Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Abhandlungen zur Elastizitätstheorie.

I.

Allgemeine Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche.

Von **A. Korn.**

(Eingelaufen 18. Januar.)

Die Methode der successiven Annäherungen ist im Anschluß an die bekannten, grundlegenden Arbeiten von Schwarz, Picard, Poincaré mit größtem Erfolge zur Lösung einer Reihe der wichtigsten Probleme der mathematischen Physik herangezogen worden.

Versuche, diese Methode auch zur Lösung der in der Elastizitätstheorie auftretenden Differentialgleichungen, und zwar zunächst der statischen Gleichungen:

$$
1) \quad \begin{cases} \Delta u + k \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -X, \\ \Delta v + k \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -Y, \quad \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \Delta w + k \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -Z, \end{cases}
$$

anzuwenden, sind von Lauricella[1]) und E. und F. Cosserat[2]) gemacht worden, aber sie hatten bisher noch zu keinem be-

[1]) Lauricella, Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa 1894; N. C. (4) 9, S. 97, 10, S. 5. Während der Drucklegung meiner Abhandlung erhielt ich Kenntnis von einer neuen, interessanten Untersuchung Herrn Lauricellas (Ann. di Mat. 1905), auf die ich hier noch hinweisen will; dieselbe beschränkt sich auf eine überall konvexe Grenzfläche.

[2]) E. und F. Cosserat, C. r. 126, S. 1089, 1898; 133, S. 145, 1901.

friedigenden Resultate geführt. Die Konvergenz der Reihen, welche die Lösungen darstellen sollen, ließ sich bei den Methoden von Lauricella und E. und F. Cosserat zwar beweisen, so lange man sich in endlicher Entfernung von der Oberfläche hält, bei unendlicher Annäherung an die Oberfläche lassen uns diese Untersuchungen aber vollständig im Stich, und es bleibt durchaus unsicher, ob die aufgestellten Reihen wirklich an der Grenze die geforderten Grenzbedingungen erfüllen, ja, ob dieselben überhaupt konvergent sind.

Um durch die Methode der successiven Annäherungen das elastische Gleichgewichtsproblem bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche in seiner ganzen Allgemeinheit zu lösen, ist ein von den früheren etwas verschiedener Ansatz nützlich. Mit Hilfe desselben gelingt es, wie in der vorliegenden Abhandlung gezeigt werden soll, nicht bloß, die Konvergenz der für die Lösungen aufgestellten Reihen in endlicher Entfernung von der Oberfläche zu beweisen, — wozu der Cosseratsche Grundgedanke hinreichend ist — sondern auch die Hauptschwierigkeit zu überwinden, nämlich zu zeigen, daß die aufgestellten Reihen auch bei unendlicher Annäherung an die Oberfläche konvergent bleiben und die geforderten Grenzbedingungen erfüllen.

Es wird in dieser Abhandlung gezeigt, daß die elastischen Gleichungen 1) bei gegebenen Grenzwerten von u, v, w an der Oberfläche ein und nur ein System von Lösungen u, v, w zulassen, für jeden beliebigen Wert von k, der der Ungleichung entspricht:

$$-1 < k < +\infty,$$

und diese Lösungen werden in Gestalt von unendlichen, stets konvergenten Reihen gegeben, bei gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen über die Funktionen X, Y, Z, die Grenzwerte von u, v, w und ihre Ableitungen.

Damit ist das elastische Gleichgewichtsproblem bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche in seiner **allgemeinsten** Form gelöst.

§ 1.

Wir suchen drei in einem Gebiete τ eindeutige und stetige Funktionen u, v, w mit endlichen[1]) ersten Ableitungen, welche in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen 1) genügen und an der Oberfläche ω von τ gegebene Grenzwerte

$$2) \qquad \begin{cases} u = \bar{u}, \\ v = \bar{v}, \\ w = \bar{w} \end{cases}$$

annehmen.

Über die als gegeben vorauszusetzenden Funktionen X, Y, Z der Stelle in τ wollen wir annehmen, daß sie (abteilungsweise) eindeutig und stetig sind, und zwar so, daß für je zwei Punkte 1 und 2 (eines Teilgebietes) die absoluten Funktionsdifferenzen

$$\overline{\overline{<}}\, A\, r_{12}^{\lambda}$$

sind, bei genügend kleiner Entfernung r_{12} der beiden Punkte, wo A eine endliche Konstante, λ eine von null verschiedene positive Zahl vorstellt.[2])

Über die als gegeben vorauszusetzenden Funktionen

$$\bar{u},\ \bar{v},\ \bar{w}$$

der Stelle an ω wollen wir annehmen, daß sie mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, und zwar sollen die ersten Ableitungen derart stetig sein, daß für je zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω die absoluten Funktionsdifferenzen (der ersten Ableitungen)

$$\overline{\overline{<}}\, A'\, r_{12}^{\lambda'}$$

sind, bei genügend kleiner Entfernung r_{12} der beiden Punkte, wo A' eine endliche Konstante, λ' eine von Null verschiedene positive Zahl vorstellt.[3])

---

[1]) Endlich im Sinne von „endlich und integrabel".

[2]) Diese Bedingung ist im Besonderen erfüllt, wenn die ersten Ableitungen von X, Y, Z in τ endlich sind.

[3]) Diese Bedingung ist im Besonderen erfüllt, wenn die zweiten Ableitungen von $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ an ω endlich sind.

Bezeichnen wir mit U, V, W die Potentialfunktionen des Gebietes τ, welche bezw. die Grenzwerte $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ an ω besitzen, so ergeben sich für die Funktionen:

$$\text{3)} \qquad \begin{cases} u' = u - U, \\ v' = v - V, \\ w' = w - W \end{cases}$$

die Differentialgleichungen:

$$\text{4)} \qquad \begin{cases} \Delta u' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial x} = -X - k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\[2ex] \Delta v' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial y} = -Y - k\dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \\[2ex] \Delta w' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial z} = -Z - k\dfrac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

wo wir noch:

$$\text{5)} \qquad \begin{cases} \theta' = \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial v'}{\partial y} + \dfrac{\partial w'}{\partial z}, \\[2ex] \Theta = \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z} \end{cases}$$

gesetzt haben. Dazu kommen noch die Grenzbedingungen:

$$\text{6)} \qquad \left.\begin{cases} u' = 0, \\ v' = 0, \\ w' = 0 \end{cases}\right\} \text{ an } \omega.$$

§ 2.

Das allgemeine Problem läßt sich somit auf das folgende zurückführen, das wir als das Hauptproblem des elastischen Gleichgewichts bezeichnen wollen:

Wir suchen drei in einem Gebiete τ eindeutige und stetige Funktionen u, v, w mit endlichen ersten Ableitungen, welche in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen genügen:

$$
7)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -f_1, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = -f_2, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = -f_3, \end{cases}
$$

oder, was dasselbe ist, den Differentialgleichungen:

$$
8)\quad \begin{cases} \Delta u - \mathfrak{k}\left(\Delta u - 2\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) = -F_1, & & F_1 = (1-\mathfrak{k})f_1, \\ \Delta v - \mathfrak{k}\left(\Delta v - 2\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right) = -F_2, & k = \dfrac{2\mathfrak{k}}{1-\mathfrak{k}}, & F_2 = (1-\mathfrak{k})f_2, \\ \Delta w - \mathfrak{k}\left(\Delta w - 2\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right) = -F_3, & & F_3 = (1-\mathfrak{k})f_3, \end{cases}
$$

und an der Oberfläche ω von τ die Grenzwerte:

$$
8')\qquad \begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ w = 0 \end{cases}
$$

annehmen.

