

**Sitzungsberichte**  
der  
mathematisch-physikalischen Classe  
der  
**k. b. Akademie der Wissenschaften**  
zu **München.**

---

Band XXII. Jahrgang 1892.

---



**München.**  
Verlag der K. Akademie.  
1893.

---  
In Commission bei G. Franz.

# Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme.

Von Walter Dyck.

(Zweite Mitteilung.)

(Mit Tafel V–VII.)

(Eingelaufen 6. April.)

## § 1.

### Einleitung.

In einer ersten Abhandlung „Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen definirten Curvensysteme“<sup>1)</sup> habe ich den Verlauf dieser Curvensysteme in der Umgebung ihrer „wesentlich“ und „ausserwesentlich singulären“ Stellen einer genaueren Betrachtung unterzogen und dabei auch die Frage nach dem „Gesamtverlauf“ eines solchen Curvensystems aus der Kenntniss von Lage und Charakter der

---

1) Berichte der k. bayer. Akad. d. Wiss. 21. Bd. 1891. p. 23 ff. Auf diese Abhandlung, die in der Folge durch [Abh. I.] citirt ist, sei auch bezüglich der Litteratur über den Gegenstand verwiesen. Fundamental für die folgenden Entwicklungen ist selbstverständlich wieder die Abhandlung von Briot und Bouquet „Sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles“ im 36. Heft des Journal de l'école polyt.

einzelnen singulären Stellen discutirt und zwar je für die verschiedenen Blätter, in welchen sich das Curvensystem über der  $(x, y)$ -Ebene ausbreitet.

Im Folgenden ist ein anderer Weg eingeschlagen, um über den Gesamtverlauf der Integral-Curven einer Differentialgleichung erster Ordnung Aufschluss zu erhalten: Man betrachte durch Einführung eines Parameters die einzelne Differentialgleichung als Glied einer Reihe von continuirlich in einander übergehenden Differentialgleichungen und studire die Aenderungen, welche die Integralcurven durch eine solche stetige Abänderung der Differentialgleichung erleiden.

Es bleibt dann bei dieser continuirlichen Abänderung der Gesamtcharacter des Curvensystems im Allgemeinen erhalten und ändert sich nur an gewissen Sprungstellen durch Entstehen, Umformung und Verschwinden von singulären Punkten.

Dabei bezieht sich der schon in Abh. I. gebrauchte Ausdruck „Gesamtcharacter“ wie dort auch hier wieder auf die Art und Verteilung der singulären Stellen, auf die im Sinne der Analysis situs genommene Anordnung der verschiedenen Blätter und des darin näherungsweise darzustellenden Verlaufes der einzelnen Curvenzweige. Eigenschaften von Integralcurven dagegen, wie die, sich zu schliessen, oder noch specieller, algebraisch zu sein, fallen hier ausser Betracht, denn sie werden im Allgemeinen bei einer infinitesimalen Aenderung der Differentialgleichung verloren gehen.

So versucht die vorliegende Abhandlung eine Darstellung derjenigen Eigenschaften des Integralcurvensystems einer Differentialgleichung erster Ordnung, welche bei im Sinne der Analysis situs nicht wesentlichen Umformungen der Differentialgleichung erhalten bleiben durch die Darlegung

derjenigen Aenderungen, welche das Integralsystem bei den im Sinne der Analysis situs wesentlichen Umänderungen erleidet.

Das System der Differentialgleichungen, welches wir in seiner continuirlichen Umformung untersuchen, ist nun das folgende:

$$F(x, y, y') - k = 0$$

mit  $k$  als Parameter. Hier werden die analytischen Formulierungen von einfachster Art, sind aber doch allgemein genug, um das Verhalten solcher Umformungen auch in anderen einfach unendlichen Systemen von Differentialgleichungen übersehen zu können.

Weiter legen wir im Folgenden die Function  $F(x, y, y')$  von „algebraischem Character“ als eine reelle, eindeutige Function der reellen Veränderlichen  $x, y, y'$  zu Grunde, die nur für endliche Werte dieser Variablen verschwindet, an jeder Stelle  $x_0, y_0, y'_0$  nach ganzen Potenzen von  $(x - x_0)$ ,  $(y - y_0)$ ,  $(y' - y'_0)$  entwickelbar ist und deren drei Ableitungen nach den Variablen nur für discrete Werte derselben gleichzeitig verschwinden.

Machen wir von der vielfach anzuwendenden Vorstellung des Systems  $F(x, y, y') - k = 0$  als eines Systems von Flächen in einem Raume mit den Coordinaten  $x, y, y'$  Gebrauch, so entspricht den eben gemachten Annahmen die Vorstellung eines Systems von ganz im Endlichen gelegenen, einander nicht schneidenden, geschlossenen Flächen, die den Raum gerade einfach durchsetzen.<sup>1)</sup> Auf jeder solchen Fläche

---

1) Hiezu sei erwähnt: Durch die obige Bedingung schliessen wir auch das Auftreten von sog. Unbestimmtheitspunkten aus, denen in unserer Flächendeutung das Auftreten einer zur  $xy$ -Ebene senkrechten Geraden  $x = x_0, y = y_0$  entspricht. Eine beiläufige Bemerkung der Abb. I. (pag. 30 oben) ist selbstverständlich unrichtig, wenn es

ist das ihr entsprechende System der Integralcurven einfach überdeckend, ausgebreitet.

Die wichtigsten Umformungen dieses Curvensystems entsprechen denjenigen Umänderungen der Flächen des Systems, bei welchen die charakteristische Zahl (Zusammenhangszahl) der Fläche sich ändert. Ihnen entsprechen Aenderungen in der Anzahl der singulären Punkte des Curvensystems, den Relationen zufolge, welche diese Anzahlen mit der charakteristischen Zahl verknüpfen.<sup>1)</sup> Alle übrigen Aenderungen, die bei der continuirlichen Umformung im Verlaufe des Curvensystems auftreten, sind — auch wenn dabei singuläre Stellen auftreten oder verschwinden oder sich umformen — so beschaffen, dass sie jene charakteristischen Relationen nicht ändern.

Nehmen wir nun einmal an, für irgend eine Differentialgleichung des Systems sei der Verlauf der Integralcurven bekannt, so lässt sich die successive Aenderung der Integralcurven mit änderndem  $k$  von hier aus anschaulich verfolgen; speciell für die soeben gemachten Annahmen über die Endlichkeit der Fläche  $F(x, y, y') = 0$  wird es einen Parameterwert  $k_a$  geben, für welchen die Fläche  $F(x, y, y') - k_a = 0$  lediglich aus isolirten Punkten besteht, um von hier aus sich im Raume der  $x, y, y'$  continuirlich auszubreiten; dann werden wir von da ab mit der Entstehung des Integralcurvensystems selbst die Discussion der gestaltlichen Verhältnisse um die Bedingungen für das Eintreten von Unbestimmtheitspunkten im Allgemeinen handeln soll.

Ich nehme Gelegenheit, hier weiter ein Versehen zu berichtigen, welches in Formel (35.) auf pag. 54 untergelaufen ist. Die letzte der dort gegebenen drei Gleichungen ist, wie unmittelbar ersichtlich, zu ersetzen durch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c \partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c \partial x} = 0.$$

1) Abh. I pag. 47, 48; Poincaré, Liouville's Journal Serie III Bd. 8, Serie IV Bd. 1.

nisse des Integralsystems beginnen können durch die Bezeichnung der Aenderungen, welche an den näher zu bestimmenden besonderen Stellen für den Verlauf unseres Curvensystems eintreten.

Diese Untersuchung ist im Folgenden ausgeführt, und sind dabei insbesondere diejenigen Umänderungen einer eingehenderen Betrachtung unterzogen, die mit einer gleichzeitigen Aenderung der charakteristischen Zahl der Fläche  $F - k = 0$  verbunden sind; die übrigen bemerkenswerten gestaltlichen Aenderungen sind im Folgenden wesentlich nur in so weit besprochen, als es eine genaue Classification erforderte. Es bieten übrigens, wie gleich hier erwähnt sei, gerade auch diese Fälle (insbesondere die im § 4 und 5 besprochenen) ein weitergehendes Interesse speciell für den Verfolg der Frage der näherungsweisen Integration einer Differentialgleichung für die Umgebung gewisser singulärer Stellen und zwar deshalb, weil hier die Betrachtung erster Näherungen wegen der geringen Zahl der in den betreffenden Näherungsgliedern noch enthaltenen Constanten singuläre Vorkommnisse herbeiführt, die keineswegs bei Ausdehnung auf eine grössere Gliederzahl noch statthaben. Ich denke darauf in einer ausführlicheren Darlegung einzugehen.

