

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIII. Jahrgang 1903.

München.

Verlag der K. Akademie.

1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes.

I. Abhandlung.

Von **A. Korn.**

(Eingelaufen 4. Juli.)

Einige Schwierigkeiten, welche der Allgemeingiltigkeit der Newtonschen Form:

$$K = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

des Gravitationsgesetzes entgegenstehen, lassen sich heben, wenn man das Gesetz in der Form:

$$K = G \frac{m_1 m_2}{r^2} e^{-\mu r}$$

oder in der Form:

$$K = - G \cdot m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} \right)$$

annimmt, entsprechend einer Art von Absorption in dem die Gravitation vermittelnden Zwischenmedium. Diese Fragen sind in neuester Zeit von H. v. Seeliger angeregt und diskutiert worden.¹⁾

Die folgenden Untersuchungen sollen zeigen, dass auch in der von mir aufgestellten Gravitationstheorie, welche auf der

¹⁾ H. Seeliger, Astr. Nachr. 137, p. 129, 1895; Münch. Ber. 26, p. 373, 1896.

C. Neumann, Allg. Unters. über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen, Leipzig 1896.

Theorie der universellen Schwingungen¹⁾ beruht, eine solche Erweiterung des Gravitationsgesetzes leicht zu begründen ist und zu einem mathematisch höchst interessanten Problem führt, welches ich als das Problem der universellen Schwingungen bei absorbierendem Zwischenmedium bezeichnen will.

Bei dem einfachen Problem der universellen Schwingungen handelt es sich um die Auffindung der Eigenschwingungen eines aus schwach kompressibeln Teilchen und einem idealen, inkompressibeln Zwischenmedium zusammengesetzten Systems. In den Gleichungen:

$$1) \quad \begin{cases} u = U \sin \frac{t}{T} 2 \pi \\ v = V \sin \frac{t}{T} 2 \pi \\ w = W \sin \frac{t}{T} 2 \pi \end{cases}$$

für die Schwingungsgeschwindigkeiten des Systems müssen U, V, W Ableitungen eines Geschwindigkeitspotentials Φ sein:

$$2) \quad \begin{cases} U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ W = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{cases}$$

das im Innern der Teilchen der Gleichung:

$$3^a) \quad \Delta \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

in dem Zwischenmedium der Gleichung:

$$3^b) \quad \Delta \Phi = 0$$

¹⁾ A. Korn, Les vibrations universelles de la matière. Ann. de l'Ec. Norm. 20, 1903.

genügt, wobei k^2 mit der gesuchten Schwingungsdauer T durch die Relation

$$4) \quad k^2 = 4 \pi^2 \frac{\alpha^2}{T^2}$$

verbunden ist (α^2 eine der Kompressibilität der Teilchen zugehörige Konstante).

Φ muss mit seinen ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutig und stetig sein und im Unendlichen verschwinden.

Wenn wir nun eine Absorption des Zwischenmediums in dem in den einleitenden Sätzen angedeuteten Sinne voraussetzen, so ändert sich bei der Stellung des Problems nur die Gleichung 3^b); dieselbe ist, wenn μ eine der Absorptionsfähigkeit des Zwischenmediums entsprechende Konstante ist, durch die folgende Gleichung zu ersetzen:

$$5) \quad \Delta \Phi - \mu^2 \Phi = 0.$$

Indem wir die Gleichung 3) durch die Gleichung 5) ersetzen, geht das Problem der universellen Schwingungen in das allgemeinere Problem „der universellen Schwingungen bei absorbierendem Zwischenmedium“ über.

Ähnlich, wie dies für das einfache Problem möglich war,¹⁾ werden wir auch für dieses allgemeinere Problem den Beweis erbringen, dass stets eine unendliche Reihe positiver, unbegrenzt wachsender Zahlen

$$k_0^2, k_1^2, k_2^2 \dots k_j^2 \dots$$

und entsprechender Funktionen

$$\Phi_0'', \Phi_1'', \Phi_2'' \dots \Phi_j'' \dots$$

existieren, welche als Lösungen des Problem es zu betrachten sind.

Der Grundschwingung k_0^2, Φ_0 , d. h. der Schwingung mit kleinstem k_0^2 entsprechen Pulsationen der einzelnen Teilchen,

¹⁾ A. Korn, le problème mathématique des vibrations universelles; Commun. de la Soc. Math. de Kharkow 1903. Wir bedienen uns auch hier einer von H. Poincaré gegebenen Methode (Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo 1894).

in ihr haben wir die Ursache der Gravitation zu erblicken. Während sich für $\mu = 0$ für die Wechselwirkung zweier Teilchen infolge dieser Grundschrwingung das Gravitationsgesetz in der Newtonschen Form ergibt, folgt bei von null verschiedenem μ für die Wechselwirkung ein verallgemeinertes Gravitationsgesetz, das wir als das Schlussresultat dieser Untersuchungen aussprechen werden.

I. Abschnitt.

Über die universellen Funktionen bei absorbierendem Zwischenmedium.

§ 1.

Wir stellen uns das folgende sehr allgemeine Problem:

Es sei f eine mit ihren ersten Ableitungen in dem Innenraum i einer stetig gekrümmten, geschlossenen Oberfläche ω (die sich auch aus mehreren getrennten Teilen zusammensetzen kann) eindeutige und stetige Funktion.

Wir suchen eine mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutige und stetige Funktion U , die im Unendlichen verschwindet und den Bedingungen genügt:

$$6^a) \quad \Delta U + k^2 U = f, \quad \text{im Innenraume,}^1)$$

$$6^b) \quad \Delta U - \mu^2 U = 0, \quad \text{im Aussenraume,}$$

wenn k^2 und μ^2 gegebene positive Zahlen vorstellen.

¹⁾ Die Untersuchung ist leicht auf den Fall anwendbar, dass 6^{a)} allgemeiner so lautet:

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f$$

und φ^2 eine überall von null verschiedene, im übrigen beliebige mit ihren ersten Ableitungen im Innenraume eindeutige und stetige Funktion darstellt.

Wir bilden successive die Funktionen:

$$7) \left\{ \begin{aligned} u_0(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi} \int_i f(\xi, \eta, \zeta) \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \\ u_j(x, y, z) &= +\frac{1}{4\pi} \int_i u_{j-1}(\xi, \eta, \zeta) \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \quad (j=1, 2, 3 \dots), \end{aligned} \right.$$

indem wir unter r die Entfernung von (x, y, z) nach einem Elemente $d\tau$ (ξ, η, ζ) verstehen.

Alle diese Funktionen sind mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutig und stetig und verschwinden im Unendlichen; sie genügen ferner den Gleichungen:

$$8^a) \left\{ \begin{aligned} \Delta u_0 &= \mu^2 u_0 + f, \\ \Delta u_j &= \mu^2 u_j - u_{j-1}, \\ &(j=1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \right\} \text{ im Innenraume,}$$

$$8^b) \left\{ \begin{aligned} \Delta u_0 &= \mu^2 u_0, \\ \Delta u_j &= \mu^2 u_j, \\ &(j=1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \right\} \text{ im Aussenraume.}$$

Die Funktion:

$$u_0 + \kappa u_1 + \kappa^2 u_2 + \dots$$

$$(\kappa = \mu^2 + k^2)$$

wird somit eine Lösung der gestellten Aufgabe sein, wenn wir beweisen können, dass diese Reihe eine mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutige und stetige Funktion darstellt.

Diese Konvergenzbetrachtungen werden uns im besonderen auch zur Lösung des in der Einleitung gestellten Problems führen.

§ 2.

Wir bilden successive die Funktionen:

$$9) \quad \begin{cases} w_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_i [a_0 f - a_1 u_0 - a_2 u_1 - \dots - a_p u_{p-1}] \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \\ w_j = +\frac{1}{4\pi} \int_i w_{j-1} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3 \dots)$$

wobei wir unter p eine endliche, ganze Zahl, unter $a_0 a_1 a_2 \dots a_p$ p Konstanten verstehen wollen, die der Gleichung:

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2 = 1$$

genügen, und über die wir uns noch weitere Bestimmungen vorbehalten.

Wir wollen zeigen, dass $a_0 a_1 \dots a_p$ bei genügend gross gewähltem p stets so bestimmt werden können, dass

$$10) \quad \text{abs. } (\kappa^j \cdot w_j) < A \cdot L^j \quad \left(\begin{array}{l} A \text{ endliche Konstante,} \\ L \text{ echter Bruch} \end{array} \right)$$

wenn κ eine beliebig grosse, aber von vornherein fest gegebene positive Zahl vorstellt. Die Funktion

$$11) \quad w = w_0 + \kappa w_1 + \kappa^2 w_2 + \dots$$

wird dann die Lösung des Problems:

$$12) \quad \begin{cases} \Delta w + k^{2*}) w = a_0 f - a_1 u_0 - a_2 u_1 - \dots - a_p u_{p-1} & \text{im Innenraume,} \\ \Delta w - \mu^2 w = 0 & \text{im Aussenraume} \end{cases}$$

darstellen.

Zum Beweise suchen wir eine obere Grenze für den Quotienten:

$$\frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_i w_{m-1}^2 d\tau},$$

*) $k^2 = \kappa - \mu^2$.

wobei wir vorläufig unter m eine von vornherein beliebig gross, aber fest gegebene endliche Zahl verstehen wollen.

Es ist:

$$\begin{aligned} \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau &= - \int_{i+a} w_m \Delta w_m d\tau, \\ &= - \int_i w_m \Delta w_m d\tau - \int_a \mu^2 w_m^2 d\tau \end{aligned}$$

oder:

$$\int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau + \int_a \mu^2 w_m^2 d\tau = - \int_i w_m \Delta w_m d\tau.$$

Hieraus folgt (nach der bekannten Ungleichung

$$\begin{aligned} \left[\int_i X \cdot Y d\tau \right]^2 &\leq \int_i X^2 d\tau \cdot \int_i Y^2 d\tau): \\ \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ + \int_a \mu^2 w_m^2 d\tau &\leq \sqrt{\int_i w_m^2 d\tau \int_i w_{m-1}^2 d\tau} \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} &\frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_i w_{m-1}^2 d\tau} \\ 13) \quad &\leq \left[\frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau + \int_{i+a} \mu^2 w_m^2 d\tau} \right]^2. \end{aligned}$$

Nun kann man nach einem bekannten Satze von Poincaré¹⁾ bei genügend grossem p die Konstanten $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ stets so wählen, dass

¹⁾ H. Poincaré, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo 1894, A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie, Berlin 1901—1902, Abh. 4 S. 6 und 7.

$$\frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_i \left\{ \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau} < \frac{a^2}{V p^2}$$

(a^2 eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Konstante), und um so mehr:

$$\frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau + \int_{i+a} \mu^2 w_m^2 d\tau} < \frac{a^2}{V p^2},$$

da

$$w_m = \alpha_0 u_{m-1} + \alpha_1 u_m + \alpha_2 u_{m+1} + \dots + \alpha_p u_{m+p-1},$$

unter der Voraussetzung, dass $u_{m-1} u_m \dots u_{m+p-1}$ linear unabhängig¹⁾ sind.

Man kann somit unter der Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der Funktionsreihe:

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \dots$$

stets

$$14) \quad \frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_i w_{m-1}^2 d\tau} < \frac{a^4}{V p^4},$$

machen, für ein beliebig grosses, aber fest gegebenes m , indem man $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ geeignete Werte $\alpha_0^{(m)} \alpha_1^{(m)} \alpha_2^{(m)} \dots \alpha_p^{(m)}$ erteilt.

