Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1920
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes II.

Von **Oskar Perron.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 5. Juni 1920.

§ 1. Theoreme.

In einer gleichbetitelten Arbeit im Jahrgang 1908 (S. 181) dieser Sitzungsberichte habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. Wenn die Koeffizienten der Differenzengleichung

$$D_{\nu+n} + b_1^{(\nu)} D_{\nu+n-1} + \cdots + b_n^{(\nu)} D_\nu = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

reell sind und den Ungleichungen

$$1 \geqq b_1^{(\nu)} \geqq b_2^{(\nu)} \geqq \cdots \geqq b_n^{(\nu)} \geqq 0$$

genügen, so bleibt D_ν, wie auch die Anfangswerte $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ gewählt sein mögen, absolut unter einer von ν unabhängigen Schranke.

Während mein damaliger Beweis recht umständlich ist, bin ich heute in der Lage, den Satz in wenigen Zeilen zu beweisen. Das neue Beweisverfahren führt aber auch zu dem folgenden Satz, dessen Beweis ich a. a. O. nur für $n \leqq 4$ erbringen konnte.

Satz 2. Wenn eine Folge von **ganzen rationalen Zahlen** $D_0, D_1, D_2, \ldots$ einer Rekursionsformel der Gestalt

$$D_{\nu+n} + b_1^{(\nu)} D_{\nu+n-1} + \cdots + b_n^{(\nu)} D_\nu = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

genügt, wobei

$$1 > b_1^{(\nu)} > b_2^{(\nu)} > \cdots > b_n^{(\nu)} > 0$$

sein soll, so ist notwendig $D_\nu = 0$ für alle ν.

Treten zu den Voraussetzungen von Satz 1 noch weitere hinzu, so wird man über das Verhalten der D_ν noch genauere Aussagen machen können. Insbesondere werde ich beweisen:

Satz 3. Wenn unter den Voraussetzungen von Satz 1 unter den reellen nicht negativen Zahlen

$$1 - b_1^{(\nu)},\ b_1^{(\nu)} - b_2^{(\nu)}, \ldots, b_{n-1}^{(\nu)} - b_n^{(\nu)},\ b_n^{(\nu)}$$

keine verschwindenden und keine beliebig kleinen sind, so ist $\lim\limits_{\nu=\infty} D_\nu = 0$.

Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung des Kakeyaschen Satzes angesehen werden, wonach die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0,$$

wenn

$$1 > b_1 > b_2 > \cdots > b_n > 0$$

ist, alle absolut kleiner als 1 sind.[1]) In der Tat, ist ϱ eine Wurzel dieser Gleichung, so braucht man in Satz 3 nur $b_i^{(\nu)} = b_i$ und $D_\nu = \varrho^\nu$ zu setzen, um den Kakeyaschen Satz zu erhalten.

Endlich beweise ich noch:

Satz 4. Wenn die Elemente der **Jacobi**-Kette n^{ter} Ordnung

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

ganze rationale Zahlen sind ($a_0^{(\nu)} \neq 0$), welche von einem gewissen Index ν an den Ungleichungen

$$0 < a_0^{(\nu)} \leqq a_1^{(\nu)} \leqq \cdots \leqq a_n^{(\nu)}$$

---

[1]) S. Kakeya, On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. The Tôhoku mathematical journal, vol. 2 (1912).

genügen, so konvergiert die Kette, und ihr Wertesystem $a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ genügt keiner Relation der Form

$$P_0\, a_0^{(0)} + P_1\, a_1^{(0)} + \cdots + P_n\, a_n^{(0)} = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten P_i.

Auch diesen Satz, der eine Verallgemeinerung des für $n = 1$ entstehenden Stern-Stolzschen Irrationalitätssatzes ist, habe ich früher nur für $n \leqq 4$ beweisen können. Ich habe aber damals allgemein gezeigt, daß der Satz eine Folge von Satz 2 ist; nachdem jetzt Satz 2 für beliebiges n bewiesen wird, ist damit auch der Beweis von Satz 4 erbracht.

§ 2. Beweise.

Beweis von Satz 1. Setzt man

(1) $$D_0 + D_1 + \cdots + D_\nu = \varDelta_\nu,$$

so ist für $\nu \geqq 1$

(2) $$D_\nu = \varDelta_\nu - \varDelta_{\nu-1},$$

und die in Satz 1 auftretende Differenzengleichung geht für $\nu \geqq 1$ über in

(3) $$\left\{\begin{aligned} \varDelta_{\nu+n} = (1 - b_1^{(\nu)})\, \varDelta_{\nu+n-1} + (b_1^{(\nu)} - b_2^{(\nu)})\, \varDelta_{\nu+n-2} + \cdots \\ + (b_{n-1}^{(\nu)} - b_n^{(\nu)})\, \varDelta_\nu + (b_n^{(\nu)})\, \varDelta_{\nu-1}. \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt, da die Klammergrößen nach Voraussetzung reell und nicht negativ sind:

$$|\varDelta_{\nu+n}| \leqq (1 - b_1^{(\nu)})\, |\varDelta_{\nu+n-1}| + \cdots + (b_{n-1}^{(\nu)} - b_n^{(\nu)})\, |\varDelta_\nu| + b_n^{(\nu)}\, |\varDelta_{\nu-1}|.$$

Setzt man also

$$\operatorname{Max}\,(|\varDelta_{\nu+n-1}|, |\varDelta_{\nu+n-2}|, \cdots, |\varDelta_\nu|, |\varDelta_{\nu-1}|) = M_{\nu-1},$$

so ist $|\varDelta_{\nu+n}| \leqq M_{\nu-1}$, und folglich auch $M_\nu \leqq M_{\nu-1}$. Daher wird ganz allgemein $M_\nu \leqq M_1$, und folglich auch $|\varDelta_\nu| \leqq M_1$ sein. Wegen (2) ist dann $|D_\nu| \leqq 2\, M_1$, und damit ist Satz 1 bewiesen.

