Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXII. Jahrgang 1902.

München.
Verlag der k. Akademie.
1903.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 30. Juni.*)

Herr Poincaré hat bereits im Jahre 1883 einen Satz bewiesen,[1]) welcher eine Beziehung angiebt zwischen dem infinitären Verhalten einer ganzen transcendenten Function $g(x) = \sum c_\nu x^\nu$ für $|x| = \infty$ und demjenigen der Coefficienten c_ν für $\nu = \infty$. Darnach hat man allemal:[2])

$$\lim_{\nu=\infty} (\nu!)^{\frac{1}{m}} \cdot c_\nu = 0,$$

wenn für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ die Bedingung erfüllt ist:

$$\lim_{x=\infty} e^{-\varepsilon \cdot |x|^m} \cdot g(x) = 0 \qquad (m \text{ eine natürliche Zahl}),$$

anders ausgesprochen, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl R_ε existirt, sodass:

$$|g(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^m} \qquad \text{für } |x| > R_\varepsilon.$$

---

[1]) Bulletin de la soc. math. de France, T. 11 (1883), p. 142.

[2]) Aus dem von Herrn Poincaré gegebenen Beweise folgt sogar (ohne dass es a. a. O. ausdrücklich erwähnt wird):

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{m}} \cdot c_\nu} = 0.$$

Späterhin hat Herr Hadamard[1]) gezeigt, dass der Satz nicht nur merklich verallgemeinert, in's besondere ohne weiteres auf beliebige positive m übertragen werden kann,[2]) sondern dass derartige Sätze bei geeigneter Formulirung auch umkehrbar sind.[3])

Da die betreffenden Beweise durchweg ziemlich complicirte Hülfsmittel verwenden[4]) und es mir andererseits wünschenswerth erschien, jene Sätze in passendem Umfange für die elementare Functionen-Theorie zu gewinnen, so habe ich versucht, dieselben in möglichst elementarer Weise neu zu begründen. Die im folgenden mitzutheilenden Beweise scheinen mir, abgesehen von der Geringfügigkeit der hierzu aufgewendeten Hülfsmittel, auch grössere Präcision und einen tieferen Einblick in Grundlage und Wesen der fraglichen Beziehungen zu geben: diese gruppiren sich in sehr übersichtlicher Weise um einen lediglich auf gewisse Reihen mit positiven Termen bezüglichen Hauptsatz (§ 1 und, vermittelst eines elementaren Hülfssatzes § 2, in verallgemeinerter Form § 3), dessen dualistische Fassung unmittelbar auch das Maass ihrer Umkehrbarkeit erkennen lässt (§ 4, § 5). Eine einfache Ueberlegung zeigt dann, wie die für jene Reihen mit positiven Termen gewonnenen Resultate für die Theorie der ganzen transcendenten Functionen nutzbar gemacht werden können (§ 6).

---

[1]) Étude sur les propriétés des fonctions entières etc.: Journ. de Math., Série IV, T. 9 (1893), p. 171 ff.

[2]) a. a. O. p. 183.

[3]) a. a. O. p. 180.

[4]) Man vergleiche auch die Dissertation von K. von Schaper: Ueber die Theorie der Hadamard'schen Functionen etc. (Göttingen, 1898) p. 15—22. — E. Borel, Leçons sur les fonctions entières (Paris 1900), p. 53—56. — Ernst Lindelöf, Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini: Acta soc. scient. Fennicae, T. 31 (1902), p. 33 ff.

§ 1.

Es bedeute r eine reelle positive Veränderliche, $\sum c_\nu r^\nu$ und $\sum C_\nu r^\nu$ je eine beständig convergirende Reihe mit reellen, nicht-negativen Coefficienten.

Hauptsatz: *Besteht von den beiden Beziehungen:*

$$\left.\begin{array}{ll}(1^a) & \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu \leqq A \cdot e^{\gamma r} \\ (1^b) & \sum_0^\infty{}^\nu C_\nu r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma r}\end{array}\right\} (A > 0,\ \gamma > 0)$$

die erste für alle r, welche eine gewisse positive Zahl R übersteigen, die zweite zum mindesten für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen, so ist:

$$(2^a)\quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu} \leqq \gamma, \qquad (2^b)\quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, C_\nu} \geqq \gamma.$$

Beweis. Setzt man in (1^a) $r = \lambda \varrho$, so folgt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu \lambda^\nu \cdot \varrho^\nu \leqq A \cdot e^{\gamma \lambda \varrho}, \text{ falls } \lambda > \frac{R}{\varrho},$$

und nach Multiplication mit dem Factor $e^{-\lambda}$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda} \cdot \varrho^\nu \leqq A \cdot e^{-(1-\gamma\varrho)\lambda}.$$

Substituirt man $\lambda = m+1,\ m+2, \ldots$ in inf. (wo: $m+1 > \frac{R}{\varrho}$), so ergiebt sich durch Addition der betreffenden Relationen:

$$(2)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu \left(\sum_{m+1}^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda}\right) \cdot \varrho^\nu \leqq A \cdot \sum_{m+1}^\infty{}^\lambda e^{-(1-\gamma\varrho)\lambda}.$$

Dabei ist die rechts, folglich auch die links auftretende Reihe convergent, wenn $1 - \gamma\varrho > 0$, also für $\varrho < \frac{1}{\gamma}$. Da überdies:

$$\sum_1^m{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda} < m^\nu \cdot \sum_1^m{}^\nu e^{-\lambda} < \frac{m^\nu}{e-1}$$

und somit die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu \left(\sum_1^m{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda}\right) \cdot \varrho^\nu$$

gleichzeitig mit $\sum c_\nu \varrho^\nu$ beständig convergirt, so folgt, wenn man diese letztere Reihe zu der linken Seite von (2) addirt, dass:

$$(3) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu S_\nu \cdot c_\nu \cdot \varrho^\nu, \text{ wo: } S_\nu = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda}$$

für $\varrho < \frac{1}{\gamma}$ convergirt.