## § 2.

### Allgemeine Festsetzungen und Bezeichnungen.

Um das Verhalten der Integralcurven der Differentialgleichung

$$(1.) \quad F(x, y, y') - k_0 = 0$$

für die Umgebung einer Stelle  $x_0, y_0, y'_0$  zu untersuchen, entwickeln wir zunächst  $F$  in eine Potenzreihe nach  $(x - x_0)$ ,  $(y - y_0)$ ,  $(y' - y'_0)$  und führen (vergl. Briot-Bouquet a. a. O. pag. 191) in dieselbe die Substitution ein:

$$\begin{aligned}
 (2.) \quad & x - x_0 = \xi, \\
 & (y - y_0) - y'_0 (x - x_0) = \eta; \text{ wo dann} \\
 & y' - y'_0 = \eta' = \frac{d\eta}{d\xi}.
 \end{aligned}$$

Es kommt dann die folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned}
 (3.) \quad & F(x, y, y') - k_0 \equiv \\
 & (\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2) \xi + \bar{F}_2 \eta + \bar{F}_3 \eta' + \\
 & + \frac{1}{2} \{ (\bar{F}_{11} + 2y'_0 \bar{F}_{12} + y'^2_0 \bar{F}_{22}) \xi^2 + 2(\bar{F}_{12} + y'_0 \bar{F}_{22}) \xi \eta + \bar{F}_{22} \eta^2 \} + \\
 & + (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi \eta' + \bar{F}_{23} \eta \eta' + \frac{1}{2} \bar{F}_{33} \eta'^2 + \dots
 \end{aligned}$$

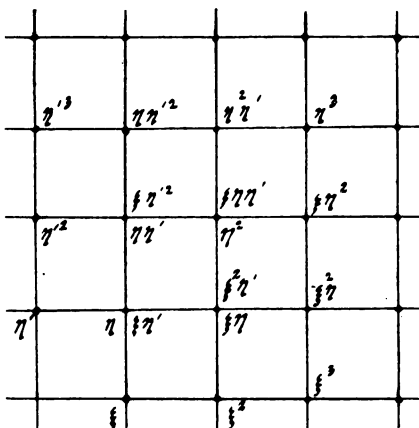
eine Differentialgleichung, die das gemeinsame Wertesystem

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \eta' = 0$$

als Lösung besitzt.

Wir fügen zur Uebersicht des Folgenden das Diagramm bei, in welchem in der bekannten Weise die einzelnen Glieder in Bezug auf ihre Grössenordnung in  $\xi$  und  $\eta'$  (wobei  $\eta$  äquivalent mit  $\eta' \xi$ ) eingetragen sind.

Fig. 1.



Die in (2.) gegebene Umformung ist für die Deutung des Verlaufes der Integralcurven in einer Ebene ( $\xi\eta$ ) und für die andere in der Ebene ( $xy$ ) selbstverständlich unwesentlich; wir werden im Folgenden von der einen und anderen Ebene Gebrauch machen und ebenso je nach Zweckmässigkeit für die räumliche Anschauung von dem Coordinatensystem  $x, y, y'$  und dem andern  $\xi, \eta, \eta'$ .

Bezüglich der eingeführten Bezeichnungen sei noch erwähnt, dass wir da wo es wünschenswert erscheint, die Werte der Ableitungen von  $F$  nach den Variablen  $x, y, y'$  als bestimmt für einen Punkt  $x_0, y_0, y'_0$  hervorzuheben, die Ausdrücke  $F_1, F_2, F_3, F_{11}$  u. s. w. wie in Gleichung (3.) mit einem horizontalen Strich versehen, der wegbleibt, wenn die Stelle  $x, y, y'$  unbestimmt bleiben soll.

Weiter ist es zweckmässig, die Richtung des Durchlaufens des Systems

$$F(x, y, y') - k = 0$$

auf einfache Weise zu präzisiren. Wir betrachten die Constante  $k$  als wachsend. Machen wir die obige Annahme, dass  $F(x, y, y')$  nur für endliche Werte der Variablen verschwindet, so lässt sich das Vorzeichen so normiren, dass  $F$  für unendlich grosse Werte der Variablen positiv ist; indem wir dann von dem untersten Wert  $k_a$  des Parameters  $k$ , für welchen noch eben ein reelles Wertsystem  $x, y, y'$  der Gleichung  $F - k_a = 0$  genügt, ausgehen und die Gleichung  $(F - k_a) = k$  für unser System einführen, lässt sich der Parameter  $k$  als durchaus positive Grösse einführen.

---



## I. Abschnitt.

## Die wesentlich singulären Stellen der Differentialgleichungen

$$F(x, y, y') - k = 0.$$

## § 3.

## Uebersicht.

Die Stelle  $x_0, y_0, y'_0$  ist wesentlich singulär, wenn gleichzeitig die drei Gleichungen statthaben

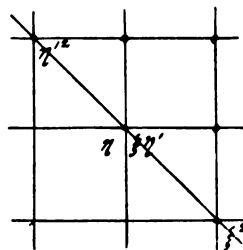
$$(4.) \quad \bar{F} - k_0 = 0, \quad \bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2 = 0, \quad \bar{F}_3 = 0.$$

Das Verhalten des Systems der Integralcurven in der Umgebung einer solchen Stelle ist (Abh. I) näherungsweise gegeben durch die Differentialgleichung:

$$(5.) \quad 0 = \bar{F}_2 \eta + \frac{1}{2} (\bar{F}_{11} + 2 y'_0 \bar{F}_{12} + y'^2_0 \bar{F}_{22}) \xi^2 + \\ + (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi \eta' + \frac{1}{2} \bar{F}_{33} \eta'^2,$$

welche dem aus Fig. 1 abgeleiteten Diagramm (Fig. 2.) entspricht.

Fig. 2.



Wir bezeichnen wie in (Abh. I) die drei Kategorien der wesentlich singulären Punkte als:

- Kateg. I. Punkte  $P_0$  (Taf. I, Fig. I d. Abh. I.)  
 „ II. „  $P_2$  (Tafel II, Fig. II.)  
 „ III. „  $P_\infty$  (Tafel III, Fig. III.)

Dann sind für die Unterscheidung dieser 3 Kategorien die Vorzeichen der folgenden beiden Ausdrücke massgebend

$$(6.) \quad \bar{M} = \begin{vmatrix} \bar{F}_{11} + 2 y'_0 \bar{F}_{12} + y'^2_0 \bar{F}_{22} & \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23} + \bar{F}_2 \\ \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23} & \bar{F}_{33} \end{vmatrix}$$

und

$$\bar{N} = 4 \bar{M} - \bar{F}_2^2$$

und zwar hat man folgende Tabelle der Vorzeichencombinationen:

(7.)

| $\bar{M}$ | $\bar{N}$ | Kategorie          |
|-----------|-----------|--------------------|
| +         | +         | I ( $P_0$ )        |
| +         | —         | III ( $P_\infty$ ) |
| —         | —         | II ( $P_s$ )       |

Denken wir uns nun das System der Differentialgleichungen

$$F(x, y, y') - k = 0$$

mit änderndem (wachsendem) Parameter  $k$  durchlaufen, so werden die jedesmal aus den Gleichungen (4.) zu berechnenden wesentlich singulären Stellen  $(x_0, y_0, y'_0)$  eine stetige Aufeinanderfolge bilden. Besonders für den Verlauf der Curven der Integralsysteme werden dann einmal diejenigen Stellen zu beachten sein, für welche einer der Ausdrücke  $\bar{M}$  bez.  $\bar{N}$  sein Zeichen wechselt, und weiter diejenigen, für welche einer der wesentlichen Terme in der Näherungs-Differentialgleichung (5.) — das sind die Factoren von  $\eta$  und von  $\eta'^2$ ) — verschwindet. Das Verschwinden des Factors  $\bar{F}_s$  von  $\eta$  bringt dabei wegen  $\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_s = 0$  auch das Verschwinden von  $\bar{F}_1$  mit sich.

Sonach ergeben sich zur näheren Untersuchung der wesentlich singulären Stellen:

$$(4.) \quad \bar{F} - k_0 = 0, \quad \bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_s = 0, \quad \bar{F}_s = 0$$

diejenigen Fälle, für welche noch die Bedingungsgleichungen:

1) Man überzeugt sich leicht, dass ein Verschwinden der Factoren von  $\xi^2$  und von  $\xi \eta'$  den Character der singulären Stelle im Sinne der Analysis situs nicht wesentlich beeinflusst.

- A)**  $\bar{M} = 0$  (§ 4.)  
**B)**  $\bar{N} = 0$  (§ 5.)  
**C)**  $\bar{F}_1 = 0, \bar{F}_2 = 0$  (§ 6–8.)  
**D)**  $\bar{F}_{33} = 0$  (§ 9.)

bestehen.

Bedienen wir uns der schon in der Einleitung erwähnten Deutung der Variablen  $x, y, y'$  als rechtwinkliger Coordinaten des Raumes, so können wir folgendes geometrische Bild bei unseren Betrachtungen einführen:

Das System der einfach unendlich vielen Flächen

$$F(x, y, y') - k = 0$$

wird geschnitten einmal von der Fläche

$$F_1 + y' F_2 = 0,$$

welche auf den einzelnen Flächen  $F - k = 0$  diejenigen Curven ausschneidet, für welche die Integralcurven in der Projection auf die  $(xy)$ -Ebene Wendepunkte besitzen.<sup>1)</sup>

Weiter schneidet die Fläche

$$F_3 = 0$$

die Flächen des Systems  $F - k = 0$  je in den Umrisslinien  $U_k$  in Richtung der  $y'$ -Axe; diese Linien, auf die  $xy$ -Ebene projectirt, sind also die Oerter der Spitzen der Integralcurven.

Die Flächen

$$F_1 + y' F_2 = 0 \text{ und } F_3 = 0$$

ihrerseits schneiden sich in einer Raumcurve  $S$ , welche auf den Flächen  $F - k = 0$  je die wesentlich singulären Punkte ausschneidet.

Auf dieser Raumcurve  $S$  sind einmal die Punkte ausgezeichnet, für welche  $M = 0$  bez.  $N = 0$  ist; weiter die-

1) Man vergleiche Darboux „Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre.“ Bulletin des Sciences Mathém. 1. Serie, Bd. IV (1873).

jenigen, für welche gleichzeitig  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$ ,  $F_3 = 0$  ist. d. h. die Knotenpunkte des Flächensystems  $F - k = 0$ ; endlich die Punkte, welche der Gleichung  $F_{33} = 0$  genügen. Für die zu einem dieser letzteren Punkte gehörige Fläche  $F - k = 0$  bedeutet die Bedingung  $F_{33} = 0$ , dass die Umrisscurve der Fläche in ihrer Projection auf die  $xy$ -Ebene eine Spitze besitzt. In diese Spitze, welche nach den Betrachtungen der Abb. I. als ausserwesentlich singuläre Stelle des betr. Integralsystems zu bezeichnen ist, rückt hier noch ein wesentlich singulärer Punkt.