Da:

$$\begin{aligned} \int_i w_{m-1}^2 d\tau &= - \int_i w_{m-1} A w_m d\tau + \mu^2 \int_i w_{m-1} w_m d\tau, \\ &= - \int_i w_m A w_{m-1} d\tau + \mu^2 \int_i w_{m-1} w_m d\tau, \\ &= \int_i w_m w_{m-2} d\tau, \end{aligned}$$

so folgt:

¹⁾ D. h. unter der Voraussetzung, dass sich nicht Konstanten $\beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_p$ so finden lassen, dass:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_p^2 = 1$$

und:

$$\beta_0 u_{m-1} + \beta_1 u_m + \beta_2 u_{m+1} + \dots + \beta_p u_{m+p-1} \equiv 0.$$

$$\left[\int_i w_{m-1}^2 d\tau \right]^2 < \int_i w_m^2 d\tau \int_i w_{m-2}^2 d\tau,$$

oder:

$$15) \quad \frac{\int_i w_{m-1}^2 d\tau}{\int_i w_{m-2}^2 d\tau} < \frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_i w_{m-1}^2 d\tau} \quad (m = 1, *) 2, 3 \dots)$$

und in derselben Weise successive:

$$16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\int_i w_0^2 d\tau}{\int_i \{ \alpha_0 f - \alpha_1 u_0 - \alpha_2 u_1 - \dots - \alpha_p u_{p-1} \}^2 d\tau} < \frac{\int_i w_1^2 d\tau}{\int_i w_0^2 d\tau} < \dots \\ < \frac{\int_i w_{m-1}^2 d\tau}{\int_i w_{m-2}^2 d\tau} < \frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_i w_{m-1}^2 d\tau} < \frac{a^4}{\sqrt[3]{p^4}}. \end{array} \right.$$

Dieses Resultat, das für endliche m abgeleitet ist, lässt sich auch für unendlich wachsende m beweisen: Man denke sich $\alpha_0^{(m)} \alpha_1^{(m)} \dots \alpha_p^{(m)}$ als Koordinaten eines Punktes der Kugel:

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1$$

in einem $(p+1)$ dimensionalen Raume, es wird dann (16) für ein gewisses Gebiet δ_m dieser Kugel erfüllt sein. Wir können nun durch geeignete Wahl der Werte

$$\alpha_0^{(m+1)} \alpha_1^{(m+1)} \dots \alpha_p^{(m+1)}$$

die Ungleichungen:

$$17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\int_i w_0^2 d\tau}{\int_i \{ \alpha_0 f - \alpha_1 u_0 - \alpha_2 u_1 - \dots - \alpha_p u_{p-1} \}^2 d\tau} < \frac{\int_i w_1^2 d\tau}{\int_i w_0^2 d\tau} < \dots \\ < \frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_i w_{m-1}^2 d\tau} < \frac{\int_i w_{m+1}^2 d\tau}{\int_i w_m^2 d\tau} < \frac{a^4}{\sqrt[3]{p^4}} \end{array} \right.$$

*) Für $m = 1$ ist

$$-w_{m-2} = \alpha_0 f - \alpha_1 u_0 - \alpha_2 u_1 - \dots - \alpha_p u_{p-1}$$

zu setzen.

erreichen; die Punkte $\alpha_0^{(m+1)} \alpha_1^{(m+1)} \dots \alpha_p^{(m+1)}$, welche dieser Bedingung 17) genügen, werden einem Gebiete δ_{m+1} angehören, das ganz in δ_m enthalten ist, da 16) eine Folge von 17) ist. Wenn man in dieser Weise fortgeht, wird man finden, dass das folgende Gebiet δ_{m+2} ganz in δ_{m+1} enthalten ist, δ_{m+3} in δ_{m+2} u. s. w.; daraus folgt die Existenz von Werten

$$\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \dots \alpha_p,$$

für welche die Ungleichungen:

$$18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\int_i w_0^2 d\tau}{\int_i \{\alpha_0 f - \alpha_1 u_0 - \alpha_2 u_1 - \dots - \alpha_p u_{p-1}\}^2 d\tau} < \frac{\int_i w_1^2 d\tau}{\int_i w_0^2 d\tau} < \dots \\ < \frac{\int_i w_2^2 d\tau}{\int_i w_1^2 d\tau} < \text{in inf.} < \frac{a^4}{V p^4} \end{array} \right.$$

bestehen.

Setzt man:

$$19) \quad L_p = \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}},$$

so kann man nach 18) folgern:

$$\int_i w_j^2 d\tau < B \cdot L_p^{2j}, \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

(B endliche Konstante), und da:

$$w_j = \frac{1}{4\pi} \int_i w_{j-1} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

$$w_j^2 < \frac{1}{16\pi^2} \int_i w_{j-1}^2 d\tau \int_i \frac{e^{-2\mu r}}{r^2} d\tau,$$

auch:

$$20) \quad \text{abs. } w_j < A \cdot L_p^j, \quad (j = 1, 2, 3 \dots),$$

wenn A wieder eine endliche Konstante vorstellt. Indem wir bei gegebenem $\varkappa$ die Zahl p genügend gross wählen, können wir stets erreichen, dass $\varkappa L_p$ kleiner wird als ein echter Bruch L , und dann wird:

$$21) \quad \text{abs. } (\kappa^j w_j) \leq A \cdot L^j; \quad (0 < L < 1)$$

die Funktion 11) löst somit das Problem 12) bei geeignet gewählten $a_0 a_1 \dots a_p$ unter Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der Funktionsreihe:

$$u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \dots$$

§ 3.

Die $p + 1$ linearen Gleichungen:

$$22) \quad \begin{cases} a_0 U + a_1 U' + a_2 U'' + \dots + a_p U^{(p)} = w, \\ U - \kappa U' = u_0 \\ U' - \kappa U'' = u_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ U^{(p-1)} - \kappa U^{(p)} = u_{p-1} \end{cases}$$

definieren für den Fall des Nicht-Verschwindens der Determinante:

$$23) \quad D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ 1 & -\kappa & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\kappa & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\kappa \end{vmatrix}$$

$p + 1$ Funktionen

$$U \ U' \ U'' \dots U^{(p)};$$

die erste derselben löst das Problem 6^a), 6^b), wie wir leicht zeigen können: Wir schreiben die zweite bis $(p + 1)^{\text{te}}$ Gleichung 22) in der Form:

$$24) \quad U^{(j-1)} - \kappa U^{(j)} - u_{j-1} = 0, \quad (j = 1, *) \ 2 \dots p)$$

und folgern hieraus durch die Operation Δ im Innenraume:

$$25) \quad \Delta U^{(j-1)} - \kappa \Delta U^{(j)} + u_{j-2} - \mu^2 u_{j-1}, \quad (j = 1, **) \ 2 \dots p).$$

*) $U^{(j-1)}$ steht im Falle $j = 1$ für U .

**) u_{j-2} steht im Falle $j = 1$ für $(-f)$.

ist, ergibt sich daraus, dass sich U linear aus den $w, u_0, u_1 \dots u_{p-1}$ zusammensetzt, die alle diese Eigenschaften besitzen.

Die Formel:

$$27) \quad U = \frac{P}{D},$$

in der:

$$28) \quad P = \begin{vmatrix} w & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & a_p \\ u_0 & -\kappa & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -\kappa & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -\kappa \end{vmatrix}$$

und D durch 23) gegeben ist, stellt daher die Lösung unseres allgemeinen Problems 6^a), 6^b) dar, unter den beiden Voraussetzungen, dass κ nicht grade eine Lösung der algebraischen Gleichung

$$D = 0$$

ist und dass keine lineare Abhängigkeit zwischen den Funktionen der Reihe:

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \dots$$

besteht.

Diese beiden Fälle haben wir noch zu diskutieren.

§ 4.

Zur Untersuchung des ersteren Falles wollen wir κ nicht mehr, wie bisher, als eine bestimmte fest gegebene Zahl, sondern als eine Variable unterhalb dieser festen Zahl auffassen. Die Funktion P und ihre ersten Ableitungen nach x, y, z sind bei einem beliebigen Werte von κ stetig, aber die Lösung

$$U = \frac{P}{D}$$

wird unendlich wachsen, wenn κ sich einer Wurzel der Gleichung

$$D = 0$$

unendlich nähert und nicht etwa gleichzeitig auch P zu null konvergiert.

Was geschieht nun mit P , wenn κ sich einer der Wurzeln⁴⁾

$$\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_p$$

der Gleichung

$$D = 0$$

unendlich nähert? Es folgt aus 28):

$$\Delta P = \begin{vmatrix} \Delta w & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & a_p \\ \Delta u_0 & -\kappa & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Delta u_1 & 1 & -\kappa & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \Delta u_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -\kappa \end{vmatrix},$$

somit

$$29^a) \quad \Delta P - \mu^2 P = 0, \quad \text{im Aussenraume,}$$

und:

$$\Delta P + k^2 P$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_0 f - \alpha_1 u_0 - \alpha_2 u_1 - \dots - \alpha_p u_{p-1} & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & a_p \\ f + \kappa u_0 & -\kappa & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -u_0 + \kappa u_1 & 1 & -\kappa & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ -u_{p-2} + \kappa u_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -\kappa \end{vmatrix}$$

oder:

$$29^b) \quad \Delta P + k^2 P = f \cdot D, \quad \text{im Innenraume.}$$

Lassen wir κ in eine der Wurzeln $\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_p$ der Gleichung $D = 0$ übergehen, so wird:

$$30) \quad \begin{cases} \Delta P - \mu^2 P = 0 & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta P + k^2 P = 0 & \text{im Innenraume.} \end{cases}$$

P bleibt dabei nach wie vor mit seinen ersten Ableitungen nach x, y, z im ganzen Raume eindeutig und stetig und verschwindet im Unendlichen.

⁴⁾ Es kommen dabei nur reelle, positive Wurzeln in betracht.

Definition. Wir sagen, eine mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutige und stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion Φ_j^μ ist eine der Oberfläche eines oder mehreren Teilchen entsprechende universelle Funktion bei absorbierendem Zwischenmedium, wenn Φ_j^μ die Bedingungen erfüllt:

$$31) \quad \begin{cases} \Delta \Phi_j^\mu - \mu^2 \Phi_j^\mu = 0 & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta \Phi_j^\mu + k_j^2 \Phi_j^\mu = 0 & \text{im Innenraume;} \end{cases}$$

k_j^2 bezeichnen wir als die der universellen Funktion Φ_j^μ zugehörige Zahl.

Wir können, wenn wir noch die Festsetzung:

$$32)^1) \quad \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau + \mu^2 \int_a (\Phi_j^\mu)^2 d\tau = 1$$

hinzufügen,²⁾ folgendes aussagen:

Für $\kappa = \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_p$ wird P entweder identisch null oder eine universelle Funktion Φ_j^μ , multipliziert mit einer von null verschiedenen Konstanten.

Die Wurzeln κ_j , denen universelle Funktionen Φ_j^μ entsprechen, können nicht Doppelwurzeln der Gleichung $D = 0$ sein. Für eine solche wäre:

$$\frac{dD}{d\kappa} = 0,$$

somit nach 30):

1) Oder, was dasselbe ist:

$$32') \quad k_j^2 \int_i (\Phi_j^\mu)^2 d\tau = 1.$$

2) Auch für die einfachen universellen Funktionen erweist sich diese Festsetzung mit Rücksicht auf die physikalischen Anwendungen am zweckmässigsten; ich möchte daher die 2. Gleichung 61) meiner p. 385 zitierten Arbeit durch die Gleichung:

$$\int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau = 1$$

ersetzen, entsprechend der Definition in den Comptes rendus 136, p. 31, 1903.

$$\left. \begin{aligned} k_j^2 P_j &= -\Delta P_j, \\ \Delta \left(\frac{dP_j}{d\kappa} \right) &= -k_j^2 \frac{dP_j}{d\kappa} - P_j, \end{aligned} \right\} \text{ im Innenraume;}$$

multipliziert man diese beiden Gleichungen und integriert über i , so folgt mit Rücksicht auf:

$$\begin{aligned} \int_i [P_j \Delta \left(\frac{dP_j}{d\kappa} \right) - \frac{dP_j}{d\kappa} \Delta P_j] d\tau &= - \int_a [P_j \Delta \frac{dP_j}{d\kappa} - \frac{dP_j}{d\kappa} \Delta P_j] d\tau, \\ &= - \int_a [P_j \cdot \mu^2 \frac{dP_j}{d\kappa} - \frac{dP_j}{d\kappa} \cdot \mu^2 P_j] d\tau, \\ &= 0, \end{aligned}$$

dass:

$$\int_i P_j \Delta P_j d\tau = 0,$$

oder:

$$\int_i P_j^2 d\tau = 0,$$

d. h.

$$P_j \equiv 0,$$

womit die Behauptung erwiesen ist, dass einer Doppelwurzel κ_j keine universelle Funktion Φ_j'' entspricht.