Um zunächst das entsprechende Divergenz-Resultat für den Fall der Voraussetzung (1^b) abzuleiten, bedeute r_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) eine Folge positiver, in's Unendliche wachsender Zahlen von der Beschaffenheit, dass für $r = r_\lambda$ die Beziehung (1^b) besteht, also:

$$(4) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu C_\nu \cdot r_\lambda^\nu \geqq e^{\gamma \cdot r_\lambda}.$$

Da man die r_λ (wegen $\lim_{\lambda=\infty} r_\lambda = \infty$) jedenfalls so auswählen kann, dass:

$$\gamma (r_{\lambda+1} - r_\lambda) \geqq 1,$$

so gehört dem Intervalle:

$$\gamma r_\lambda \leqq x \leqq \gamma r_{\lambda+1}$$

mindestens eine ganze Zahl an. Bezeichnet man dann mit m_λ die kleinste ganze Zahl, welche nicht kleiner ist, als γr_λ, also:

$$m_{\lambda-1} \leqq m_\lambda - 1 < \gamma r_\lambda \leqq m_\lambda < m_{\lambda+1},$$

so ergiebt sich aus Ungl. (4) a fortiori:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu \cdot \left(\frac{m_\lambda}{\gamma}\right)^\nu > e^{m_\lambda - 1},$$

und, wenn man mit e^{-m_λ} multiplicirt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu m_\lambda^\nu \cdot e^{-m_\lambda} \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^\nu > e^{-1},$$

woraus durch Substitution von $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ (in inf.) und Addition resultirt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu \cdot \left(\sum_1^\infty{}^\lambda m_\lambda^\nu \cdot e^{-m_\lambda}\right) \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^\nu = \infty,$$

also um so mehr:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\lambda \cdot \left(\sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda}\right) \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^\nu = \infty,$$

d. h. die Reihe

(5) $$\sum_0^\infty{}^\nu S_\nu \cdot C_\nu \cdot \varrho^\nu \quad \text{divergirt für } \varrho \geqq \frac{1}{\gamma}.$$

Um das bisher gewonnene Doppel-Resultat im Sinne des oben ausgesprochenen Satzes zu verwerthen, bedarf es schliesslich nur noch des Nachweises, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{S_\nu}{\nu!} = 1$$

ist. Zu diesem Behufe werde gesetzt:

(6) $$f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}.$$

Ist sodann $|e^x| < 1$, also der reelle Theil von x wesentlich negativ, so hat man:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda e^{\lambda x}$$

also:

$$f'(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda \cdot e^{\lambda x}, \quad f''(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}, \ldots$$

$$f^\nu(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{\lambda x}$$

und daher:

(7) $$f^\nu(-1) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda} = S_\nu.$$

Andererseits ergiebt sich:

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots}$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \left(1 + \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu\right),$$

sodass also $f(x) + \frac{1}{x}$ in der Umgebung von $x = 0$ regu

ist. Da ferner $f(x) + \frac{1}{x}$ auch bei $x = -1$ regulär ist ı
als nächstgelegene singuläre Stellen die Stellen $x = \pm 2$
auftreten, so hat man:

$$(8) \qquad f(x) + \frac{1}{x} = \sum_0^\infty {}^\nu b_\nu (x+1)^\nu \quad \text{für: } |x + 1| < 2\pi,$$

in's besondere also auch noch für $x = 0$. Die Reihe $\sum\limits_0^\infty$
ist somit convergent, und daher:

$$(9) \qquad \lim_{\nu = \infty} b_\nu = 0.$$

Man hat aber:

$$b_\nu = \frac{1}{\nu!} \cdot D_x^\nu \left(f(x) + \frac{1}{x}\right)_{x=-1}$$

$$= \frac{1}{\nu!} \cdot \left\{f^\nu(x) + \frac{(-1)^\nu \cdot \nu!}{x^{\nu+1}}\right\}_{x=-1}$$

$$= \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(-1) - 1,$$

und somit nach Gl. (9) und (7):

$$(10) \qquad \lim_{\nu = \infty} \frac{S_\nu}{\nu!} = 1.$$

Daraus folgt dann schliesslich mit Berücksichtigung
Resultate (3) und (5), dass von den beiden Reihen:

$$\sum_0^\infty {}^\nu \nu! \cdot c_\nu \cdot \varrho^\nu, \qquad \sum_0^\infty {}^\nu \nu! \cdot C_\nu \cdot \varrho^\nu$$

die erste für $\varrho < \frac{1}{\gamma}$ convergirt, die zweite für $\varrho \geqq \frac{1}{\gamma}$ divergirt. Die erste besitzt also mindestens, die zweite höchstens den Convergenz-Radius $\frac{1}{\gamma}$, und es bestehen somit nach dem bekannten Cauchy'schen Satze die Beziehungen:

$$(11^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu} \leqq \gamma, \qquad (11^b) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, C_\nu} \geqq \gamma.$$

Zusatz. Die unter den gemachten Voraussetzungen geltenden Relationen (11^a), (11^b) lassen sich unmittelbar auch durch die folgenden, etwas einfacheren ersetzen:

$$(12^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq \gamma \cdot e, \qquad (12^b) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} \geqq \gamma \,.\, e,$$

wenn man ν^ν an Stelle von $\nu!$ einführt, was sich durch Benützung der Stirling'schen Formel, aber auch ohne dieses relativ complicirte Hülfsmittel in folgender, äusserst elementaren Weise bewerkstelligen lässt. Es ist identisch:

$$n! = \frac{1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} \cdot n^n}{2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \ldots n^{n-1}} = n^n \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^\nu$$

$$= \frac{1^2 \cdot 2^3 \cdot 4^4 \ldots (n-1)^n \cdot n^{n+1}}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \ldots n^n} = n^{n+1} \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu+1},$$

also:

$$(12) \qquad n^n \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} = n! = n^{n+1} \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}}$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < e < \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

und daher:

$$\prod_1^{n-1}{}_\nu \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < e^{n-1} < \prod_1^{n-1}{}_\nu \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}.$$

Multiplicirt man diese Ungleichung mit Gl. (12), so folgt

$$n^n < n!\, e^{n-1} < n^{n+1}$$

oder auch:

$$e < n! \left(\frac{e}{n}\right)^n < e\, n,$$

und daher:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n!} \cdot \frac{e}{n} = 1, \tag{13}$$

anders geschrieben:

$$\sqrt[n]{n!} \cong \frac{n}{e} \qquad (n = \infty, \tag{14}$$

sodass also in der That die Beziehungen (11) und (12) durch einander ersetzt werden dürfen.

---

§ 2.