Über die als gegeben vorauszusetzenden Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ der Stelle in τ wollen wir annehmen, daß sie in τ derart stetig sind,[1]) daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12} die absoluten Funktionsdifferenzen

$$
\overline{\overline{<}}\, A\, r_{12}^{\lambda}
$$

sind, wo A eine endliche Konstante, λ eine von Null verschiedene, positive Zahl vorstellt, und überdies im Innenraume

$$
8'')\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0
$$

vorausgesetzt werden soll.

[1]) Diese Bedingung ist im besonderen erfüllt, wenn die ersten Ableitungen von $f_1\, f_2\, f_3$ in τ endlich sind.

Nach Lösung dieses Problems werden wir im § 7 zeigen, daß man in der Tat auch für f_1 f_2 f_3 drei Funktionen von der folgenden Form wählen darf:

$$f_1 = X + \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$
$$f_2 = Y + \frac{\partial \Theta}{\partial y},$$
$$f_3 = Z + \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

wo X, Y, Z drei ganz beliebige Funktionen der Stelle in τ sind, die in τ nur derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Gebietes in genügend kleiner Entfernung r_{12} ihre absoluten Funktionsdifferenzen, sowie die von $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$

$$\overline{\overline{<}}\, A r_{12}^{\lambda}, \quad \left|\begin{array}{l} A \text{ endlich,} \\ \lambda \text{ positive, von Null verschiedene Zahl,} \end{array}\right.$$

sind, und Θ eine allgemeine, stetige Potentialfunktion,[1]) deren Stetigkeit in τ dieselbe Bedingung erfüllt, wie die Stetigkeit der Funktionen X, Y, Z.

Wir werden die Lösung des Problems geben für jeden beliebigen Wert von k in den Grenzen

$$-1 < k < \infty$$

d. h. für jeden Wert von $\mathfrak{k}$ in den Grenzen:

$$-1 < \mathfrak{k} < +1 \quad \text{(in strengem Sinne),}$$

wenn also $\mathfrak{k}$ einen beliebigen positiven oder negativen echten Bruch vorstellt.

§ 3.

Daß für

$$-1 < k < \infty$$

nur ein System von Lösungen vorhanden ist, wenn man von vornherein die Existenz eines Systems von Lösungen voraus-

[1]) D. i. die Lösung des Dirichletschen Problems für den Innenraum τ bei gegebenen stetigen Randwerten $\overline{\Theta}$ an ω.

setzt, ist bekannt, ich füge den Beweis hier nur der Vollständigkeit halber hinzu.

Gäbe es zwei Systeme von Lösungen $u_1\, v_1\, w_1$ und $u_2\, v_2\, w_2$, dann wäre:

$$
9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta(u_1-u_2)+k\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial x}=0,\\ &\Delta(v_1-v_2)+k\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial y}=0,\\ &\Delta(w_1-w_2)+k\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial z}=0 \end{aligned} \right| \text{ in } \tau,
$$

und:

$$
10)\quad \left\{ \begin{aligned} u_1-u_2&=0,\\ v_1-v_2&=0,\\ w_1-w_2&=0 \end{aligned} \right| \text{ an } \omega.
$$

Wir multiplizieren die erste der Gleichungen 9) mit u_1-u_2, die zweite mit v_1-v_2, die dritte mit w_1-w_2, addieren und integrieren über τ, dann folgt:

$$
\int_\tau \Big[(u_1-u_2)\Delta(u_1-u_2)+(v_1-v_2)\Delta(v_1-v_2)+(w_1-w_2)\Delta(w_1-w_2)
$$
$$
+k\left\{(u_1-u_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial x}+(v_1-v_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial y}+(w_1-w_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial z}\right\}\Big]d\tau=0,
$$

oder mit Rücksicht darauf, daß:

$$
11)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u&=\frac{\partial\theta}{\partial x}-\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right],\\ \Delta v&=\frac{\partial\theta}{\partial y}-\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right],\\ \Delta w&=\frac{\partial\theta}{\partial z}-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right], \end{aligned} \right.
$$

auch:

$$
\int_\tau\Big[(1+k)\left\{(u_1-u_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial x}+(v_1-v_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial y}+(w_1-w_2)\frac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial z}\right\}
$$
$$
-(u_1-u_2)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x}-\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial z}-\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial x}\right)\right]
$$
$$
-(v_1-v_2)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial y}-\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x}-\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}\right)\right]
$$
$$
-(w_1-w_2)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial z}-\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial y}-\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial z}\right)\right]\Big]d\tau=0
$$

oder nach einer einfachen Greenschen Umformung:

$$12)\quad \int_\tau \Big[(1+k)(\theta_1-\theta_2)^2+\left\{\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial y}-\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial z}\right\}^2$$
$$+\left\{\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial z}-\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial x}\right\}^2+\left\{\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x}-\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}\right\}^2\Big]d\tau=0,$$

sobald somit $k+1$ positiv ist, solange also:

$$13)\quad -1<k<\infty$$

folgt:

$$14)\quad \begin{cases} u_1-u_2=0,\\ v_1-v_2=0,\\ w_1-w_2=0 \end{cases}$$

im ganzen Innenraume von ω; damit ist die Eindeutigkeit bewiesen.

§ 4.

Wir gehen nun zur Lösung der gestellten Aufgabe mit Hilfe der Methode der successiven Annäherungen über, und zwar gehen wir von den Gleichungen 8) aus. Wir bilden successive die folgenden Funktionen:

$$15)\quad \begin{cases} u_0=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_1\frac{d\tau}{r}-U_0,\\ v_0=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_2\frac{d\tau}{r}-V_0,\\ w_0=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_3\frac{d\tau}{r}-W_0,\\ \left.\begin{aligned} u_j&=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau\theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}-U_j+u_{j-1},\\ v_j&=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau\theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}-V_j+v_{j-1},\\ w_j&=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau\theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}-W_j+w_{j-1}, \end{aligned}\right\}\ j=1,2,\ldots \end{cases}$$

wo die $U_j\,V_j\,W_j$ die Lösungen des Dirichletschen Problems bei den Randwerten:

$$
16)\quad \left\{\begin{array}{ll}
U_0=\frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau F_1\frac{d\tau}{r}, & U_j=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\
V_0=\frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau F_2\frac{d\tau}{r}, & V_j=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r},\quad j=1,2\ldots \\
W_0=\frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau F_3\frac{d\tau}{r}, & W_j=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r},
\end{array}\right\} \text{ an } \omega
$$

vorstellen.[1]) Können wir beweisen, daß:

$$
\lim_{j=\infty}\cdot \mathfrak{k}^j\left(\Delta u_j-2\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=0,
$$

$$
\lim_{j=\infty}\cdot \mathfrak{k}^j\left(\Delta v_j-2\frac{\partial\theta_j}{\partial y}\right)=0,
$$

$$
\lim_{j=\infty}\cdot \mathfrak{k}^j\left(\Delta w_j-2\frac{\partial\theta_j}{\partial z}\right)=0
$$

in τ in irgend welcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von der Oberfläche, und daß die Reihen:

$$
\sum_0^\infty{}_j\,\mathfrak{k}^j u_j,\quad \sum_0^\infty{}_j\,\mathfrak{k}^j v_j,\quad \sum_0^\infty{}_j\,\mathfrak{k}^j w_j
$$

