Man setze wie im 20 §. $\eta=90°-\varepsilon$ und $d=180°-\xi$ so erhält man $x = t\operatorname{cosec}\varepsilon + u\cot\varepsilon\cot\xi$ und $y=\frac{u}{\sin\xi}$. Dieß in die Gleichung $xx+yy=rr$ gesetzt giebt für die orthographische Projection $\left(\frac{t}{\sin\varepsilon}+\frac{u\cos\varepsilon\cos\xi}{\sin\varepsilon\sin\xi}\right)^2+\frac{uu}{\sin\xi^2}=rr$, oder $(t\sin\xi+u\cos\varepsilon\cos\xi)^2+uu\sin\varepsilon^2=rr\sin\varepsilon^2\sin\xi^2$.

Hieraus folgt

$uu\cos\varepsilon^2\cos\xi^2+2tu\sin\xi\cos\xi\cos\varepsilon+tt\sin\xi^2=rr\sin\varepsilon\sin\xi^2+uu\sin\varepsilon^2$

oder auch $uu(1-\cos\varepsilon^2\sin\xi^2)+2tu\sin\xi\cos\xi\cos\varepsilon+tt\sin\xi^2 = rr\sin\varepsilon\sin\xi^2$.

Man substituire aus dem 20 §. die Werthe $\cos\varepsilon\sin\xi=\cos\phi$, $\sin\varepsilon\sin\xi=\sin\phi\cos\lambda$, $\cos\xi=\sin\phi\sin\lambda$, so wird

$uu(\sin\phi^2+2tu\sin\phi\cos\phi\sin\lambda+tt(1-\sin\phi^2\sin\lambda^2)=rr\sin\phi^2\cos\lambda^2$

oder $uu+2tu\cot\phi\sin\lambda+(\operatorname{cosec}\phi^2-\sin\lambda^2)\,tt = rr\cos\lambda^2$.

Die Gleichung drückt eine Ellipse aus, dafern $\cot\phi^2\sin\lambda^2<\operatorname{cosec}\phi^2-\sin\lambda^2$. Es ist aber diese Voraussetzung wirklich richtig, denn es ist allemal $\operatorname{cosec}\phi^2\sin\lambda^2<\operatorname{cosec}\phi^2$, also $\cot\phi^2\sin\lambda^2+\sin\lambda^2<\operatorname{cosec}\phi^2$, und $\cot\phi^2\sin\lambda^2<\operatorname{cosec}\phi^2-\sin\lambda^2$.

Die Ebene des Meridians pLA (11 Fig.) schneide die Tafel in der graden Linie TN, so hat man im sphärischen Dreyeck

BpN *tang* BN $=$ sinB*p* *tang* B*p*N $=$ sinλ *tang*ϕ, also sinBN $= \frac{\sin\lambda \sin\phi}{\sqrt{(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}}$, cosBN $= \frac{\cos\phi}{\sqrt{(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}}$. Es sey die Projection auf der Ebene der Tafel gezeichnet, GH sey die Fundamentallinie, T der Augenpunct, PQ die Projection des Meridians TW $= t$, WK $= u$. Wenn $u = 0$, so wird $t = \pm \frac{r \sin\phi \cos\lambda}{\sqrt{(1 - \sin\phi^2 \sin\lambda^2)}}$, und wenn $t = 0$, so ist $u = \pm r \cos\lambda$. Also schneidet die Projection die Fundamentallinie in E und F, (15 Fig.) so daß TE $=$ TF $= \frac{r \cos\phi \cos\lambda}{\sqrt{(1 - \sin\phi^2 \sin\lambda^2)}}$, die Projection des Meridians aber in Π und π, so daß TΠ $=$ Tπ $= r \cos\lambda$. Demnach ist T der Ellipse Mittelpunct, und EF, $\Pi\pi$ sind ein paar Durchmesser, aber keine zusammen gehörige. Man ziehe nun TN unter dem Winkel PTN, so daß sinPTN $= \frac{\sin\lambda \sin\phi}{\sqrt{(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}}$ und cosPTN $= \frac{\cos\phi}{\sqrt{(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}}$. Auf TN sey TR senkrecht, und KR mit TN parallel. Setzt man nun TR $= s$, und RK $=$ Z, so ergiebt sich auf folgende Art eine Gleichung zwischen s und Z. Aus Vergleichung der ähnlichen Dreyecke TWV, TRS, SKW, VKR findet man $t = s \cos PTN - z \sin PTN$ $u = z \cos PTN + s \sin PTN$, also wird $t = \frac{s \cos\phi - z \sin\lambda \sin\phi}{\sqrt{(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}}$; $u = \frac{z \cos\phi + s \sin\lambda \sin\phi}{\sqrt{(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}}$. Die gefundene Gleichung für die Projection läßt sich so ausdrücken $uu \sin\phi^2 + 2tu \sin\phi \cos\phi \sin\lambda + tt (\cos\lambda^2 + \cos\phi^2 \sin\lambda^2) = rr \sin\phi^2 \cos\lambda^2$ oder $(u \sin\phi = t \cos\phi \sin\lambda)^2 + tt \cos\lambda^2 = rr \sin\phi^2 \cos\lambda^2$; und man findet, wenn man der Kürze wegen $\sqrt{(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi)^2} =$ R setzet.

$$u \sin\phi = (z \sin\phi \cos\phi + s \sin\lambda \sin\phi^2) : R$$
$$+ t \cos\phi \sin\lambda = (-z \sin\phi \cos\phi \sin\lambda^2 + s \sin\lambda \cos\phi^2) : R$$

also $u \sin\phi + t \cos\phi \sin\lambda = z \sin\phi \cos\phi \cos\lambda^2 + s \sin\lambda$,

ferner

ferner erhält man

$(u\sin\phi + t\cos\phi\sin\lambda)^2 = (ss\sin\lambda^2 + 2sz\sin\phi\cos\phi\sin\lambda\cos\lambda^2 + zz\sin\phi^2\cos\phi^2\cos\lambda^4) : R^2$

$tt\cos\lambda^2 = (ss\cos\phi^2\cos\lambda^2 - 2sz\sin\phi\cos\phi\sin\lambda\cos\lambda^2 + zz\sin\phi^2\sin\lambda^2\cos\lambda^2) : R^2$

also $(u\sin\phi + t\cos\phi\sin\lambda)^2 + tt\cos\lambda^2$

$= ss(1 - \sin\phi^2\cos\lambda^2) : R^2 + zz\sin\phi^2\cos\lambda^2(1 - \sin\phi^2\cos\lambda^2) : R^2$

und weil $R^2 = 1 - \sin\phi^2\cos\lambda^2$, so ergiebt sich folgende Gleichung

$ss + zz\sin\phi^2\cos\lambda^2 = rr\sin\phi^2\cos\lambda^2$ oder auch $zz = rr - \frac{ss}{\sin\phi^2\cos\lambda^2}$.

Wenn $s = o$, so wird $z = \pm r$, also $TC = TD = r$: wenn aber $z = o$, so wird $s = \pm r\sin\phi\cos\lambda$, also ist $TA = TB\ r\sin\phi\cos\lambda$, und wenn man $\sin\phi\cos\lambda = \frac{TA}{r}$ in die Gleichung setzt, so wird $zz = rr - \frac{rr}{TA^2}ss$. Demnach ist $CD = 2r$ die Zwergaxe und AB $= 2r\sin\phi\cos\lambda$ die conjugirte Axe der Ellipse, und diese letztere schneidet die Fundamentallinie unter einem Winkel ATE dessen Tangente $= \sin\lambda\tan\phi$. Es sey der Winkel $= N$, unter welchem der Meridian pLA die Tafel bey N schneidet, so ist $\cos N = \sin\phi\cos\lambda$, also $TA = TB = r\cos N$, wie dem 17 §. gemäß ist. Wenn man $\lambda = o$ setzt, so fallen Tp und TN in TB zusammen, und man erhält die Gleichung sowohl als die übrigen im 17 §. hergeleiteten Formuln, wenn man auch $\phi = 90° - \gamma$ setzt.

26 §.

Man kann auch hier für die orthographische Projection t und u auf eine ähnliche Art, wie im 17 §. ausdrücken. Es war nämlich $x = \frac{t\sin\xi + u\cos VZ\cos\xi}{\sin VZ\sin\xi}$ und $y = \frac{u}{\sin\xi}$, wo $VZ = \varepsilon$ ist.

Man nehme nun $x = \mathrm{TF} = r\cos\mathrm{VL}$ und $y = \mathrm{FL} = r\sin\mathrm{VL}$, so erhält man

$$r\cos\mathrm{VL} = \frac{t\sin\xi + u\cos\mathrm{VZ}\cos\xi}{\sin\mathrm{VZ}\sin\xi}$$

$$r\sin\mathrm{VL} = \frac{u\sin\mathrm{VZ}}{\sin\mathrm{VZ}\sin\xi}.$$

Hieraus folgt $\frac{\cos\mathrm{VL}}{t\sin\xi + u\cos\mathrm{VZ}\cos\xi} = \frac{\sin\mathrm{VL}}{u\sin\mathrm{VZ}}$ oder $u\sin\mathrm{VZ}\cos\mathrm{VL} - t\sin\xi\sin\mathrm{VL} - u\cos\xi\cos\mathrm{VZ}\sin\mathrm{VL} = o$.