Um den soeben abgeleiteten Hauptsatz zu verallgemeinern beweise ich zunächst den folgenden Hülfssatz:

Ist $\varkappa > 0$, $\sum b_\nu^\varkappa$ eine beliebig vorgelegte, $\sum a_\nu$ eine ganz willkürlich angenommene convergente Reihe mit positiven Gliedern, so hat man:

$$\text{(I)} \quad \begin{matrix}(15^a)\\(15^b)\end{matrix} \Big\} \sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu^\varkappa \left\{\begin{matrix}\leq\\>\end{matrix}\right\} \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu\right)^\varkappa \left\{\begin{matrix}\varkappa > 1\\ \varkappa < 1\end{matrix}\right.$$

$$\text{(II)} \quad \begin{matrix}(16^a)\\(16^b)\end{matrix} \Big\} \sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu^\varkappa \left\{\begin{matrix}\geq\\<\end{matrix}\right\} \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \left\{\begin{matrix}\varkappa > 1\\ \varkappa < 1.\end{matrix}\right.$$

Beweis zu (I). Ist $p > 0$, $\varkappa > 1$, so hat man:

$$p^{\varkappa-1} < (1+p)^{\varkappa-1} \tag{17}$$

und daher:

$$p^{\varkappa-1} - 1 < (1+p)^{\varkappa-1} - 1.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung sicher positiv ist so folgt durch Multiplication mit der Ungleichung:

$$p < 1 + p,$$

dass:

$$p^\varkappa - p < (1+p)^\varkappa - 1 - p,$$

also:

(18) $$1 + p^\varkappa < (1+p)^\varkappa.$$

Setzt man jetzt: $p = \frac{b}{b_0}$, so folgt nach Multiplication mit $b_0^\varkappa$:

(19) $$b_0^\varkappa + b_1^\varkappa < (b_0 + b_1)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1).$$

Angenommen nun, man habe für irgend ein $n \geqq 1$:

(20ᵃ) $$\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1),$$

so liefert die Addition von $b_{n+1}^\varkappa$ zunächst:

$$\sum_0^{n+1}{}^\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa + b_{n+1}^\varkappa$$

also, mit Benützung von Ungl. (19):

$$\sum_0^{n+1}{}^\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^{n+1}{}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa,$$

d. h. Ungl. (20ᵃ) gilt auch noch, wenn n durch $(n+1)$ ersetzt wird. Sie gilt also allgemein, da nach (19) ihre Richtigkeit für $n = 1$ erwiesen ist.

Schreibt man in (20ᵃ) $\varkappa'$ statt $\varkappa$ und substituirt $\frac{1}{b_\nu^{\varkappa'}}$ für b_ν, so folgt weiter:

$$\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu < \left(\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}}\right)^{\varkappa'},$$

also:

$$\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}} > \left(\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu\right)^{\frac{1}{\varkappa'}} \quad (\varkappa' > 1),$$

und daher, wenn man noch $\frac{1}{\varkappa'} = \varkappa$ setzt:

(20ᵇ) $$\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu^\varkappa > \left(\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1).$$

Da die grundliegende Beziehung (17) eine wirkliche Ungleichung ist (d. h. mit definitivem Anschlusse der Gleichheit), und die Abweichung zwischen den beiden Seiten, wie der Schluss von n auf $(n+1)$ zeigt, bei dem Hinzutreten jedes neuen Elementes noch verstärkt wird, so folgt schliesslich für $\lim n = \infty$, wie behauptet:

$$\sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu^\varkappa \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} \left(\sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa \left\{ \begin{matrix} \varkappa > 1 \\ \varkappa < 1. \end{matrix} \right. —$$

Beweis zu II. Ist $0 < c_0 < r < c_1$ und $\varkappa > 1$, so hat man:[1])

$$\left\{ \begin{aligned} & c_1^\varkappa - r^\varkappa > \varkappa \cdot r^{\varkappa-1}(c_1 - r) \\ & r^\varkappa - c_0^\varkappa < \varkappa \cdot r^{\varkappa-1}(r - c_0). \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Multiplicirt man die erste dieser Ungleichungen mit $(r - c_0)$, die zweite mit $(c_1 - r)$, so folgt durch Subtraction:

$$(c_1^\varkappa - r^\varkappa)\cdot(r - c_0) - (r^\varkappa - c_0^\varkappa)\cdot(c_1 - r) > 0,$$

anders geordnet:

$$(c_1 - r)\cdot c_0^\varkappa + (r - c_0)\cdot c_1^\varkappa > (c_1 - c_0)\cdot r^\varkappa. \tag{22}$$

Der Bedingung: $c_0 < r < c_1$ wird offenbar genügt, wenn man setzt:

$$r = \frac{a_0 c_0 + a_1 c_1}{a_0 + a_1},$$

unter a_0, a_1 beliebige positive Zahlen verstanden. Alsdann geht aber Ungleichung (22) in die folgende über:

$$\frac{c_1 - c_0}{a_1 + a_1}\cdot a_0 c_0^\varkappa + \frac{c_1 - c_0}{a_0 + a_1}\cdot a_1 c_1^\varkappa > (c_1 - c_0)\left(\frac{a_0 c_0 + a_1 c_1}{a_0 + a_1}\right)^\varkappa,$$

oder auch:

$$a_0 c_0^\varkappa + a_1 c_1^\varkappa > (a_0 + a_1)^{1-\varkappa}\cdot(a_0 c_0 + a_1 c_1)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1). \tag{23}$$

Da im übrigen diese zunächst unter der Voraussetzung $c_0 < c_1$ abgeleitete Ungleichung in Bezug auf die Indices 0,1

[1]) S. den Zusatz I.

symmetrisch sich verhält, so gilt sie unverändert auch für $c_0 > c_1$; nur für $c_0 = c_1$ geht sie in eine Identität über.

Angenommen nun, man habe für irgend ein $n \geqq 1$:

$$\text{(24}^{\text{a}}) \quad \sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu\, c_\nu^\varkappa > \left(\sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu\, c_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1).$$

Ersetzt man sodann:

$$a_n \text{ durch } a_n + a_{n+1}$$

$$c_n \quad ,, \quad \frac{a_n\, c_n + a_{n+1}\, c_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}$$

also:

$$a_n\, c_n \quad ,, \quad a_n\, c_n + a_{n+1}\, c_{n+1},$$

so geht Ungleichung (24$^{\text{a}}$) zunächst in die folgende über:

$$\sum_0^{n-1}{}^{\nu}\, a_\nu\, c_\nu^\varkappa + (a_n + a_{n+1})^{1-\varkappa} \cdot (a_n\, c_n + a_{n+1}\, c_{n+1})^\varkappa$$
$$> \left(\sum_0^{n+1}{}^{\nu}\, a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^{n+1}{}^{\nu}\, a_\nu\, c_\nu\right)^\varkappa,$$

und, wenn man auf das letzte Glied der linken Seite die Ungleichung (23) anwendet:

$$\sum_0^{n+1}{}^{\nu}\, a_\nu\, c_\nu^\varkappa > \left(\sum_0^{n+1}{}^{\nu}\, a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^{n+1}{}^{\nu}\, a_\nu\, c_\nu\right)^\varkappa,$$

d. h. Ungl. (24$^{\text{a}}$) gilt auch noch, wenn n durch $n+1$ ersetzt wird. Sie gilt also wiederum allgemein, da ihre Richtigkeit nach (23) für $n = 1$ erwiesen ist.