Beweis von Satz 2. Nach Voraussetzung sind jetzt die Zahlen

$$1 - b_1^{(\nu)},\ b_1^{(\nu)} - b_2^{(\nu)},\ \ldots,\ b_{n-1}^{(\nu)} - b_n^{(\nu)},\ b_n^{(\nu)}$$

positiv. Die D_ν und folglich auch die Δ_ν sind ganze rationale Zahlen. Nach dem soeben Bewiesenen ist

$$\limsup_{\nu=\infty} \Delta_\nu = S$$

endlich und selbstverständlich eine ganze rationale Zahl. Für genügend große ν ist daher

$$(4) \qquad \Delta_\nu \leqq S.$$

Hier kann aber niemals das Kleinerzeichen gelten. Denn wäre einmal von den $n+1$ aufeinander folgenden Zahlen

$$\Delta_{\nu-1},\ \Delta_\nu,\ \ldots,\ \Delta_{\nu+n-1}$$

mindestens eine kleiner als S, so wäre nach (3) auch $\Delta_{\nu+n} < S$, und überhaupt $\Delta_\lambda < S$ für $\lambda > \nu + n$. Da aber Δ_λ und S ganze Zahlen sind, so wäre $\Delta_\lambda \leqq S - 1$ für alle hinreichend großen λ, was der Definition von S widerspricht. Daher muß in (4) stets das Gleichheitszeichen gelten; für alle hinreichend großen ν ist also $\Delta_\nu = S$, und folglich $D_\nu = \Delta_\nu - \Delta_{\nu-1} = 0$.

Aber dann muß die Gleichung $D_\nu = 0$ sogar für alle ν gelten. Denn wäre sie etwa nur für $\nu > N$ richtig, und für $\nu = N$ falsch, so würde aus der gegebenen Differenzengleichung für $\nu = N$ doch folgen: $D_N = 0$, entgegen der Annahme.

Beweis von Satz 3. Jetzt wird vorausgesetzt, daß die Zahlen

$$1 - b_1^{(\nu)},\ b_1^{(\nu)} - b_2^{(\nu)},\ \ldots,\ b_{n-1}^{(\nu)} - b_n^{(\nu)},\ b_n^{(\nu)}$$

oberhalb einer positiven von ν unabhängigen Schranke g liegen. Offenbar genügt es, den Satz 3 für reelle D_ν zu beweisen. Dann sind auch die Δ_ν reell, und nach dem Bewiesenen sind

$$(5) \qquad \limsup_{\nu=\infty} \Delta_\nu = S, \quad \liminf_{\nu=\infty} \Delta_\nu = s$$

endliche Zahlen; wir wollen zeigen, daß sie einander gleich sind.

Für jedes ν ist von den $n+1$ aufeinander folgenden Zahlen

$$\Delta_{\nu-1},\ \Delta_{\nu},\ \ldots,\ \Delta_{\nu+n-1}$$

mindestens eine $\leqq s$. Denn wären sie für einen gewissen ν-Wert alle $> s$ und folglich $> s+\delta$, wo δ eine positive Zahl ist, so wäre nach (3) auch $\Delta_{\nu+n} > s+\delta$, und überhaupt $\Delta_\lambda > s+\delta$ für $\lambda \geqq \nu+n$, was aber der zweiten Gleichung (5) widerspricht.

Bedeutet nun ε eine beliebig kleine positive Zahl, so sind für genügend große ν in Gleichung (3) die Δ der rechten Seite kleiner als $S+\varepsilon$, und mindestens eines ist sogar $\leqq s$. Daher folgt aus (3), weil die Klammergrößen jetzt $\geqq g$ sind:

$$\Delta_{\nu+n} \leqq S+\varepsilon - g\,(S+\varepsilon - s).$$

Wenn nun $S > s$, so besagt diese Ungleichung, sofern nur ε klein genug gewählt wird:

$$\Delta_{\nu+n} < S-\eta,$$

wo η positiv ist, und überhaupt ist dann $\Delta_\lambda < S-\eta$ für $\lambda \geqq \nu+n$, was aber der ersten Gleichung (5) widerspricht. Die Annahme $S > s$ ist also falsch, und folglich muß $S = s$ sein. Da somit der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \Delta_\nu = S = s$$

existiert, ist

$$\lim_{\nu=\infty} D_\nu = \lim_{\nu=\infty} (\Delta_\nu - \Delta_{\nu-1}) = 0. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Beweis von Satz 4. Ein solcher ist überflüssig, da dieser Satz eine Folge von Satz 2 ist, wie bereits in § 1 erwähnt.