Funktionen darstellen, die in τ eindeutig und stetig sind und endliche erste Ableitungen besitzen, dann werden diese Funk-

---

[1]) Die Existenz dieser Funktionen $U_j\,V_j\,W_j$, ihre für uns in Betracht kommenden Stetigkeitseigenschaften, sowie die Formeln:

$$
15')\quad \left\{\begin{array}{l}
\Delta\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}=-4\pi\frac{\partial\theta_{j-1}}{\partial x}, \\
\Delta\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}=-4\pi\frac{\partial\theta_{j-1}}{\partial y}, \\
\Delta\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}=-4\pi\frac{\partial\theta_{j-1}}{\partial z}
\end{array}\right.
$$

werden wir noch in diesem § beweisen.

tionen offenbar die Lösungen der gestellten Aufgabe darstellen. Wir werden zunächst zeigen, daß die Integrale:

$$J_j = \int_\tau \theta_j^2 \, d\tau \tag{17}$$

die Ungleichungen erfüllen:

$$\mathfrak{k}^{2j} \cdot J_j \lesseqgtr a \cdot \mathfrak{k}^{2j}, \tag{18}$$

wo $\mathfrak{k}$ ein beliebiger echter Bruch ist, a eine endliche Konstante.

Es ist in der Tat, wenn wir die Abkürzungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{u}_j &= \frac{\partial w_j}{\partial y} - \frac{\partial v_j}{\partial z}, \\ \mathfrak{v}_j &= \frac{\partial u_j}{\partial z} - \frac{\partial w_j}{\partial x}, \\ \mathfrak{w}_j &= \frac{\partial v_j}{\partial x} - \frac{\partial u_j}{\partial y} \end{aligned}\right. \tag{19}$$

gebrauchen:

$$\begin{aligned} &\int_\tau [\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2] \, d\tau \\ &= -\int_\tau \Bigg[u_j \left\{ \frac{\partial \theta_j}{\partial x} - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_j}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_j}{\partial z} \right) \right\} + v_j \left\{ \frac{\partial \theta_j}{\partial y} - \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{w}_j}{\partial x} \right) \right\} \\ &\qquad + w_j \left\{ \frac{\partial \theta_j}{\partial z} - \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_j}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial y} \right) \right\} \Bigg] \, d\tau, \\ &= -\int_\tau (u_j \Delta u_j + v_j \Delta v_j + w_j \Delta w_j) \, d\tau, \\ &= -\int_\tau \Bigg[u_j \left(\Delta u_{j-1} - 2 \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x} \right) + v_j \left(\Delta v_{j-1} - 2 \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial y} \right) \\ &\qquad + w_j \left(\Delta w_j - 2 \frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial z} \right) \Bigg] \, d\tau, \\ &= \int_\tau [\theta_j \theta_{j-1} + \mathfrak{u}_j \mathfrak{u}_{j-1} + \mathfrak{v}_j \mathfrak{v}_{j-1} + \mathfrak{w}_j \mathfrak{w}_{j-1} - 2 \theta_j \theta_{j-1}] \, d\tau, \end{aligned}$$

somit:

$$\left\{\begin{aligned} \int_\tau [\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2] \, d\tau = \int_\tau [&- \theta_j \theta_{j-1} + \mathfrak{u}_j \mathfrak{u}_{j-1} \\ &+ \mathfrak{v}_j \mathfrak{v}_{j-1} + \mathfrak{w}_j \mathfrak{w}_{j-1}] \, d\tau, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

und hieraus folgt:

21)[1] $\int\limits_{\tau}[\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2]\,d\tau < \int\limits_{\tau}(\theta_{j-1}^2 + \mathfrak{u}_{j-1}^2 + \mathfrak{v}_{j-1}^2 + \mathfrak{w}_{j-1}^2)\,d\tau$

also:

$$22)\quad \begin{cases} \mathfrak{k}^{2j} J_j \lesseqgtr \mathfrak{k}^{2j} \int\limits_{\tau}[\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2]\,d\tau \\ \overline{\overline{<}}\, \mathfrak{k}^{2j} \int [\theta_0^2 + \mathfrak{u}_0^2 + \mathfrak{v}_0^2 + \mathfrak{w}_0^2]\,d\tau \,\overline{\overline{<}}\, a\,\mathfrak{k}^{2j}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{k}$ einen echten Bruch und a eine endliche Konstante vorstellt.

Wir haben für die Gültigkeit dieser Ableitung nur noch zu begründen, daß bei unseren Voraussetzungen die in der Ableitung benützten Integrale einen Sinn haben, und daß die Greenschen Umformungen berechtigt sind.

Wir bedenken hierzu, daß nach Voraussetzung die Funktionen $F_1\,F_2\,F_3$ in τ derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung ihre absoluten Funktionsdifferenzen

$$\overline{\overline{<}}\, A \cdot r_{12}^{\lambda}$$

sind, wo λ einen ganz bestimmten echten Bruch, A eine endliche Konstante bezeichnen möge. Es sind aus diesem Grunde (Satz I des zweiten Abschnitts der vorangehenden Abhandlung) die zweiten Ableitungen der Raumpotentiale

$$\int\limits_{\tau} F_1 \frac{d\tau}{r},$$

$$\int\limits_{\tau} F_2 \frac{d\tau}{r},$$

$$\int\limits_{\tau} F_3 \frac{d\tau}{r}$$

---

[1] Nach der bekannten Schwarzschen Ungleichung ergibt sich ja aus 20):

$$\left[\int\limits_{\tau}(\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2)\,d\tau\right]^2$$

$$< \int\limits_{\tau}(\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2)\,d\tau \int(\theta_{j-1}^2 + \mathfrak{u}_{j-1}^2 + \mathfrak{v}_{j-1}^2 + \mathfrak{w}_{j-1}^2)\,d\tau.$$

in τ in ähnlicher Weise stetig, somit die zweiten Ableitungen von $u_0 v_0 w_0$ ebenfalls, solange man sich in endlicher, im übrigen beliebig kleinen Entfernung von der Oberfläche ω hält, und Gleiches folgt successive nach den Formeln 15) für die zweiten Ableitungen von $u_j\ v_j\ w_j$, wenn die θ_j stetige, allgemeine Potentialfunktionen sind.[1])

Die Gleichung 20), auf die es uns ankommt, wird durch einen strengen Grenzübergang erhalten, wenn wir zeigen können, daß die ersten Ableitungen der $u_j v_j w_j$ im ganzen Raume eindeutig und stetig sind.