Schreibt man in Ungl. (24$^{\text{a}}$) $\varkappa'$ statt $\varkappa$ und substituirt $c_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}}$ für c_ν, so wird:

$$\sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu\, c_\nu > \left(\sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu\right)^{1-\varkappa'} \cdot \left(\sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu\, c_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}}\right)^{\varkappa'},$$

also:

$$\sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu\, c_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}} < \left(\sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu\right)^{1-\frac{1}{\varkappa'}} \cdot \left(\sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu\, c_\nu\right)^{\frac{1}{\varkappa'}} \qquad (\varkappa' > 1),$$

und, wenn man $\frac{1}{\varkappa'} = \varkappa$ setzt:

$$(24^b) \qquad \sum_0^n{}^\nu a_\nu c_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu c_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa < 1).$$

Macht man noch in (23^a), 23^b) die Substitution:

$$a_\nu c_\nu^\varkappa = b_\nu^\varkappa, \quad \text{also:} \quad c_\nu = a_\nu^{-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu,$$

so ergiebt sich:

$$(25) \quad \sum_0^n{}^\nu b_\nu^\varkappa \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \left\{ \begin{matrix} \varkappa > 1 \\ \varkappa < 1. \end{matrix} \right.$$

Da die grundlegende Beziehung (22) wiederum eine wirkliche Ungleichung ist, sofern nicht gerade $c_0 = c_1$, und die Abweichung zwischen den beiden Seiten, wie der Schluss von n auf $(n + 1)$ zeigt, bei dem Hinzutreten jedes neuen Elementes c_ν sich verstärkt, ausser wenn $c_\nu = c_{\nu-1}$, in welchem Falle sie immerhin erhalten bleibt, so folgt für $n = \infty$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} \left(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \left\{ \begin{matrix} \varkappa > 1 \\ \varkappa < 1 \end{matrix} \right., \quad \text{q. e. d.}$$

Zusatz I. Die Ungleichungen (24) lassen sich auch aus einem von Herrn Hoelder[1]) mit Hülfe des Mittelwerthsatzes der Differential-Rechnung bewiesenen, allgemeineren Mittelwerthsatze herleiten. Zur Vervollständigung der hier gegebenen, elementareren Herleitung sei ausdrücklich bemerkt, dass man die fundamentalen Ungleichungen (21) auch für ganz beliebige positive $\varkappa$, ohne den zumeist zu ihrer Herleitung verwendeten Mittelwerthsatz der Differential-Rechnung, völlig elementar in folgender Weise gewinnt.

Aus der für jedes von 1 verschiedene A und ganzzahlige $n > 1$ geltenden Identität:

$$\frac{A^n - 1}{A - 1} = \frac{1 - A^n}{1 - A} = 1 + A + \ldots + A^{n-1}$$

[1]) Göttinger Nachr. 1889, p. 38 ff.; vgl. in's besondere p. 44.

folgt für jedes positive $A \gtrless 1$:

$$A^n > 1 + n(A-1) \tag{26}$$

und hieraus durch Substitution von $A^{-\frac{1}{n}}$ für A:

$$A^{-1} > 1 + n(A^{-\frac{1}{n}} - 1),$$

also:

$$A^{-\frac{1}{n}} < 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{A-1}{A},$$

wobei die rechte Seite stets wesentlich positiv ist. In Folge dessen hat man:

$$A^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{A-1}{A}}$$

$$> 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{A-1}{A}, \quad \text{falls: } \frac{1}{n} \cdot \left| \frac{A-1}{A} \right| < 1,$$

und, wenn man diese Ungleichung in die m^{te} Potenz erhebt, mit Benützung von Ungl. (26):

$$A^{\frac{m}{n}} > 1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{A-1}{A}. \tag{27}$$

Die hierbei gemachte Voraussetzung: $\frac{1}{n} \cdot \left| \frac{A-1}{A} \right| < 1$ ist offenbar immer erfüllt, wenn $A > 1$. Ist dagegen $A < 1$, so wird $\frac{1}{n} \cdot \frac{A-1}{A} < 0$, sodass also, falls $\frac{1}{n} \cdot \left| \frac{A-1}{A} \right| > 1$ sein sollte, die rechte Seite von Ungl. (27) negativ ausfällt: in diesem Falle sagt also diese Ungleichung etwas zwar triviales, aber immerhin richtiges aus. Man hat somit für jedes positive $A \gtrless 1$ und jedes rationale $\varkappa > 0$:

$$A^{\varkappa} > 1 + \varkappa \cdot \frac{A-1}{A}. \tag{28}$$

Ist jetzt $\varkappa$ irrational und etwa $\varkappa = \lim_{n=\infty} \varkappa_n$, wo $\varkappa_n > 0$ und rational, so folgt aus:

$$A^{\varkappa_n} > 1 + \varkappa_n \cdot \frac{A-1}{A}$$

auf Grund der Definition: $A^\varkappa = \lim\limits_{n=\infty} A^{\varkappa_n}$, zunächst nur soviel, dass:

$$A^\varkappa \geqq 1 + \varkappa \cdot \frac{A-1}{A}.$$

Man erkennt aber leicht, dass das Gleichheitszeichen in Wahrheit ausgeschlossen erscheint. Dies ist ohne weiteres evident, falls die rechte Seite negativ ausfallen sollte. Ist sie aber positiv, so gilt dies a fortiori, wenn man $\varkappa$ durch $\frac{\varkappa}{2}$ ersetzt. Man hätte also zunächst:

$$A^{\frac{\varkappa}{2}} \geqq 1 + \frac{\varkappa}{2} \cdot \frac{A-1}{A} > 0$$

und hieraus durch Erhebung in's Quadrat:

$$A^\varkappa \geqq 1 + \varkappa \cdot \frac{A-1}{A} + \frac{\varkappa^2}{4} \cdot \left(\frac{A-1}{A}\right)^2$$
$$> 1 + \varkappa \cdot \frac{A-1}{A}.$$

Die Ungleichung (28) gilt somit für jedes beliebige $\varkappa > 0$.