§ 4.

A) Die Bedingung  $\bar{M} = 0$ .

Das Verschwinden der Determinante

$$(8.) \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{11} + y' F_{21} & F_{12} + y' F_{22} & F_{13} + y' F_{23} + F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

drückt die Bedingung dafür aus, dass die Raumcurve  $S$

$$F_1 + y' F_2 = 0 \quad F_3 = 0$$

eine Fläche

$$F - k = 0$$

berührt. Man erkennt sofort, dass diese Bedingung die Form

$$(9.) \quad M \cdot F_3 = 0$$

annimmt, in welcher das Verschwinden des letzten Factors die uneigentlichen Berührungen von  $S$  in den Knotenpunkten des Flächensystems bezeichnet, die Bedingung

$$M = 0$$

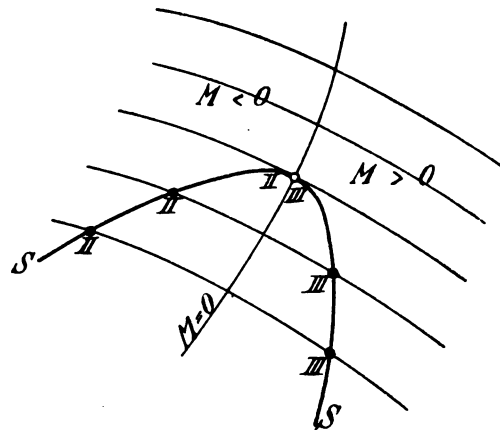
die eigentlichen Berührungen. Dabei trennt die Fläche  $M = 0$  in der Umgebung eines solchen Punktes zwei Gebiete der Raumcurve  $S$ , für welche beziehungsweise

$$M < 0, \quad N < 0$$

und 
$$M > 0, \quad N < 0$$

ist. Wie Fig. 3 schematisch darstellt, vereinigen sich also, wenn wir das Flächensystem in der einen Richtung durchlaufen, zwei singuläre Punkte, und zwar je ein Punkt II und ein Punkt III mit einander, die dann verschwinden;

Fig. 3.



umgekehrt entstehen zwei solche Punkte an einer Stelle  $M=0$ ; es findet das eine bez. andere statt, je nachdem die Raumcurve  $S$  die Fläche  $F - k_0 = 0$  von „innen“ bez. von „aussen“ berührt, was analytisch auf die Vorzeichenbestimmung eines leicht zu bildenden Determinantenausdruckes hinauskommt. Die gestaltliche Umformung, deren ausführliche rechnerische Behandlung<sup>1)</sup> ich hier übergehe, wird besonders übersichtlich in der Projection auf

1) Bei welcher ausser den in Gleichung (5.) gegebenen, zu einer ersten Näherung dienenden Gliedern auch die nächst höheren notwendig heranzuziehen sind.

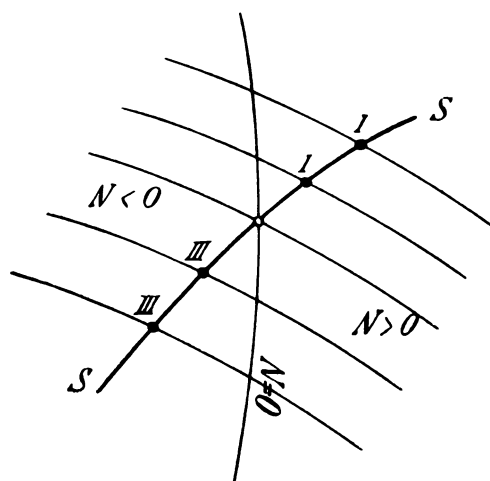
die Ebene  $\xi\eta'$ , in welcher die Umgebung der singulären Stelle eindeutig dargestellt ist.<sup>1)</sup>)

## § 5.

B) Die Bedingung  $N=0$ .

An denjenigen Stellen der Curve  $S$  der singulären Punkte, für welche der Ausdruck  $N$  verschwindet, tritt ein besonderes Verhalten der Curve  $S$  gegenüber dem Flächensystem  $F-k=0$  nicht ein. Die Curve  $S$  tritt, wie Fig. 4. schematisch andeutet, aus einem Gebiete  $N<0$  in ein solches  $N>0$  ein, oder umgekehrt. Dabei ist, wie die auf pag. 108 gegebenen Gleichungen lehren, jedenfalls  $M>0$ . Es verwandelt sich also bei änderndem  $k$  ein singulärer Punkt III in einen Punkt I oder umgekehrt.

Fig. 4.



1) Von dem Umstand der Eindeutigkeit der Projection auf die  $\xi\eta'$ -Ebene in gewissen für die  $\xi\eta$ -Ebene mehrdeutigen Darstellungen ist schon in der Abhandlung I in den Figg. I' II' III' der Tafeln für die dort behandelten Singularitäten Gebrauch gemacht und wir ver-

Die gestaltliche Umformung der singulären Stelle lässt sich an Hand der Figg. III und I (beziehungsweise III' und I') der Abh. I. leicht verfolgen, wenn wir beachten, dass die beiden in der ersten Näherung ausgezeichneten Curvenzweige der Integralcurven, welche den Punkt III durchsetzen, im Grenzfalle zusammenrücken, um dann imaginär zu werden.

## § 6.

C) Die Knotenpunkte des Flächensystems  $F - k = 0$ .  
Geometrische Discussion.

Die Raumcurve  $S$

$$F_1 + y' F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

durchsetzt die durch die Bedingungen

$$C) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

gegebenen Knotenpunkte des Flächensystems  $F - k = 0$ .

Für den Character dieser Stellen ist vor Allem die Lage des Tangentialkegels im Knotenpunkt gegenüber der Raumcurve  $S$  und in Bezug auf die Projection auf die  $xy$ -Ebene zu bestimmen, und zwar sind vier wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Der Tangentialkegel ist imaginär.

a) Ein elliptisch gekrümmter Flächenteil zieht sich auf einen isolirten Knotenpunkt zusammen

---

wenden denselben auch in der Folge bei den in § 9 besprochenen Singularitäten. Das gleiche Princip, die Verhältnisse in einer eindeutigen Darstellung zu übersehen, liegt selbstverständlich auch den von Briot und Bouquet eingeführten allgemeinen Transformationen zu Grunde und kommt weiter in der auch von Poincaré verwendeten Betrachtungsweise des Integralcurvensystems auf der Fläche  $F = 0$  zur Geltung.

um dann zu verschwinden, oder umgekehrt entsteht um einen isolirten Punkt ein solcher ellipsoidischer Flächenteil.

Die Raumcurve  $S$  durchschneidet diese kleine Fläche in zwei Punkten. Also verschwinden bez. entstehen zwei wesentlich singuläre Punkte, je nachdem der Uebergang in der einen oder andern Richtung statthat. (Vergl. die schematische Fig. 5a.)

Der Tangentialkegel ist reell.

Die Flächen  $F - k = 0$  werden derart umgeformt, dass zwei getrennte Flächenteile sich zu einem einzigen vereinigen oder umgekehrt eine Abschnürung eintritt und zwar lässt sich in der Umgebung des Knotenpunktes in bekannter Weise der Uebergang dadurch characterisiren, dass sich zwei elliptisch gekrümmte Flächenteile zu einem hyperbolisch gekrümmten vereinigen bez. eine Trennung eines hyperbolisch gekrümmten in zwei elliptische Flächenteile eintritt. Unterscheiden wir auch die beiden Raumteile, welche der Kegel trennt, als elliptischen, bez. hyperbolischen Teil, so kommt es zunächst darauf an, ob die Curve  $S$  in der Umgebung des Knotenpunktes den elliptischen bez. den hyperbolischen Teil des Raumes durchsetzt.

**b)** Die Raumcurve durchsetzt den elliptischen Raumteil des Kegels.

Beim Uebergang von der elliptisch gekrümmten Fläche zur hyperbolisch gekrümmten rücken zwei wesentlich singuläre Punkte zusammen, um dann zu verschwinden, während beim umgekehrten Uebergang zwei solche Punkte entstehen. (Vergl. die schematische Fig. 5b.)

Durchsetzt die Raumcurve  $S$  den hyperbolisch gekrümmten Flächenteil, so ist noch eine Unterscheidung bezüglich des Umrisses unseres Kegels in der Projection auf die  $(xy)$ -Ebene zu beachten. Diese kann aus einem ima-



ginären oder einem reellen Paar von geraden Linien bestehen.<sup>1)</sup>

c) Die Raumcurve  $S$  durchsetzt den hyperbolischen Teil des Kegels; Umriss des Kegels in die  $(xy)$ -Ebene imaginär.

d) Die Raumcurve  $S$  durchsetzt den hyperbolischen Teil des Kegels; Umriss des Kegels in die  $xy$ -Ebene reell.

In beiden Fällen c) und d) entstehen beim Uebergang von den elliptisch gekrümmten Flächenteilen zu den hyper-

Fig. 5 a.

Fig. 5 b.