Wir haben also noch zu beweisen, daß die θ_j infolge der Definitionen 15) stetige, allgemeine Potentialfunktionen[1]) des Innenraumes τ und daß alle ersten Ableitungen von $u_j v_j w_j$ im ganzen Innenraume eindeutig und stetig sind.

Wir werden nun in der Tat zeigen, daß die θ_j bei unseren Voraussetzungen stetige, allgemeine Potentialfunktionen und in τ derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Innenraumes in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\text{abs.}\,|\,\theta_j\,|_1^2 \overline{\overline{<}}\, C_j r_{12}^{\lambda_j}, \quad (0 < \lambda_j < 1),$$

wo C_j bei endlichem j eine endliche, von j abhängige Konstante vorstellt, die natürlich, worauf es uns vorläufig nicht ankommt, möglicherweise mit j unendlich wachsen könnte.[2])

Die Funktionen $U_0\ V_0\ W_0$ haben Randwerte, deren erste Ableitungen (Satz II des II. Abschnittes der vorstehenden Abhandlung) derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12} ihre absoluten Funktionsdifferenzen:

$$\overline{\overline{<}}\, a \cdot \text{abs. Max.}\,(F_1, F_2, F_3) \cdot r_{12}^{\Lambda}$$

sind, wo Λ einen ganz beliebigen echten Bruch und a eine endliche Konstante vorstellt, die lediglich von der Gestalt der

---

[1]) D. h. Lösungen eines Dirichletschen Problems mit stetigen Randwerten θ_j.

[2]) Diese Frage werden wir im späteren Verlauf der Abhandlung noch diskutieren.

Fläche ω und der Wahl der Zahl Λ abhängt. Die Funktionen $U_0\,V_0\,W_0$ sind somit[1]) Potentialfunktionen des Raumes τ, die im ganzen Innenraum derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 desselben in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial U_0}{\partial \sigma}\right|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda},$$

wenn σ eine ganz beliebige Richtung vorstellt, da ja λ ein ganz bestimmter echter Bruch ist und wir Λ größer als λ wählen können. Außerdem ist:

$$\Delta u_0 = -F_1,$$
$$\Delta v_0 = -F_2,$$
$$\Delta w_0 = -F_3,$$

somit:

$$\Delta\,\theta_0 = 0, \text{ mit Rücksicht auf } 8''); \tag{24}$$

es ist also θ_0 eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ, deren Stetigkeit in der ganzen Ausdehnung des Raumes τ derart ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\,|\,\theta_0\,|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda} \overline{\overline{<}} C_0\, r_{12}^{\lambda_0}, \quad \left|\begin{array}{l} 0<\lambda_0<1, \\ C_0 \text{ endlich.}\end{array}\right. \tag{25}$$

Es ist nun weiter:

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} - U_1, \\ v_1 &= v_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} - V_1, \\ w_1 &= w_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} - W_1, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

und die ersten Ableitungen der Randwerte der Potentialfunktionen $U_1\,V_1\,W_1$:

---

[1]) Zusatz 4 zu Satz III des I. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung.

$$27)\quad \left\{\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r}, \\ V_1 &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r}, \\ W_1 &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega$$

sind an der Oberfläche ω derart stetig, daß:

$$28)\qquad \text{abs.} \left|\frac{\partial U_1}{\partial h}\right|_1^2 \overline{\gtrless} (a\, C_0 + b \text{ abs. Max. } \theta_0)\, r_{12}^{\lambda_0},$$

wo h eine beliebige tangentiale Richtung,[1] $a\ b$ endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω und der Zahl λ_0 abhängen (Satz II des zweiten Abschnitts der vorstehenden Abhandlung). Mit Rücksicht auf den Zusatz 4 zu Satz III des I. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung folgt somit, daß die ersten Ableitungen von $u_1\ v_1\ w_1$ in dem Raume derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$29)\quad \text{abs.} \left|\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda_1} \overline{\gtrless} C_1\, r_{12}^{\lambda_1}, \quad \left|\begin{array}{l} 0 < \lambda_1 < \lambda_0, \\ C_1 \text{ endlich,} \end{array}\right.$$

wo σ eine beliebige Richtung, C_1 eine endliche Konstante vorstellt.

Außerdem ist:

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= -2\frac{\partial \theta_0}{\partial x} + \Delta u_0, \\ \Delta v_1 &= -2\frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \Delta v_0, \\ \Delta w_1 &= -2\frac{\partial \theta_0}{\partial z} + \Delta w_0 \end{aligned}$$

somit:

$$30)\qquad \Delta \theta_1 = 0;$$

[1]) $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \ldots$, wo $|\varepsilon_1| \overline{\gtrless}$ endl. Konst. $r_{12}, \ldots$

es ist also θ_1 eine stetige allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ, deren Stetigkeit in der ganzen Ausdehnung des Raumes τ derart ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ in genügend kleiner Entfernung r:

31) $$\text{abs.}\, | \theta_2 |_1^2 \overline{\overline{<}}\, C_1 r_{12}^{\lambda_1}, \quad \left| \begin{array}{l} 0 < \lambda_1 < 1, \\ C_1 \text{ endlich.} \end{array} \right.$$

In dieser Weise können wir nun weiter gehen und sehen, daß für jedes beliebige endliche j die θ_j stetige, allgemeine Potentialfunktionen sind, deren Stetigkeit in τ die Bedingung 23) erfüllt.

Es folgt auf diese Weise auch die Gültigkeit der Formeln 15') S. 45 für jeden Punkt des Raumes τ in irgendwelcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von ω. Es folgt schließlich auch successive die Stetigkeit der ersten Ableitungen von $u_j\, v_j\, w_j$ in ganzer Erstreckung des Raumes τ für jedes beliebige endliche j.

Damit sind nun aber alle Schlüsse dieses § streng begründet, und wir können bisher das folgende Resultat aussprechen:

Die durch die Formeln 15) definierten successiven Funktionen $u_j\, v_j\, w_j$ sind mit ihren ersten Ableitungen für jedes beliebige endliche j in ganzer Erstreckung des Raumes τ eindeutig und stetig; die Stetigkeit ihrer ersten Ableitungen, im besonderen die Stetigkeit der stetigen, allgemeinen Potentialfunktionen θ_j in τ ist derart, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\, | \theta_j |_1^2 \overline{\overline{<}}\, C_j r_{12}^{\lambda_j},$$

wo λ_j einen echten Bruch, C_j eine endliche Konstante vorstellt.

Die Formeln:

$$\Delta \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_j}{\partial x},$$

$$\Delta \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_j}{\partial y},$$

$$\Delta \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_j}{\partial z},$$

bestehen für jedes beliebige endliche j in irgend welcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von der Fläche ω.