Ist jetzt $\varkappa > 1$, so hat man auch:

$$A^{\varkappa - 1} > 1 + (\varkappa - 1) \cdot \frac{A-1}{A},$$

und, wenn man diese Ungleichung mit A multiplicirt:

$$A^\varkappa > A + (\varkappa - 1)(A - 1)$$

d. h. schliesslich:

(29) $$A^\varkappa > 1 + \varkappa (A - 1) \quad \text{für } \varkappa > 1.$$

Substituirt man hier $A = \frac{b}{a}$ und $A = \frac{a}{b}$, wo $b > a > 0$, so ergeben sich die oben unter (21) benützten Ungleichungen:

$$(30)\qquad \begin{cases} b^\varkappa - a^\varkappa > \varkappa \cdot a^{\varkappa-1}(b-a) \\ b^\varkappa - a^\varkappa < \varkappa \cdot b^{\varkappa-1}(b-a) \end{cases} \qquad (\varkappa > 1).$$

Zusatz II. Liest man die auf den Fall $\varkappa > 1$ bezügliche Ungleichung (16^a) rückwärts, so gewinnt man den folgenden Convergenz-Satz:

Gleichzeitig mit den beiden Reihen $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu^\varkappa$ *(wo* $\varkappa > 1$*) convergirt allemal auch die Reihe* $\sum a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu$.

Herr Hoelder hat diesen Satz nur für den speciellen Fall $a_\nu = \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\varrho}$ aus der Ungleichung (24^a) in wesentlich complicirterer Weise abgeleitet.[1]) Dazu will ich noch bemerken, dass der obige Convergenz-Satz für den Fall eines ganzzahligen $\varkappa$ sich noch einfacher aus dem bekannten Satze ergiebt,[2]) dass das geometrische Mittel niemals das arithmetische übersteigt, also:

$$\sqrt[\varkappa]{p^{(1)} \cdot p^{(2)} \dots p^{(\varkappa)}} < \frac{1}{\varkappa}(p^{(1)} + p^{(2)} + \dots + p^{(\varkappa)}).$$

Setzt man hier $p^{(1)} = \dots = p^{(\varkappa-1)} = a_\nu$, $p^{(\varkappa)} = b_\nu^\varkappa$, so folgt:

$$a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu \leq \frac{(\varkappa-1)\cdot a_\nu + b_\nu^\varkappa}{\varkappa}$$

und daher:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu \leq \left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)\cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu + \frac{1}{\varkappa}\cdot\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa,$$

woraus die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung unmittelbar hervorgeht.

---

[1]) A. a. O. p. 46.

[2]) Für den Fall $\varkappa = 2$ wurde diese Schlussweise schon bei früherer Gelegenheit von mir benützt: Sitz.-Ber. Bd. 30 (1900), p. 63.

§ 3.

Verallgemeinerte Form des Hauptsatzes vc

Besteht von den beiden Beziehungen:

$$(31^a) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu \leq A \cdot e^{\gamma \cdot r^\alpha}$$

$$(A > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha > 0$$

$$(31^b) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu C_\nu r^\nu \geq A \cdot e^{\gamma \cdot r^\alpha}$$

die erste für alle r, welche eine gewisse positive Zahl . steigen, die zweite für unendlich viele r, unter den beliebig grosse vorkommen, so hat man:

$$(32^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot c_\nu} < (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$(32^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot C_\nu} > (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

oder auch:

$$(33^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leq (\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$(33^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} > (\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Beweis: Substituirt man in (31^a) $r^{\frac{1}{\alpha}}$ für r, so w

$$(34) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^{\frac{\nu}{\alpha}} = \sum_0^\infty{}^\nu (c_\nu^\alpha r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} < A \cdot e^{\gamma r} \quad (\text{für } r > R^\alpha).$$

Man hat nun zunächst im Falle $\alpha > 1$ nach § 2, Ung (für $\varkappa = \frac{1}{\alpha} < 1$):

$$\sum_0^\infty{}^\nu (c_\nu^\alpha r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^\alpha r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

also:

$$(35^1) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^\alpha r^\nu < \left(\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^{\frac{\nu}{\alpha}}\right)^\alpha \qquad (\alpha > 1).$$

Andererseits im Falle $a < 1$ nach Ungl. (16^a) (für $\varkappa = \frac{1}{a} > 1$), wenn man noch setzt: $a_\nu = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu$, wo $\delta > 0$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu (c_\nu^a r^\nu)^{\frac{1}{a}} > \left(\sum_0^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu\right)^{1-\frac{1}{a}} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\nu(1-a)} \cdot c_\nu^a \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{a}}$$

$$= \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{a}} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot \left(\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}\right)^\nu\right)^{\frac{1}{a}},$$

also:

$$(35^2)\quad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot \left(\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}\right)^\nu < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-a} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu\, r^{\frac{\nu}{a}}\right)^a \quad (a<1).$$

Mit Benützung der Ungleichungen (35^1), (35^2) ergiebt sich also aus (34):

$$(36^1)\quad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot r^\nu < A^a \cdot e^{a\gamma r} \qquad (a > 1)$$

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot \left(\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}\right)^\nu < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-a} \cdot A^a \cdot e^{a\gamma r} \qquad (a < 1),$$

oder, wenn man in der letzten Ungleichung $\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}$ durch r ersetzt:

$$(36^2)\quad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot r^\nu < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-a} \cdot A^a \cdot e^{a\gamma \cdot (1+\delta)^{1-a} \cdot r} \qquad (a < 1).$$

Nach dem Hauptsatze des § 1 ergibt sich also aus (36^1), dass:

$$(37^1)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu^a} \leq a\,\gamma \qquad (a > 1).$$

Ebenso aus (36^2) zunächst:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu^a} \leq a\,\gamma\,(1+\delta)^{1-a} \qquad (a < 1).$$

Da es aber freisteht, δ unbegrenzt zu verkleinern, so folgt, dass auch in d i e s e m Falle (d. h. für $a < 1$):

$$(37^2) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu^a} \leqq a\gamma$$

sein muss. Beachtet man noch, dass die Beziehung (37¹), bezw. (37²) für $a = 1$ mit der in § 1 unter (2ª) bemerkten zusammenfällt, so ergiebt sich schliesslich, wenn man noch in die $\left(\frac{1}{a}\right)^{\text{te}}$ Potenz erhebt, in Uebereinstimmung mit der Behauptung (32ª):

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot c_\nu} \leqq (a\gamma)^{\frac{1}{a}} \qquad \text{für jedes } a > 0.$$

In ganz analoger Weise findet man aus der Voraussetzung (31ᵇ), wenn man dieselbe durch Substitution von $r^{\frac{1}{a}}$ für r zunächst wiederum auf die Form bringt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu r^{\frac{\nu}{a}} = \sum_0^\infty{}^\nu (C_\nu^a \cdot r^\nu)^{\frac{1}{a}} \geqq e^{\gamma r}$$

und sodann auf deren linke Seite die Ungleichungen (15ª), (16ᵇ) anwendet, übereinstimmend mit (32ᵇ):

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot C_\nu} \geqq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}.$$

Mit Benützung der infinitären Beziehung (14) lassen sich dann diese Relationen wiederum auch durch die etwas einfacheren (33ª), (33ᵇ) ersetzen.