Wenn ferner die erste mit $\cos\mathrm{VL}$. die letzte mit $\sin\mathrm{VL}$ multiplicirt wird, und man addirt beyde, so wird
$u\sin\mathrm{VZ}\sin\mathrm{VL} + t\sin\xi\cos\mathrm{VL} + u\cos\xi\cos\mathrm{VZ}\cos\mathrm{VL} = r\sin\xi\sin\mathrm{VZ}$
Die letzte mit $\sin\mathrm{VZ}$ und die nächstvorhergehende mit $\cos\mathrm{VL}$ multiplicirt und beyde zusammen addirt geben $u\sin\mathrm{VZ} = r\sin\xi\sin\mathrm{VZ}\sin\mathrm{VL}$, also wird $u = r\sin\xi\sin\mathrm{VL}$. Aber die Gleichung $u\sin\mathrm{VZ}\cos\mathrm{VL} - t\sin\xi\sin\mathrm{VL} - u\cos\xi\cos\mathrm{VZ}\sin\mathrm{VL} = o$ giebt $u = \frac{t\sin\xi\sin\mathrm{VL}}{\sin\mathrm{VZ}\cos\mathrm{VL} - \cos\xi\cos\mathrm{VZ}\sin\mathrm{VL}}$. Beyde Werthe von u gleich gesetzt geben $t = r(\sin\mathrm{VZ}\cos\mathrm{VL} - \cos\xi\cos\mathrm{VZ}\sin\mathrm{VL})$. Nun war $\tang\mathrm{VZL} = \frac{\sin\xi\sin\mathrm{VL}}{\sin\mathrm{VZ}\cos\mathrm{VL} - \cos\xi\cos\mathrm{VZ}\sin\mathrm{VL}}$, also ist $t = \frac{r\sin\xi\sin\mathrm{VL}}{\tang\mathrm{VZL}}$. Wenn also $\mathrm{T}w = \frac{r\sin\xi\sin\mathrm{VL}}{\tang\mathrm{VZL}}$, $wk = r\sin\xi\sin\mathrm{VL}$, so ist $\frac{wk}{\mathrm{T}w} = \tang\mathrm{VZL} = \frac{\mathrm{WK}}{\mathrm{TW}}$ (23 §.) wie erfordert wird, weil T, K, k, in grader Linie liegen. Weil auch $\sin\xi\sin\mathrm{VL} = \sin\mathrm{ZL}\sin\mathrm{VZL}$, so wird $t = \frac{r\sin\mathrm{ZL}\sin\mathrm{VZL}}{\tang\mathrm{VZL}} = r\sin\mathrm{ZL}\cos\mathrm{VZL}$; und da ferner $\cos\mathrm{VZL} = \frac{\cos\psi\sin\phi}{\sin\mathrm{ZL}}$, so wird $t = r\cos\psi\sin\phi$ und $u = r\sin\mathrm{ZL}\sin\mathrm{VZL} = \frac{r(\sin\psi - \cos\mathrm{ZL}\sin\lambda)}{\cos\lambda}$.

27 §.

Bey den Voraussetzungen des 21 §. in Ansehung der Lage des Auges gegen die Tafel, und der Lage des Orts Z gegen den Aequator, die Projectionen so vieler Stundenkreise als verlangt wird, z. Ex. von 15 zu 15 Graden durch Zeichnung zu finden.

Aufl. Um den Mittelpunct T (14 Fig.) sey ein Kreis beschrieben mit dem Halbmesser $= r$, welcher den Horizont, als die Tafel vorstellet, und in demselben ein paar senkrechte Durchmesser GH, BQ, so ist T der Augenpunct, GH die Fundamentallinie BQ die Projection des Meridians des Orts Z. Nun sey z. Ex. $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, so nehme man den Bogen $HE = 2 \times 22\frac{1}{2}°$ und ziehe GE, welche BQ in D schneidet, so ist $TD = r\tan g\, 22\frac{1}{2}°$, und wenn durch D eine grade Linie CD mit der Fundamentallinie parallel gezogen wird, so liegen die Mittelpuncte aller gesuchten Projeetionen in dieser Linie. Man nehme ferner $HF = 90° - 22\frac{1}{2}°$ und ziehe GF, welche BT in P schneidet, so ist P die Projection des Pols, der über dem Horizont liegt, weil $TP = r\tan g\, \frac{90° - 22\frac{1}{2}°}{2}$. An PD lege man die Winkel $DPC = 15°$, $DPI = 30°$, $DPK = 45°$, $DPR = 60°$, $DPr = 75°$, und bemerke die Durchschnittspuncte C, I, K, in der Linie DC, so geben diese die Mittelpuncte der Projectionen derjenigen Stundenkreise ab, die den Meridian unter Winkeln schneiden, welche die Winkel an P zu 90° ergänzen. Also beschreibe man nach der Ordnung mit den Halbmessern CP, IP, KP, u. s. f. Kreise, so hat man die Projectionen der Stundenkreise, die den Meridian unter Winkeln von 75°, 60°, u. s. f. bis 15° schneiden.

Bey Stundenkreisen, die gegen dem Mittagskreis unter sehr kleinen Winkeln geneigt sind, ist man einer ähnlichen Unbequemlichkeit, wie bey den vorigen §§. unterworfen, weil die Halbmesser

der

der Kreise sehr groß ausfallen. Man kann aber in solchen Fällen entweder die Halbmesser selbst aus der Formul $r\sec\lambda \times \operatorname{cosec}\phi$ leicht berechnen: oder wenn auch die Verzeichnung der Kreise mit so großen Halbmessern ihre Schwierigkeit hat; so dienen die Formuln des 23 §. für t und u, die Coordinaten selbst zu berechnen, und so viele Puncte in der Projection zu suchen als nöthig ist, um die Projection aus freyer Hand durch diese Puncte zu zeichnen. Dieß letztere hat vornehmlich seinen Nutzen bey Verzeichnung geographischer Charten nach der vom Herrn Hase angerühmten stereographischen Horizontalprojection. Es war aber

$t = \frac{r\cos\psi \sin\phi \tan\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL} = r\cos VZL \tan\frac{1}{2}ZL$, weil $\cos VZL = \frac{\cos\psi \sin\phi}{\sin ZL}$, und $u = r\sin VZL \tan\frac{1}{2}ZL$. Weil sich nun ϕ für einerley Mittagskreis nicht ändert, so darf man nur ZL, und hierauf VZL berechnen, indem man nach und nach andre Werthe für ψ annimmt, da dann die übrige Rechnung vermittelst der Logarithmen sehr leicht ist. Die Formul $\cos ZL = \sin\psi \sin\lambda + \cos\phi \cos\psi \cos\lambda$ ist hier fast eben so bequem, ZL zu finden, als wenn man auf die sonst gewöhnliche Art das Dreyeck ZpL in zwey rechtwinklichte zerfallet.

Es sey $r = 10000$, $\phi = 1°$, $\psi = 40°$, $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, so giebt die Rechnung

$l\sin\psi = 9.8080675$	$l\cos\psi = 9.8842540$
$l\sin\lambda = 9.5828397$	$l\cos\lambda = 9.9656153$
$19.3909072 - 10$	$l\cos\phi = 9.9999338$
	$29.8498031 - 20$

$\sin\psi \sin\lambda = 2459842$

$\cos\phi \cos\psi \cos\lambda = 7076250$

$\cos ZL = 9536092$ also $ZL = 17° 32'$

und $\frac{1}{2}ZL = 9° 46'$.

$l\cos\psi$

$$
\begin{array}{ll}
l\cos\psi = 9.\ 8842540 & \\
l\sin\phi = \underline{8.\ 2418553} & \\
\ 18.\ 1261093 & \\
l\sin ZL = \underline{9.\ 4789423.} & \\
l\cos VZL = 8.\ 6471670 & \\
lr\tan g\tfrac{1}{2}ZL = \underline{13.\ 2358589.} & \\
lt = 21.\ 8830259-20. & \\
t = 76.\ 425, &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
VZL = 87^\circ\ 27'\tfrac{2}{5}. \\
l\sin VZL = 9.\ 9995719 \\
lr\tan g\tfrac{1}{2}ZL = \underline{13.\ 2358589.} \\
lu = 23.\ 2354308-20. \\
u = 1719.\ 613,
\end{array}
$$

Man nehme also TY = 1719, 613; und YZ = 76, 425, so ist Z ein Punct in der Projection.

Wenn V ein gegebener Punct in der Projection eines Stundenkreises ist, der z. E. um 30° vom ersten abstehet, so findet man die zugehörige orthographische Projection S eben dieses Puncts auf eben die Art, wie im 18 §. Man ziehet TV, fasset TD = TV, und ziehet DG, welche den Kreis GBHQ in E schneidet. Aus E setzet man EX auf GH senkrecht, und nimmt sodann TS = EX, so ist S die orthographische Projection desselben Puncts, wovon V die stereographische ist.

28 §.

Es bleibe noch alles wie im 21 §. (12 Fig.) in Ansehung der Lage des Auges, der Tafel, und des Orts *Z* gegen den Aequator *ÆQ*; nur sey statt des Stundenkreises ein Parallelkreis *BLD* des Aequators gegeben, dessen Abstand vom Aequator *MD* = ψ bekannt ist: man soll seine Projection auf der Tafel suchen.