Es besteht ferner die Ungleichung:

$$\mathfrak{t}^{2j} \int_\tau \theta_j^2 \, d\tau \leqq a \cdot \mathfrak{t}^{2j},$$

wo a eine von j unabhängige endliche Konstante vorstellt.

§ 5.

Wir suchen jetzt zu beweisen, daß die Funktion θ eine stetige allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ darstellt, deren Stetigkeit die Bedingung erfüllt:

32) $$\text{abs.}\, |\theta|_1^2 \leqq C \cdot r_{12}^{\lambda}, \quad | \; C \text{ endlich},$$

wenn wir:

33) $$\theta = \theta_0 + \mathfrak{t}\,\theta_1 + \mathfrak{t}^2\,\theta_2 + \cdots$$

setzen. Daß diese Reihe innerhalb τ, d. h. in endlicher Entfernung von der Oberfläche ω stets konvergent ist und mit allen Ableitungen innerhalb ω eindeutig und stetig ist, folgt leicht aus der Ungleichung:

$$\mathfrak{t}^{2j} \int_\tau \theta_j^2 \, d\tau \leqq a\, \mathfrak{t}^{2j}.$$

Denn denken wir uns um einen Punkt $(x\, y\, z)$ innerhalb ω eine Kugel vom Radius R, der nur klein genug gewählt ist, daß die Kugel ganz in dem Gebiete τ liegt, so ist:

$$\theta_j(x, y, z) = \frac{3}{4\pi R^3}\int \theta_j \, d\tau,$$

wo das Integral rechts über die Kugel zu erstrecken ist, somit:

$$\mathfrak{r}^j \,|\theta_j(x, y, z)| \overline{\overline{<}} \frac{3\mathfrak{r}^j}{4\pi R^3}\sqrt{\int \theta_j^2 \, d\tau \int d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{3\mathfrak{r}^j}{4\pi R^3}\sqrt{\int\limits_\tau \theta_j^2 d\tau \frac{4\pi R^3}{3}}$$

$$< \sqrt{\frac{3a}{4\pi R^3}}\,\mathfrak{r}^j$$

oder:

34) $$|\theta_j|\,\mathfrak{r}^j \overline{\overline{<}} \frac{\beta}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}}\mathfrak{r}^j, \qquad \Big| \ \beta \text{ endliche Konstante},$$

wenn $\mathfrak{r}$ die kleinste Entfernung von der Oberfläche ω darstellt.

Analoge Formeln kann man sofort auch für die ersten, zweiten etc. Ableitungen von θ_j innerhalb ω ableiten.

Für uns ist es aber erforderlich, die Stetigkeit von θ und zwar die Stetigkeit von der Art 32) in ganzer Erstreckung des Gebietes τ zu erweisen, und zu diesem Zwecke müssen wir, ausgehend von der Formel:

35) $$\text{abs.}\,|\theta_j|_1^2 \overline{\overline{<}} C_0 r_{12}^{\lambda_0}, \quad (0 < r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma), \qquad \Big| \begin{array}{l} \lambda_0 \text{ echter Bruch}, \\ C_0 \text{ endliche Konstante}, \end{array}$$

in den successiven Formeln:

36) $$\text{abs.}\,\theta_j|_1^2 \overline{\overline{<}} C_j r_{12}, \quad (0 \overline{\overline{<}} r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma_j)$$

die Abhängigkeit der Größen $C_j \, \lambda_j \, \sigma_j$ von j näher erforschen.

Wir gehen aus von den Definitionsformeln:

37) $$\left\{\begin{aligned} u_j &= u_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - U_j, \\ v_j &= v_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - V_j, \quad j = 1, 2, \cdots \\ w_j &= w_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - W_j \end{aligned}\right.$$

$U_j\ V_j\ W_j$ sind die Potentialfunktionen des Innenraumes mit den Randwerten:

$$\text{38)} \qquad \left.\begin{cases} U_j = \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x}, \\ V_j = \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y}, \\ W_j = \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z}, \end{cases}\right\} \text{ an } \omega,$$

wo wir zur Abkürzung:

$$\text{39)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\dfrac{d\tau}{r}, \\ \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\dfrac{d\tau}{r}, \\ \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\dfrac{d\tau}{r}, \end{cases}$$

gesetzt haben, es ist somit nach der Methode des arithmetischen Mittels[1]):

$$\text{40)} \qquad \begin{cases} U_j = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\omega \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + X_{j,1} \\ V_j = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\omega \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta}\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + X_{j,2} \\ W_j = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\omega \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta}\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + X_{j,3} \end{cases}$$

---

[1]) Es hat in der Tat jedes $\dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}, \ldots$ nach Satz II des II. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung die Eigenschaft:

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}\right|_1^2 \overline{\overline{<}}\ a \text{ abs. Max. } \theta_{j-1}\, r_{12}^{A_1},\ (0 < r_{12} < \sigma)$$

wo A_1 einen beliebigen echten Bruch vorstellt, a eine endliche Konstante, σ eine Länge, die gar nicht von der Funktion θ_{j-1} abhängig sind, und hierauf ergibt sich in der Tat 41) mit Hilfe des Satzes I des I. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung, wenn nur $A < A_1$, also überhaupt ein beliebiger echter Bruch ist.

wo $X_{j,1}$, $X_{j,2}$, $X_{j,3}$ Potentiale von Doppelbelegungen sind, deren erste Ableitungen nach dem Satze I des I. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung S. 1 im ganzen Raume derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$41)\quad \text{abs.}\left|\frac{\partial X_{j,1}}{\partial \sigma}\right|_1^2 \overline{\overline{<}}\ A \cdot \text{abs. Max. } \theta_{j-1}\, r_{12}^{\Lambda}, \ldots \quad (0 \overline{\overline{<}}\ r_{12} \overline{\overline{<}}\ \sigma),$$

wo σ eine beliebige Richtung, Λ einen echten Bruch, A eine endliche Konstante, σ eine Länge vorstellt, die in keiner Weise von j abhängig sind, und man kann, wenn man will:

$$42)\qquad \Lambda = \lambda$$

setzen.

Es sind andererseits $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z}$ die Potentialfunktionen des Aussenraumes mit den Randwerten $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z}$ an ω, es ist daher wieder nach der Methode des arithmetischen Mittels:

$$43)\quad \left|\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x} &= -\frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + \Phi_{j,1},\\
\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y} &= -\frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + \Phi_{j,2},\\
\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z} &= -\frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega + \Phi_{j,3},
\end{aligned}\right| \text{im Außenraume,}$$

wo die $\Phi_{j,1}$ $\Phi_{j,2}$ $\Phi_{j,2}$ Potentiale von Doppelbelegungen mit denselben Stetigkeitseigenschaften wie $X_{j,1}$, $X_{j,2}$, $X_{,3}$, im besonderen an der Fläche ω, sind.