---

§ 4.

Der soeben bewiesene Hauptsatz ist in der gegebenen Form nicht ohne weiteres umkehrbar. Dagegen lassen sich die Voraussetzungen des Satzes noch in der Weise erweitern, dass der folgende umkehrbare Satz resultirt:

Satz I. *Besteht für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ von den beiden Beziehungen:*

$$(38^a) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu r^\nu < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma r^a}$$

$$(38^b) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu C_\nu r^\nu > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma r^a}$$

die erste für alle r, welche eine gewisse, im allgemeinen von ε abhängige positive Zahl R_ε übersteigen; die zweite für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen, so hat man:

$$(39^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot c_\nu} \leq (a\gamma)^{\frac{1}{a}},$$

$$(39^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot C_\nu} \geq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}$$

oder auch:

$$(40^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leq (a\gamma e)^{\frac{1}{a}},$$

$$(40^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} \geq (a\gamma e)^{\frac{1}{a}}.$$

Umgekehrt folgen aus den Voraussetzungen (39) oder (40) auch allemal die Beziehungen (38) in dem angegebenen Umfange.[1])

---

[1]) Setzt man:
$$a\gamma e = \varkappa, \text{ also: } \gamma = \frac{\varkappa}{a e},$$
so nimmt die obige Umkehrung die folgende Form an:

Aus den Voraussetzungen

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leq \varkappa^{\frac{1}{a}} \quad , \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} \geq \varkappa^{\frac{1}{a}}$$

folgt allemal:

$$\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu r^\nu < e^{\frac{\varkappa(1+\varepsilon)}{a e}\cdot r^a} \quad , \quad \sum_0^\infty {}^\nu C_\nu r^\nu > e^{\frac{\varkappa(1-\varepsilon)}{a e}\cdot r^a}$$

in dem oben näher bezeichneten Umfange.

Den ersten Theil dieses Satzes hat Herr Ernst Lindelöf (unter der etwas engeren Voraussetzung $\nu^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} < \varkappa^{\frac{1}{a}}$ für $\nu > n$) auf gänzlich anderem Wege abgeleitet: a. a. O. p. 39.

Beweis. Aus (38^a) würde auf Grund des vorigen Hauptsatzes (Formel (32^a), (33^a)) zunächst folgen, dass für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot c_\nu} \leqq ((1+\varepsilon) \cdot a\gamma)^{\frac{1}{a}}$$

oder auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq ((1+\varepsilon) \cdot a\gamma e)^{\frac{1}{a}}.$$

Da aber ε unbegrenzt verkleinert werden darf, so folgt schliesslich, dass geradezu:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot c_\nu} \leqq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}$$

oder auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq (a\gamma e)^{\frac{1}{a}}.$$

Das analoge gilt bezüglich der Herleitung von Ungl. (39^b), (40^b).

Die Umkehrbarkeit dieser Resultate lässt sich dann in folgender Weise indirect beweisen. Angenommen es bestehe die Voraussetzung (39^a), und es sei nicht möglich, jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein R_ε so zuzuordnen, dass Ungl. (38^a) für $r > R_\varepsilon$ beständig erfüllt ist: alsdann müsste ein bestimmtes $\varepsilon' > 0$ existiren, derart dass unter beliebig grossen r immer wieder solche vorkommen, für welche:

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu \geqq e^{(1+\varepsilon')\cdot \gamma r^a}.$$

Daraus würde aber nach dem vorigen Hauptsatze (s. Ungl. (31^b), (32^b)) folgen, dass:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}} \cdot c_\nu} > ((1+\varepsilon') \cdot a\gamma)^{\frac{1}{a}},$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Analog würde die Annahme, dass die Beziehung (38^b) nicht allemal aus der Voraussetzung (39^b) resultire, die Existenz einer Ungleichung von der Form:

$$\sum_0^\infty {}^\nu\, C_\nu r^\nu \leq e^{(1-\varepsilon')\cdot\gamma r^\alpha} \qquad (r > R)$$

nach sich ziehen, und somit schliesslich im Widerspruche mit der Voraussetzung auf die Relation:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot C_\nu} \leq ((1-\varepsilon')\cdot\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

führen.

---

§ 5.

Ein weiterer ebenfalls umkehrbarer Satz ergiebt sich aus dem Hauptsatze des § 3, wenn die Voraussetzung (31^a) für jedes beliebig kleine, die Voraussetzung (31^b) für jedes beliebig grosse $\gamma > 0$ erfüllt ist, nämlich:

Satz II. *Besteht von den beiden Beziehungen:*

$$(41^a) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu\, c_\nu r^\nu < e^{\varepsilon\cdot r^\alpha}$$

$$(41^b) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu\, C_\nu r^\nu > e^{\omega\cdot r^\alpha}$$

die erste für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und alle r, die eine gewisse positive Zahl R_ε übersteigen; die zweite für jedes beliebig grosse $\omega > 0$ und unendlich viele Werthe von r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen,[1] *so hat man:*

---

[1]) Dieser Zusatz könnte hier wegbleiben, da bei hinlänglicher Vergrösserung von ω die Beziehung (41^b) überhaupt nur bei entsprechender Vergrösserung von r bestehen kann.

$$(42^a) \qquad \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot c_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} = 0$$

$$(42^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot C_\nu} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} = \infty.$$

Umgekehrt resultiren aus den Voraussetzungen (42) allemal die Beziehungen (41) in dem angegebenen Umf

Beweis. Aus den Voraussetzungen (41) würde auf G des Hauptsatzes § 3 zunächst folgen, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot c_\nu} \leq (\alpha\,\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot C_\nu} \geq (\alpha\,\omega)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Da es aber freisteht, ε unbegrenzt zu verkleinern, ω begrenzt zu vergrössern, so ergeben sich hieraus in der die Beziehungen (42).

Die Umkehrbarkeit dieser Resultate erkennt man wiederum unmittelbar auf indirectem Wege, ganz analog, bei Satz I. —

Aus dem eben bewiesenen Satze ergiebt sich schlies noch der folgende:

Satz III. *Besteht für jedes beliebig kleine δ von den beiden Beziehungen*

$$(43^a) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu\, c_\nu\, r^\nu < e^{r^{\alpha+\delta}}$$

$$(43^b) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu\, C_\nu\, r^\nu > e^{r^{\alpha-\delta}}$$

die erste für alle r, die eine gewisse positive Zah übersteigen; die zweite für unendlich viele r, denen auch beliebig grosse vorkommen, so hat man jedes beliebig kleine $\delta > 0$:

$$(44^a) \qquad \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot c_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} = 0$$

$$(44^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot C_\nu} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} = \infty.$$

Umgekehrt resultiren aus den Voraussetzungen (44) auch allemal die Beziehungen (43) in dem angegebenen Umfange.