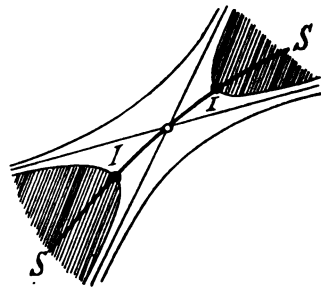
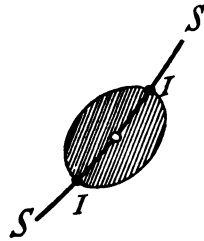
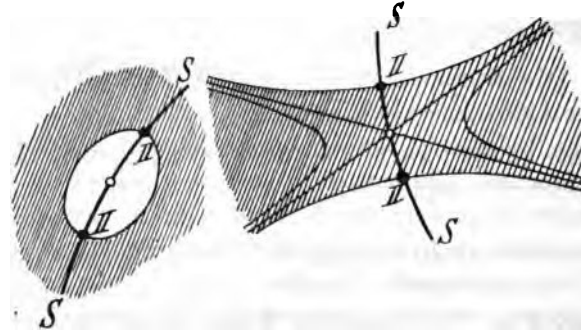


Fig. 5 c.

Fig. 5 d.



1) Im Falle b bildet dieser Umriss, wie leicht zu sehen, notwendig ein reelles Geradenpaar, im Falle a selbstverständlich ein imaginäres.

bolisch gekrümmten zwei wesentlich singuläre Punkte, die beim umgekehrten Uebergang verschwinden. (Vergl. die Figg. 5c und 5d.)

In den Figuren ist jedesmal das doppelt überdeckt zu denkende Gebiet derjenigen Fläche schraffirt, welche die singulären Punkte trägt, also bei a) und b) das Gebiet der elliptisch, bei c) und d) der hyperbolisch gekrümmten Fläche.

### § 7.

#### C) Fortsetzung. Analytische Formulierung.

Die vier Fälle lassen sich nun in einfachster Weise analytisch von einander trennen.

1. Zunächst lässt sich bekanntlich der Unterschied des imaginären vom reellen Kegel nach den gleichen oder ungleichen Vorzeichen der drei Werte, welche die linke Seite der Kegelgleichung für die Kanten irgend eines Polardreikants annimmt, fixiren. Wir wählen als diese Kanten einmal die Tangente an die Raumcurve  $S$ , für welche

$$(10.) \quad dx:dy:dy' = \left\| \begin{array}{ccc} \overline{F}_{11} + y'_0 \overline{F}_{21} & \overline{F}_{12} + y'_0 \overline{F}_{22} & \overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23} \\ \overline{F}_{31} & \overline{F}_{32} & \overline{F}_{33} \end{array} \right\|$$

ist. Dann lässt sich die Axe  $y'$

$$(11.) \quad dx:dy:dy' = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

als zweite Kante wählen und folgt endlich eine Gerade mit der Fortschreitungsrichtung:

$$(12.) \quad dx:dy:dy' = \left\| \begin{array}{ccc} y'_0 & -1 & 0 \\ \overline{F}_{31} & \overline{F}_{32} & \overline{F}_{33} \end{array} \right\|$$

als dritte Kante dieses Polardreiecks.

Beachten wir dann, dass für eine Stelle

$$\overline{F}_1 = 0, \quad \overline{F}_2 = 0, \quad \overline{F}_3 = 0$$

der Ausdruck  $\bar{M}$ :

$$(13.) \quad \bar{M} = \begin{vmatrix} \bar{F}_{11} + 2y'_0 \bar{F}_{12} + y'^0_2 \bar{F}_{22} & \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23} \\ \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23} & \bar{F}_{33} \end{vmatrix}$$

wird, so ergibt sich aus den obenbezeichneten Substitutionen der  $dx:dy:dy'$  in die linke Seite der Kegelfleichung:

$$(14.) \quad \left. \begin{array}{l} \bar{M} \cdot |\bar{F}_{ik}|^1), \\ \bar{F}_{33}, \\ \bar{M} \cdot \bar{F}_{33}. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Gleiche Vorzeichen:} \\ \text{imaginärer Kegel.} \\ \text{Verschiedene Vorzeichen:} \\ \text{reeller Kegel.} \end{array}$$

2. Für die Projection des Kegels auf die  $(xy)$ -Ebene ergibt sich sofort:

Der Umriss des Kegels in der Projectionsrichtung der  $y'$ -Axe ist imaginär oder reell, je nachdem

$$(15.) \quad \bar{F}_{33} \cdot |\bar{F}_{ik}| \begin{array}{l} > 0 \text{ imaginärer Umriss.} \\ < 0 \text{ reeller Umriss.} \end{array}$$

3. Die Lage der Raumcurve  $S$  gegen den Kegel lässt sich direct aus dem Vorzeichen des Productes der Determinante  $|\bar{F}_{ik}|$  in die Determinante bestimmen, welche entsteht, wenn wir  $|\bar{F}_{ik}|$  mit den beiden Zeilen der Matrix (10.) (für die Fortschreitungsrichtung der Raumcurve) rändern. Die letztere Determinante reducirt sich auf  $\bar{M} \cdot |\bar{F}_{ik}|$  und so folgt direct das Vorzeichen von  $\bar{M}$  als charakteristisch für jene gegenseitige Lage, so zwar, dass für

1) Wo zur Abkürzung die Determinante des Kegels

$$\begin{vmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & \bar{F}_{13} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} & \bar{F}_{23} \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} & \bar{F}_{33} \end{vmatrix} = |\bar{F}_{ik}|$$

gesetzt ist.

- (16.)  $\overline{M} > 0$  die Raumcurve  $S$  den „elliptischen“  
 $\overline{M} < 0$  die Raumcurve  $S$  den „hyperbolischen“

Raumteil des Kegels durchsetzt.

4. Endlich lässt sich auch die Richtung des Uebergangs der Flächen  $F - k = 0$  in den Knotenpunkten fixieren. Wir machen dabei von der Eingangs schon erwähnten Normierung der Flächen  $F - k = 0$  Gebrauch und fixieren das Vorzeichen von  $F$  so, dass  $F$  für unendlich grosse Werte von  $x, y, y'$  positiv wird. Durchlaufen wir dann das System  $F - k = 0$  mit wachsendem Parameter  $k$ , so ändern sich die Flächen  $F - k = 0$  einander je umschliessend so, dass stets der „Innenraum“  $F - k = 0$  wächst. Damit wird das Vorzeichen der Determinante  $|\overline{F}_{ik}|$  bestimmend für die Richtung des Ueberganges unserer Flächen in der Umgebung eines Knotenpunktes, so zwar, dass:

$$(17^a.) \quad |\overline{F}_{ik}| > 0$$

den Uebergang vom  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipsoid zur imaginären Fläche,} \\ \text{zweischaligen Hyperboloid zum ein-} \\ \text{schaligen Hyperboloid,} \end{array} \right.$

$$(17^b.) \quad |\overline{F}_{ik}| < 0$$

den umgekehrten Uebergang (den wir hier wie auch in der Folge der Kürze wegen durch die Näherungsflächen bezeichnet haben) characterisirt.

## § 8.

### C) Fortsetzung. Gestaltliche Discussion.

#### Zusammenstellung.

Der gestaltliche Verlauf der Integralcurven in der Umgebung der im Vorstehenden unterschiedenen singulären Stellen folgt nun in übersichtlichster Weise aus folgenden Ueberlegungen:

Die in **3.** gegebene Unterscheidung der Lage der Raumcurve  $S$  gegen den Kegel durch das Vorzeichen von  $\overline{M}$  fixiert gleichzeitig die Kategorie der im Knotenpunkte zusammenrückenden Singularitäten:

Im Falle a), in welchem der Kegel imaginär, das den Knotenpunkt umgebende und von  $S$  durchsetzte Gebiet „elliptisch“ ist, und ebenso im Falle b) in welchem die Raumcurve  $S$  den „elliptischen“ Raumteil des reellen Kegels durchsetzt, fallen, wenn wir den Uebergang mit der elliptisch gekrümmten Fläche beginnen, im Knotenpunkt zwei singuläre Stellen I. Art zusammen, um dann zu verschwinden.

In den Fällen c) und d), in welchen  $S$  den „hyperbolischen“ Raumteil des (reellen) Kegels durchsetzt, entstehen, wenn wir wieder den Uebergang mit der elliptisch gekrümmten Fläche beginnen, im Knotenpunkt zwei zunächst vereinigte singuläre Stellen II. Art, die sich dann auf der hyperbolisch gekrümmten Fläche trennen.

Das Verhalten des Integralsystems für die Fläche mit Knotenpunkt sei nun zunächst noch dadurch genauer präcisiert, dass wir diejenigen Curvenzweige, welche durch den singulären Punkt hindurchlaufen, direct nach der Methode von Briot und Bouquet bestimmen. In erster Annäherung lautet hier die Differentialgleichung:

$$(18.) (\overline{F}_{11} + 2y'_0 \overline{F}_{12} + y'^0_2 \overline{F}_{22}) \xi^2 + 2(\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23}) \xi \eta' + \overline{F}_{33} \eta'^2 = 0$$

und deren Integral

$$(19.) \quad \eta = \xi^2 \cdot \frac{-(\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23}) \pm \sqrt{-\overline{M}}}{2 \overline{F}_{33}}$$

es ergeben sich also zwei Parabeln als Näherungscurven an

die beiden durch den singulären Punkt laufenden Zweige des Integralsystems. Diese sind imaginär für  $\bar{M} > 0$ , also in den Fällen a) und b), reell für  $\bar{M} < 0$ , also in den Fällen c) und d). In den letzten beiden Fällen unterscheidet noch das Vorzeichen:

$$(20.) \quad (\bar{F}_{11} + 2y'_0 \bar{F}_{12} + y'^0{}^2 \bar{F}_{22}) \cdot \bar{F}_{33} \begin{matrix} > 0 \\ < 0, \end{matrix}$$

ob die beiden sich im singulären Punkte berührenden Curvenzweige auf  $\begin{cases} \text{einer Seite} \\ \text{beiden Seiten} \end{cases}$  ihrer gemeinsamen Tangente verlaufen, ein Umstand, den wir sogleich noch weiter berücksichtigen.