Da mit Rücksicht auf den Satz I des II. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung die Funktionen $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta}$ auf der Fläche ω erste tangentiale Ableitungen haben, von solcher

Stetigkeit, das für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.} \left| \frac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial \xi \, \partial h} \right|_1^2 < C_j r_{12}^{\lambda_j}, \ldots \quad (0 \lessgtr r_{12} \lessgtr \sigma_j),$$

so ist an der Fläche ω nach einem bekannten Satze (Lehrbuch der Potentialtheorie I S. 394):

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} \, d\omega \right|_i = \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int_\omega \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} \, d\omega \right|_a, \ldots$$

somit folgt:

$$44) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_j}{\partial \nu} = - \left| \dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial x \, \partial \nu} \right|_a + \Xi_j, \\[2ex] \dfrac{\partial V_j}{\partial \nu} = - \left| \dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial y \, \partial \nu} \right|_a + H_j, \\[2ex] \dfrac{\partial W_j}{\partial \nu} = - \left| \dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial z \, \partial \nu} \right|_a + Z_j, \end{cases}$$

wobei die $\Xi_j\ H_j\ Z_j$ Funktionen vorstellen, deren erste Ableitungen an der Oberfläche ω derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$45) \quad \text{abs.} \left| \frac{\partial \Xi_j}{\partial h} \right|_1^2 \lessgtr B \text{ abs. Max. } \theta_{j-1} r_{12}^{A}, \ldots \quad (0 \lessgtr r_{12} \lessgtr \sigma),$$

wo h eine beliebige tangentiale Richtung, A einen echten Bruch, σ eine endliche Konstante, σ eine Länge vorstellen, die in keiner Weise von j abhängen, und man kann, wenn man will:

$$A = \lambda$$

setzen.

Da $u_j\ v_j\ w_j$ an der Fläche ω verschwinden, ist:

$$\left.\begin{aligned} \theta_j &= \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \cos(\nu x) + \frac{\partial v_j}{\partial \nu} \cos(\nu y) + \frac{\partial w_j}{\partial \nu} \cos(\nu z), \\ \theta_{j-1} &= \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x} \cos(\nu x) + \frac{\partial v_{j-1}}{\partial \nu} \cos(\nu y) + \frac{\partial w_{j-1}}{\partial \nu} \cos(\nu z) \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega,$$

und es folgt aus den Formeln 37):

$$\theta_j = \theta_{j-1} + \left|\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_i - \left\{\frac{\partial U_j}{\partial\nu}\cos(\nu x) + \frac{\partial V_j}{\partial\nu}\cos(\nu y) + \frac{\partial W_j}{\partial\nu}\cos(\nu z)\right\},$$

$$= \theta_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_i + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_a + H_j,$$

oder:

$$46)\qquad \theta_j = -\left\{\theta_{j-1} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_a\right\} + H_j,$$

wo H_j eine Funktion der Stelle an ω darstellt, die derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche im Abstand r_{12}:

$$47)\qquad \text{abs.}\,|H_j|_1^2 \overline{\overline{<}}\, \Gamma\cdot\text{abs. Max.}\,\theta_{j-1}\cdot r_{12}^{\lambda},\quad (0 \overline{\overline{<}}\, r_{12} \overline{\overline{<}}\, \sigma)$$

Γ eine endliche Konstante, σ eine Länge, die größer ist als eine bestimmte endliche Länge; Γ, σ gänzlich unabhängig von j.

Wir bringen jetzt den Satz IV des II. Abschnitts der vorangehenden Abhandlung über Raumpotentiale, den eigentlichen Schlüsselpunkt für die Lösung der gestellten Aufgabe, zur Anwendung. Besteht für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ in der Entfernung r_{12} die Ungleichung:

$$48)\qquad \text{abs.}\,|\theta_{j-1}|_1^2 \overline{\overline{<}}\, C_{j-1}\, r_{12}^{\lambda_{j-1}},\quad (0 \overline{\overline{<}}\, r_{12} \overline{\overline{<}}\, \sigma_{j-1}),$$

so ergibt sich nach dem genannten Satze, den Formeln 46) und 47):

$$49)^{1)}\ \text{abs.}\,|\theta_j|_1^2 \overline{\overline{<}} \left[\varepsilon_{\sigma_{j-1}} C_{j-1} + \left(c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon_\delta \sigma_{j-1}}\right)\text{abs. Max.}\,\theta_{j-1}\right] r_{12}^{\lambda_{j-1}},$$
$$(0 \overline{\overline{<}}\, r_{12} \overline{\overline{<}}\, \sigma_{j-1}(1-\delta)),$$

wo δ eine beliebig kleine Zahl, $\varepsilon_{\sigma_{j-1}}$ und δ zwei Konstanten vorstellen, die bezw. mit σ_{j-1} und δ zu Null konvergieren, aber stets von Null verschiedene, bestimmte Werte haben, sobald bezw. σ_{j-1} und δ von Null verschieden sind, ε_δ von j unabhängig.

---

1) c_1 c_2 endliche Konstanten, die von j unabhängig sind.

Wir können hieraus sofort die folgenden Schlüsse ziehen: Wir können

$$50) \qquad \begin{cases} \lambda_j = \lambda, \\ \sigma_j = \sigma \cdot (1-\delta)^j \end{cases}$$

setzen, wo δ eine beliebig kleine Zahl sein kann, und:

$$51) \quad \text{abs.} \,|\, \theta_j \,|_1^2 \overline{<} \left(\varepsilon_j C_{j-1} + \frac{c}{\varepsilon_\delta \, \sigma (1-\delta)^{j-1}} \text{abs. Max. } \theta_{j-1} \right) r_{12}^\lambda,$$
$$(0 \overline{<} r_{12} \overline{<} \sigma (1-\delta)^j),$$

wo die Konstanten c und ε_δ von j ganz unabhängig sind und ε_j eine mit j zu Null konvergierende Zahl vorstellt. Wir können jedenfalls, indem wir σ von vornherein genügend klein wählen

$$\varepsilon_j \overline{<} 1$$

machen und die Ungleichung 51) auch so schreiben:

$$52) \quad \text{abs.} \,|\, \theta_j \,|_1^2 \overline{<} \left(C_{j-1} + \frac{1}{E_\delta (1-\delta)^j} \text{abs. Max. } \theta_{j-1} \right) r_{12}^\lambda,$$
$$(0 \overline{<} r_{12} \overline{<} \sigma (1-\delta)^j),$$

wo E_δ eine Konstante vorstellt, die zwar um so größer ist, je kleiner δ gewählt wird, aber für jedes $\delta \neq 0$ einen bestimmten, von Null verschiedenen, von j unabhängigen Wert hat; wir können dabei δ im übrigen von vornherein beliebig klein wählen.