Aufl. Der Parallelkreis schneide den Meridian des Orts Z in der graden Linie NM, und C sey sein Mittelpunct, BD sey ein Durchmesser desselben auf MN senkrecht, so ist BD auf der Ebene des Meridians senkrecht und mit TW parallel. Ferner ist

CV mit ÆQ, des Aequators und Meridians Durchschnitt, parallel, und CM schneidet TZ in E. Aber die erweiterte Ebene des Parallelkreises schneidet die Fundamentalebene in der Linie EF, so daß EF mit TW parallel ist und $TEF = 90°$, weil beyde Ebenen, also auch EF auf dem Meridian senkrecht sind. Es sey LF auf EF senkrecht, und schneide BD in f. Da nun der Winkel $ETQ = \lambda$, weil der Bogen QZ sein Maas ist, so ist auch $CET = \lambda$. Dieser Winkel aber ist der Neigungswinkel der Ebene des Parallelkreises gegen die Fundamentalebene. Also wird in den allgemeinen Formuln des 9 §. $d = \lambda$. Ueberdem ist $\eta = o$, $a = o$, $\delta = r$, also $\sin\eta = o$, $\cos\eta = 1$. Dieß in den allgemeinen Formuln des 9 §. gesetzt giebt

$$x = \frac{(c+r)t}{u\cot\lambda + r} = \frac{(c+r)\,t\sin\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}, \text{ und}$$

$$y = \frac{(c+r)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}.$$ Weil nun $TE = c$ ist, so wird $CE = c.\cos\lambda = Ff$. Ueberdem ist $EF = Cf = x$, $FL = y$; aber $FL = Ff - fL$, also $y = c.\cos\lambda - fL$, und $fL = c.\cos\lambda - y$. Weil ferner $MQ = \psi$, so ist $CT = r\sin\psi$, $CM = CB = CL = r\cos\psi$. Nun hat man für den Parallelkreis die Gleichung $Cf^2 + fL^2 = CL^2$. Setzt man hier die gefundenen Werthe statt Cf, fL und CL, so erhält man zwischen x und y die Gleichung $xx + (y - c.\cos\lambda)^2 - rr.\cos\psi^2 = o$.

$$\text{Nun ist } y - c.\cos\lambda = \frac{(c+r)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda} - c.\cos\lambda$$

$$= \frac{(c\sin\lambda^2 + r)u - cr\sin\lambda\cos\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}.$$ Dieß nebst dem Werth

$$x = \frac{(c+r)\,t\sin\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$$ in die Gleichung gesetzt giebt

$$\begin{array}{llll} (c+r)^2\sin\lambda^2.\,tt + cc\sin\lambda^4.\,uu & - 2ccr\sin\lambda^3\cos\lambda.\,u & + ccrr\sin\lambda^2\cos\lambda^2 & = o \\ \qquad + 2cr\sin\lambda^2 & - 2crr\sin\lambda\cos\lambda & - r^4\cos\psi^2\sin\lambda^2 & \\ & & & + rr \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} + rr & - 2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda \sin\lambda \\ - rr \cos\lambda^2 \cos\psi^2 & \end{array}$$

Es ist aber $rr(1-\cos\lambda^2 \cos\psi^2) = rr(\sin\lambda^2 + \cos\lambda^2 \sin\psi^2)$, und wenn man dieß substituirt, sodann aber alles mit $\sin\lambda^2$ dividirt, so wird

$$\begin{array}{llll} (c+r)^2\, tt + cc\sin\lambda^2 . & uu - 2ccr\sin\lambda \cos\lambda . & u + crr\cos\lambda^2 & = 0. \\ + 2cr & - \dfrac{2crr\cos\lambda}{\sin\lambda} & - r^4\cos\psi^2 & \\ + rr & & & \\ + \dfrac{rr\cos\lambda^2 \sin\psi^2}{\sin\lambda^2} & - \dfrac{2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda} & & \end{array}$$

Nun ist $CE = CT \cot\lambda$ und $CT = r\sin\psi$, also $CE = r\sin\psi \cot\lambda$, und $TE = \sqrt{(CT^2 + CE^2)} = c = r\sin\psi \sqrt{(1 + \cot\lambda^2)} = r\sin\psi \operatorname{cosec}\lambda$, oder $c = \dfrac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$. Daraus folgt ferner $2rcc\sin\lambda \cos\lambda = \dfrac{2r^3\sin\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda}$.

Aber es ist $\dfrac{2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda} = \dfrac{2r^3\cos\lambda}{\sin\lambda} - \dfrac{2r^3\sin\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda}$, folglich $2rcc\sin\lambda \cos\lambda + \dfrac{2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda} = \dfrac{2r^2\cos\lambda}{\sin\lambda}$. Dieß in die gefundene Gleichung zwischen t und u gesetzt giebt

$$\begin{array}{llll} (c+r)^2\, tt + cc\sin\lambda^2 . & uu - \dfrac{2r^3\cos\lambda .}{\sin\lambda} & u + ccrr\cos\lambda^2 & = 0. \\ + cc.\cos\lambda^2 & & - r^4\cos\psi^2 & \\ + 2cr & & - \dfrac{2crr\cos\lambda}{\sin\lambda} & \\ + rr & & & \end{array}$$

oder $(c+r)^2 (tt+uu) - 2rr(c+r)\cot\lambda . u + ccrr\cos\lambda^2 - r^4\cos\psi^2 = 0$.

Nun kann man ferner $c = \dfrac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$ substituiren, und man erhält die Gleichung

$$\left(\frac{\sin\psi}{\sin\lambda}+1\right)^2(tt+uu)-2rr\left(\frac{\sin\psi}{\sin\lambda}+1\right)u\cot\lambda+\frac{rr\sin\psi^2\cos\lambda^2}{\sin\lambda^2}-r^2\cos\psi^2=0,$$

und diese gehörig geordnet giebt

$$tt+uu-\frac{2r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}u+\frac{rr(\sin\psi^2\cos\lambda^2-\cos\psi^2\sin\lambda^2)}{(\sin\psi+\sin\lambda)^2}=0.$$

Wenn man nun $t=0$ setzt, so ergiebt sich $u=\frac{r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}$ $\pm\frac{r\cos\psi}{\sin\psi+\sin\lambda}$, welches sich auch so ausdrücken läßt $u=\frac{r(\cos\lambda+\cos\psi)}{\sin\psi+\sin\lambda}$. Es ist aber $\frac{\cos\lambda+\cos\psi}{\sin\lambda+\sin\psi}=\cot\frac{1}{2}(\psi+\lambda)$ $=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\,180^\circ-(\psi+\lambda)$, und $\frac{\cos\lambda-\cos\psi}{\sin\lambda+\sin\psi}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\psi-\lambda)$. Also ist der eine Werth $u=r\cot\frac{1}{2}(\psi+\lambda)$, der andre $u=r\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\psi-\lambda)$, wie auch aus Betrachtung der Figur leicht erhellet. Ist nun die Projection *ak* (10 Fig.) auf der Ebene der Tafel gezeichnet, so daß T der Augenpunct und GH die Fundamentallinie ist, und man nimmt $TC=\frac{r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}$, $Ca=-\frac{r\cos\psi}{\sin\psi+\sin\lambda}$, $Cb=+\frac{r\cos\psi}{\sin\psi+\sin\lambda}$, so sind die Puncte *a* und *b* in der Projection. Es sey *ef* mit GH parallel, und schneide WK in *w*, so ist $Cw=TW=t$. Man setze $wk=z$, so wird $\frac{r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}-z=u$, und dieß statt *u* gesetzt giebt zwischen $Cw=t$, und $WK=Z$ die Gleichung

$$tt+\left(-z+\frac{r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}\right)^2-\frac{2r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}\left(-z+\frac{r\cos\lambda}{\sin\psi+\sin\lambda}\right)+\frac{rr(\sin\psi^2\cos\lambda^2-\cos\psi^2\sin\lambda^2)}{(\sin\psi+\sin\lambda)^2}=0$$

oder $$tt+zz+\frac{rr(\sin\psi^2\cos\lambda^2-\cos\psi^2\sin\lambda^2-\cos\lambda^2)}{(\sin\psi+\sin\lambda)^2}=0.$$

Es

Es ist aber $(\sin\psi^2 - 1)\cos\lambda^2 - \cos\psi^2 \sin\lambda^2 = -\cos\psi^2 \cos\lambda^2 - \cos\psi^2 \sin\lambda^2 = -\cos\psi^2$. Also erhält man $tt + zz = \frac{\cos\psi^2}{(\sin\psi + \sin\lambda)^2}$, und die Projection ist ein Kreis, dessen Halbmesser $= \frac{r\cos\psi}{\sin\psi + \sin\lambda}$, und dessen Mittelpunct C ist. Die Mittelpuncte der Projectionen aller Parallelkreise liegen also in der graden Linie TC, welche die Projection des Meridians ist. Nimmt man auf dieser Linie $Ta = r\text{tang}\frac{1}{2}(\psi - \lambda)$ $Tb = r\text{tang}(90^\circ - \frac{1}{2}(\psi + \lambda))$, und halbirt ab bey C, so ist C der Mittelpunct und $Ca = Cb$ der Halbmesser.

Wenn $\psi = 0$ ist, oder der Parallelkreis der Aequator selbst wird, so hat man $Ta = -r\text{tang}\frac{1}{2}\lambda$ und $Tb = \text{tang}(90 - \frac{1}{2}\lambda) = \cot\frac{1}{2}\lambda$.

29 §.

Wenn der Abstand des Puncts L vom Meridian, oder sein Stundenwinkel $ZpL = \phi$ gegeben ist, so ist die Lage dieses Puncts und also x und y bestimmt. Es wird nämlich $x = EF = Cf = r\cos\psi \sin\phi$, und $fL = r\cos\psi \cos\phi$, also $y = FL = Ff - fL = c.\cos\lambda - r\cos\psi\cos\phi = \frac{r\sin\psi \cos\lambda}{\sin\lambda} - r\cos\psi\cos\phi$, weil $c = \frac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$.