Es ist ferner leicht zu sehen, dass die Wurzeln κ_j der Gleichung $D = 0$, denen identisch verschwindende P_j entsprechen, nicht Pole für die Lösung:

$$U = \frac{P}{D}$$

sein können, da in diesem Falle — wenn das betreffende κ_j eine m fache Wurzel der Gleichung $D = 0$ ist ($m = 1, 2 \dots p$):

$$D = \frac{dD}{d\kappa} = \frac{d^2 D}{d\kappa^2} = \dots = \frac{d^{m-1} D}{d\kappa^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^m D}{d\kappa^m} \neq 0,$$

$$U = \frac{\frac{d^m P}{d\kappa^m}}{\frac{d^m D}{d\kappa^m}} \quad 1)$$

¹⁾ Für $m = 1$ folgt das unmittelbar; für $m = 2$ folgt aus 29) und $\frac{dD}{d\kappa} = 0$:

und $\frac{d^m P}{d z^m}$ an den Stellen $z = z_j$ stetig ist. Wir können unser bisheriges Resultat in folgender Weise aussprechen:

I. Wählt man die Zahl p gross genug und setzt man:

$$z \equiv k^2 + \mu^2 < \sqrt[3]{p^2}$$

voraus, so kann man stets eine (für jeden Wert $\mu^2 \leq z < \sqrt[3]{p^2}$) mit ihren ersten Ableitungen nach x, y, z eindeutige und stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion:

$$V(z, x, y, z)$$

so finden, dass der Ausdruck:

$$33) \quad U = \frac{V(z, x, y, z)}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)}, \quad (0^*) \leq n \leq p$$

eine Lösung des Problems:

$$34) \quad \begin{cases} \Delta U + k^2 U = f & \text{im Innenraume,} \\ \Delta U - \mu^2 U = 0 & \text{im Aussenraume} \end{cases}$$

darstellt, wo $z_1, z_2, \dots, z_n$ bestimmte, von einander verschiedene positive Zahlen ($\mu^2 \leq z_j < \sqrt[3]{p^2}$) sind, und dass für

$$z = z_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

V (abgesehen von einem von null verschiedenen, konstanten Faktor) in eine universelle Funktion Φ_j'' mit zugehöriger Zahl $k_j^2 = z_j - \mu^2$ übergeht.

Wir haben diesen Satz unter der Voraussetzung abgeleitet, dass die Funktionen (7)

$$\frac{dP}{dz} = 0, \text{ somit } U = \frac{\frac{d^2 P}{dz^2}}{\frac{d^2 D}{dz^2}}$$

und so fort, für $m = 3, 4, \dots, p$.

*) Im Falle $n = 0$ soll die rechte Seite einfach $V(z, x, y, z)$ sein.

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \dots$$

keine Relation von der Form zulassen:

$$35) \quad \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_p u_p \equiv 0,$$

wo p irgend eine endliche Zahl, $\beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_p$ reelle Konstanten vorstellen, die der Gleichung:

$$36) \quad \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_p^2 = 1$$

genügen.

Wir werden in dem folgenden Paragraphen zeigen, dass auch in diesen singulären Fällen der Satz I richtig bleibt.

§ 5.

Wir wollen zunächst zeigen, dass man aus 35) stets eine Relation:

$$37) \quad \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_{p-1} \equiv 0$$

ableiten kann, wo $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{p-1}$ reelle Konstanten vorstellen, die der Gleichung:

$$38) \quad \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_{p-1}^2 = 1$$

genügen, in folgenden drei Fällen:

1. Wenn die Gleichung:

$$39) \quad \beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \beta_2 x^{p-2} + \dots + \beta_p = 0$$

eine imaginäre Wurzel

$$x_1 + i x_2 \quad (x_2 \neq 0)$$

besitzt;

2. wenn diese Gleichung eine reelle Wurzel $\leq \mu^2$ hat;

3. wenn diese Gleichung eine Doppelwurzel besitzt.

In der Tat, berechnen wir die $p + 2$ Konstanten

$$\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{p-1} x a$$

so, dass:

$$40) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \gamma_0 = \beta_0, \\ a \gamma_1 = \beta_1 + a x \gamma_0, \\ a \gamma_2 = \beta_2 + a x \gamma_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a \gamma_{p-1} = \beta_{p-1} + a x \gamma_{p-2}, \quad (a \neq 0) \\ 0 = \beta_p + a x \gamma_{p-1}, \\ \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \cdots + \gamma_{p-1}^2 = 1, \end{array} \right.$$

was auf p Weisen möglich ist, entsprechend den p Wurzeln der Gleichung 39), so folgt aus 35):

$$41^a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} \\ = x (\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p) \end{array} \right.$$

und hieraus

$$41^b) \quad \begin{array}{l} A (\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1}) \\ = - (x - \mu^2) (\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(im Innen-} \\ \text{raume).} \end{array}$$

Hat die Gleichung 39) eine imaginäre Wurzel

$$x = x_1 + i x_2 \quad (x_2 \neq 0),$$

so setzen wir:

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = X + i Y,$$

multiplizieren 41^b) mit $(X - i Y)$ und integrieren über den Innenraum, dann folgt:

$$\begin{aligned} & - \int_{i+a} \left[\frac{\partial(X-iY)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(X+iY)}{\partial x} + \frac{\partial(X-iY)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(X+iY)}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial(X-iY)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(X+iY)}{\partial z} \right] d\tau \\ & - \mu^2 \int_a (X-iY)(X+iY) d\tau = - (x_1 + i x_2 - \mu^2) \int_i (X^2 + Y^2) d\tau, \end{aligned}$$

somit, da die linke Seite reell ist

$$\int_i (X^2 + Y^2) d\tau = 0, \quad \text{falls } x_2 \neq 0,$$

oder:

$$X = Y \equiv 0,$$

$$42) \quad \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0.$$

$$\Delta F - 2 \bar{x} (\mu^2 F_1 - F) + \bar{x}^2 (\mu^2 F_2 - F_1) = 0$$

oder, da wiederum nach 45)

$$\bar{x}^2 F_2 = -(F - 2 \bar{x} F_1)$$

ist:

$$\Delta F - \mu^2 F + 2 \bar{x} F - \bar{x}^2 F_1 = 0;$$

diese Gleichung multiplizieren wir mit $(-F_1) d\tau$ und integrieren über den Innenraum, dann ergibt sich:¹⁾

$$\int_i (F^2 - 2 \bar{x} F F_1 + \bar{x}^2 F_1^2) d\tau = 0$$

und hieraus:

$$47) \quad F - \bar{x} F_1 = 0,$$

und das ist eine Gleichung von der Form:

$$I_0 u_0 + I_1 u_1 + \dots + I_{p-1} u_{p-1} = 0,$$

wobei man die $I_0 I_1 \dots I_{p-1}$ noch der Bedingung:

$$I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_{p-1}^2 = 1$$

unterwerfen kann.

Wir sind damit zu dem Resultat gelangt, dass man eine Gleichung von der Form 35) stets auf eine Gleichung:

$$48) \quad \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_m u_m = 0, \quad (m \leq p)$$

reduzieren kann, wo die $\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_m$ reelle Konstanten vorstellen, die der Gleichung:

$$49) \quad \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \dots + \gamma_m^2 = 1$$

genügen und so beschaffen sind, dass die Gleichung:

$$50) \quad \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots + \gamma_m x^m = 0$$

m reelle, einfache Wurzeln besitzt, die den Ungleichungen:

$$51) \quad \mu^2 < \frac{1}{x_j}, \quad (j = 1, 2 \dots m)$$

in strengem Sinne genügen.

¹⁾ Mit Rücksicht auf:

$$\int_i F_1 \Delta F d\tau = \int_i F \Delta F_1 d\tau = \int_i F (\mu^2 F_1 - F) d\tau.$$

Da hiernach die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ x_1 & x_2 & . & . & . & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & . & . & . & x_m^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & . & . & . & x_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

können wir mit Hilfe der m Gleichungen:

$$52) \quad \begin{cases} u_0 & = & U_1 + & U_2 + \dots + & U_m, \\ u_1 & = x_1 & U_1 + x_2 & U_2 + \dots + x_m & U_m, \\ . & . & . & . & . \\ u_{m-1} & = x_1^{m-1} & U_1 + x_2^{m-1} & U_2 + \dots + x_m^{m-1} & U_m \end{cases}$$

die Funktionen $U_1 U_2 \dots U_m$ linear durch die $u_0 u_1 \dots u_{m-1}$ definieren. Aus 52) und 48) folgt nun, da $x_1 x_2 \dots x_m$ die Gleichung 50) erfüllen, auch:

$$u_m = x_1^m U_1 + x_2^m U_2 + \dots + x_m^m U_m,$$

so dass wir $U_1 U_2 \dots U_m$ auch durch die m Gleichungen:

$$53) \quad u_j = x_1^j U_1 + x_2^j U_2 + \dots + x_m^j U_m \quad (j = 1, 2 \dots m)$$

definieren können.

Nach 53) ist im Innenraume:

$$54^a) \quad \mu^2 u_j - u_{j-1} = x_1^j \Delta U_1 + x_2^j \Delta U_2 + \dots + x_m^j \Delta U_m \quad (j=1, 2 \dots m).$$

Andererseits folgt aus 53) und den Gleichungen 52), die wir auch so schreiben können:

$$u_{j-1} = x_1^{j-1} U_1 + x_2^{j-1} U_2 + \dots + x_m^{j-1} U_m \quad (j = 1, 2 \dots m):$$

$$54^b) \quad \mu^2 u_j - u_{j-1} = x_1^j \left(\mu^2 - \frac{1}{x_1} \right) U_1 + x_2^j \left(\mu^2 - \frac{1}{x_2} \right) U_2 \\ + \dots + x_m^j \left(\mu^2 - \frac{1}{x_m} \right) U_m,$$

und durch Vergleichung von 54^a) und 54^b):

$$\begin{aligned}
 55) \quad 0 = & x_1^j \left\{ \Delta U_1 - \left(\mu^2 - \frac{1}{x_1} \right) U_1 \right\} + x_2^j \left\{ \Delta U_2 - \left(\mu^2 - \frac{1}{x_2} \right) U_2 \right\} \\
 & + \dots + x_m^j \left\{ \Delta U_m - \left(\mu^2 - \frac{1}{x_m} \right) U_m \right\}, \\
 & (j = 1, 2 \dots m), \quad \text{im Innenraume.}
 \end{aligned}$$

Das sind m lineare, homogene Gleichungen für die m Größen:

$$\Delta U_1 - \left(\mu^2 - \frac{1}{x_1} \right) U_1, \dots, \Delta U_m - \left(\mu^2 - \frac{1}{x_m} \right) U_m,$$

es folgt somit, da die Determinante dieser Gleichungen $\neq 0$ ist, einzeln:

$$56) \quad \Delta U_j + k_j^2 U_j = 0, \quad (j = 1, 2 \dots m) \quad (\text{im Innenraume})$$

wobei

$$57) \quad k_j^2 = \frac{1}{x_j} - \mu^2, \quad (j = 1, 2 \dots m)$$

gesetzt ist.

Damit ist bewiesen, dass wir (mit Rücksicht auf die erste Gleichung 52)) u_0 in der Form darstellen können:

$$58) \quad u_0 = C_1 \Phi_1'' + C_2 \Phi_2'' + \dots + C_n \Phi_n'', \quad (0 \leq n \leq p)$$

wo $\Phi_1'' \dots \Phi_n''$ universelle Funktionen in dem S. 397 eingeführten Sinne sind, $C_1 C_2 \dots C_n$ Konstanten.

