

Kgl. Bayer. Akademie
der Wissenschaften

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXII. Jahrgang 1902.

München.

Verlag der k. Akademie.

1903.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen.

(Nachtrag zu dem Aufsätze auf S. 163—192 dieses Bandes.)

Von **Alfred Pringsheim**.

(Eingelaufen 8. November.)

Der in dem oben citirten Aufsätze mitgetheilte elementare Beweis für die Poincaré-Hadamard'schen Sätze über den Zusammenhang zwischen dem infinitären Verhalten gewisser ganzer transcendenten Functionen und demjenigen ihrer Coefficienten gestattet noch eine merkliche Vereinfachung. Herr Lüroth hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass der auf die Voraussetzung $\sum C_r r^r \geq A \cdot e^{r^r}$ sich beziehende Theil des Hauptsatzes § 1 und zwar zunächst in der Form, welche a. a. O. in dem Zusatze unter (12^b) angegeben wird, ganz unmittelbar aus einer allgemeinen Bemerkung über Potenzreihen mit reellen Gliedern resultirt. Macht man nun aber von dieser Vereinfachung Gebrauch, so erscheint es angemessen, auch denjenigen Theil des Beweises, der sich auf die Voraussetzung $\sum c_r r^r \leq A \cdot e^{r^r}$ bezw. $\leq A \cdot e^{r^\alpha}$ bezieht, entsprechend umzugestalten. Während nämlich bei der a. a. O. von mir benützten Methode die zur Behandlung der C_r erforderlichen Hilfsmittel auch die entsprechenden Resultate für die c_r lieferten und mir in Folge dessen eine vollkommene symmetrische Behandlung der beiden in Betracht kommenden Voraussetzungen am Platze schien, so hört diese Möglichkeit auf, wenn man bezüglich der C_r den von Herrn Lüroth angegebenen kürzeren Weg einschlägt. Alsdann erweist es sich

aber als zweckmässiger, den Fall der c_r mit Hülfe der schon von Herrn Hadamard¹⁾ benützten Schlussweise zu behandeln: man gewinnt dabei zugleich den Vortheil, von vornherein mit beliebigen complexen c_r und der Voraussetzung $|\sum c_r x^r| \leq A \cdot e^{\gamma^\alpha \cdot |x|}$ operiren zu können.²⁾ Für die C_r ist dies ohnehin der Fall, da ja die Voraussetzung $|\sum C_r x^r| \geq A \cdot e^{\gamma^\alpha \cdot |x|}$ allemal a fortiori die folgende: $\sum |C_r| \cdot r^\alpha \geq A \cdot e^{\gamma^\alpha \cdot r}$ nach sich zieht.

Hiernach ergibt sich nun für den Gesamtbeweis des a. a. O. p. 187 formulirten Haupt-Resultates die folgende ausserordentlich kurze und elementare Darstellung.

§ 1.

Hauptsatz A. *Ist für alle x , deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl R übersteigt:*

$$(A) \quad \left| \sum_0^\infty c_r x^r \right| \leq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad (A > 0, \gamma > 0, \alpha > 0),$$

so hat man:

$$(a) \quad \overline{\lim}_{v=\infty} \left(\frac{v}{e} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[v]{|c_v|} = \overline{\lim}_{v=\infty} \sqrt[v]{(v!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_v|} \leq (a\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Beweis. Aus (A) folgt auf Grund des Cauchy'schen Coefficientensatzes, dass:

$$|c_v x^v| \leq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad (v = 0, 1, 2, \dots; |x| > R).$$

Setzt man:

$$|x| = \left(\frac{v}{a\gamma} \right)^{\frac{1}{\alpha}} > R, \text{ also: } v > a\gamma \cdot R^\alpha,$$

so wird:

¹⁾ Journ. de Math., Série IV, T. 9 (1893), p. 183.

²⁾ Man erspart auf diese Weise die auf p. 186 meines Aufsatzes angestellte Betrachtung.

$$|c_v| \cdot \left(\frac{v}{a\gamma}\right)^{\frac{v}{a}} \leq A \cdot e^{\frac{v}{a}},$$

anders geschrieben:

$$\left(\frac{v}{e}\right)^{\frac{v}{a}} \cdot |c_v| \leq A \cdot (a\gamma)^{\frac{v}{a}},$$

woraus durch Erhebung in die $\left(\frac{1}{v}\right)^{\text{te}}$ Potenz und Uebergang zur Grenze $v = \infty$ unmittelbar die erste Form der Behauptung (a) resultirt.