Nun waren die allgemeinen Werthe diese

$$x = \frac{(\frac{r\sin\psi}{\sin\lambda} + r)\, t\sin\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda} = \frac{r(\sin\psi + \sin\lambda)t}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$$

$$y = \frac{(\frac{r\sin\psi}{\sin\lambda} + r)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda} = \frac{r(\sin\psi + \sin\lambda)u}{u\cos\lambda \sin\lambda + r\sin\lambda^2}$$

Diese Werthe setze man den vorigen gleich, so wird

$$\cos\psi \sin\phi = \frac{(\sin\psi + \sin\lambda)t}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$$

$$\frac{\sin\psi\cos\lambda}{\sin\lambda} - \cos\psi\cos\phi = \frac{(\sin\psi + \sin\lambda)u}{u\cos\lambda\sin\lambda + r\sin\lambda^2}$$

oder $\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda = \dfrac{(\sin\psi + \sin\lambda)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$

Aus beyden folgt

$$\frac{\cos\psi\sin\phi}{t} = \frac{\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda}{u}$$

oder $u = \dfrac{\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda}{\cos\psi\sin\phi}t.$

Aus der ersten, welche ebenfalls t und u enthält, erhält man

$$u\cos\lambda + r\sin\lambda = \frac{(\sin\psi + \sin\lambda)t}{\cos\psi\sin\phi}$$

also $u = \dfrac{(\sin\psi + \sin\lambda)t - r\sin\lambda\cos\psi\sin\phi}{\cos\lambda\cos\psi\sin\phi}.$

Beyde Werthe von u gleich gesetzt geben

$(\sin\psi + \sin\lambda - \sin\psi\cos\lambda^2 + \cos\psi\cos\phi\sin\lambda\cos\lambda)t = r\sin\lambda\sin\phi\cos\psi$

oder $(1 + \sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda)t = r\sin\phi\cos\psi.$

Also wird $t = \dfrac{r\sin\phi\cos\psi}{1 + \sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda}$

und $u = \dfrac{(\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda)r}{1 + \sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda}.$

Nun war im 23 §. $\sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda = \cos ZL$, und $\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda = \dfrac{\cos\psi\sin\phi}{\operatorname{tang} pZL}$, also wird $t = \dfrac{r\sin\phi\cos\psi}{1+\cos ZL}$ und $u = \dfrac{\cos\psi\sin\phi}{\operatorname{tang} pZL\,(1 + \cos ZL)}.$ Weil überdem $1 + \cos ZL = \dfrac{\sin ZL}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}ZL}$, und $\cos\psi\sin\phi = \sin ZL\cos VZL = \sin ZL\sin pZL$, so wird $t = r\operatorname{tang}\frac{1}{2}ZL\sin pZL = r\operatorname{tang}\frac{1}{2}ZL\cos VZL$, und

$$u = \frac{r\operatorname{tang}\frac{1}{2}ZL\sin pZL}{\operatorname{tang} pZL} = r\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}ZL\cos pZL = r\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}ZL\sin VZL.$$

Eben diese Ausdrücke sind im 23 §. gefunden worden, wo auch t und u aus eben denselben Datis gesucht wurde. Uebrigens ist die Auflösung der Aufgabe des 19 §. ein besondrer Fall von der gegenwärtigen, und wenn man in den Formuln, die hier erwiesen sind, $\lambda = 0$, $\phi = 90^\circ - \gamma$ setzt, so ergeben sich alle die Formuln des 19 §.

30 §.

Bey eben der Lage des Parallelkreises BLD gegen die Tafel und das Auge, wie im 28 §. die orthographische Projection desselben zu finden.

Aufl. Wenn man in den Formuln des 10 §. für die orthographische Projection, nämlich $x = t\sec\eta + b\sin\eta\cos\eta - u\tan\eta\cot d$, und $y = \frac{u}{\sin d}$, wie hier erfordert wird, $\eta = 0$ und $d = \lambda$ setzt, so wird $x = t$, und $y = \frac{u}{\sin\lambda}$. Nun war die Gleichung des Parallelkreises zwischen x und y diese $xx + yy - 2cy\cos\lambda + cc.\cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2$, also erhält man zwischen t und u diese Gleichung

$$tt + \frac{uu}{\sin\lambda^2} - \frac{2cu\cos\lambda}{\sin\lambda} + cc.\cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2.$$

Da nun überdem $c = \frac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$, so wird

$$tt + \frac{uu}{\sin\lambda^2} - \frac{2r\sin\psi\cos\lambda}{\sin\lambda^2}u + \frac{rr\sin\psi^2\cos\lambda^2}{\sin\lambda^2} = rr\cos\psi^2.$$

Wenn man $t = 0$ setzt, so wird
$uu - 2r\sin\psi\cos\lambda.\, u + rr\sin\psi^2\cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2$ und dieß giebt $u = r\,(\sin\psi\cos\lambda \pm \cos\psi\sin\lambda)$. Also ist einmal $u = r\sin(\psi + \lambda)$, und zweytens auch $u = r\sin(\psi - \lambda)$. Es sey nun $TC = r\sin\psi\cos\lambda$, (10 Fig.) und überdem $Ca = -r\cos\psi\sin\lambda$, $Cb = +r\cos\psi\sin\lambda$, so sind a und b in der Projection. Ferner sey

durch

durch C mit der Fundamentallinie GH die Parallele ef gezogen, welche WK in w schneidet, und man setze WK = Z, so wird WK = Ww — wK oder $u = r\sin\psi \cos\lambda - z$. Dieß in die Gleichung zwischen t und u gesetzt, giebt zwischen C$w = t$, und WK = z. Diese Gleichung

$$tt\sin\lambda^2 + zz - 2rz\sin\psi \cos\lambda + 2rr\sin\psi^2 \cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2 \sin\lambda^2$$
$$+ 2rz\sin\psi \cos\lambda - 2rr\sin\psi^2 \cos\lambda^2$$

oder $zz = rr\cos\psi^2 \sin\lambda^2 - tt\sin\lambda^2$. Demnach ist die Projection eine Ellipse, C ihr Mittelpunct, Ca = Cb = $r\cos\psi \sin\lambda$ ihre conjugirte Axe, und Ce = Cf = $r\cos\psi$ ihre Zwergaxe.

Wenn des Puncts L Stundenwinkel ZpL = ϕ, und also EF = $r\cos\psi \sin\phi$, FL = $\frac{r\sin\psi \cos\lambda}{\sin\lambda} - r\cos\psi \cos\phi$ ist, so erhält man $t = r\cos\psi \sin\phi$, und $u = r\sin\psi \cos\lambda - r\cos\psi \cos\phi \sin\lambda$. Ist nun für die orthographische Projection T$w = t$, $wk = u$, so hat man $\frac{wk}{Tw} = \frac{(\sin\psi \cos\lambda - \cos\psi \cos\phi \sin\lambda)}{\cos\psi \sin\phi} = \frac{WK}{TW}$ (29 §.) wie erfordert wird. Ueberdem ist $\cos\psi \sin\phi = \sin ZL \cos VZL$, und $\sin\psi \cos\lambda - \cos\psi \cos\phi \sin\lambda = \frac{\cos\psi \sin\phi}{\cot VZL}$, also T$w$ = $r\sin ZL \cos VZL$,
$wk = \frac{r\cos\psi \sin\phi}{\cot VZL} = \frac{r\sin ZL \cos VZL}{\cot VZL} = r\sin ZL \sin VZL$, folglich T$k$ = $\sqrt{(Tw^2 + wK^2)} = r\sin ZL$. Aber TK = $\sqrt{(TW^2 + TK^2)}$ = $r\tang\frac{1}{2}ZL$ also TK : Tk = $\tang\frac{1}{2}ZL : \sin ZL$, wie nach dem 15. §. erfordert wird.

31 §.

Unter den Bedingungen des 28 §. (14 Fig.) die Projectionen so vieler Parallelkreise als verlangt wird, z. Ex. von 10 zu 10 Graden, auf der Tafel durch Zeichnung zu finden,

finden, wenn die geographische Breite λ des Orts Z gegeben ist.

Aufl. Es sey z. E. $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, wie im 27 §. Man mache den Bogen $HA = 22\frac{1}{2}°$ und ziehe AG, welche PQ in N schneidet, so gehet die Projection des Aequators durch N. Man nehme auch den Bogen $BL = 22\frac{1}{2}°$, und ziehe GL, welche TP verlängert in M schneidet, halbire MN in c, so ist c der Mittelpunct der Projection des Aequators. Denn es ist $TN = -\tan\frac{1}{2}\lambda$ und $TM = \tan\frac{180°-\lambda}{2} = \tan(90° - \frac{1}{2}\lambda) = \cot\frac{1}{2}\lambda$. Nun ist der Bogen LBA ein Halbkreis. Diesen theile man von 10° zu 10° ein, und zehle die Grade sowohl von L als auch von A aufwärts bis 90°. Hierauf ziehe man die graden Linien G10 und G10 auf beyden Seiten, diese werden PQ in a und b schneiden: da dann ab in e halbirt den Mittelpunct der Projection des Parallelkreises von 10° Breite giebt. Es ist nämlich $Ta = r\tan\frac{1}{2}(-22\frac{1}{2}° + 10°)$ und $Tb = r\tan\frac{1}{2}(180° -)(22\frac{1}{2}° + 10°) = \tan(90° - \frac{22\frac{1}{2}° + 10°}{2}$. Wenn man ferner die Linien G20 und G20, G30, und G30, u. s. f. ziehet, so ergeben sich auf eben die Art die Mittelpunete der Projectionen aller übrigen Parallelkreise auf dieser Seite des Aequators.