Diese Formel wird sogleich eine sehr wichtige Rolle spielen. Wir errichten in einem Punkte 0 der Fläche die innere Normale und markieren auf derselben in dem Abstande $\mathfrak{r}_j$ den Punkt 0'. Dann ist:

$$|\, \theta_j \,|_0 = |\, \theta_j \,|_{0'} + |\, \theta_j \,|_{0'}^{0}$$

und mit Rücksicht auf 34) und 52):

$$53) \begin{cases} \text{abs. } \theta_j < \dfrac{\beta}{\mathfrak{r}_j^{\frac{1}{2}}} + \left(C_{j-1} + \dfrac{1}{E_\delta (1-\delta)^j} \text{abs. Max. } \theta_{j-1} \right) \mathfrak{r}_j^\lambda, \\ \qquad (0 \overline{<} \mathfrak{r}_j \overline{<} \sigma (1-\delta)^j), \end{cases}$$

oder, wenn wir mit $\mathfrak{K}$ einen echten Bruch

54) $$\mathfrak{t} < \mathfrak{K} < 1$$

bezeichnen und

55) $$\begin{cases} \mathfrak{K}^j \text{ abs. Max. } \theta_j = A_j, \\ \qquad \mathfrak{K}^j \cdot C_j = B_j \end{cases}$$

setzen, so daß:

56) $$\begin{cases} \text{abs. Max. } \theta_j \mathfrak{K}^j \leqq A_j \\ \text{abs. } \left| \mathfrak{K}^j \theta_j \right|_1^2 \leqq B_j r_{12}^\lambda, \quad (0 \leqq r_{12} \leqq \sigma(1-\delta)^j), \end{cases}$$

so erhalten wir die Formeln:

57) $$\begin{cases} A < \dfrac{\beta \mathfrak{K}^j}{\mathfrak{r}_j^{\mathfrak{t}}} + \left(B_{j-1} + \dfrac{1}{E_\delta (1-\delta)^j} A_{j-1} \right) \mathfrak{r}_j^\lambda, \quad (0 \leqq \mathfrak{r}_j \leqq \sigma(1-\delta)^j), \\ B_j \leqq B_{j-1} + \dfrac{1}{E_\delta (1-\delta)^j} A_{j-1}. \end{cases}$$

Wir wählen nun δ und einen echten Bruch L so, daß:

58) $$\mathfrak{K} < L < (1-\delta)^{\frac{\mathfrak{t}}{2\lambda}} < 1$$

und setzen:

59) $$\mathfrak{r}_j = \left(\frac{\mathfrak{K}^{\mathfrak{t}} (1-\delta)^{\frac{1}{\lambda}}}{L^{\mathfrak{t}}} \right)^j,$$

was ja gestattet ist, da ja:

$$\frac{\mathfrak{K}^{\mathfrak{t}} (1-\delta)^{\frac{1}{\lambda}}}{L^{\mathfrak{t}}} < 1 - \delta;$$

wir können dann die beiden Ungleichungen 57) so schreiben:

60) $$\begin{cases} A_j \leqq \beta \left(\dfrac{L}{(1-\delta)^{\frac{\mathfrak{t}}{2\lambda}}} \right)^j + \dfrac{1}{E_\delta} \left(B_{j-1} (1-\delta)^{j-1} E_\delta + A_{j-1} \right) \left(\dfrac{\mathfrak{K}}{L} \right)^{\mathfrak{t}\lambda j}, \\ B_j \leqq B_{j-1} + \dfrac{1}{E_\delta (1-\delta)^j} A_{j-1}, \end{cases}$$

oder, wenn wir mit μ den größeren der beiden echten Brüche

$$\left(\frac{\mathfrak{K}}{L} \right)^{\mathfrak{t}}, \quad \frac{L}{(1-\delta)^{\frac{\mathfrak{t}}{2\lambda}}}$$

bezeichnen:

$$
61)\quad \begin{cases} A_i \overline{\gtrless} \left[\beta + \frac{1}{E_\delta}(A_{i-1} + E_\delta (1-\delta)^{i-1} B_{i-1})\right]\mu^i, \\ B_i \overline{\gtrless} B_{i-1} + \frac{1}{E_\delta (1-\delta)^i} A_{i-1}. \end{cases}
$$

Wir multiplizieren die zweite dieser Ungleichungen mit $E_\delta (1-\delta)^i$ und addieren, dann folgt:

$$
62)\quad \begin{cases} A_i + E_\delta (1-\delta)^i B_i \overline{\gtrless} A_{i-1} + E_\delta (1-\delta)^{i-1} B_{i-1} \\ \qquad + \left[\beta + \frac{1}{E_\delta}(A_{i-1} + E_\delta (1-\delta)^{i-1} B_{i-1})\right]\mu^i, \end{cases}
$$

oder, wenn wir:

$$
63)\qquad \Gamma_i = A_i + E_\delta (1-\delta)^i B_i
$$

setzen:

$$
64)\qquad \Gamma_i \overline{\gtrless} \Gamma_{i-1} + \left[\beta + \frac{\Gamma_{i-1}}{E_\delta}\right]\mu^i.
$$

Wir wenden jetzt den Kunstgriff an, der bereits von Liapounoff[1]) bei einer anderen Gelegenheit mit Erfolg benützt worden ist. Wir schreiben die Ungleichung in der Form:

$$
\Gamma_i + \beta \cdot E_\delta \overline{\gtrless} (\Gamma_{i-1} + \beta E_\delta)\left(1 + \frac{\mu^i}{E_\delta}\right),
$$

dann folgt:

$$
\Gamma_i + \beta \cdot E_\delta \overline{\gtrless} (\Gamma_0 + \beta E_\delta)\left(1 + \frac{\mu}{E_\delta}\right)\left(1 + \frac{\mu^2}{E_\delta}\right)\cdots\left(1 + \frac{\mu^i}{E_\delta}\right).
$$

Das Produkt:

$$
65)\qquad Q = \left(1 + \frac{\mu}{E_\delta}\right)\left(1 + \frac{\mu^2}{E_\delta}\right)\cdots
$$

ist konvergent, da $\mu < 1$, und es wird somit:

$$
66)\qquad \Gamma_i + \beta \cdot E_\delta \overline{\gtrless} (\Gamma_0 + \beta E_\delta)\, Q,
$$

---

[1]) Liapounoff, Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet (Journ. de math. 1898, S. 278).

so daß:

67) $$\Gamma_i \overline{\overline{<}} A,$$

wo A eine bestimmte, endliche, von j unabhängige Konstante vorstellt. Nun ist:

$$\text{abs. Max. } \mathfrak{k}^i \cdot \theta_i = \left(\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K}}\right)^i \cdot A_i,$$

$$\mathfrak{k}^i \cdot C_i = \left(\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K}}\right)^i \cdot B_i,$$

so daß, wenn wir wieder mit m einen echten Bruch bezeichnen:

68) $$\begin{cases} \text{abs. Max. } \mathfrak{k}^i \theta_i \overline{\overline{<}} a \cdot m^i, \\ \mathfrak{k}^i C_i \overline{\overline{<}} b \cdot m^i, \end{cases} \quad m = \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{K}(1-\delta)}$$

und wir erhalten das wichtige Resultat:

69) $$\begin{cases} |\mathfrak{k}^i \theta_i| \overline{\overline{<}} a \cdot m^i, \\ \text{abs.} |\mathfrak{k}^i \theta_i|_1^2 \overline{\overline{<}} b \cdot m^i r_{12}^{\lambda}, \quad (0 \overline{\overline{<}} r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma(1-\delta)^i), \end{cases}$$

wo m einen echten Bruch vorstellt, a, b endliche, von j unabhängige Konstanten.