Aus 58) folgt im Innenraume:

$$\Delta u_0 = \mu^2 u_0 + f = - \sum_1^n k_j^2 C_j \Phi_j'',$$

also:

$$59) \quad f = - \sum_1^n (k_j^2 + \mu^2) C_j \Phi_j'',$$

und die Funktion:

$$60) \quad U = - \sum_1^n \frac{k_j^2 + \mu^2}{k^2 - k_j^2} C_j \Phi_j'', \quad (0 \leq n \leq p)$$

wird bei unserer Voraussetzung 35) offenbar eine Lösung des Problems:

$$61) \quad \begin{cases} \Delta U + k^2 U = f, & \text{im Innenraume,} \\ \Delta U - \mu^2 U = 0, & \text{im Aussenraume.} \end{cases}$$

Dieses Resultat 60) ordnet sich als Spezialfall dem Satze I unter, so dass dieser Satz I jetzt ohne jede Einschränkung bewiesen ist.¹⁾

II. Abschnitt.

Über die Reihenentwickelungen nach den neuen universellen Funktionen Φ_j'' .

§ 1.

Wir werden zeigen, dass man jedes Raumintegral:

$$\int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

in dem f eine mit ihren ersten Ableitungen im Innenraum eindeutige und stetige Funktion vorstellt, in eine nach den Φ_j'' fortschreitende Reihe verwandeln kann:

$$\int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = C_1 \Phi_1'' + C_2 \Phi_2'' + \dots$$

genau, wie dies — Spezialfall $\mu = 0$ — für das Newtonsche Potential:

$$\int_i f \frac{d\tau}{r} = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \dots$$

($\Phi_1, \Phi_2 \dots$ gewöhnliche universelle Funktionen) möglich ist.

Wir müssen, um diese Untersuchung streng durchzuführen, zunächst einige Sätze über die Φ_j'' vorausschicken:

Hilfssatz I. Die einer universellen Funktion Φ_j'' zugehörige Zahl k_j^2 muss reell und > 0 sein.

¹⁾ Ich weise hier noch kurz darauf hin, dass sich zwei Lösungen des Problems 61) nur um eine universelle Funktion Φ_i'' unterscheiden können, das Problem ist daher stets eindeutig, wenn sich zu k^2 keine zugehörige universelle Funktion konstruieren lässt.

Es folgt nämlich aus

$$\Delta \Phi_j'' = -k_j^2 \Phi_j'' \quad \text{im Innenraume,}$$

$$\Delta \Phi_j'' = \mu^2 \Phi_j'' \quad \text{im Aussenraume:}$$

$$\begin{aligned} \int_{i+a} \left[\left(\frac{\partial \Phi_j''}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j''}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j''}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau + \mu^2 \int_a (\Phi_j'')^2 d\tau \\ = k_j^2 \int_i (\Phi_j'')^2 d\tau. \end{aligned}$$

Wäre k_j^2 imaginär oder reell ≤ 0 , so würde aus dieser Formel stets

$$\Phi_j'' \equiv 0$$

folgen.

Hilfssatz 2. Ist p eine genügend grosse Zahl, so ist die Zahl der überhaupt möglichen, der Fläche ω entsprechenden universellen Funktionen Φ_j'' mit zugehörigen Zahlen

$$k_j^2 < \sqrt[3]{p^2} - \mu^2$$

jedenfalls kleiner oder höchstens $= p$.

Zum Beweise dieses Hilfssatzes bemerken wir zunächst, dass die Lösung des Problems:

$$1) \quad \begin{cases} \Delta U - \mu^2 U = 0, & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta U + k^2 U = -\Phi_j'' & \text{im Innenraume,} \end{cases}$$

wenn also $(-f)$ eine gegebene universelle Funktion mit zugehöriger Zahl k_j^2 darstellt, durch die Formel:

$$2) \quad U = u_0 + \kappa^*) u_1 + \kappa^2 u_2 + \dots = \frac{\Phi_j''}{k_j^2 - k^2}, \quad (k^2 < k_j^2)$$

gegeben ist.

Denn es ist in diesem Falle:

*) $\kappa = k^2 + \mu^2$.

$$u_0 = + \frac{1}{4\pi} \int_i \Phi_j'' \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = \frac{\Phi_j''}{k_j^2 + \mu^2}$$

$$u_1 = + \frac{1}{4\pi} \int_i \Phi_j'' \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = \frac{\Phi_j''}{(k_j^2 + \mu^2)^2}$$

$$u_2 = + \frac{1}{4\pi} \int_i \Phi_j'' \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = \frac{\Phi_j''}{(k_j^2 + \mu^2)^4}$$

.

In analoger Weise wird das Problem:

$$3) \quad \begin{cases} \Delta U - \mu^2 U = 0, & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta U + k^2 U = - \sum_1^p a_j \Phi_j & \text{im Innenraume,} \end{cases}$$

wenn $\Phi_1'' \Phi_2'' \dots \Phi_p''$ p gegebene universelle Funktionen mit zugehörigen Zahlen $k_1^2 k_2^2 \dots k_p^2$; $a_1 a_2 \dots a_p$ Konstanten vorstellen, durch die Funktion:

$$4) \quad U = u_0 + \varkappa u_1 + \varkappa^2 u_2 + \dots = \sum_1^p a_j \frac{\Phi_j''}{k_j^2 - k^2}$$

gelöst, solange k^2 kleiner als die kleinste der Zahlen $k_1^2 k_2^2 \dots k_p^2$ ist; $u_0 u_1 u_2 \dots$ sind in 4) durch die Gleichungen:

$$u_0 = + \frac{1}{4\pi} \int_i \sum_1^p a_j \Phi_j'' \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

$$u_1 = + \frac{1}{4\pi} \int_i u_0 \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

$$u_2 = + \frac{1}{4\pi} \int_i u_1 \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

.

gegeben.

Nach einem früheren Resultate kann man nun, bei genügend grossem p , $a_1 a_2 \dots a_p$ so wählen, dass

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2 = 1$$

und die Reihe 4) jedenfalls für ein beliebiges

$$\varkappa < \sqrt[3]{(p-1)^2}$$

konvergent ist. Wären nun alle

$$k_j^2 < \sqrt[3]{(p-1)^2} - \mu^2,$$

so würde die Gleichung:

$$U = \sum_j^p \frac{a_j \Phi_j''}{k_j^2 - k^2}$$

diesem Resultate widersprechen, es muss somit wenigstens eines der $k_j^2 > \sqrt[3]{(p-1)^2} - \mu^2$ sein, wenn $\Phi_1'' \Phi_2'' \dots \Phi_p''$ p linear unabhängige universelle Funktionen vorstellen, und wenn p eine genügend grosse Zahl ist.

Wir können dem Hilfssatz 2 sofort die folgenden Zusätze hinzufügen:

Zusatz 1. Ist m eine gegebene endliche, positive Zahl, so kann man aussagen, dass die Zahl der überhaupt möglichen, linear unabhängigen universellen Funktionen Φ_j'' mit zugehörigen Zahlen $k_j^2 < m$ endlich ist.

Zusatz 2. Die Zahl der möglichen, linear unabhängigen universellen Funktionen Φ_j'' mit derselben zugehörigen, endlichen Zahl k_j^2 ist stets endlich.

Hilfssatz 3. Jede universelle Funktion Φ_j'' mit zugehöriger Zahl k_j^2 entspricht der Ungleichung:

$$5) \quad (\Phi_j'')^2 < \alpha \frac{(k_j^2 + \mu^2)^2}{k_j^2},$$

wo α eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche und von μ^2 abhängende Konstante ist.

Es ist in der Tat jedes:

$$6) \quad \Phi_j'' = \frac{k_j^2 + \mu^2}{4\pi} \int_i \Phi_j'' \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

somit:

$$7) \quad (\Phi_j'')^2 < \left\{ \frac{k_j^2 + \mu^2}{4\pi} \right\}^2 \int_i \frac{e^{-2\mu r}}{r^2} d\tau \int_i (\Phi_j'')^2 d\tau;$$

nun ist:

$$\begin{aligned}
 \int_i (\Phi_j'')^2 d\tau &= -\frac{1}{k_j^2} \int_i \Phi_j'' \Delta \Phi_j'' d\tau, \\
 &= \frac{1}{k_j^2} \left[\int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_j''}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j''}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j''}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \mu^2 \int_a (\Phi_j'')^2 d\tau \right], \\
 &< \frac{1^*)}{k_j^2};
 \end{aligned}$$

nunmehr folgt die Behauptung 5) unmittelbar aus 7).

Hilfssatz 4. Sind Φ_j'' und Φ_z'' zwei universelle Funktionen mit den von einander verschiedenen zugehörigen Zahlen k_j^2 und k_z^2 , so ist:

$$8) \quad \int_i \Phi_j'' \Phi_z'' d\tau = 0, \quad (k_j^2 \neq k_z^2).$$

Zum Beweise multiplizieren wir die Gleichung:

$$\Delta \Phi_j'' = -k_j^2 \Phi_j'' \quad \text{im Innenraume}$$

mit $(-\Phi_z'')$ und integrieren über den Innenraum, dann folgt:

$$\begin{aligned}
 k_j^2 \int_i \Phi_j'' \Phi_z'' d\tau &= - \int_i \Phi_z'' \Delta \Phi_j'' d\tau, \\
 &= - \int_i \Phi_j'' \Delta \Phi_z'' d\tau, \\
 &= k_z^2 \int_i \Phi_j'' \Phi_z'' d\tau,
 \end{aligned}$$

und hieraus die Behauptung 8).

Dieser Hilfssatz 4 gestattet den für uns wichtigen Zusatz. Ist die Entwicklung einer gegebenen, mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutigen und stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktion F nach universellen Funktionen Φ_j'' :

$$9) \quad F = C_1 \Phi_1'' + C_2 \Phi_2'' + \dots$$

*) Cf. Gleichung 32, p. 397.

überhaupt möglich, so haben die Koeffizienten C_j die Werte:

$$10) \quad C_j = k_j^2 \int_i F \cdot \Phi_j'' d\tau.$$

Wir multiplizieren zum Beweise die Formel 9) mit Φ_j'' und integrieren über den Innenraum, dann folgt:

$$\begin{aligned} \int_i F \cdot \Phi_j'' d\tau &= C_j \int_i (\Phi_j'')^2 d\tau, \\ &= \frac{C_j}{k_j^2} \quad (\text{cf. 32'}) \text{ p. 397).} \end{aligned}$$

Jetzt können wir daran gehen, auch die Möglichkeit der Entwicklung 9) nachzuweisen, wenn:

$$11) \quad F = \int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau$$

und f eine beliebige gegebene, im Innenraume mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktion darstellt.

In diesem Falle werden wir übrigens den Gleichungen 10) noch eine etwas einfachere Form geben können:

Es ist dann:

$$\begin{aligned} \int_i F \cdot \Phi_j'' d\tau &= -\frac{1}{k_j^2} \int_i F \Delta \Phi_j'' d\tau, \\ &= -\frac{1}{k_j^2} \int_i \Phi_j'' \Delta F d\tau, \\ &= -\frac{1}{k_j^2} \int_i \Phi_j'' (\mu^2 F - 4\pi f) d\tau, \end{aligned}$$

somit:

$$(k_j^2 + \mu^2) \int_i F \cdot \Phi_j'' d\tau = 4\pi \int_i f \cdot \Phi_j'' d\tau$$

und:

$$12) \quad C_j = 4\pi \frac{k_j^2}{k_j^2 + \mu^2} \int_i f \cdot \Phi_j'' d\tau.$$

§ 2.