Für diejenigen Parallelkreise, die auf der andern Seite des Aequators liegen, wird ψ negativ, und man darf nur den andern Halbkreis AGL auf eben die Art eintheilen, auch mit der übrigen Verzeichnung völlig, wie vorhin verfahren. Wenn $\psi = -\lambda$ ist; so geht die Projection durch D, wenn $TD = -r\tan\frac{1}{2}2\lambda = -r\tan\lambda$ genommen wird, und die Projection selbst ist eine grade Linie mit GH parallel, weil $r\tan(90° - \frac{-\psi+\lambda}{2} = r\tan 90°$ unendlich groß wird.

Die Halbmesser derjenigen Parallelkreise werden hier wiederum sehr groß, die mit dem Ort Z eine entgegengesetzte, sonst aber beynahe gleiche Breite haben. Man findet durch die gelehrte Verzeichnung eigentlich die beyden äußersten Puncte des Durchmessers der gesuchten Kreise, daher ist der eigentlich gesuchte Mittelpunct allemal nur ungefähr halb so weit von T entfernt, als die höchste Spitze des Durchmessers, den die Verzeichnung giebt. Statt dieser bey etwas großen Kreisen ziemlich unbequemen Verzeichnung kann man mit mehr Vortheil den gesuchten Halbmesser, nebst der Puncte *a* Entfernungen, von T berechnen. Da der Halbmesser $= \frac{r\cos\psi}{\sin\psi + \sin\lambda} = \frac{r\cos\psi}{2\sin\frac{1}{2}(\psi+\lambda)\cos\frac{1}{2}(-\lambda)}$, und $Ta = r\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\psi - \lambda)$ ist, so läßt sich die Berechnung vermittelst der Logarithmen leicht bewerkstelligen. Diejenigen Parallelkreise, welche dem Parallelkreis des Auges sehr nahe liegen, lassen sich auch durch Puncte verzeichnen, die man aus den Formuln für *t* und *u* durch Rechnung findet, dafern der Halbmesser so groß seyn sollte, daß die sonst gewöhnliche Verzeichnung des Kreises zu viel Schwierigkeit hätte.

Es sey $r = 10000$, $\lambda = 50°$, $\psi = -20°$, $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, so wird $\cos ZL = \cos\psi \cos\lambda \cos\lambda - \sin\psi \sin\lambda$

$l\cos\psi = 9.9729858$ $\qquad l\sin\psi = 9.5340517$

$l\cos\phi = 9.8080675$ $\qquad l\sin\lambda = 9,5828397$

$l\cos\lambda = 9.9656153$ $\qquad 19.1168914 - 10$

$29.7466686 - 20$

$\cos\psi \cos\phi \cos\lambda = 5580443$

$\sin\psi \sin\lambda = 1308854$

$\cos ZL = 4271589$

Also $ZL = 64° \; 42\frac{3}{4}'$, $\frac{1}{2} ZL = 32° \; 21\frac{3}{8}'$.

$l\cos\psi$

$$l\cos\psi = 9.9729858$$
$$l\sin\phi = 9.8842540$$
$$19.8572398$$
$$l\sin ZL = 9.9562529$$
$$l\cos VZL = 9.9009869$$
$$lr\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}ZL = 13.8017800$$
$$23.7027669 - 20.$$

$$VZL = 37^\circ\ 14\tfrac{1}{4}'$$
$$\sin VZL = 9.7818417$$
$$lr\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}ZL = 13.8017800$$
$$23.5836217 - 20$$

Also $t = 5043,9$

$u = 3833,7$

Nimmt man demnach $t = TW = 5043,9$, und unter der Fundamentallinie $WK = 3833,7$, so ist K in der Projection. Es wird nämlich u negativ, weil $\sin\psi$ also auch $\sin VZL$ $= \dfrac{\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda}{\sin ZL \cos\lambda}$ negativ ist.

32 §.

Es sey der größte Kreis ♈♋♎♑ die Ecliptik, ihre Pole Π und π, der Colur der Nachtgleichen Π♈♎, der Colur der Sonnenstände Π♋π♑, so liegt die Axe des Aequators pq im Colur der Sonnenstände. Nun ist ein Punct Z in der Ecliptik gegeben, und das Auge stehet im Nadir desselben, die Tafel ist ein Breitenkreis $\Pi G\pi H$. Man sucht die Projection der Axe des Aequators Tp.

Aufl. Da hier wiederum $a = o$, und $\delta = r$ ist, so gelten die obigen Formuln nämlich

$$x = \frac{ru\sin\eta\cot d - (b\sin\eta\cos\eta + r)t - rb\sin\eta^2}{t\sin\eta - u\cot d - r\cos\eta}.$$

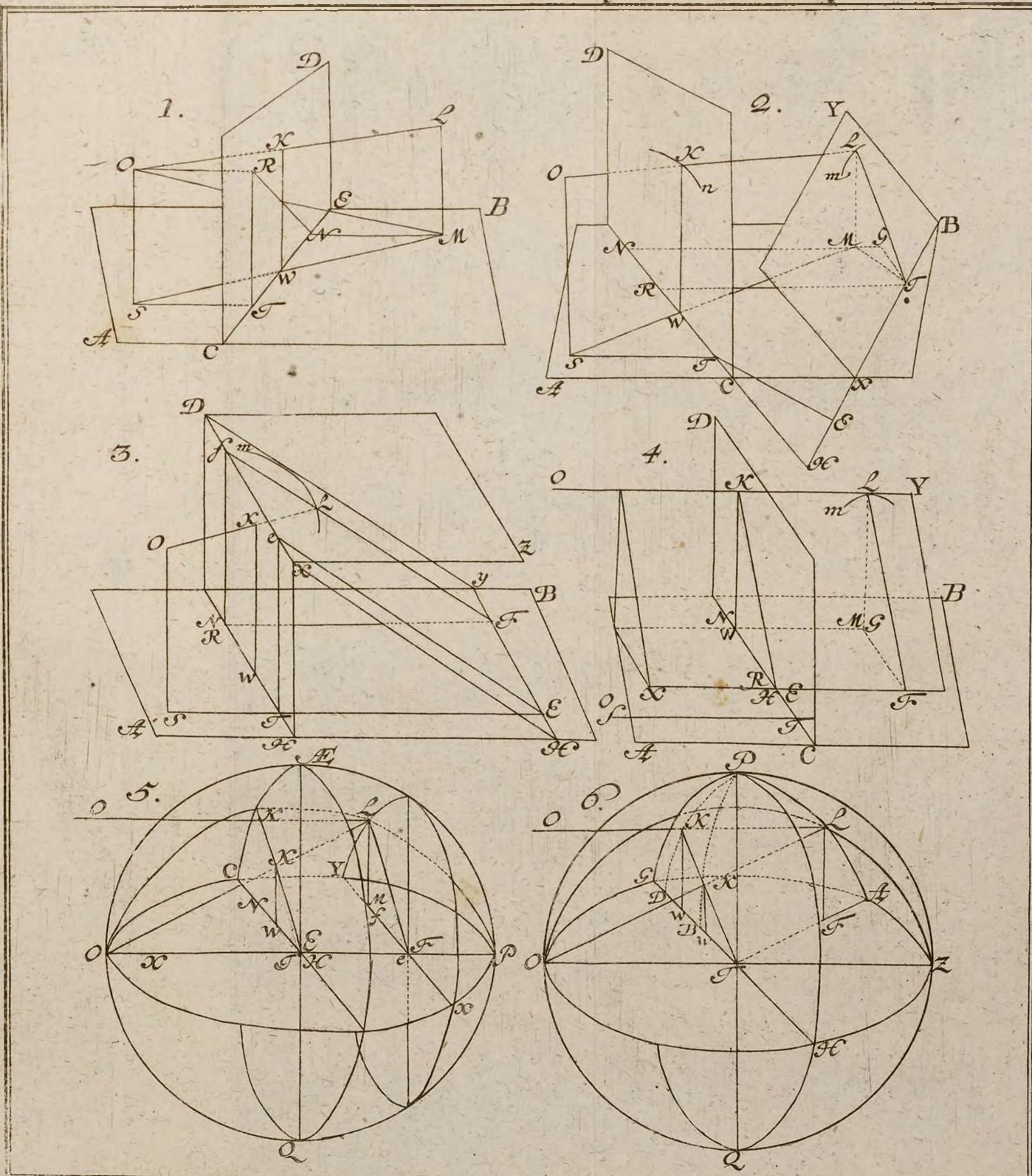
$$y = \frac{(b\sin\eta + r\cos\eta)u}{u\cos d - t\sin\eta\sin d + r\cos\eta\sin d}.$$

Ueberdem ist $b = o$, $d = 90$, also wird $x = \dfrac{rt}{r\cos\eta - t\sin\eta}$, $y = \dfrac{ru\cos\eta}{r\cos\eta - t\sin\eta}$. Hier ist nun der Winkel $GTF = \eta$, wovon der Bogen G♋ das Maas ist. Weil nun der Bogen ♈♋ = 90 = GZ, so ist der Bogen G♋ = VZ = dem Abstand des Puncts Z in der Ecliptik vom Anfangspunct des Widders, und η das, was in der Astronomie die Länge des Puncts Z heißen würde. Nun sey die Schiefe der Ecliptik $p\Pi = \varepsilon$, so ist $TF : Fp = 1 : \cot\varepsilon = x : y$, daher hat man zwischen x und y die Gleichung $\frac{y}{x} = \cot\varepsilon$. Dieß giebt $\frac{u \cos\eta}{t} = \cot\varepsilon$, oder $u = \frac{\cot\varepsilon}{\cos\eta} t$ für die Gleichung der Projection, welches, wie man auch aus andern Gründen weis, eine grade Linie seyn muß. Es wird also $\tan PTW = \frac{u}{t} = \frac{\cot\varepsilon}{\cos\eta}$, oder $\tan \Pi TP = \frac{\cos\eta}{\cot\varepsilon}$.