Das Verhalten des Integralsystems für die der Fläche mit Knotenpunkt vorausgehenden und für die nachfolgenden Flächen ist durch die Fixierung der Art der auf ihnen liegenden singulären Stellen (I. bez. II. Art) nunmehr für die Umgebung dieser Stellen nach den in Abb. I. gegebenen Ausführungen näher zu bestimmen. Es mag dabei noch für die genauere gestaltliche Characterisierung die Curve der Wendepunkte der Integralcurven:

$$F - k = 0, \quad F_1 + y' F_2 = 0$$

in ihrer Umformung bei dem Uebergang durch die Fläche mit Knotenpunkt untersucht werden.

Bezeichne

$$k_0 - \varepsilon, \quad k_0, \quad k_0 + \varepsilon$$

die Parameter der Fläche mit Doppelpunkt, und deren vorausgehender sowie nachfolgender ( $\varepsilon$  positiv), so kann die obige Curve in erster Annäherung ersetzt werden durch eine Curve zweiter Ordnung, die durch den Schnitt der ersten Näherungsflächen entsteht. Das ist einmal die Fläche zweiten Grades:

$$\left. \begin{array}{c} + 2\varepsilon \\ 0 \\ - 2\varepsilon \end{array} \right\} = \overline{F}_{11}(x-x_0) + 2\overline{F}_{12}(x-x_0)(y-y_0) + \overline{F}_{22}(y-y_0)^2 + 2\overline{F}_{13}(x-x_0)(y'-y'_0) + \dots$$

und dann die Tangentialebene:

$$(\overline{F}_{11} + y'_0 \overline{F}_{21})(x-x_0) + (\overline{F}_{12} + y'_0 \overline{F}_{22})(y-y_0) + (\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23})(y'-y'_0) = 0.$$

Für die Fläche mit Knotenpunkt hat daher die Curve der Wendepunkte einen Doppelpunkt, der sich beim Uebergang von  $-\varepsilon$  nach  $+\varepsilon$  in der bekannten Weise auflöst.

Der Doppelpunkt ist  $\begin{cases} \text{isolirt bez.} \\ \text{nichtisolirt,} \end{cases}$  je nachdem

$$(21.) \quad (\overline{F}_{11} + 2y'_0 \overline{F}_{12} + y'^2_0 \overline{F}_{22}) \cdot |\overline{F}_{ik}| \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array}$$

ist. Nun beachte man, dass im Falle

$$\overline{M} > 0$$

$$\overline{F}_{33} \text{ und } (\overline{F}_{11} + 2y'_0 \overline{F}_{12} + y'^2_0 \overline{F}_{22})$$

notwendig gleiches Vorzeichen besitzen, die obige Unterscheidung also direct die Trennung der Fälle  $\begin{cases} \text{a)} \\ \text{b)} \end{cases}$  bezeichnet; so kommt hier:

Im Falle a) ist der Doppelpunkt der Wendepunktscurve stets isolirt; im Falle b) existiren stets zwei reelle Zweige der Wendepunktscurve durch den singulären Punkt, die sich dann beim Uebergang auf die Gleichungen mit  $-\varepsilon$  bez.  $+\varepsilon$  als Parameter je in zwei hyperbolische Aeste auflösen.

In den Fällen c) und d) dagegen haben wir nach der einen oder andern Form der Wendepunktscurve je zwei Unterfälle zu unterscheiden. Nun übersieht man aber leicht (vergl. die nachfolgende Vorzeichentabelle), dass der eben betrachtete Ausdruck

$$(21.) \quad (\bar{F}_{11} + 2y'_0 \bar{F}_{12} + y'^0_2 \bar{F}_{22}) \cdot |F_{ik}|$$

und der oben für den Unterschied der gegenseitigen Lage der durch den singulären Punkt verlaufenden Curvenzweige abgeleitete

$$(20.) \quad (\bar{F}_{11} + 2y'_0 + y'^0_2 \bar{F}_{22}) \cdot \bar{F}_{33}$$

gleiches } Vorzeichen haben im Falle  $\begin{cases} c) \\ d) \end{cases}$ ; es ergibt  
ungleiches }  
sich daher: Liegen für einen Punkt c) die beiden durch den Knotenpunkt verlaufenden Curvenzweige auf  $\begin{cases} \text{einer} \\ \text{beiden} \end{cases}$  Seiten ihrer gemeinschaftlichen Tangente, so hat die Wendepunktscurve dort einen  $\begin{cases} \text{isolirten} \\ \text{nichtisolirten} \end{cases}$  Doppelpunkt; für einen Punkt d) dagegen hat man einen  $\begin{cases} \text{nichtisolirten} \\ \text{isolirten} \end{cases}$  Doppelpunkt der Wendepunktscurve, je nachdem die durch den Knotenpunkt verlaufenden Curvenzweige auf  $\begin{cases} \text{einer} \\ \text{beiden} \end{cases}$  Seiten ihrer Tangente liegen.

In den Tafeln V, VI, VII sind die vier Fälle a), b), c), d) und zugleich jedesmal die beiden benachbarten Formen schematisch dargestellt. Die Fälle c) und d) beziehen sich dabei auf den Fall des isolirten Doppelpunkts der Wendepunktscurve, wo dann nach der einen Richtung des Uebergangs ein kleines Oval als Wendepunktscurve auftritt, während in der andern Richtung des Uebergangs keine reellen Wendepunkte mehr in der Umgebung der singulären Stelle vorhanden sind.

Die nachfolgende Tabelle gibt gleichzeitig die zusammenfassende Uebersicht über die Vorzeichencombinationen jener drei Ausdrücke

$$\bar{M}, \quad \bar{F}_{33} \cdot |F_{ik}|, \quad |\bar{F}_{ik}|,$$



die nach den vorstehenden Entwicklungen für die Unterscheidung der vier Fälle und der Richtung des Uebergangs in denselben dienen:

**Tabelle**

für die Art der Singularitäten in den Knotenpunkten

$$\overline{F}_1 = 0 \quad \overline{F}_2 = 0 \quad \overline{F}_3 = 0.$$

|    | $\overline{M}$ | $\overline{F}_{33} \cdot  \overline{F}_{ik} $ | $ \overline{F}_{ik} $ |              |                                                       |
|----|----------------|-----------------------------------------------|-----------------------|--------------|-------------------------------------------------------|
| a) | +              | +                                             | +                     | Verschwinden | von zwei (Taf. IV<br>wesentlich Fig. a)<br>singulären |
|    | +              | +                                             | —                     | Entstehen    |                                                       |
| b) | +              | —                                             | +                     | Verschwinden | Punkten (Taf. IV<br>I. Art. Fig. b)                   |
|    | +              | —                                             | —                     | Entstehen    |                                                       |
| c) | —              | +                                             | +                     | Entstehen    | von zwei (Taf. V<br>wesentlich Fig. c)<br>singulären  |
|    | —              | +                                             | —                     | Verschwinden |                                                       |
| d) | —              | —                                             | +                     | Entstehen    | Punkten (Taf. VI<br>II. Art. Fig. d)                  |
|    | —              | —                                             | —                     | Verschwinden |                                                       |

§ 9.

D) Die Bedingung  $\overline{F}_{33} = 0$ .

Wie in § 2 erwähnt, besagt das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$F_s = 0, \quad F'_{ss} = 0$$

für die Flächen

$$F - k = 0,$$

dass der Umriss derselben in seiner Projection auf die  $xy$ -Ebene eine Spitze besitzt. Die Ordinate  $y'$  schneidet die Fläche  $F - k = 0$  in drei aufeinanderfolgenden Punkten und die in der Umgebung dieser Stellen liegenden reellen Wert-

systeme von  $y'$  überdecken die durch die Umrisscurve geteilte Projectionsebene  $xy$  drei- bez. einfach in der etwa in Fig. 7<sup>b</sup> schematisch angedeuteten Form (vergl. auch Abh. I.).

Wird nun, was für einen Wert  $k_0$  des Parameter eintreten möge, gleichzeitig die Gleichung

$$F_1 + y' F_2 = 0$$

erfüllt, so tritt in diesen Punkt (der im Allgemeinen ein ausserwesentlich singulärer für das Integralsystem ist, wie ihn Tafel IV Fig. IV der Abh. I. kennzeichnet) noch ein wesentlich singulärer Punkt herein. Und zwar findet der Uebergang, wenn wir die benachbarten Gleichungen für

$$k_0 - \varepsilon, \quad k_0, \quad k_0 + \varepsilon$$

betrachten, in der Weise statt, dass der betreffende wesentlich singuläre Punkt von dem einen Zweig der Spitzencurve auf den anderen Zweig rückt.

Für  $F_{23} = 0$  wird nun

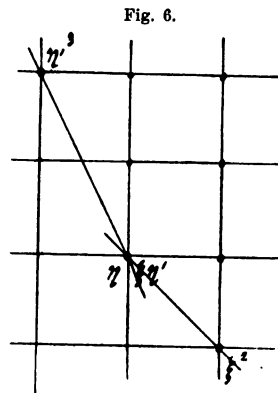
$$(22.) \quad \bar{M} = -(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})^2 - \bar{F}_2 (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})$$

und

$$\bar{N} = 4\bar{M} - \bar{F}_2^2 = -(2(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) + \bar{F}_2)^2 < 0;$$

der wesentlich singuläre Punkt ist also jedenfalls III<sup>ter</sup> oder II<sup>ter</sup> Art, je nach dem positiven oder negativen Vorzeichen von  $\bar{M}$ .