Um die Möglichkeit der Entwicklung 9) in dem Falle 11) zu beweisen, gehen wir wieder auf die im I. Abschnitt gegebene Lösung des Problemles:

$$\Delta U - \mu^2 U = 0 \quad \text{im Aussenraume,}$$

$$\Delta U + k^2 U = f \quad \text{im Innenraume}$$

zurück, die wir (bei genügend grossem p) in der Form

$$U = \frac{V(k^2 + \mu^2, x, y, z)}{(k^2 - k_1^2) \dots (k^2 - k_n^2)}, \quad (0 < n < p)$$

angeben können, wenn

$$k^2 < \sqrt[3]{p^2} - \mu^2,$$

und wo V für jedes solche k^2 mit seinen ersten Ableitungen nach x, y, z im ganzen Raume eindeutig und stetig ist, im Unendlichen verschwindet und für

$$k^2 = k_j^2 \quad (j = 1, 2 \dots n)$$

in eine universelle Funktion Φ_j'' mit zugehöriger Zahl k_j^2 übergeht.

Wir setzen nun:

$$13) \quad R_p = f - (c_1 \Phi_1'' + c_2 \Phi_2'' + \dots + c_p \Phi_p''),$$

wo:

$$14) \quad \begin{cases} c_j = k_j^2 \int_i f \Phi_j'' d\tau, & j = 1, 2 \dots n \\ c_j \Phi_j'' = 0, & j = n + 1, n + 2, \dots p. \end{cases}$$

Wir werden von dem Ausdruck

$$\int_i R_p^2 d\tau$$

nachweisen, dass er durch Vergrösserung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Lösung V des folgenden Problems:

$$15) \quad \begin{cases} \Delta V - \mu^2 V = 0 & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta V + k^2 V = R_p & \text{im Innenraume,} \end{cases}$$

wir werden sehen, dass die Reihe:

$$16) ^1) \quad V = v_0 + \kappa v_1 + \kappa^2 v_2 + \dots,$$

in der:

$$17) \quad \begin{cases} v_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_i R_p \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \\ v_j = +\frac{1}{4\pi} \int_i v_{j-1} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \quad (j = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

für jedes

$$\kappa < \sqrt[3]{p^2}$$

konvergent ist und die Lösung des Problems 15) darstellt.

Wir können — man vergl. den Beweis des Hilfssatzes 2 S. 407 — die Lösung des Problems 15) zunächst in der Form darstellen:

$$18) \quad V = U + \sum_1^p j \frac{c_j \Phi_j''}{k_j^2 - k^2}, \quad (k^2 < k_1^2),$$

wenn k_1^2 das kleinste der $k_1^2, k_2^2, \dots, k_n^2$ ist, U unsere frühere Reihe:

$$19) \quad U = u_0 + \kappa u_1 + \kappa^2 u_2 + \dots,$$

in der:

$$20) \quad \begin{cases} u_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \\ u_j = +\frac{1}{4\pi} \int_i u_{j-1} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \quad (j = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Für einen genügend kleinen Wert von $k_1^2 - k^2$ ist nun nach unseren früheren Resultaten (vergl. Satz I S. 399):

$$21) \quad U = \frac{\gamma_1 \Phi_1''}{k_1^2 - k^2} + U',$$

wo γ_1 eine Konstante, U' eine Grösse darstellt, die auch für $\lim (k_1^2 - k^2) = 0$ endlich bleibt; es folgt somit aus 18):

¹⁾ $\kappa = k^2 + \mu^2$.

$$V = (\gamma_1 + c_1) \frac{\Phi_1''}{k_1^2 - k^2} + U' + \sum_2^p j \frac{c_j \Phi_j}{k_j^2 - k^2}, \quad (k^2 < k_1^2)$$

oder:

$$22) \quad (k_1^2 - k^2) V = (\gamma_1 + c_1) \Phi_1'' + \varepsilon, \quad (k^2 < k_1^2),$$

wo ε durch Verkleinerung von $(k_1^2 - k^2)$ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Multiplizieren wir nun die zweite Gleichung 15) mit Φ_1'' , so folgt durch Integration über den Innenraum:

$$\int_i \Phi_1'' (\Delta V + k^2 V) d\tau = \int_i f \cdot \Phi_1'' d\tau - \frac{c_1}{k_1^2} = 0 \quad (\text{nach 14))}$$

oder:

$$23^a) \quad \int_i V (\Delta \Phi_1'' + k^2 \Phi_1'') d\tau = 0;$$

andererseits ist auch nach der Grundeigenschaft der Φ_j'' :

$$23^b) \quad \int_i V (\Delta \Phi_1'' + k_1^2 \Phi_1'') d\tau = 0,$$

somit:

$$24) \quad (k_1^2 - k^2) \int_i V \Phi_1'' d\tau = 0.$$

Diese Gleichung wird gelten, wie nahe wir auch k^2 an k_1^2 heranrücken lassen. Berücksichtigen wir nun in 24) die Relation 22), so folgt durch Übergang zur Grenze $\lim (k_1^2 - k^2) = 0$:

$$\gamma_1 + c_1 = 0$$

und:

$$25) \quad V = U' + \sum_2^p j \frac{c_j \Phi_j''}{k_j^2 - k^2},$$

wo U' endlich bleibt, wie nahe wir auch k^2 an k_1^2 heranrücken lassen.

Damit ist gezeigt, dass $k^2 = k_1^2$ kein Pol der Lösung V des Problems 15) ist, die Reihe 16) somit einen Konvergenzradius

$$> k_1^2 + \mu^2$$

hat.

In genau analoger Weise folgt jetzt successive, dass auch die Stellen

$$k^2 = k_2^2, k_3^2, \dots k_n^2$$

nicht Pole der Lösung V des Problemes 15) sein können, die Reihe 16) somit einen Konvergenzradius

$$> \sqrt[3]{p^2}$$

besitzt und demgemäss für alle

$$z < \sqrt[3]{p^2}$$

die Lösung des Problemes 15) darstellt.

Da die aufeinander folgenden Funktionen

$$R_p, v_0, v_1, v_2 \dots$$

die Eigenschaft haben:

$$\frac{\int_i v_0^2 d\tau}{\int_i R_p^2 d\tau} < \frac{\int_i v_1^2 d\tau}{\int_i v_0^2 d\tau} < \frac{\int_i v_2^2 d\tau}{\int_i v_1^2 d\tau} < \dots \quad (\text{vergl. S. 391}),$$

so ergibt sich:

$$26) \quad \frac{\int_i v_0^2 d\tau}{\int_i R_p^2 d\tau} < \frac{\int_i v_1^2 d\tau}{\int_i v_0^2 d\tau} < \frac{\int_i v_2^2 d\tau}{\int_i v_1^2 d\tau} < \dots < \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}},$$

denn sonst würde die Reihe 16) bereits für Werte von z

$$< \sqrt[3]{p^2}$$

divergieren. Im besonderen folgt aus 26):

$$27) \quad \int_i v_0^2 d\tau < \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}} \cdot \int_i R_p^2 d\tau.$$

Andererseits haben wir nach der ersten Gleichung 17)

$$R_p = A v_0 - \mu^2 v_0, \quad \text{im Innenraume,}$$

somit:

$$\begin{aligned}\int_i R_p^2 d\tau &= \int_i R_p (A v_0 - \mu^2 v_0) d\tau, \\ &= - \int_{i+a} \left\{ \frac{\partial R_p}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial R_p}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial R_p}{\partial z} \frac{\partial v_0}{\partial z} + \mu^2 R_p v_0 \right\} d\tau,\end{aligned}$$

wenn wir R_p ¹⁾ auch im Aussenraume durch die Gleichung

$$(28) \quad R_p = f_a - (c_1 \Phi_1'' + c_2 \Phi_2'' + \dots + c_p \Phi_p'')$$

definieren und unter f_a die Lösung des Problems:

$$(29) \quad \begin{cases} A f_a - \mu^2 f_a = 0 & \text{im Aussenraume,} \\ f_a = f & \text{an } \omega \end{cases}$$

verstehen.

Es folgt:

$$\begin{aligned}\left\{ \int_i R_p^2 d\tau \right\}^2 &\leq \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial R_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial z} \right)^2 + \mu^2 R_p^2 \right\} d\tau \\ &\quad \cdot \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} \right)^2 + \mu^2 v_0^2 \right\} d\tau \\ &\leq \int_i (-v_0 R_p) d\tau \cdot J_p,\end{aligned}$$

wenn wir

$$(30) \quad J_p = \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial R_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial z} \right)^2 + \mu^2 R_p^2 \right\} d\tau$$

setzen. Nun ist:

$$\begin{aligned}\int_i (-v_0) R_p d\tau &\leq \sqrt{\int_i v_0^2 d\tau \cdot \int_i R_p^2 d\tau}, \\ &\leq \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}} \cdot \int_i R_p^2 d\tau, \quad (\text{nach 27));}\end{aligned}$$

wir können daher die Ungleichung vor 30) auch so schreiben:

$$(31) \quad \int_i R_p^2 d\tau \leq \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}} \cdot J_p,$$

¹⁾ Das durch 13) nur im Innenraume definiert ist.

und wir werden schliesslich beweisen, dass J_p auch bei unendlich wachsendem p stets unter einer endlichen Grenze bleibt.

Es ist nämlich nach 30), wenn wir für R_p seinen Wert 13) resp. 28) einsetzen:

$$\begin{aligned} J_p = & \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \mu^2 f^2 \right\} d\tau \\ & + c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_p^2 \\ & - 2 \int_{i+a} \sum_{j=1}^p c_j \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j''}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j''}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j''}{\partial z} + \mu^2 f \Phi_j \right\} d\tau, \end{aligned}$$

oder, da das in der dritten Zeile rechts stehende Integral

$$\begin{aligned} &= 2 \int_i \sum_{j=1}^p c_j f \Delta \Phi_j'' d\tau, \\ &= -2 \sum_{j=1}^p c_j k_j^2 \int_i f \Phi_j'' d\tau, \\ &= -2 \sum_{j=1}^p c_j^2 \end{aligned}$$

gesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} 32) \quad J_p = & \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \mu^2 f^2 \right\} d\tau \\ & - c_1^2 - c_2^2 - \dots - c_p^2. \end{aligned}$$

J_p ist eine nach 30) stets positive Grösse, die nach 32) mit wachsendem p nur abnehmen kann; es ist:

$$33) \quad J_p < \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \mu^2 f^2 \right\} d\tau$$

und nach 31):

$$34) \quad \int_i R_p^2 d\tau < \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}} \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \mu^2 f^2 \right\} d\tau.$$

Das Integral rechts ist bei unseren Voraussetzungen über f eine bestimmte, endliche Grösse, und wir haben somit bewiesen, dass

$$\int_i R_p^2 d\tau$$

durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Da nun:

$$\begin{aligned} F &\equiv \int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = \int_i \sum_1^p j c_j \Phi_j'' \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau + \int_i R_p \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \\ &= C_1 \Phi_1'' + C_2 \Phi_2'' + \dots + C_p \Phi_p'' + \int_i R_p \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \end{aligned}$$

wo:

$$C_j = 4\pi \frac{k_j^2}{k_j^2 + \mu^2} \int_i f \cdot \Phi_j'' d\tau, \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

und:

$$\begin{aligned} \text{abs. } \int_i R_p \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau &\leq \sqrt{\int_i R_p^2 d\tau \cdot \int_i \frac{e^{-2\mu r}}{r^2} d\tau} \\ &\leq \text{endl. Konst. } \frac{1}{\sqrt[3]{p}}, \end{aligned}$$

so haben wir das folgende Resultat bewiesen:

II. Ist f mit seinen ersten Ableitungen im Innenraume eindeutig und stetig, so gilt stets die Reihenentwicklung:

$$35) \quad \int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = C_1 \Phi_1'' + C_2 \Phi_2'' + \dots,$$

wo:

$$36) \quad C_j = 4\pi \frac{k_j^2}{k_j^2 + \mu^2} \int_i f \cdot \Phi_j'' d\tau, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Die $\Phi_1'' \Phi_2'' \dots$ sind gerade die universellen Funktionen, welche sich nach dem Satze I bei der Lösung des Problems:

$$\Delta U - \mu^2 U = 0 \quad \text{im Aussenraume,}$$

$$\Delta U + k^2 U = f \quad \text{im Innenraume}$$

konstruieren lassen.