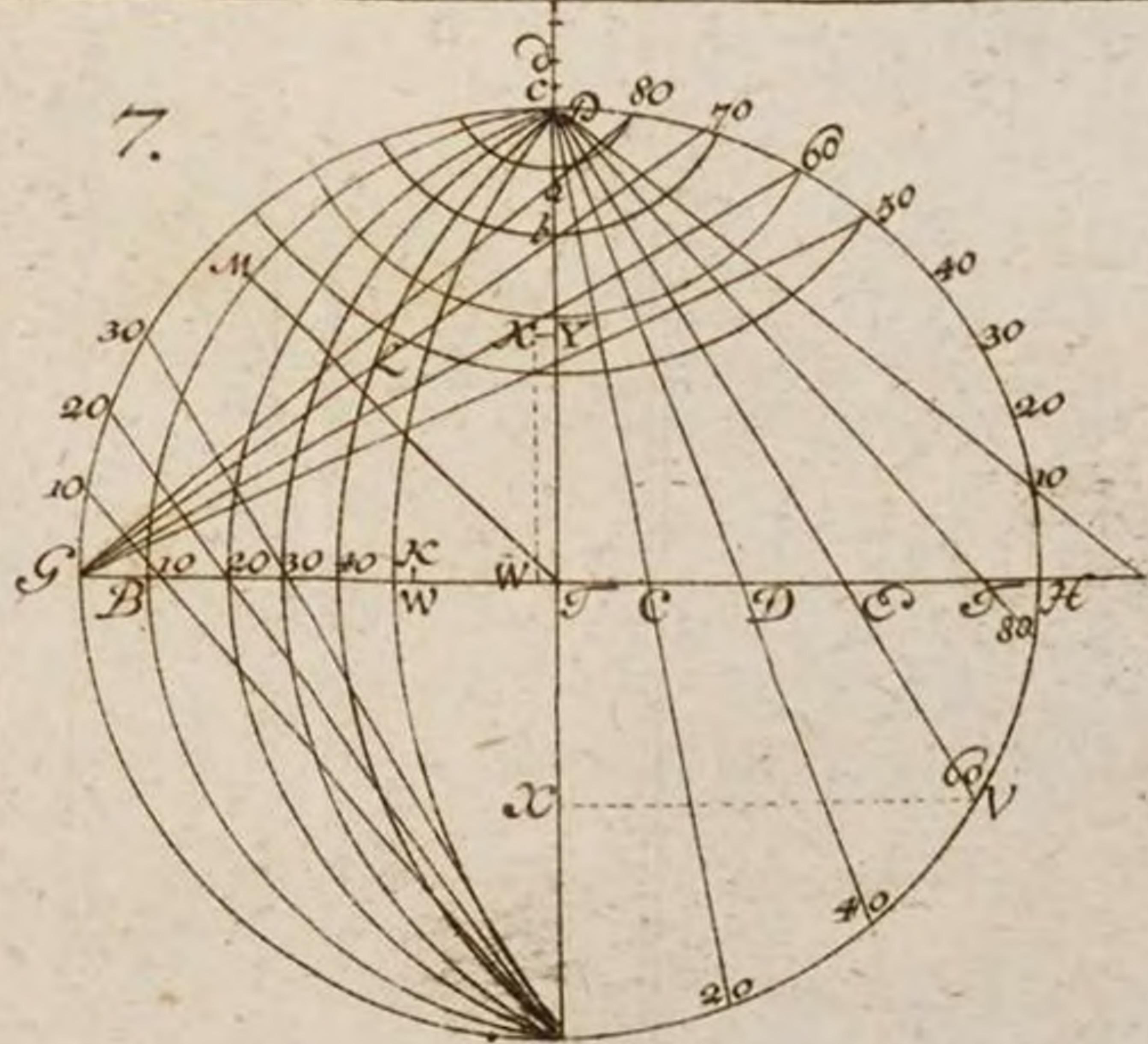
Eben dieß folgt auch aus den Gründen der sphärischen Trigonometrie sehr leicht. Es ist nämlich η = dem sphärischen Winkel $p\Pi E$, der Bogen $\Pi p = \varepsilon$, und $ZpCO$ ein größter Kreis, der auf der Tafel senkrecht steht, so daß der Winkel bey $C = 90°$ ist. Also hat man im sphärischen Dreyeck $p\Pi C$ $\tan \Pi C = \cos\eta . \tan\varepsilon = \frac{\cos\eta}{\cot\varepsilon} = \tan PT\Pi$, wie vorhin. Eben der Bogen ΠC ist das Maas des sphärischen Winkels $pZ\Pi$, und CG das Maas des sphärischen Winkels pZG, d. i. dem Winkel der Ecliptik mit dem Meridian des Orts Z. Also ist $PT\Pi$ so groß, als der Winkel der Ecliptik mit dem Parallelkreis des Aequators. Den Ausdruck $\tan PZG = \tan PTW = \frac{\cot\varepsilon}{\cos\eta}$ giebt auch die Auflösung des sphärischen Dreyecks pZ♋, worinn p♋ $= 90° - \varepsilon$, und ♋$Z = 90° - \eta$ ist.

Ich habe diese Aufgabe deswegen beygefügt, um zu zeigen, wie die ganze Verzeichnung von der Projection der Erdkugel, der man sich bey den Sonnenfinsternissen, nach der vom Herrn Lambert beschriebenen, und oben angeführten Methode, mit Vortheil bedienen kann, aus den allgemeinen Formuln fließt.

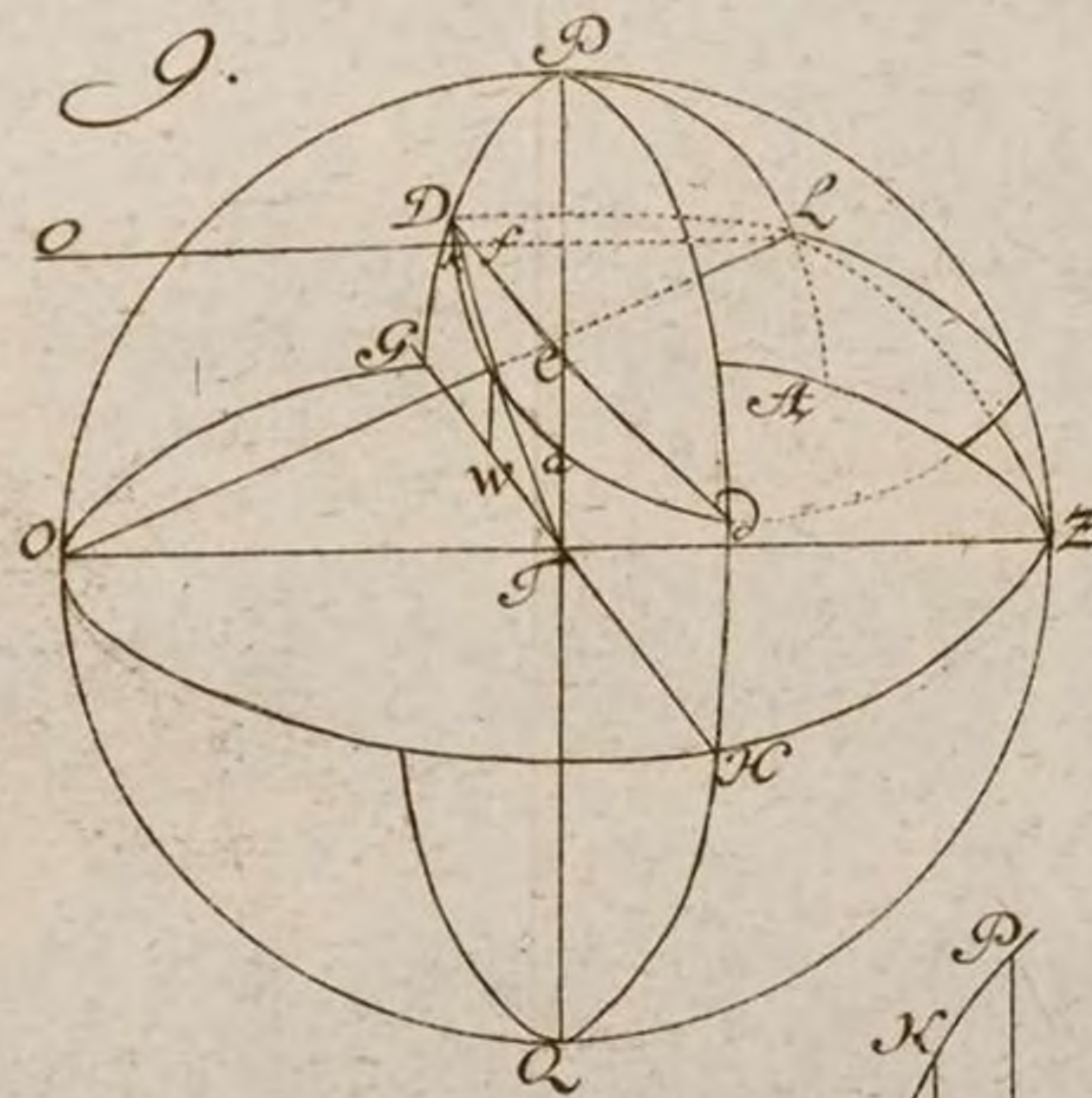
Johann


1.
2.
3.
4.
5.
6.