Um die zweite zu gewinnen, braucht man nur auf die letzte Ungleichung die auf p. 170 angegebene Relation:

$$n! e^{n-1} < n^{n+1}, \text{ also: } n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot n e$$

anzuwenden.¹⁾ Alsdann ergibt sich die Beziehung:

¹⁾ Man kann sich, wie Herr L uroth bemerkt hat, auch der Ungleichung:

$$n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (2n+1)$$

bedienen, welche aus der Reihe f ur e^n in folgender Weise resultirt. Man hat:

$$\begin{aligned} e^n &= \sum_{v=0}^{n-1} \frac{n^v}{v!} + \sum_{v=n}^{\infty} \frac{n^v}{v!} \\ &= s_n + r_n. \end{aligned}$$

Da $\frac{n}{v} > 1$ f ur $v < n$, so nehmen in s_n die Terme beständig zu, sodass also:

$$s_n < n \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{(n-1)!}.$$

Andererseits hat man nach bekannter Schlussweise:

$$r_n < \frac{n^n}{n!} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^v = \frac{n^n}{n!} \cdot (n+1),$$

und somit

$$e^n < \frac{n^n}{(n-1)!} + \frac{n^n}{n!} (n+1) = \frac{n^n}{n!} (2n+1),$$

also schliesslich:

$$n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (2n+1).$$

$$(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu| \leq A \cdot (\nu e)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (\alpha \gamma)^{\frac{\nu}{\alpha}},$$

welche, in die $\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\text{te}}$ Potenz erhoben, für $\nu = \infty$ die zweite Form der Behauptung (a) liefert.

§ 2.

Hauptsatz B. *Ist für unendlich viele x , unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$(B) \quad \left| \sum_0^\infty C_\nu x^\nu \right| \geq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad (A > 0, \gamma > 0, \alpha > 0),$$

so hat man:

$$(b) \quad \lim_{\nu=\infty} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \geq (\alpha \gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Zum Beweise dieses Satzes dienen die folgenden zwei Hilfssätze:

Hilfssatz I. *Bedeutet r eine positive Veränderliche, $\sum_0^\infty a_\nu r^\nu$ eine beständig convergirende Reihe mit reellen Coefficienten und ist für unendlich viele r , unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$\sum_0^\infty a_\nu r^\nu \geq 0,$$

so giebt es unendlich viele Indices m_ν , für welche:

$$a_{m_\nu} \geq 0$$

ausfällt.

Beweis. Angenommen die Behauptung wäre unrichtig, so müsste von einer bestimmten Stelle ab, etwa für $\nu \geq n$, beständig

$$a_\nu < 0$$

sein. Sodann könnte man R so fixiren, dass für $r > R$:

$$|a_n| \cdot r^n > \left| \sum_0^{n-1} a_\nu r^\nu \right|,$$

und daher, wegen $a_n r^n < 0$:

$$\sum_0^n a_\nu r^\nu < 0 \quad (\text{für } r > R).$$

Da überdies für jedes r

$$\sum_{n+1}^\infty a_\nu r^\nu < 0$$

wäre, so hätte man schliesslich:

$$\sum_0^\infty a_\nu r^\nu < 0 \quad \text{für jedes } r > R,$$

was der Voraussetzung widerspricht. —

Hülfsatz II.¹⁾ Ist $\sum_0^\infty b_\nu^\kappa$, wo $\kappa > 0$, eine convergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern, δ eine beliebig anzunehmende positive Zahl, so hat man:

- (1) Für $\kappa > 1$: $\sum_0^\infty b_\nu^\kappa < \left(\sum_0^\infty b_\nu \right)^\kappa$.
 (2) Für $\kappa < 1$: $\sum_0^\infty b_\nu^\kappa < \left(\frac{1+\delta}{\delta} \right)^{1-\kappa} \cdot \left(\sum_0^\infty (1+\delta)^{\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)\nu} \cdot b_\nu \right)^\kappa$.