III. Abschnitt.

Die einer Kugelfläche entsprechenden universellen Funktionen Φ_j'' .

§ 1.

Die Differentialgleichungen der universellen Funktionen:

$$1) \quad \begin{cases} \Delta \Phi_j'' - \mu^2 \Phi_j'' = 0 & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta \Phi_j'' + k_j^2 \Phi_j'' = 0 & \text{im Innenraume} \end{cases}$$

gehen durch die Transformation in sphärische Polarkoordinaten:

$$2) \quad \begin{cases} x = r \cos \Theta, \\ y = r \sin \Theta \cos \varphi, \\ z = r \sin \Theta \sin \varphi \end{cases}$$

in die folgenden Gleichungen über:

$$3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi_j''}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial \Phi_j''}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \Phi_j''}{\partial \varphi^2} \\ \quad - \mu^2 r^2 \Phi_j'' = 0, & \text{im Aussenraume,} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi_j''}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial \Phi_j''}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \Phi_j''}{\partial \varphi^2} \\ \quad + k_j^2 r^2 \Phi_j'' = 0, & \text{im Innenraume.} \end{cases}$$

Wenn wir uns jetzt auf den Fall beschränken, dass ω eine Kugelfläche vom Radius R um den Anfangspunkt ist, können wir sagen: die 1. Gleichung 3) muss für

$$r > R,$$

die 2. Gleichung 3) für

$$r < R$$

erfüllt sein. Da die Φ_j'' , wie wir wissen, im ganzen Raume mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, so sind sie für jede Kugelfläche vom Radius r nach Kugelfunktionen entwickelbar:

$$4) \quad \Phi_k'' = \sum_0^{\infty} j f_j(r) Y_j(\Theta, \varphi),$$

wobei die Y_j der bekannten Differentialgleichung der Kugelfunktionen:

$$5) \quad \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial Y_j}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial \varphi^2} + j(j+1) Y_j = 0$$

genügen.

Setzen wir die Reihenentwicklung 4) für Φ_j'' in den Gleichungen 3) ein,¹⁾ dann folgt mit Rücksicht auf 5):

$$6) \quad \begin{cases} \sum_0^{\infty} j Y_j \left\{ \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_j'') - j(j+1) f_j \right] - \mu^2 f_j \right\} = 0, & (r > R), \\ \sum_0^{\infty} j Y_j \left\{ \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_j) - j(j+1) f_j \right] + k_k^2 f_j \right\} = 0, & (r < R). \end{cases}$$

Die $f_j(r)$ müssen somit jedenfalls von der Form sein ($j = 0, 1, 2 \dots$)

$$7) \quad \begin{cases} f_j = c_{j1}^i f_{j1}^i + c_{j2}^i f_{j2}^i, & (r < R), \\ f_j = c_{j1}^a f_{j1}^a + c_{j2}^a f_{j2}^a, & (r > R), \end{cases}$$

wenn $f_{j1}^i f_{j2}^i$ zwei unabhängige Lösungen der Differentialgleichung:

$$8^a) \quad r^2 f_j'' + 2 r f_j' + k_k^2 r^2 - j(j+1) f_j = 0$$

$f_{j1}^a f_{j2}^a$ zwei unabhängige Lösungen der Differentialgleichung:

$$8^b) \quad r^2 f_j'' + 2 r f_j' = [\mu^2 r^2 + j(j+1)] f_j$$

vorstellen.

Eine partielle Lösung von 8^a) ist die Besselsche Funktion $J_{j+\frac{1}{2}}(k_j r)$ dividiert durch $\sqrt{k_j r}$:

¹⁾ Es ist dies gestattet, weil auch Φ_j'' mit seinen ersten Ableitungen im ganzen Innen- (Aussen-)raume eindeutig und stetig, also nach Kugelfunktionen an jeder Kugelfläche (r) entwickelbar ist.

$$9^a) \quad f_{j1}^i = \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda r)^{-1}}{\sqrt{k_\lambda r}},$$

und es ist bekannt, dass die Differentialgleichung 8^a) keine von diesem f_{j1}^i unabhängige, für $r = 0$ endliche Lösung zulässt; es ist daher

$$c_{j2} = 0$$

und:

$$10^a) \quad f_j = c_j^i \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda \cdot r)}{\sqrt{k_\lambda \cdot r}}, \quad (r < R)$$

wobei die Konstanten c_j^i willkürlich bleiben.

Eine partielle Lösung von 8^b) ist²⁾ die Funktion:

$$9^b) \quad f_{j1}^a = \mathfrak{D}_j(\mu r) \\ = \sum_0^j 2^{j-\kappa} \frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)} \cdot \frac{\Pi(j+\kappa)}{\Pi(\kappa)\Pi(j-\kappa)} \left(\frac{1}{\mu r}\right)^{\kappa+1} e^{-\mu r},$$

wie wir leicht durch Substitution dieser Funktion in 8^b) verifizieren können; wir werden diese Verifikation zugleich mit dem Beweis verbinden, dass die Differentialgleichung 8^b) keine von diesem f_{j1}^a unabhängige, für $r = \infty$ mit seiner ersten Ableitung verschwindende Lösung zulässt, so dass:

$$c_{j2}^a = 0$$

und:

$$10^b) \quad f_j = c_j^a \mathfrak{D}_j(\mu r)$$

sein muss. Die Konstanten c_j^a werden mit den c_j^i , wie wir weiterhin sehen werden, infolge der Stetigkeit von Φ_j^a und

1)

$$J_{j+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_0^j \frac{\Pi(i+\lambda)}{\Pi(\lambda)\Pi(i-\lambda)} \left(\frac{1}{2x}\right)^\lambda \cos\left[(i+1-\lambda)\frac{\pi}{2} - x\right]$$

(man vergl. z. B. Pockels, Über die partiellen Differentialgleichungen $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, p. 110 und 98).

2) Man vergl. C. Neumann, Allg. Unters. über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkung, Leipzig 1896, p. 105 und 90–100.

seiner ersten Ableitungen bei dem Durchgange durch die Kugelfläche (R) durch gewisse Relationen verbunden sein.

Wir setzen zur Verifikation der Lösung 9^b) von 8^b):

$$11) \quad F_j = f_{j1}^a e^{\mu r},$$

dann folgt aus 9^b):

$$12) \quad F_j(r) = \sum_0^j 2^{j-z} \frac{H(j)}{H(2j)} \frac{H(j+z)}{H(z) H(j-z)} \left(\frac{1}{\mu r}\right)^{z+1},$$

und wir haben zu zeigen, dass dieses $F_j(x)$ der aus 8^b) folgenden Differentialgleichung:

$$13) \quad x^2 F_j'' - 2(\mu x^2 + x) F_j' = [2\mu x + j(j+1)] F_j$$

genügt.

Es ist nach 12)

$$14^a) \quad x^2 F_j'' = \sum_0^j 2^{j-z} (z+1)(z+2) \frac{H(j+z)}{H(z) H(j-z)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{z+1} \cdot a_j,$$

$$14^b) \quad x F_j' = - \sum_0^j 2^{j-z} (z+1) \frac{H(j+z)}{H(z) H(j-z)} \cdot \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{z+1} \cdot a_j,$$

$$14^c) \quad \mu x^2 F_j' = - \sum_{-1}^{j-1} 2^{j-z-1} (z+2) \frac{H(j+z+1)}{H(z+1) H(j-z-1)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{z+1} \cdot a_j,$$

$$14^d) \quad \mu x F_j = \sum_{-1}^{j-1} 2^{j-z-1} \frac{H(j+z+1)}{H(z+1) H(j-z-1)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{z+1} \cdot a_j,$$

wenn:

$$15) \quad a_j = \frac{H(j)}{H(2j)},$$

somit:

*) Wir haben z mit $z+1$ vertauscht.

$$14^e) \left\{ \begin{aligned} & - 2 \mu x^2 F'_j - 2 \mu x F_j \\ & = \sum_{-1}^{j-1} 2^{j-z} (z+1) \frac{H(j+z+1)}{H(z+1)H(j-z-1)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{z+1} \cdot a_j \\ & = \sum_0^{j-1} 2^{j-z} (z+1) \frac{(j+z+1)(j-z)}{z+1} \cdot \frac{H(j+z)}{H(z)H(j-z)} \\ & \quad \cdot \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{z+1} \cdot a_j \end{aligned} \right.$$

und:

$$\begin{aligned} & x^2 F''_j - 2(\mu x^2 + x) F'_j - [2\mu x + j(j+1)] F_j \\ & = \sum_0^{j-1} 2^{j-z} \cdot a_j \frac{H(j+z)}{H(z)H(j-z)} \cdot \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{z+1} [(\mu+1)(z+2) - j(j+1) \\ & \quad + (j-z)(j+z+1) - 2(z+1)] \\ & + a_j \frac{H(2j)}{H(j)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{j+1} [(j+1)(j+2) - j(j+1) - 2(j+1)] = 0, \end{aligned}$$

da die beiden eckigen Klammern identisch verschwinden. Denken wir uns nun eine andere Funktion G_j , welche auch derselben Differentialgleichung, wie F_j , genüge:

$$16) \quad x^2 G''_j - 2(\mu x^2 + x) G'_j = [2\mu x + j(j+1)] G_j;$$

wir multiplizieren diese Gleichung mit F_j , die Gleichung 13) mit G_j und subtrahieren, dann folgt, wenn wir:

$$17) \quad G'_j F_j - F'_j G_j = \Omega_j$$

setzen:

$$\Omega'_j - 2\left(\mu + \frac{1}{x}\right) \Omega_j = 0$$

hieraus

$$l \Omega_j = 2\mu x + l x + l C_j^*)$$

$$18) \quad \Omega_j = C_j x e^{2\mu x}.$$

Setzen wir nun analog 11):

$$19) \quad G_j = g_j e^{\mu x}$$

*) C_j eine unbekannte Konstante.

und verlangen von der Funktion $g_j(r)$, dass sie mit ihrer ersten Ableitung für $r = \infty$ verschwinde, so muss auch

$$G_j e^{-\mu r} \quad \text{und} \quad G'_j e^{-\mu r}$$

also auch

$$\lim_{r=\infty} [\Omega_j e^{-2\mu r}] = \lim_{r=\infty} [C_j r]$$

$= 0$ sein, es folgt somit

$$C_j = 0,$$

$$\Omega_j = 0,$$

$$20) \quad G_j = \text{const. } F_j,$$

damit sind aber unsere Behauptungen bewiesen, und wir wissen jetzt, dass die universellen Funktionen die allgemeine Gestalt haben müssen:

$$21^a) \quad \Phi''_{\lambda} = \sum_0^{\infty} j c_j^a \mathfrak{D}_j(\mu r) Y_j(\Theta, \varphi) \quad (\text{im Aussenraume}),$$

$$21^b) \quad \Phi''_{\lambda} = \sum_0^{\infty} j c_j^i \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_{\lambda} r)}{\sqrt{k_{\lambda} r}} Y_j(\Theta, \varphi), \quad (\text{im Innenraume});$$

die Y_j können wir schon im Hinblick auf die Stetigkeit von Φ''_{λ} bei dem Durchgang durch die Kugelfläche als dieselben Funktionen für den Innen- und Aussenraum voraussetzen.

§ 2.

Wir haben nun zur weiteren Bestimmung der Φ''_{λ} die Bedingungen, dass

$$\Phi''_{\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{d\Phi''_{\lambda}}{dr}$$

beim Durchgang durch die Kugelfläche stetig sein müssen.