Für die durch den singulären Punkt laufenden Zweige der Integralcurven ergeben sich in erster Näherung aus dem nebenstehenden Schema die folgenden beiden Differentialgleichungen:



$$(23^a.) \quad \bar{F}_2 \eta + (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi \eta' + \frac{1}{6} \bar{F}_{333} \eta'^3 = 0$$

und

$$(23^b.) \quad \bar{F}_2 \eta + \frac{1}{2} (\bar{F}_{11} + 2 y'_0 \bar{F}_{12} + y'^2_0 \bar{F}_{22}) \xi^2 \\ + (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi \eta' = 0$$

Bestimmt man nun nach dem von Briot und Bouquet gegebenen Verfahren mit Hülfe dieser Gleichungen die durch den singulären Punkt verlaufenden Curvenzweige, so ergeben sich zunächst aus (23<sup>a</sup>.) die zwei Zweige:

$$(24^a.) \quad \eta = \pm \frac{2}{3} \sqrt{-2 \frac{2 \bar{F}_2 + 3 (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})}{\bar{F}_{332}} \xi^{\frac{3}{2}} + \dots}$$

und aus (23<sup>b</sup>.) der weitere:

$$(24^b.) \quad \eta = \frac{-(\bar{F}_{11} + 2 y'_0 \bar{F}_{12} + y'^2_0 \bar{F}_{22})}{4 (\bar{F}_2 + \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})} \xi^2 + \dots$$

Es ist nun vor Allem zu entscheiden, welche Lage diese Curvenzweige zur Umrisscurve, und damit auf den drei im singulären Punkt zusammenhängenden Blättern der Fläche  $F - k_0 = 0$  einnehmen.

Die Umrisscurve

$$F - k_0 = 0, \quad F_3 = 0$$

lässt sich für die Umgebung der singulären Stelle näherungsweise ersetzen durch

$$(25^a.) \quad \bar{F}_{333} \bar{F}_2 \cdot \eta^3 + \frac{8}{9} (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi^3 = 0.$$

Um die drei Blätter der Fläche  $F - k_0 = 0$ , die (Fig. 7) in der  $(\xi \eta)$ -Ebene übereinander liegen, zu trennen, genügt es, die Abbildung auf die  $(\xi \eta')$ -Ebene zu machen. Dort erscheint in erster Annäherung die Umrisscurve als Parabel, gegeben durch:

$$(25^b.) \quad \frac{1}{2} \bar{F}_{333} \eta'^2 + (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi = 0$$

und ist die Beziehung der beiden Projectionen auf einander durch die nebenstehende Figur gegeben:

Fig. 7a.

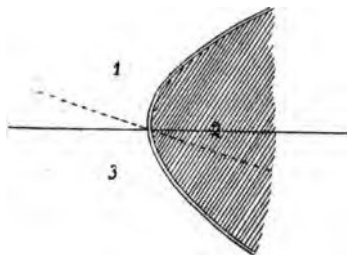
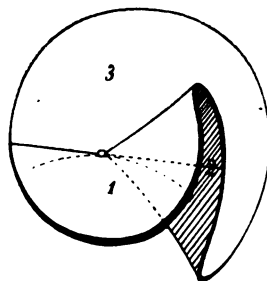


Fig. 7b.



Für die Abbildung der oben in erster Näherung gegebenen durch den singulären Punkt laufenden Curvenzweige erhält man nun einmal die Parabel

$$(26^a.) \quad \frac{1}{2} \bar{F}_{333} \eta'^2 + (2 \bar{F}_2 + 3 (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})) \xi = 0$$

und weiter die Gerade

$$(26^b.) \quad (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})(\bar{F}_2 + 2(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})) \eta' + (\bar{F}_{11} + 2 y'_0 \bar{F}_{12} + y'^2_0 \bar{F}_{22}) \cdot (\bar{F}_2 + \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi = 0.$$

Die letztere Gerade läuft entweder durch die Teile 1 und 2 oder durch 3 und 2 der Ebene  $(\xi \eta')$  und dem entsprechend berührt der parabolische Zug  $(24^b)$  in der Ebene  $(\xi \eta)$  die Axe  $\xi$  in einen oder anderen Gebiet.

Für die Parabel  $(26^a.)$  haben wir zwei Fälle zu trennen, je nachdem dieselbe in den Gebieten 1 und 3 oder im Gebiete 2 verläuft. Ein Vergleich der Formeln  $(25^b)$  und  $(26^b)$ ,

in denen wir zur Kürze (durch Vorzeichenwahl in  $F$ )  $\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}$  als positive Grösse voraussetzen wollen, liefert:

Haben  $(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})$  und  $2\bar{F}_2 + 3(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})$  verschiedenes Vorzeichen, ist also  $2\bar{F}_2 + 3(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})$  negativ, so folgt, dass auch  $\bar{F}_2 + \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}$  negativ ist und damit

$$\bar{M} = -(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})(\bar{F}_2 + \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) > 0.$$

Haben die obigen Ausdrücke gleiches (positives) Vorzeichen und ist:

$$2\bar{F}_2 + 3(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) < \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23},$$

so ist  $(\bar{F}_2 + \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})$  negativ und damit wieder

$$\bar{M} > 0;$$

ist dagegen

$$2\bar{F}_2 + 3(\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) > \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23},$$

so ist  $(\bar{F}_2 + \bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})$  positiv und daher

$$\bar{M} < 0.$$

Also ergibt sich:

Ist der in die Spitze der Umrisscurve fallende wesentlich singuläre Punkt von der III<sup>ten</sup> Art, so ist die Lage der Umrisscurve  $U$  zu den Zweigen der Integralcurve durch die beiden Schemata:

Fig. 8a.

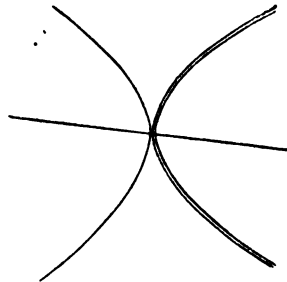
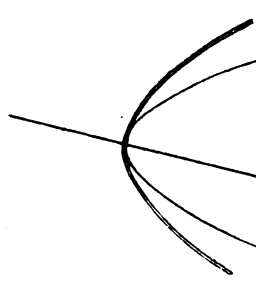


Fig. 9a.



gegeben, denen auf die  $(\xi\eta)$ -Ebene projicirt, die Bilder

Fig. 8 b.

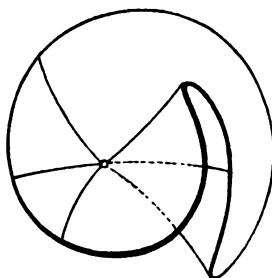
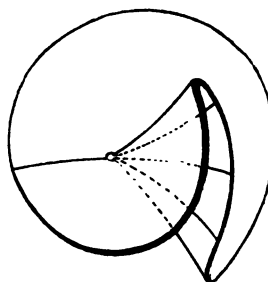
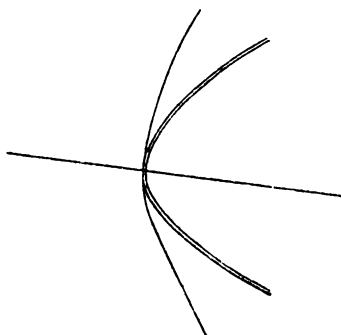


Fig. 9 b.



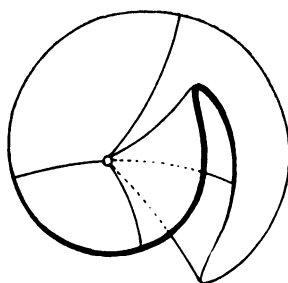
entsprechen, ist dagegen der wesentlich singuläre Punkt II<sup>ter</sup> Art, so ist diese Lage schematisch gegeben durch

Fig. 10 a.



und das entsprechende Bild

Fig. 10 b.



Nun ist es nicht schwer, den Verlauf des ganzen Curvensystems in der Umgebung der singulären Stelle einzutragen, wenn wir beachten, dass der Character der singulären Stelle in der Projection auf die Ebene ( $\xi \eta'$ ) dem Typus III' bez. II' der Abh. I. entspricht, wobei die eine der beiden ausgezeichneten Geraden, welche in dem dort dargestellten Falle die singuläre Stelle durchsetzen, durch die obige Parabel (26<sup>a</sup>) zu ersetzen ist, die andere (in erster Näherung) durch die Gerade (26<sup>b</sup>).

## II. Abschnitt.

### Die ausserwesentlich singulären Stellen der Differentialgleichungen $F(x, y, y') - k = 0$ .

#### § 10.

#### Uebersicht.

Die Stelle  $x_0, y_0, y'_0$  einer Differentialgleichung  $F - k_0 = 0$  ist ausserwesentlich singulär, wenn

$$(27.) \quad \overline{F}_s = 0, \quad \overline{F}_{ss} = 0;$$

dann ist das Verhalten des Integralsystems in der Umgebung einer solchen Stelle (wie schon erwähnt) im Allgemeinen durch die in § 3 und auf Tafel IV Fig. IV der Abh. I. gegebenen Entwicklungen gekennzeichnet.