Beweis. Setzt man: $\sum_0^\infty b_\nu = B$, so besteht für jedes ν die Beziehung:

$$\frac{b_\nu}{B} < 1$$

und daher auch, falls $\kappa > 1$:

$$\left(\frac{b_\nu}{B} \right)^{\kappa-1} < 1,$$

also:

¹⁾ Es ist dies der hier ausschliesslich in Betracht kommende Theil des auf p. 179 von mir bewiesenen Hülfsatzes. Der hier gegebene, etwas kürzere Beweis rührt in der Hauptsache von Herrn Lüröth her.

$$\left(\frac{b_\nu}{B}\right)^\kappa < \frac{b_\nu}{B}.$$

Substituiert man hier $\nu = 0, 1, 2, \dots$ in inf., so folgt durch Summation:

$$\frac{1}{B^\kappa} \cdot \sum_0^\infty b_\nu^\kappa < \frac{1}{B} \cdot \sum_0^\infty b_\nu = 1,$$

also in der That, wie unter (1) behauptet:

$$\sum_0^\infty b_\nu^\kappa < \left(\sum_0^\infty b_\nu\right)^\kappa \quad (\kappa > 1).$$

Um die Richtigkeit von (2) zu beweisen, werde gesetzt:

$$\sum_0^\infty a_\nu = A, \quad \sum_0^\infty a_\nu c_\nu = S,$$

wobei $\sum a_\nu$, $\sum a_\nu c_\nu$ irgend zwei convergente Reihen mit nicht-negativen Gliedern bedeuten sollen. Ist sodann für $\kappa < 1$ auch $\sum a_\nu c_\nu^\kappa$ convergent, so besteht die Identität:

$$\sum_0^\infty a_\nu c_\nu^\kappa = \left(\frac{S}{A}\right)^\kappa \cdot \sum_0^\infty a_\nu \cdot \left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\kappa.$$

Nun ist aber¹⁾ für $\kappa < 1$:

$$\left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\kappa < 1 + \kappa \left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu - 1\right),$$

woraus durch Multiplication mit a_ν , Substitution von $\nu = 0, 1, 2, \dots$ in inf. und Summation sich ergibt:

¹⁾ Die betreffende, für jedes $a > 0$, $\kappa < 1$ geltende Ungleichung, nämlich:

$$a^\kappa < 1 + \kappa (a - 1),$$

geht aus der auf p. 176 für $\kappa > 1$ abgeleiteten Ungl. (29):

$$A^\kappa > 1 + \kappa (A - 1)$$

ohne weiteres hervor, wenn man $A = a^\frac{1}{\kappa}$ setzt und schliesslich $\frac{1}{\kappa}$ statt κ schreibt.

$$\sum_0^{\infty} a_v \cdot \left(\frac{A}{S} \cdot c_v \right)^{\kappa} < \sum_0^{\infty} a_v + \kappa \left(\frac{A}{S} \cdot \sum_0^{\infty} a_v c_v - \sum_0^{\infty} a_v \right) = \sum_0^{\infty} a_v.$$

Mit Benützung dieser Ungleichung liefert die obige Identität die Beziehung:

$$\sum_0^{\infty} a_v c_v^{\kappa} < \left(\frac{S}{A} \right)^{\kappa} \cdot \sum_0^{\infty} a_v = \left(\sum_0^{\infty} a_v \right)^{1-\kappa} \cdot \left(\sum_0^{\infty} a_v c_v \right)^{\kappa}.$$

Setzt man noch:

$$a_v = \left(\frac{1}{1+\delta} \right)^v, \quad a_v c_v^{\kappa} = b_v^{\kappa},$$

also:

$$\sum_0^{\infty} a_v = \frac{1+\delta}{\delta}, \quad c_v = a_v^{-\frac{1}{\kappa}} \cdot b_v = (1+\delta)^{\frac{v}{\kappa}} \cdot b_v,$$

so folgt, wie unter (2) behauptet:

$$\sum_0^{\infty} b_v^{\kappa} < \left(\frac{1+\delta}{\delta} \right)^{1-\kappa} \cdot \left(\sum_0^{\infty} (1+\delta)^{\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)v} \cdot b_v \right)^{\kappa} \quad (\kappa < 1). -$$

Beweis des Hauptsatzes B. Es werde zunächst $\alpha = 1$ angenommen. Setzt man sodann $|x| = r$, so resultirt aus der Voraussetzung (B) a fortiori die folgende:

$$\sum_0^{\infty} |C_v| r^v \geq A \cdot e^{r^v} = A \cdot \sum_0^{\infty} \frac{\gamma^v r^v}{v!},$$

sodass also für unendlich viele r , unter denen auch beliebig grosse, die Beziehung besteht:

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{v!} (v! |C_v| - A \gamma^v) \cdot r^v \geq 0.$$

Man hat somit nach Hülfsatz I für unendlich viele m_v :

$$m_v! |C_{m_v}| \geq A \cdot \gamma^{m_v}$$

und wegen:

$$\left(\frac{m_v}{e} \right)^{m_v} > \frac{1}{m_v e} \cdot m_v!,$$

zugleich auch:

$$\left(\frac{m_\nu}{e}\right)^{m_\nu} \cdot |C_{m_\nu}| > A \cdot \frac{1}{m_\nu e} \cdot \gamma^{m_\nu}.$$

Aus den beiden gefundenen Ungleichungen ergibt sich sodann:

$$(b') \quad \overline{\lim}_{\nu=\infty} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim}_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\nu!} \sqrt[\nu]{|C_\nu|} \geq \gamma,$$

eine Beziehung, welche mit der unter (b) behaupteten für $a = 1$ zusammenfällt.

Ist jetzt a von 1 verschieden, so bringe man die aus der Voraussetzung (B) resultierende Beziehung:

$$\sum_0^\infty \nu |C_\nu x^\nu| \geq e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

durch die Substitution:

$$|x| = r^{\frac{1}{\alpha}}$$

auf die Form:

$$(C) \quad \sum_0^\infty \nu |C_\nu| \cdot r^{\frac{\nu}{\alpha}} = \sum_0^\infty \nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} \geq A \cdot e^{\gamma \cdot r}.$$

Im Falle $\alpha < 1$ hat man nun nach Ungl. (1) des Hilfssatzes II (für $\kappa = \frac{1}{\alpha}$, $b_\nu = |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu$):

$$\sum_0^\infty \nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\sum_0^\infty \nu |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

also, wenn man diese Ungleichung in die a^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl. (C):

$$\sum_0^\infty \nu |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu > A^\alpha \cdot e^{\alpha \gamma r},$$

sodass sich mit Hülfe von (b') unmittelbar ergibt:

$$(b_1) \quad \overline{\lim}_{\nu=\infty} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim}_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\nu!} \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} \geq a \gamma \quad (a < 1).$$

Im Falle $\alpha > 1$ hat man analog nach Ungl. (2) des Hilfsatzes II:

$$\sum_0^{\infty} \nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\sum_0^{\infty} \nu (1+\delta)^{(\alpha-1)\nu} C_\nu^\alpha \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

folglich, wenn man diese Ungleichung in die α^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl. (C), zunächst:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \nu (1+\delta)^{(\alpha-1)\nu} \cdot |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu &> \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(\sum_0^{\infty} \nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \\ &\geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} A^\alpha \cdot e^{\alpha \gamma r} \end{aligned}$$

und, wenn man noch r durch $(1+\delta)^{1-\alpha} \cdot r$ ersetzt:

$$\sum_0^{\infty} \nu |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu > \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot A^\alpha \cdot e^{\alpha \gamma (1+\delta)^{1-\alpha} \cdot r}.$$

Hieraus würde sich mit Hülfe von (b') zunächst ergeben:

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim}_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\nu!} \cdot |C_\nu|^\alpha \geq (1+\delta)^{1-\alpha} \cdot \alpha \gamma,$$

und da $\delta > 0$ unbegrenzt verkleinert werden darf, schliesslich:

$$(b_2) \quad \overline{\lim}_{\nu=\infty} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim}_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\nu!} \cdot |C_\nu|^\alpha \geq \alpha \gamma \quad (\alpha > 1).$$

Durch Erhebung der Relationen (b₁), (b₂) in die $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\text{te}}$ Potenz und Zusammenfassung mit Ungl. (b') findet man also, wie behauptet:

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim}_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \geq (\alpha \gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

für jedes positive α .

Die in den Hauptsätzen (A) und (B) enthaltenen Resultate stimmen genau mit den früher auf p. 187 angegebenen

überein. Daraus folgen dann die auf pp. 188, 189 zusammengestellten umkehrbaren Sätze mit Hülfe der nämlichen Schlüsse, welche a. a. O. zum Beweise der analogen Sätze von §§ 4 und 5 angewendet wurden.