Es folgen somit die Gleichungen ($j = 0, 1, 2 \dots$):

$$22^a) \quad c_j^a \mathfrak{D}_j(\mu R) = c_j^i \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_{\lambda} R)}{\sqrt{k_{\lambda} R}}$$

$$23) \quad \mu c_j^a \mathfrak{D}'_j(\mu R) = c_j^i \left[\frac{k_{\lambda} J_{j+\frac{1}{2}}(k_{\lambda} R)}{\sqrt{k_{\lambda} R}} - \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_{\lambda} R)}{2 R \sqrt{k_{\lambda} R}} \right].$$

Die Gleichung 23) können wir infolge der Eigenschaft der Besselschen Funktionen: ¹⁾

$$k_\lambda R J'_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda R) + (j + \frac{1}{2}) J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda R) = k_\lambda R J_{j-\frac{1}{2}}(k_\lambda R)$$

auch so schreiben:

$$24) \quad \mu c_j^a \mathfrak{D}'_j(\mu R) = c_j^a \left[\frac{k_\lambda}{\sqrt{k_\lambda R}} \cdot J_{j-\frac{1}{2}}(k_\lambda R) - (j+1) \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda R)}{R \sqrt{k_\lambda R}} \right],$$

oder mit Rücksicht auf 22^a):

$$25) \quad c_j^a \left(\mu \mathfrak{D}'_j(\mu R) + (j+1) \frac{\mathfrak{D}_j(\mu R)}{R} \right) = c_j^a \frac{J_{j-\frac{1}{2}}(k_\lambda R)}{\sqrt{k_\lambda R}} \cdot k_\lambda.$$

Wir können auch der linken Seite noch eine einfachere Gestalt geben:

Setzen wir wieder

$$\mathfrak{D}_j(\mu x) = F_j(x) e^{-\mu x},$$

so ist:

$$\begin{aligned} \mu x \mathfrak{D}'_j(\mu x) + (j+1) \mathfrak{D}_j(\mu x) &= (x F'_j + (j+1) F_j - \mu x F_j) e^{-\mu x}, \\ &= \sum_0^{j-1} 2^{j-z} (j-z) \frac{H(j)}{H(2j)} \frac{H(j+z)}{H(z) H(j-z)} \left(\frac{1}{\mu x} \right)^{z+1} e^{-\mu x} \\ &\quad - \sum_{-1}^{j-1} 2^{j-z-1} \frac{H(j)}{H(2j)} \frac{H(j+z+1)}{H(z+1) H(j-z-1)} \left(\frac{1}{\mu x} \right)^{z+1} e^{-\mu x}, \\ &\quad \text{(nach den Formeln S. 422)} \\ &= \sum_{-1}^{j-1} 2^{j-z-1} \frac{H(j)}{H(2j)} \frac{H(j+z)}{H(z+1) H(j-z)} e^{-\mu x} [2(z+1)(j-z) \\ &\quad - (j+z+1)(j-z)] \left(\frac{1}{\mu x} \right)^{z+1}, \end{aligned}$$

¹⁾ Es ist allgemein:

$$x J'_n(x) + n J_n(x) = x \cdot J_{n-1}(x);$$

man vergl. z. B. Riemann-Weber, Die part. Differentialgleichungen der math. Physik. Braunschweig 1900, p. 161. I. Bd.; für $n=0$:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

$$= - \sum_{-1}^{j-2} 2^{j-z-1} \frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)} \frac{\Pi(j+z)}{\Pi(z+1)} \frac{\Pi(j+z-2)}{\Pi(j-z-2)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{z+1} e^{-\mu x},$$

$$= - \sum_0^{j-1} 2^{j-z} \frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)} \frac{\Pi(j+z-1)}{\Pi(z)} \frac{\Pi(j-z-1)}{\Pi(j-z-1)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^z e^{-\mu x},$$

und:

$$26) \quad \frac{\mu x \mathfrak{D}'_j(\mu x) + (j+1) \mathfrak{D}(\mu x)}{\mu x} = - \frac{1}{2j-1} \mathfrak{D}_{j-1}(\mu x).*)$$

Wir können daher 25) auch so schreiben:

$$22^b) \quad - \frac{c_j^a \mu}{2j-1} \mathfrak{D}_{j-1}(\mu R) = c_j^i k_{\frac{1}{2}} \frac{J_{j-\frac{1}{2}}(k R)}{\sqrt{k} R}.$$

Es sind nun nach 22^a), 22^b) zwei Fälle möglich; es ist entweder

$$26^a) \quad c_j^a = c_j^i = 0,$$

oder es verschwindet die Determinante:

$$26^b) \quad k_{\frac{1}{2}} \mathfrak{D}_j(\mu R) J_{j-\frac{1}{2}}(k R) + \frac{\mu}{2j-1} \mathfrak{D}_{j-1}(\mu R) J_{j+\frac{1}{2}}(k R) = 0.$$

Wenn wir beweisen können, dass zwei Gleichungen

$$27) \quad \begin{cases} k \mathfrak{D}_{\sigma}(\mu R) J_{\sigma-\frac{1}{2}}(k R) + \frac{\mu}{2\sigma-1} \mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R) J_{\sigma+\frac{1}{2}}(k R) = 0, \\ k \mathfrak{D}_{\tau}(\mu R) J_{\tau-\frac{1}{2}}(k R) + \frac{\mu}{2\tau-1} \mathfrak{D}_{\tau-1}(\mu R) J_{\tau+\frac{1}{2}}(k R) = 0 \end{cases}$$

($\sigma, \tau = 0, 1, 2, \dots, \sigma \neq \tau$)

keine gemeinsame Wurzel k haben, ist unser Gesamtergebnis in folgender Weise auszusprechen:

*) Für $j = 0$ ist:

$$\mathfrak{D}_{j-1}(\mu x) = - \frac{e^{-\mu x}}{\mu x}$$

zu definieren.

III. Die universellen Funktionen Φ_j'' , welche der Kugelfläche (R) entsprechen, sind, abgesehen von einem konstanten Faktor:¹⁾

$$28) \quad \begin{cases} \Phi_j'' = \mu^{j+1} \mathfrak{D}_j(\mu r) Y_j(\Theta, \varphi), & (\text{im Aussenraume}) \\ \Phi_j'' = \mu^{j+1} \mathfrak{D}_j(\mu R) \frac{\sqrt{k_j R} J_{j+\frac{1}{2}}(k_j r)}{\sqrt{k_j r} J_{j+\frac{1}{2}}(k_j R)} Y_j(\Theta, \varphi), & (\text{im Innenraume}). \end{cases}$$

Dabei ist k_j irgend eine Wurzel der Gleichung:

$$29) \quad k_j \mathfrak{D}_j(\mu R) J_{j-\frac{1}{2}}(k_j R) + \frac{\mu}{2j-1} \mathfrak{D}_{j-1}(\mu R) J_{j+\frac{1}{2}}(k_j R) = 0,$$

$Y_j(\Theta, \varphi)$ eine beliebige allgemeine Kugelfunktion j^{ter} Ordnung.

§ 3.

Wie wir ausdrücklich bemerkten, bleibt uns noch der nachträgliche Beweis dafür zu liefern übrig, dass zwei Gleichungen von der Form 27) keine gemeinsame Wurzel k haben können.

Für den Fall $\mu = 0$ ist dies ein in der Theorie der Besselschen Funktionen wohlbekanntes Resultat: 2 Gleichungen:

$$\begin{aligned} J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) &= 0, & \sigma, \tau &= 1, 2, 3 \dots \\ J_{\tau-\frac{1}{2}}(kR) &= 0, & \sigma &\neq \tau \end{aligned}$$

können keine gemeinsame Wurzel k haben.

Der Beweis für diesen Spezialfall möge hier kurz folgen, da wir den Beweis für den allgemeinen Fall ganz analog geben können und durch den Vergleich mit dem einfacheren Falle die Übersichtlichkeit des allgemeinen Beweises erhöht werden dürfte.

¹⁾ Wir setzen willkürlich $c_j^a = \mu^{j+1}$; der konstante Faktor wäre nach der Definition 32') S. 14 noch so zu wählen, dass

$$k_j^2 \int_0^R (\Phi_j'')^2 d\tau = 1;$$

doch kommt es auf die Bestimmung desselben nicht weiter an.

Nehmen wir an, es gäbe einen Wert von k , für den

$$\begin{aligned} J_{\sigma - \frac{1}{2}}(kR) &= 0, \\ J_{\tau - \frac{1}{2}}(kR) &= 0, \end{aligned} \quad \tau < \sigma$$

dann ergibt die successive Anwendung der Rekursionsformel:¹⁾

$$30) \quad J_n(x) = \frac{x}{2n} J_{n-1}(x) + \frac{x}{2n} J_{n+1}(x),$$

dass auch jedes:

$$J_{\varrho - \frac{1}{2}}(kR) = 0, \quad (\tau < \varrho < \sigma),$$

wobei wir natürlich unter σ, τ, ϱ ganze Zahlen verstehen; im besonderen folgt:

$$J_{\tau + \frac{1}{2}}(kR) = 0;$$

nunmehr folgt aber aus derselben Rekursionsformel successive, da wir k stets $\neq 0$ haben müssen:

$$\begin{aligned} J_{\tau - \frac{1}{2}}(kR) &= 0, \\ J_{\tau - \frac{3}{2}}(kR) &= 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ J_{\frac{3}{2}}(kR) &= 0, \\ J_{\frac{1}{2}}(kR) &= 0. \end{aligned}$$

Nun ist (man vergl. Anm. 1 S. 421):

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(kR) &= \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} \sin kR, \\ J_{\frac{3}{2}}(kR) &= \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} \left\{ \frac{\sin kR}{kR} - \cos kR \right\}, \end{aligned}$$

es müsste somit

$$\sin kR = \cos kR = 0$$

sein, was für keinen Wert von k möglich ist.

Wir gehen nun zu dem allgemeinen Falle über, dass μ eine beliebige positive Zahl ist und setzen allgemein ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$)

¹⁾ Man vergl. z. B. Riemann-Weber l. c. p. 160, 1. Bd.

$$31) \quad \mathcal{Y}_n = k \mathfrak{D}_n(\mu R) J_{n-\frac{1}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2n-1} \mathfrak{D}_{n-1}(\mu R) J_{n+\frac{1}{2}}(kR);$$

wir wollen annehmen, es gäbe einen Wert von k , für den:

$$32) \quad \begin{cases} \mathcal{Y}_\sigma = 0, \\ \mathcal{Y}_\tau = 0, \end{cases} \quad \tau < \sigma.$$

Wir werden, um die Unmöglichkeit dieser Annahme nachzuweisen, für die $\mathcal{Y}_n$ eine ähnliche Rekursionsformel ableiten, wie die Formel 30) für die J_n .

Es ist:

$$\mathcal{Y}_{n+1} = k \mathfrak{D}_{n+1}^*) \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2n+1} \mathfrak{D}_n J_{n+\frac{3}{2}}(kR),$$

$$\mathcal{Y}_{n-1} = k \mathfrak{D}_{n-1} \cdot J_{n-\frac{3}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2n-3} \mathfrak{D}_{n-2} J_{n-\frac{1}{2}}(kR);$$

wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\mathfrak{D}_{n-1}$, die zweite mit $\mathfrak{D}_{n+1}$ und addieren, dann folgt:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{D}_{n-1} \mathcal{Y}_{n+1} + \mathfrak{D}_{n+1} \mathcal{Y}_{n-1} \\ &= \frac{\mu}{2n-3} \mathfrak{D}_{n+1} \mathfrak{D}_{n-2} J_{n-\frac{1}{2}}(kR) + k \mathfrak{D}_{n+1} \mathfrak{D}_{n-1} J_{n+\frac{1}{2}}(kR) \\ &+ \frac{\mu}{2n+1} \mathfrak{D}_n \mathfrak{D}_{n-1} J_{n+\frac{3}{2}}(kR) + k \mathfrak{D}_{n+1} \mathfrak{D}_{n-1} J_{n-\frac{3}{2}}(kR); \end{aligned}$$

nun ist nach 30):

$$\begin{aligned} \frac{kR}{2n+1} J_{n+\frac{3}{2}}(kR) &= J_{n+\frac{1}{2}}(kR) - \frac{kR}{2n+1} J_{n-\frac{1}{2}}(kR), \\ \frac{kR}{2n-1} J_{n-\frac{3}{2}}(kR) &= J_{n-\frac{1}{2}}(kR) - \frac{kR}{2n-1} J_{n+\frac{1}{2}}(kR), \end{aligned}$$

somit:

*) Die Argumente von $\mathfrak{D}_n \mathfrak{D}_{n+1} \mathfrak{D}_{n-2} \mathfrak{D}_{n-1}$ sollen stets μR sein; wir schreiben diese der Kürze halber nicht jedesmal hin.