Neben dem soeben besprochenen Zusammenrücken einer wesentlich und einer ausserwesentlich singulären Stelle haben wir jetzt noch das Zusammenfallen zweier ausserwesentlich singulären Stellen zu betrachten.

Deuten wir die Gleichungen

$$F_s = 0, \quad F_{ss} = 0$$

im Raume  $(x, y, y')$  wieder als die Gleichungen einer Raumcurve  $V$ , des Ortes der Spitzen der Umrisscurven, so wird ein Zusammenfallen zweier solcher Spitzen eintreten für die Berührungsstellen der Curve  $V$  mit einer der Flächen  $F - k = 0$ . Dies liefert sofort die Bedingungsgleichung:

$$(28.) \quad \begin{vmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 & 0 \\ \bar{F}_{s1} & \bar{F}_{s2} & 0 \\ \bar{F}_{ss1} & \bar{F}_{ss2} & \bar{F}_{ss3} \end{vmatrix} = 0.$$

Man hat also zwei wesentlich verschiedene Fälle dieses Zusammenrückens zu unterscheiden, je nachdem zu den Bedingungsgleichungen:

$$\bar{F}_s = 0, \quad \bar{F}_{ss} = 0$$

noch hinzutritt:

$$\text{E)} \quad \bar{F}_{sss} = 0 \quad (\S 11),$$

beziehungsweise

$$\text{F)} \quad \begin{vmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 \\ \bar{F}_{s1} & \bar{F}_{s2} \end{vmatrix} = 0 \quad (\S 12).$$

### § 11.

**E) Die Bedingung  $\bar{F}_{sss} = 0$ .**

Dieser Fall gestaltet sich ganz analog dem schon in Abh. I. § 3 behandelten allgemeinen:

$$\bar{F}_s = 0 \quad \bar{F}_{ss} = 0.$$

Hier ergibt sich sofort in erster Näherung die Differentialgleichung:

$$(29.) \quad (\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2) \xi + \frac{1}{24} \bar{F}_{ssss} \eta^4 = 0,$$

in welcher als nächste Näherungsglieder noch zutreten:



$$(30.) \quad \bar{F}_2 \eta + (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23}) \xi \eta' + \frac{1}{120} \bar{F}_{3333} \eta'^5$$

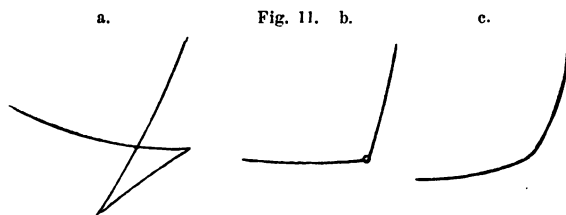
Die durch den singulären Punkt hindurchlaufende Curve ist in erster Näherung gegeben durch:

$$(31.) \quad (\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2) \xi^5 + \frac{1}{24} \bar{F}_{3333} (\frac{5}{4} \eta)^4 = 0.$$

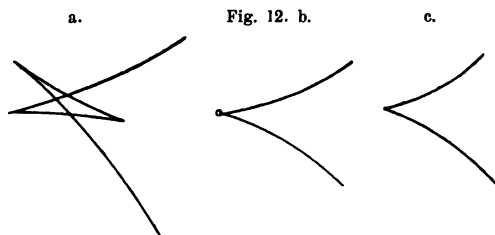
Für die Umrisscurve  $U$  ergibt sich (mit Berücksichtigung der Glieder zweiter Näherung):

$$(32.) \quad \frac{1}{32} (\bar{F}_{13} + y'_0 \bar{F}_{23})^4 \xi^4 - \frac{1}{24} \bar{F}_{3333} ((\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2) \xi + \bar{F}_2 \eta)^3 = 0.$$

Eine gestaltliche Discussion der Umgebung der singulären Stelle zeigt nun einmal: Die Umrisscurve deformiert sich bei ändernder Constanten  $k$  derart, dass zwei Spitzen in der bekannten durch die Figuren 11a, b, c gekennzeichnet-

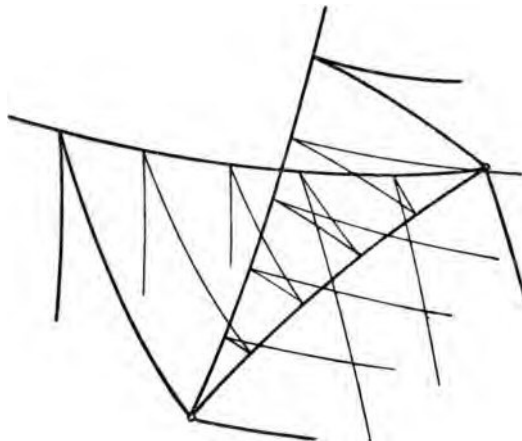


neten Weise zusammenrücken, um dann imaginär zu werden. Der Verfolg des Zusammenhangs der einzelnen Blätter der Flächen  $F - k = 0$  bei diesem Uebergang ergibt dann einen ähnlichen Uebergang der Curven des Integralsystems, bei welchem drei Spitzen (die sich auf die drei Zweige der Umrisscurve (Fig. 11<sup>a</sup>) verteilen) zusammenrücken, wobei nach dem Durchgang durch die singuläre Stelle die Integralcurven



nur eine einzige Spitze aufweisen. Die Fig. 12a, b, c zeigt diesen Uebergang, während Fig. 13 den Gesamtverlauf der

Fig. 13.



Curven des Integralsystems in einer penultimaten Form zusammenstellt.

Es ist leicht nachzuweisen, dass ein analoger gestaltlicher Uebergang die Singularität kennzeichnet, welche eintritt, wenn an einer Stelle  $x_0, y_0, y'_0$  alle Ableitungen von  $F$  nach  $y'$  bis hin zur  $n^{\text{ten}}$  verschwinden.

## § 12.

**F) Die Bedingung  $\overline{F}_1 \overline{F}_{s_2} - \overline{F}_2 \overline{F}_{s_1} = 0$ .**

Tritt zu den Gleichungen

$$\overline{F}_3 = 0, \quad \overline{F}_{s_3} = 0$$

noch die obige Bedingungsgleichung hinzu, so ist für den Verlauf der durch den singulären Punkt gehenden Integralcurve die schon in Abh. I. § 3 discutierte Gleichung

$$(33.) \quad (\overline{F}_1 + y'_0 \overline{F}_2) \xi + \frac{1}{6} \overline{F}_{s_3 s_3} \eta'^3 = 0$$

maassgebend, welcher die Curve

$$(34.) \quad (\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2) \xi^2 + \frac{1}{6} \bar{F}_{333} \left(\frac{2}{3} \eta\right)^2 = 0$$

entspricht; die Art der Auflösung dieser Singularität aber für die benachbarten Integralcurven wird eine andere, als die dort für den allgemeinen Fall (in Fig. IV) gegebene.

Wir betrachten zur genaueren Discussion im Raume  $x_0, y_0, y'_0$  wieder drei aufeinander folgende Flächen  $F - k = 0$ , den Parametern

$$k_0 - \varepsilon, \quad k_0, \quad k_0 + \varepsilon$$

entsprechend. Hier bezeichne  $\overset{\circ}{U}$  den Umriss der Fläche  $F - k_0$  in Richtung der  $y'$ -Axe:

$$(35.) \quad \overset{\circ}{U} \begin{cases} F - k_0 = 0, \\ F_3 = 0; \end{cases}$$

und analog  $\overset{-\varepsilon}{U}, \overset{+\varepsilon}{U}$  die Umrisscurven für die beiden Nachbarflächen; ferner sei  $V$  der Ort derjenigen Punkte aller Umrisscurven  $U$  der Flächen  $F - k = 0$  (in Richtung der  $y'$ -Axe), für welche die Tangente auf der  $xy$ -Ebene senkrecht steht:

$$(36.) \quad V \begin{cases} F_3 = 0, \\ F_{33} = 0. \end{cases}$$

Endlich sei  $W$  der Ort der Punkte aller dieser Umrisscurven, für welche die Schmiegungeebene auf der  $xy$ -Ebene senkrecht steht:

$$(37.) \quad W \begin{cases} F_3 = 0, \\ H = 0, \end{cases}$$

wo  $H$  die Hesse'sche Form von  $F$  bezeichnet.

Betrachtet man die Projection aller Umrisscurven in die  $(xy)$ -Ebene, so entspricht  $V$  dem Ort der Spitzen,  $W$  dem Ort der Wendepunkte dieser Projectionen.