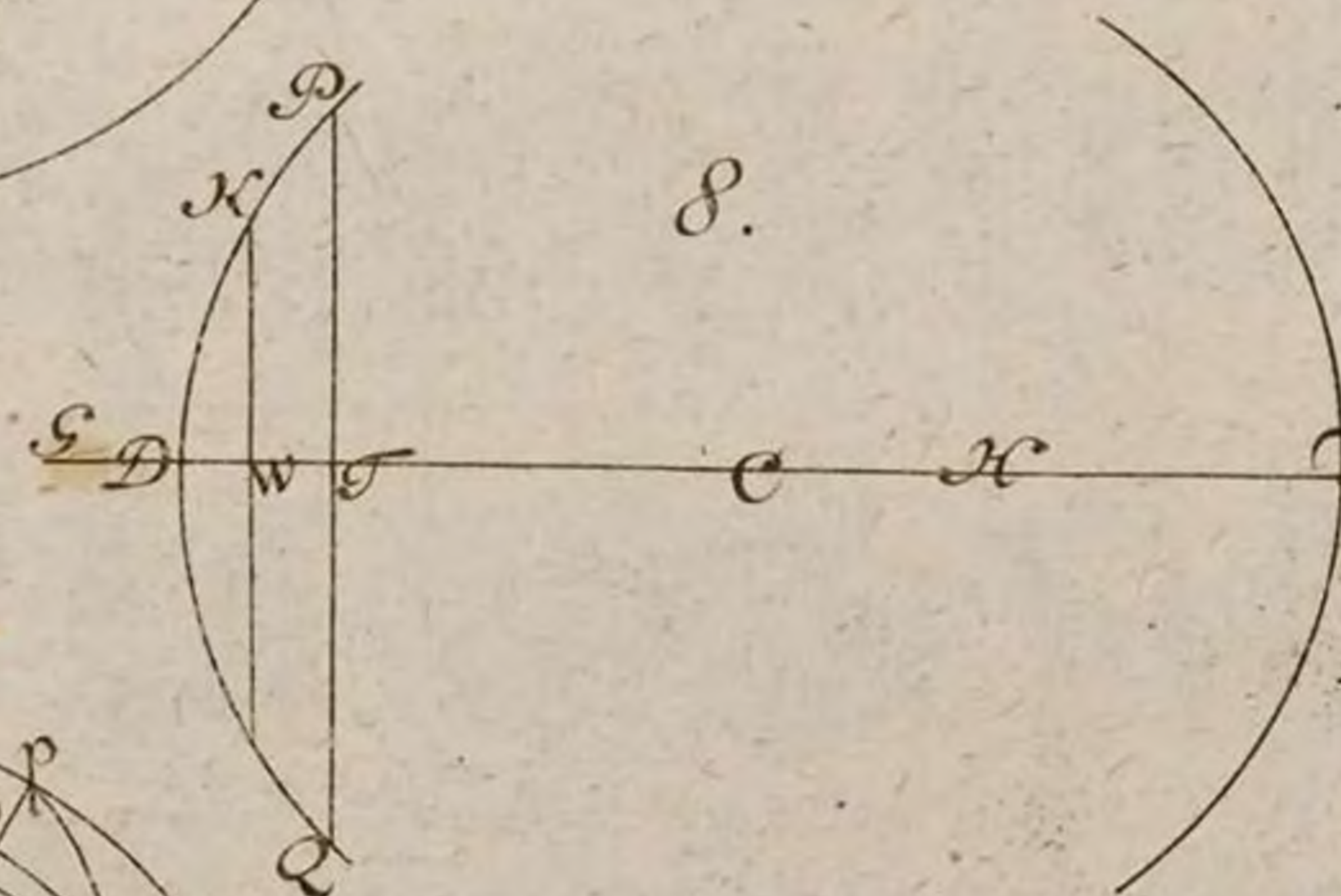
7.



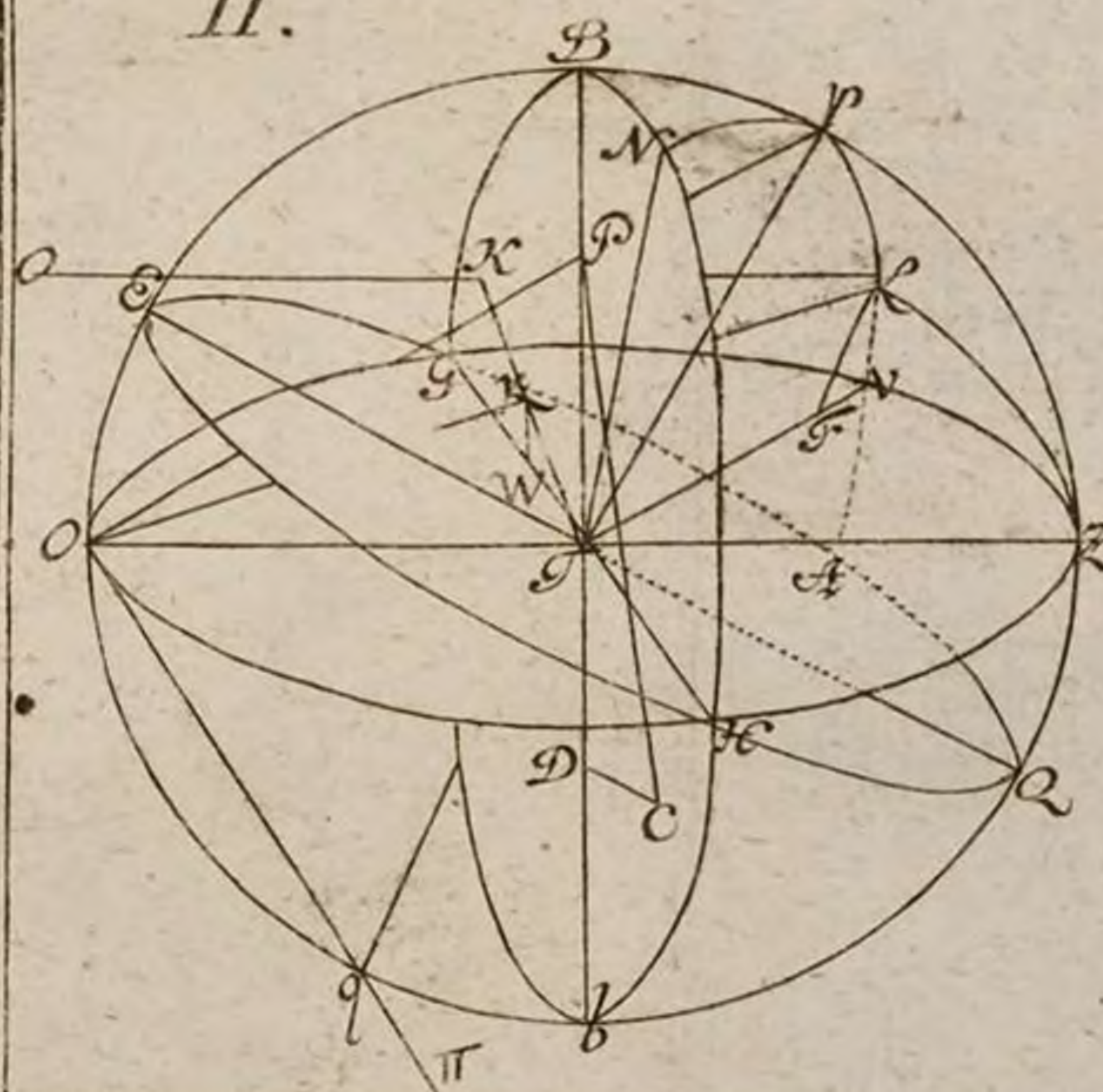
9.