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{D}_{n-1} \Psi_{n+1} + \mathfrak{D}_{n+1} \Psi_{n-1} \\
&= J_{n-\frac{1}{2}}(kR) \left\{ \frac{\mu}{2n-3} \mathfrak{D}_{n+1} \mathfrak{D}_{n-2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu}{2n+1} \mathfrak{D}_n \mathfrak{D}_{n-1} + \frac{2n-1}{R} \mathfrak{D}_{n+1} \mathfrak{D}_{n-1} \right\} \\
&+ J_{n+\frac{1}{2}}(kR) \left\{ k \mathfrak{D}_{n+1} \mathfrak{D}_{n-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu}{kR} \mathfrak{D}_n \mathfrak{D}_{n-1} - k \mathfrak{D}_{n+1} \mathfrak{D}_{n-1} \right\}.
\end{aligned}$$

Bedenken wir jetzt, dass auch die $\mathfrak{D}_n$ eine Rekursionsformel¹⁾ erfüllen:

¹⁾ Setzen wir wieder:

$$\mathfrak{D}_j(\mu x) = F_j(x) e^{-\mu x},$$

dann ist nach 12):

$$F_j = \sum_{\kappa=0}^j 2^{j-\kappa} \frac{H(j)}{H(2j)} \frac{H(j+\kappa)}{H(\kappa)H(j-\kappa)} \cdot \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\kappa+1},$$

nach 14^{d)})

$$\mu x F_{j-1} = \sum_{\kappa=1}^{j-2} 2^{j-\kappa-2} \frac{H(j-1)}{H(2j-2)} \frac{H(j+\kappa)}{H(\kappa+1)H(j-\kappa-2)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\kappa+1},$$

somit:

$$\begin{aligned}
& F_j + \frac{\mu x}{(2j-1)(2j+1)} F_{j-1} \\
&= \sum_{\kappa=1}^j 2^{j-\kappa} \frac{H(j)}{H(2j)} \frac{H(j+\kappa)}{H(\kappa+1)H(j-\kappa)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\kappa+1} \left\{ \kappa+1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2(2j+1)} (j-\kappa)(j-\kappa-1) \right\}, \\
&= \sum_{\kappa=1}^j 2^{j-\kappa} \frac{H(j)}{H(2j)} \frac{H(j+\kappa)}{H(\kappa+1)H(j-\kappa)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\kappa+1} \frac{(j+\kappa+1)(j+\kappa+2)}{2(2j+1)}, \\
&= \sum_{\kappa=1}^j 2^{j-\kappa} \frac{H(j+1)}{H(2j+2)} \frac{H(j+\kappa+2)}{H(\kappa+1)H(j-\kappa)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\kappa+1}, \\
&= \mu x F_{j+1}, \text{ wieder nach 14^{d)}},
\end{aligned}$$

und daher auch:

$$\mathfrak{D}_j(\mu x) + \frac{\mu x}{(2j-1)(2j+1)} \mathfrak{D}_{j-1}(\mu x) = \mu x \mathfrak{D}_{j+1}(\mu x).$$

$$33) \quad \begin{cases} \mu R \mathfrak{D}_{n+1} = \mathfrak{D}_n + \frac{\mu R}{(2n-1)(2n+1)} \mathfrak{D}_{n-1}, \\ \mu R \mathfrak{D}_{n-2} = (2n-1)(2n-3) \{ \mu R \mathfrak{D}_n - \mathfrak{D}_{n-1} \}, \end{cases}$$

so können wir die letzte Formel auch so schreiben:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{D}_{n-1} \mathcal{Y}_{n+1} + \mathfrak{D}_{n+1} \mathcal{Y}_{n-1} \\ &= J_{n-\frac{1}{2}}(kR) \left[\frac{2n-1}{\mu R^2} \left\{ \mathfrak{D}_n + \frac{\mu R}{(2n-1)(2n+1)} \mathfrak{D}_{n-1} \right\} \left\{ \mu R \mathfrak{D}_n - \mathfrak{D}_{n-1} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\mu}{2n+1} \mathfrak{D}_n \mathfrak{D}_{n-1} + \frac{2n-1}{\mu R^2} \mathfrak{D}_{n-1} \left\{ \mathfrak{D}_n + \frac{\mu R}{(2n-1)(2n+1)} \mathfrak{D}_{n-1} \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\mu}{kR} \mathfrak{D}_n \mathfrak{D}_{n-1} J_{n+\frac{1}{2}}(kR), \right. \\ &= J_{n-\frac{1}{2}}(kR)^* \cdot \frac{1}{R} (2n-1) \mathfrak{D}_n^2 + \frac{\mu}{kR} \mathfrak{D}_n \mathfrak{D}_{n-1} J_{n+\frac{1}{2}}(kR), \end{aligned}$$

oder:

$$\mathfrak{D}_{n-1} \mathcal{Y}_{n+1} + \mathfrak{D}_{n+1} \mathcal{Y}_{n-1} = \frac{2n-1}{kR} \mathfrak{D}_n \mathcal{Y}_n,$$

oder schliesslich:

$$34) \quad \mathcal{Y}_n = \frac{kR}{2n-1} \frac{\mathfrak{D}_{n-1}(\mu R)}{\mathfrak{D}_n(\mu R)} \mathcal{Y}_{n-1} + \frac{kR}{2n-1} \frac{\mathfrak{D}_{n+1}(\mu R)}{\mathfrak{D}_n(\mu R)} \mathcal{Y}_{n+1};$$

diese Formel, in der die Koeffizienten von $\mathcal{Y}_{n-1}$ und $\mathcal{Y}_{n+1} \neq 0$ (übrigens stets positiv**) sind, ist das für uns brauchbare Analogon der Formel 30).

Es ergibt die successive Anwendung der Formel 34), dass auch jedes

$$\mathcal{Y}_\varrho = 0$$

sein muss ($\tau < \varrho < \sigma$), wenn die beiden Formeln 32) erfüllt sind, wobei wir natürlich unter σ , τ , ϱ ganze Zahlen verstehen; im besonderen folgt:

$$\mathcal{Y}_{\sigma-1} = 0.$$

*) Alle übrigen mit $J_{n-\frac{1}{2}}(kR)$ multiplizierten Glieder heben sich fort.

**) Nur das Anm. S. 421 definierte $\mathfrak{D}_{j-1}$ für $j=0$ ist negativ, was für die folgenden Schlüsse nicht in Betracht kommt.

Nun ist:

$$\Psi_{\sigma-1} = k \mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R) J_{\sigma-\frac{3}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2\sigma-3} \mathfrak{D}_{\sigma-2}(\mu R) J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR)$$

oder, wenn wir bedenken, dass:

$$\frac{kR}{2\sigma-1} J_{\sigma-\frac{3}{2}}(kR) = J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) - \frac{kR}{2\sigma-1} J_{\sigma+\frac{1}{2}}(kR), \quad (\text{nach 30))}$$

$$\mu R \mathfrak{D}_{\sigma-2}(\mu R) = (2\sigma-1)(2\sigma-3) \{ \mu R \mathfrak{D}_{\sigma}(\mu R) - \mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R) \},$$

(2. Formel 33)),

auch:

$$\Psi_{\sigma-1} = \mu(2\sigma-1) \mathfrak{D}_{\sigma}(\mu R) J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) - k \mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R) J_{\sigma+\frac{1}{2}}(kR).$$

Die beiden Gleichungen

$$\Psi_{\sigma} \equiv k \mathfrak{D}_{\sigma}(\mu R) J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2\sigma-1} \mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R) J_{\sigma+\frac{1}{2}}(kR) = 0,$$

$$\Psi_{\sigma-1} \equiv \mu(2\sigma-1) \mathfrak{D}_{\sigma}(\mu R) J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) - k \mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R) J_{\sigma+\frac{1}{2}}(kR) = 0$$

können nun nicht gleichzeitig bestehen, weil weder gleichzeitig

$$J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) = 0, \quad J_{\sigma+\frac{1}{2}}(kR) = 0,$$

noch die Determinante:

$$(k^2 + \mu^2) \mathfrak{D}_{\sigma}(\mu R) \mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R) = 0$$

sein kann.

Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

§ 4.

Von allen durch den allgemeinen Satz III gegebenen Schwingungen wird uns vor allem der Spezialfall

$$j = 0$$

interessieren. In diesem Falle ist

$$Y_j \text{ eine Konstante } = c,$$

$$\mathfrak{D}_j(\mu r) = \frac{e^{-\mu r}}{\mu r},$$

$$J_{j+\frac{1}{2}}(k_j r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sin k_0 r,$$

und die Gleichungen 28), 29) werden:

$$35) \quad \begin{cases} \Phi_0'' = c \cdot \frac{e^{-\mu r}}{r}, & (\text{im Aussenraume}), \\ \Phi_0'' = c \cdot e^{-\mu R} \frac{\sin k_0 r}{\sin k_0 R} \cdot \frac{1}{r} & (\text{im Innenraume}), \end{cases}$$

$$36) \quad k_0 \cos k_0 R + \mu \sin k_0 R = 0.$$

Die Schwingung, der die kleinste Wurzel k_0 der Gleichung 36) entspricht, werden wir als die Grundschwingung des Systems bezeichnen. Sie besteht in einer Pulsation der Kugel und geht für $\mu = 0$ in die Grundschwingung der gewöhnlichen unversellen Schwingungen über, für die:

$$37) \quad \begin{cases} \Phi_0 = \frac{c}{r}, & (\text{im Aussenraume}), \\ \Phi_0 = c \frac{\sin k_0 r}{r}, & (\text{im Innenraume}), \end{cases}$$

$$38) \quad k_0 = \frac{\pi}{2R}.$$

Vernachlässigt man bei der Grundschwingung erst die zweiten Potenzen von μ , so folgt:

$$39) \quad \begin{cases} \Phi_0'' = \frac{c e^{-\mu r}}{r} & (\text{im Aussenraume}), \\ \Phi_0'' = \frac{c}{r} (1 - \mu R) \frac{\sin k_0 r}{\sin k_0 R} & (\text{im Innenraume}), \\ k_0 = \frac{\pi}{2R} + \varepsilon, \end{cases}$$

wobei ε der Gleichung zu genügen hat:

$$40) \quad -k_0 \sin(\varepsilon R) + \mu \cos(\varepsilon R) = 0$$

oder in erster Annäherung:

$$41) \quad \begin{cases} \varepsilon = \frac{2\mu}{\pi}, \\ \sin k_0 R = 1, \\ \sin k_0 r = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{r}{R}\right) + \frac{2\mu r}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{r}{R}\right); \end{cases}$$

Wir können somit für die Grundschiwingung das folgende Resultat aussprechen:

Zusatz zu III. Für die Grundschiwingung ist:

$$\Phi_0'' = c \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (\text{im Aussenraume}),$$

$$\Phi_0'' = c \frac{e^{-\mu R}}{\sin k_0 R} \cdot \frac{\sin k_0 r}{r}, \quad (\text{im Innenraume}),$$

und k_0 die kleinste positive Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$k_0 \cos k_0 R + \mu \sin k_0 R = 0.$$

Ist μ sehr klein, und vernachlässigen wir bereits zweite Potenzen von μ , so wird:

$$42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0'' = c \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (\text{im Aussenraume}), \\ \Phi_0'' = \frac{c}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{2 R}\right) + c \mu \left[\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi r}{2 R}\right) - \frac{R}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{2 R}\right) \right], \\ \hspace{15em} (\text{im Innenraume}), \\ k_0 = \frac{\pi}{2 R} + \frac{2 \mu}{\pi}. \end{array} \right.$$

Die mit k_0 umgekehrt proportionale Schwingungsdauer der Grundschiwingung wird durch die Absorption des Zwischenmediums verkleinert.