Nun zeigt eine Entwicklung der Gleichungen für  $U$ ,  $V$ ,  $W$  in der Umgebung unseres singulären Punktes:

1. Die Bedingung  $\bar{F}_1 \bar{F}_{32} - \bar{F}_2 \bar{F}_{31} = 0$  besagt, dass die Flächen  $F - k_0 = 0$  und  $F_3 = 0$  sich berühren, dass also die Umrisscurve  $\bar{U}$  in  $x_0, y_0, y'_0$  einen Doppelpunkt besitzt; wir haben also zwei Fälle zu trennen:

$$(38.) \begin{vmatrix} \bar{F}_{11} - \lambda \bar{F}_{311} & \bar{F}_{12} - \lambda \bar{F}_{312} & -\lambda \bar{F}_{313} & \bar{F}_{13} \\ \bar{F}_{21} - \lambda \bar{F}_{321} & \bar{F}_{22} - \lambda \bar{F}_{322} & -\lambda \bar{F}_{323} & \bar{F}_{23} \\ & -\lambda \bar{F}_{331} & -\lambda \bar{F}_{332} & -\lambda \bar{F}_{333} & 0 \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} < 0 & \text{isolierter} \\ & \text{Doppel-} \\ & \text{punkt.} \\ & \\ & \text{Doppel-} \\ & \text{punkt} \\ & \text{mit reellen} \\ & \text{Tangenten.} \end{matrix}$$

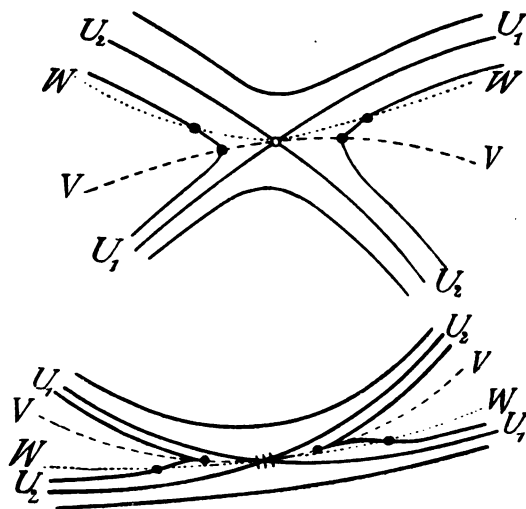
(wobei  $\bar{F}_1 - \lambda \bar{F}_{31} = 0, \bar{F}_2 - \lambda \bar{F}_{32} = 0$ ).

Im zweiten Falle verlaufen die beiden reellen Aeste der Umrisscurve, die sich im Doppelpunkte durchsetzen, der Art, dass in den wirklichen Doppelpunkt noch ein scheinbarer Doppelpunkt der Umrisscurve gerückt ist. In der Projection auf die  $xy$ -Ebene spricht sich dies, wie eine kurze Rechnung zeigt, dadurch aus, dass hier die beiden Zweige  $U_1, U_2$  der Umrisscurve  $\bar{U}$  eine dreipunktige Berührung mit einander eingehen. (Vergl. die umstehende Fig. 14.)

2. Die Curven  $V$  und  $W$  durchsetzen den singulären Punkt und zwar mit gemeinsamer Tangente; die Projectionen auf die  $xy$ -Ebene dieser beiden Curven berühren sich also vierpunktig. In dem in der untenstehenden Fig. 14 dargestellten Falle des „Doppelpunkts mit reellen Tangenten“ sind dabei die Tangentenrichtung der Curven  $V, W$  und die Richtung der  $y'$ -Axe getrennt durch die beiden Tangenten der Curve  $\bar{U}$ .

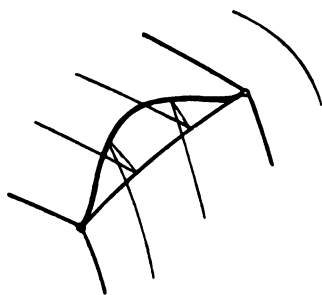
Betrachtet man jetzt den Grenzübergang für die den Parametern  $k_0 - \varepsilon, k_0, k_0 + \varepsilon$  entsprechenden Flächen, so

Fig. 14.



ergibt sich das Zusammenrücken zweier Spitzen der Umrisscurve zugleich mit dem Zusammenfallen zweier Wendepunkte derselben in der Weise, wie es Fig. 15 für den isolirten

Fig. 15.



Doppelpunkt von  $\overset{\circ}{U}$  in einer ersten penultimaten Form, Fig. 16a und b für den nichtisolirten Doppelpunkt in den den Parametern  $k_0 - \varepsilon$  wie  $k_0 + \varepsilon$  entsprechenden Formen darstellt.

Fig. 16a.

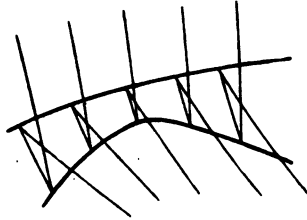
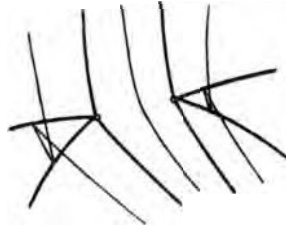


Fig. 16b.



In gleicher Weise findet sich auch der Verlauf der Curven des Integralsystems mit dem bekannten Spitzenpaar eingetragen.

Ueerblicken wir das Ergebniss der vorliegenden Untersuchung über Auftreten, Umformung und Verschwinden der singulären Stellen in dem System der Differentialgleichungen

$$F(x, y, y') - k = 0$$

und beachten dabei, welchen Einfluss diese Aenderungen in den singulären Stellen auf die in Abh. I. § 4 erörterten Abzählungen haben, so findet sich, wie notwendig:

Der Gleichung

$$K = s_0 + s_\infty - s_s,$$

welche die Beziehung der Characteristik (Zusammenhangszahl) einer Fläche  $F - k = 0$  zu den Anzahlen  $s_0$ ,  $s_\infty$ ,  $s_s$  der singulären Stellen I<sup>ter</sup>, III<sup>ter</sup> und II<sup>ter</sup> Art für das zugehörige System der Integralcurven angiebt, entspricht das Verhalten der Singularitäten beim Durchgang durch die Knotenpunkte des Flächensystems. Hier ändert sich die Characteristik um  $\pm 2$ , und dementsprechend ändert sich auch (in der durch die Fälle C a, b, c, d unterschiedenen Weise) die Anzahl

der wesentlich singulären Stellen durch Auftreten (bez. Verschwinden) von jedesmal zwei Punkten I<sup>ter</sup> oder II<sup>ter</sup> Art.

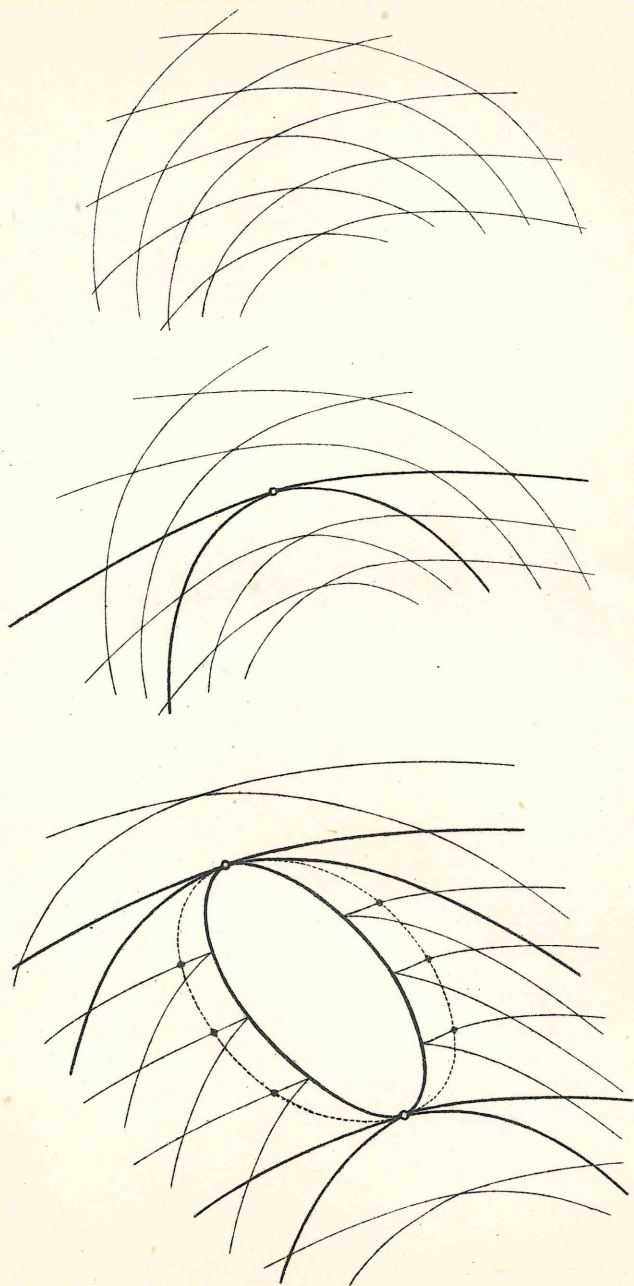
Die Aenderungen im Flächensystem, welche keine Aenderung in der Characteristik hervorrufen, lassen auch die obige Formel unverändert:

Es entstehen (bez. verschwinden) im Falle **A** stets paarweise je ein Punkt  $P_{\infty}$  und ein Punkt  $P_3$ , die sich bei der Abzählung compensieren. Im Falle **B** verwandelt sich ein Punkt  $P_{\infty}$  in einen (für die Abzählung äquivalenten) Punkt  $P_0$  oder umgekehrt. Im Falle **D** findet nur eine Verschiebung eines wesentlich singulären Punktes von einem Blatte der Fläche auf ein anderes statt, durch welche sich der Verlauf der Integralcurven in den aus den einzelnen Blättern bestehenden Teilgebieten entsprechend ändert, der Gesamtverlauf aber nicht. Die Fälle **E** und **F** bringen ebenso nur Aenderungen hervor, die sich auf die einzelnen Teilgebiete beziehen, innerhalb welcher sich (Abh. I. pag. 47) analoge Relationen wie für die Gesamtmfläche aufstellen lassen.

In jedem Falle sind es ganz bestimmt gestaltlich zu bezeichnende Uebergangsformen, welche durch die successiven Aenderungen, die ein System von Integralcurven bei unserem Deformationsprocesse erleidet, hervorgerufen werden; sie ergeben, damit mag die Absicht der vorstehenden Untersuchung zusammengefasst sein, innerhalb der schon Eingangs bezeichneten Grenzen einen weiteren Aufschluss über den Gesamtverlauf solcher Curvensysteme.

---

c.





d.