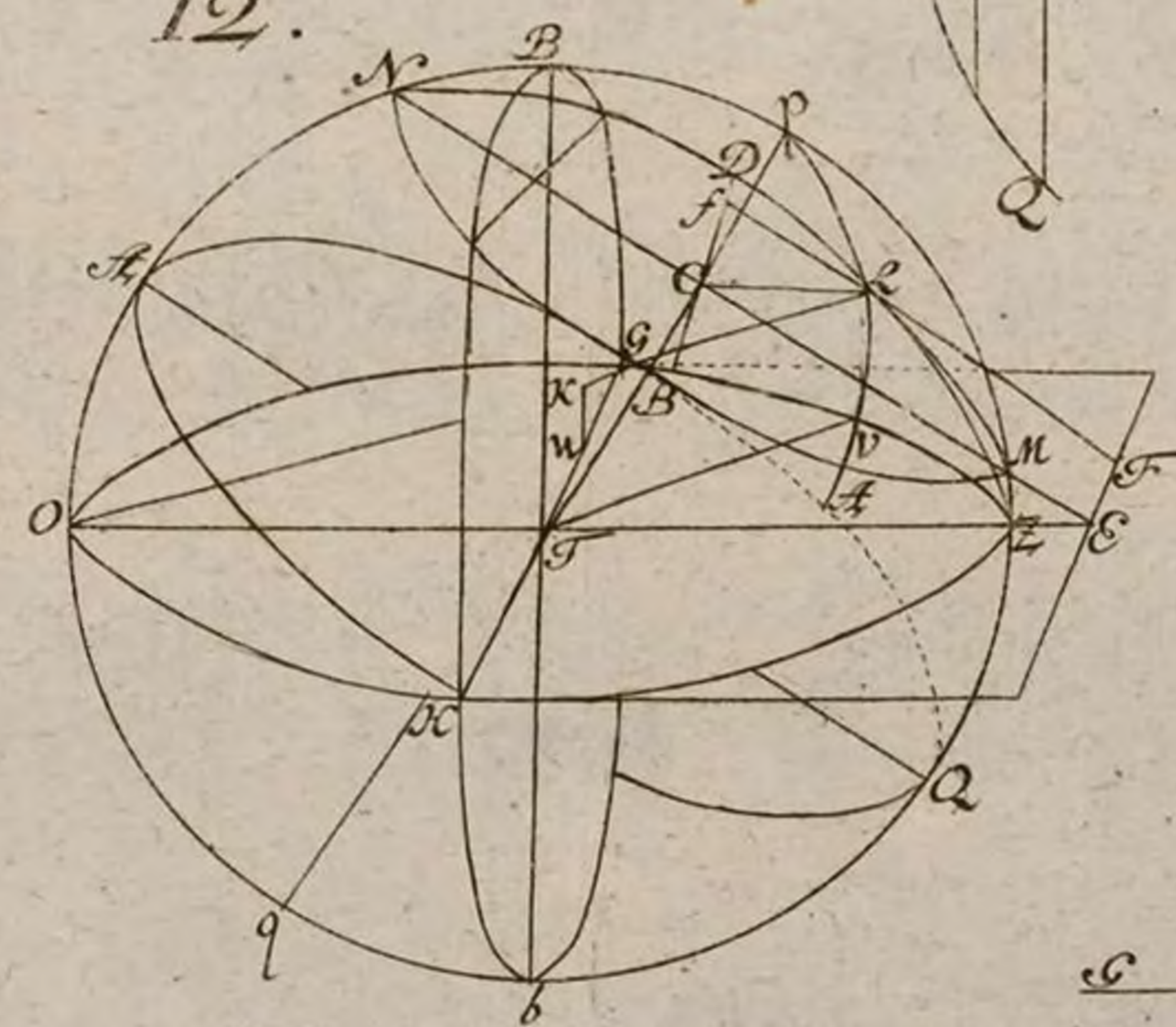
8.



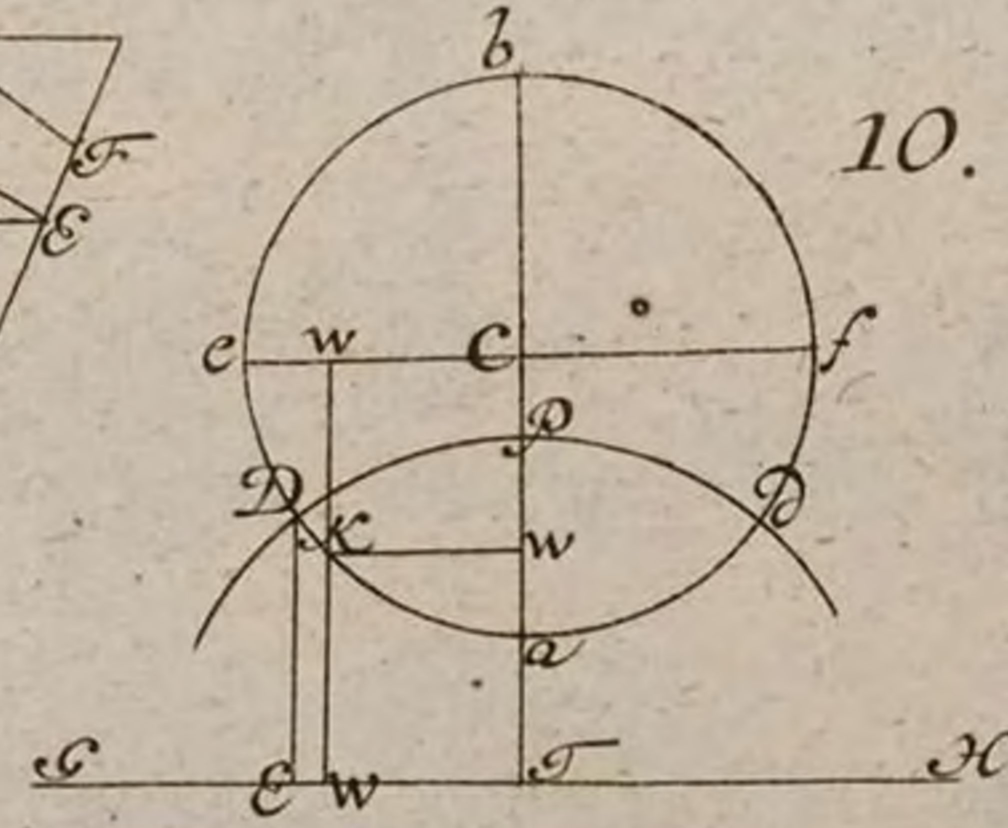
11.

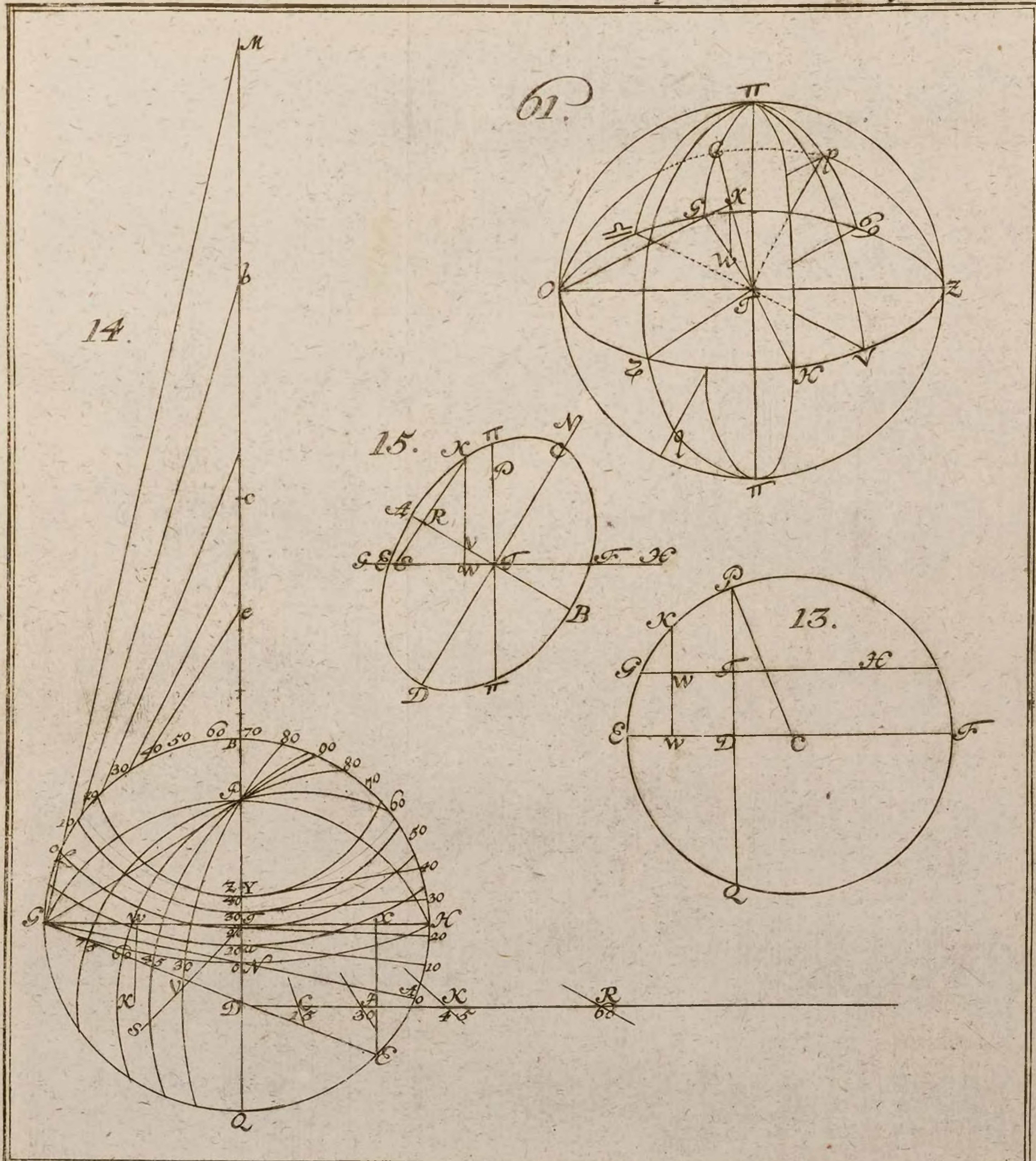


12.



10.





14.
15.
13.
61.