Beweis. Denkt man sich δ beliebig klein fixirt, so besteht auf Grund der Voraussetzung (43ᵃ) für hinlänglich grosse r (nämlich $r > R_{\frac{1}{2}\delta}$) die Beziehung:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu}\, c_\nu\, r^\nu < e^{r^{\alpha+\frac{\delta}{2}}} = e^{\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\delta}{2}}\cdot r^{\alpha+\delta}}.$$

Wie klein jetzt auch $\varepsilon > 0$ vorgeschrieben wird, so kann man durch passende Vergrösserung von r stets erzielen, dass $\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\delta}{2}} < \varepsilon$ wird. Dann ergiebt sich aber aus Satz II, dass für dieses und somit schliesslich für jedes $\delta > 0$:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}}\cdot c_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}}\cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} = 0.$$

Das analoge gilt dann bezüglich der Behauptung (44ᵇ).

Auch hier ergiebt sich die Umkehrbarkeit der betreffenden Resultate mit Hülfe des in Satz I benützten indirecten Beweisverfahrens.

---

§ 6.

Es sei jetzt x eine complexe Veränderliche, $g(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, b_\nu\, x^\nu$, wo die b_ν ebenfalls beliebig complex zu denken sind, eine beständig convergirende Reihe. Angenommen nun, es genüge $|g(x)|$ bei hinlänglich grossen Werthen von $|x|$ einer der beiden Voraussetzungen, welche in dem Hauptsatze des § 3 für $\sum c_\nu r^\nu$ bezw. $\sum C_\nu r^\nu$ galten, also entweder:

(45ᵃ) $$|g(x)| \leq A\cdot e^{\gamma\cdot|x|^\alpha}$$

für alle $|x| > R$; oder:

(45ᵇ) $$|g(x)| \geq A\cdot e^{\gamma\cdot|x|^\alpha}$$

für unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen. Es fragt sich nun: Bleibt auch unter diesen Voraussetzungen der betreffende Hauptsatz gültig, d. h. genügen auf Grund der Voraussetzungen (45ᵃ), (45ᵇ) die $|b_\nu|$ denselben infinitären Relationen, welche sich in § 3 für die c_ν, C_ν ergeben haben?

Man erkennt ohne weiteres, dass diese Frage in Bezug auf die Voraussetzung (45ᵇ) zu bejahen ist. Denn da:

$$(46) \qquad |g(x)| \leq \sum_0^\infty {}^\nu \, |b_\nu x^\nu|$$

so folgt aus (45ᵇ), dass auch:

$$(47) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu \, |b_\nu x^\nu| \geq A \cdot c^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

(in dem angegebenen Umfange) und man findet somit, wenn man in § 3 $r = |x|$, $C_\nu = |b_\nu|$ setzt, nach Ungl. (39ᵇ), (40ᵇ), dass:

$$(48) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} > (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Um nun den entsprechenden Nachweis auch bezüglich der Voraussetzung (45ᵃ) zu führen, bemerke man zunächst, dass aus (45ᵃ), d. h. aus der Beziehung:

$$\left| \sum_0^\infty {}^\nu \, b_\nu x^\nu \right| \leq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \qquad \text{für } |x| > R$$

nach dem Cauchy'schen Coefficienten-Satze sich ergiebt:

$$(49) \qquad |b_\nu x^\nu| \leq A \cdot c^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots; \ |x| > R).$$

Wird jetzt $\delta > 0$ beliebig angenommen, so hat man identisch:

$$|b_\nu x^\nu| = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu \cdot |b_\nu ((1+\delta) x)^\nu|$$

und daher, wenn man auf den zweiten Factor der rechten Seite die Ungleichung (49) anwendet:

$$(50) \qquad |b_\nu x^\nu| < \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu \cdot A \cdot c^{\gamma (1+\delta)^\alpha \cdot |x|^\alpha},$$

gültig für $|x| > \frac{R}{1+\delta}$, also für alle möglichen $\delta > 0$ mit Sicherheit für $|x| > R$.

Substituirt man nun in (50) der Reihe nach $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ in inf., so folgt durch Addition:

$$\sum_0^\infty {}^{\nu} |b_\nu x^\nu| \leq \frac{1+\delta}{\delta} \cdot A \cdot e^{\gamma \cdot (1+\delta)^\alpha \cdot |x|^\alpha} \tag{51}$$

für jedes $\delta > 0$ und $|x| > R$. Hieraus ergiebt sich aber nach dem Hauptsatze des § 3 (Ungl. (39^a), (40^a)) zunächst, dass:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} \equiv \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \leq (1+\delta) \cdot (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und, da es thatsächlich freisteht, δ unbegrenzt zu verkleinern, schliesslich:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} \equiv \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \leq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{52}$$

d. h. auch dieser Theil des Hauptsatzes von § 3 behält unter der jetzigen Voraussetzung seine Gültigkeit. Um das betreffende Resultat nochmals übersichtlich zu formuliren, kann man also den folgenden Satz aussprechen:

Es ist:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} \leq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \textit{wenn:} \ |g(x)| < A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

für alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl R übersteigt.

Es ist:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} \geq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \textit{wenn:} \ |g(x)| \geq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

für unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen.

Gleichzeitig mit dem Hauptsatze des § 3 behalten aber auch die in §§ 4, 5 daraus abgeleiteten Folgesätze ihre Gültigkeit;

dieselben beruhten ja lediglich darauf, dass man die Constanten γ, a in passender Weise durch veränderliche Parameter ersetzte. Man gewinnt auf diese Weise, entsprechend den Sätzen I—III der beiden vorigen Paragraphen, noch die folgenden Sätze:

Satz I'. *Ist für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse Zahl R_ε übersteigt:*

(53ᵃ) $$|g(x)| < e^{\gamma(1+\varepsilon)\cdot|x|^{a}},$$

so hat man:

(54ᵃ) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}}\cdot|b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[\nu]{|b_\nu|} \leq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}.$$

Ist für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:

(53ᵇ) $$|g(x)| > e^{\gamma(1-\varepsilon)\cdot|x|^{a}},$$

so hat man:

(54ᵇ) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}}\cdot|b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[\nu]{|b_\nu|} \geq (a\gamma)^{\frac{1}{a}}.$$

Bestehen also die beiden Voraussetzungen (53ᵃ), (53ᵇ) *gleichzeitig, so wird geradezu:*

(54) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{a}}\cdot|b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[\nu]{|b_\nu|} = (a\gamma)^{\frac{1}{a}}.$$

Umgekehrt resultirt aus der Voraussetzung (54ᵃ) *allemal die Beziehung* (53ᵃ), *ebenso aus* (54ᵇ) *die Beziehung* (53ᵇ), *während die Voraussetzung* (54) *die gleichzeitige Existenz von* (53ᵃ) *und* (53ᵇ) *nach sich zieht.*

Satz II'. *Ist für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$, und alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl R_ε übersteigt:*

(55ᵃ) $$|g(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{a}},$$

so hat man:

(56^a) $$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = 0.$$

Ist für jedes beliebig grosse $\omega > 0$ *und unendlich viele* x, *unter denen (dann eo ipso*[1]*) auch beliebig grosse vorkommen:*

(55^b) $$|g(x)| > e^{\omega \cdot |x|^\alpha},$$

so hat man:

(56^b) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = \infty.$$

Umgekehrt resultirt allemal die Beziehung (55^a) *bezw.* (55^b) *aus der Voraussetzung* (56^a) *bezw.* (56^b).

Satz III'. *Ist für jedes beliebig kleine* $\delta > 0$ *und alle* x, *deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl* R_δ *übersteigt:*

(57^a) $$|g(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}},$$

so hat man für jedes $\delta > 0$:

(58^a) $$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |b_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = 0.$$

Ist für jedes beliebig kleine $\delta > 0$ *und unendlich viele* x, *unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

(57^b) $$|g(x)| > e^{|x|^{\alpha-\delta}},$$

so hat man für jedes $\delta > 0$:

(58^b) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = \infty.$$

Umgekehrt resultirt allemal die Beziehung (57^a) *bezw.* (57^b) *aus der Voraussetzung* (58^a) *bezw.* (58^b).

Anmerkung. Das zur Herleitung des eigentlichen Hauptsatzes angewendete Verfahren, um aus einer oberen Schranke

---

[1]) s. die Fussnote auf p. 183.

für $\left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right|$ eine solche für $\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu|$ abzuleiten, lässt sich offenbar leicht verallgemeinern und dürfte sich auch für andere Untersuchungen als nützlich erweisen. Hier möchte ich nur noch die folgende Bemerkung daran knüpfen. Aus der Voraussetzung

$$\left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right| \leq e^{\gamma\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R, \tag{59}$$

folgt nach Ungl. (51), dass für jedes $\delta > 0$ und $|x| > R$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| \leq \frac{1+\delta}{\delta} \cdot e^{\gamma\cdot(1+\delta)^\alpha\, |x|^\alpha}.$$

Wird jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so kann man zunächst δ so klein fixiren, dass:

$$(1+\delta)^\alpha < 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

also:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| < e^{\lg\left(1+\frac{1}{\delta}\right)+\gamma\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot|x|^\alpha}.$$

Sodann aber kann man eine positive Zahl R_ε so gross annehmen, dass:

$$\lg\left(1+\frac{1}{\delta}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}\cdot\gamma\cdot R_\varepsilon^\alpha \quad \left(\text{d. h. } R_\varepsilon \geq \left(\frac{2}{\varepsilon\gamma}\lg\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha \quad \text{für } |x| > R_\varepsilon.$$

Man findet also schliesslich:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| < e^{\gamma(1+\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R_\varepsilon. \tag{60}$$

In Worten: *Genügt* $\left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x\right|$ *für alle hinlänglich grossen* x *der Beziehung* (59), *so genügt* $\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu|$ *bei beliebig kleinem* $\varepsilon > 0$ *für alle hinlänglich grossen* x *einer Beziehung von der Form* (60).

Ersetzt man die Voraussetzung (59) durch die folgende:

$$(61)\qquad \left|\sum_0^\infty{}^{\nu}\, b_\nu\, x^\nu\right| < e^{\gamma\cdot(1+\varepsilon')\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für jedes } \varepsilon' > 0 \text{ und } |x| > r_{\varepsilon'},$$

so folgt zunächst:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu}\, |b_\nu\, x^\nu| < e^{\gamma(1+\varepsilon')(1+\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R_{\varepsilon,\varepsilon'},$$

d. h. mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\varepsilon, \varepsilon'$, schliesslich:

$$(62)\qquad \sum_0^\infty{}^{\nu}\, |b_\nu\, x^\nu| < e^{\gamma(1+\varepsilon')\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R_{\varepsilon'}.$$

Es genügt also in diesem Falle $\sum_0^\infty{}^{\nu} |b_\nu x^\nu|$ *für hinlänglich grosse* x *stets einer Beziehung von genau* ***derselben*** *Form, wie* $\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} b_\nu x^\nu\right|$.

Ferner ergiebt sich aber auch folgendes: *Besteht für jedes* $\varepsilon > 0$ *und unendlich viele* $|x|$, *unter denen auch beliebig grosse vorkommen, eine Beziehung von der Form:*

$$(63)\qquad \sum_0^\infty{}^{\nu}\, |b_\nu\, x^\nu| > e^{\gamma(1-\varepsilon)\cdot|x|^\alpha},$$

so hat man gleichfalls für jedes $\varepsilon > 0$ *und für unendlich viele* x, *unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$(64)\qquad \left|\sum_0^\infty{}^{\nu}\, b_\nu\, x^\nu\right| > e^{\gamma(1-\varepsilon)\cdot|x|^\alpha}.$$

Andernfalls müsste nämlich ein bestimmtes $\varepsilon_0 > 0$ existiren, derart dass:

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu}\, b_\nu\, x^\nu\right| \leq e^{\gamma(1-\varepsilon_0)\cdot|x|^\alpha}$$

für alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse Zahl R übersteigt. Dann hätte man aber auf Grund von Ungl. (59), (60), wenn man der in (60) auftretenden willkürlichen Zahl ε den Werth ε_0 beilegt:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \, | b_\nu x^\nu | < e^{\gamma(1-\varepsilon_0^2)\cdot|x|^\alpha} \qquad \text{für } |x| > R_{\varepsilon_0},$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Ein analoger Zusammenhang besteht offenbar auch zwisch Ungleichungen von der Form:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \, | b_\nu x^\nu | < e^{\gamma\cdot|x|^{\alpha+\delta}} \quad \text{und:} \quad \left| \sum_0^\infty{}^{\nu} \, b_\nu x^\nu \right| < e^{\gamma\cdot|x|^{\alpha+\delta}}$$

$$\left| \sum_0^\infty{}^{\nu} \, b_\nu x^\nu \right| > e^{\gamma\cdot|x|^{\alpha-\delta}} \quad \text{und:} \quad \sum_0^\infty{}^{\nu} |b_\nu x^\nu| > e^{\gamma\cdot|x|^{\alpha-\delta}}.$$