Durch die erste Formel 69) wird uns die gleichmäßige Konvergenz der Reihe:

70) $$\theta = \theta_0 + \mathfrak{k}\theta_1 + \mathfrak{k}^2\theta_2 + \cdots$$

gewährleistet, und sicher gestellt, daß θ eine in dem ganzen Gebiet τ eindeutige und stetige Funktion der Stelle vorstellt.

Wir verlangen von der Stetigkeit der Funktion θ aber noch mehr, und wir wollen mit Hilfe der zweiten Formel 69) die Behauptung 32) nachweisen.

Wir teilen die Reihe 70) in 2 Teile:

71) $$\theta = \sum_0^{\nu}{}^i \mathfrak{k}^i \theta_i + \sum_{\nu+1}^{\infty}{}^i \mathfrak{k}^i \theta_i$$

und wählen die Zahl ν genügend groß, so daß:

$$\left| \sum_{\nu+1}^{\infty}{}^j \mathfrak{k}^j \theta_j \right| \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } r_{12},$$

wenn r_{12} die Entfernung zweier Punkte 1 und 2 des Raumes τ vorstellt. Eine solche Zahl ν läßt sich stets finden, da:

$$\sum_{\nu+1}^{\infty} j\, t^j \theta_j \overline{\gtrless} \text{endl. Konst. } m^\nu;$$

man hat eben nur ν so groß zu machen, daß

72) $$m^\nu \overline{\gtrless} \text{endl. Konst. } r_{12};$$

dann ist:

73a) $$\text{abs.} \left| \sum_{\nu+1}^{\infty} j\, t^j\, \theta_j \right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{endl. Konst. } r_{12},$$

und:

73b) $$\text{abs.} \left| \sum_{0}^{\nu} j\, t^j\, \theta_i \right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \quad (0 \overline{\gtrless} r_{12} \overline{\gtrless} \sigma(1-\delta)^\nu)$$

mit Rücksicht auf die zweite Formel 69), und die Bedingung

$$0 \overline{\gtrless} r_{12} \overline{\gtrless} \sigma(1-\delta)^\nu$$

kann noch fortgelassen werden, sie ist, wenn nur

$$1 - \delta > m$$

ist, was ja stets dadurch erreicht werden kann, daß man von vornherein δ klein genug annimmt, bei der Festsetzung 72) von selbst erfüllt, wenn $r_{12} <$ bestimmte, endliche Konstante $\sigma' (< \sigma)$.

Durch Addition der Formeln 73a) und 73b) folgt aber für irgend zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ:

74) $$\text{abs.} \left| \theta \right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda},$$

und das wollen wir in diesem § beweisen.

Wir haben also das Resultat erhalten:

Die Reihe:

75) $$\theta = \theta_0 + t\theta_1 + t^2\theta_2 + \cdots \quad (-1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} +1)$$

stellt eine in der ganzen Erstreckung des Raumes τ eindeutige und stetige Funktion dar, und es gelten für zwei Punkte 1 und 2 des Raumes τ die Formeln:

76) $$\text{abs.} \left| \theta \right|_1^2 < \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}.$$

Die einzelnen Glieder der Reihe haben die Eigenschaft:

$$77)\quad \begin{cases} \text{abs. Max. } \mathfrak{k}^j\,\theta_j \overline{<} a\cdot m^j, \\ \text{abs.} \mid \mathfrak{k}^j\,\theta_j \mid_1^2 < b\cdot m^j\cdot r_{12}^{\lambda},\ (0 \overline{<} r_{12} \overline{<} \sigma(1-\delta)^j), \end{cases}$$

wo die a, b endliche, von j unabhängige Konstanten, m einen echten Bruch darstellt.

§ 6.

Wir gehen nunmehr zu der Untersuchung der Funktionen $u_i\ v_i\ w_i$ über, die successive durch die Gleichungen 15) definiert sind.

Es ergiebt sich zunächst wieder aus den Ungleichungen 77) für die Potentialfunktionen $U_j\ V_j\ W_j$ mit den Randwerten 16) an ω mit Rücksicht auf Satz II und Satz I des I. Abschnitts der vorangehenden Abhandlung, daß die Reihen:

$$78)\qquad U = \sum_0^\infty {}_j\, \mathfrak{k}^j\, U_j \qquad (-1 < \mathfrak{k} < +1),$$

und

$$79)\qquad \frac{\partial U}{\partial s} = \sum_0^\infty {}_j\, \mathfrak{k}^j\, \frac{\partial U_j}{ds} \qquad (-1 < \mathfrak{k} < +1),$$

wenn s eine beliebige Richtung vorstellt, für jeden Punkt des Gebietes τ konvergieren, und daß die Reihen U und $\frac{dU}{ds}$ im ganzen Gebiete τ eindeutige und stetige Funktionen der Stelle vorstellen.

Wir multiplizieren jede der Formeln 15) bezw. mit $\mathfrak{k}'^j$ $(0 < \mathfrak{k} < \mathfrak{k}' < 1)$ und summieren von 1 bis j, dann folgt:

$$80)\quad \begin{cases} \mathfrak{k}'^j u_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \sum_1^{j-1}{}_i\, \mathfrak{k}'^i\,\theta_i\,\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\tau F_1\,\frac{d\tau}{r} - \sum_1^j{}_i\, \mathfrak{k}'^i\, U_i, \\ \mathfrak{k}'^j v_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \sum_1^{j-1}{}_i\, \mathfrak{k}'^i\,\theta_i\,\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\tau F_2\,\frac{d\tau}{r} - \sum_1^j{}_i\, \mathfrak{k}'^i\, V_i, \\ \mathfrak{k}'^j w_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \sum_1^{j-1}{}_i\, \mathfrak{k}'^i\,\theta_i\,\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\tau F_3\,\frac{d\tau}{r} - \sum_1^j{}_i\, \mathfrak{k}'^i\, W_i, \end{cases}$$

dann folgt, da auch:

$$
\text{81)} \quad \begin{cases} \text{abs. Max. } \mathfrak{k}'^{i}\, \theta_i \overline{\overline{<}}\, a'\, m'^{i} \\ \text{abs. } |\, \mathfrak{k}'^{i}\, \theta_i\, |_1^2 \overline{\overline{<}}\, b'\, m'^{i}\, r_{12}^{\lambda}, \quad (0 \overline{\overline{<}}\, r_{12} \overline{\overline{<}}\, \sigma\, (1-\delta')^{i-1}) \end{cases}
$$

wo m' einen echten Bruch bedeutet:

$$
\text{82)} \quad \begin{cases} |\, \mathfrak{k}'^{j}\, u_j\, | \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\ |\, \mathfrak{k}'^{j}\, v_j\, | \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\ |\, \mathfrak{k}'^{j}\, w_j\, | \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \end{cases}
$$

und auch:

$$
\text{83)} \quad \begin{cases} \mathfrak{k}'^{j} \dfrac{\partial u_j}{\partial s} \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\[2ex] \mathfrak{k}'^{j} \dfrac{\partial v_j}{\partial s} \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \\[2ex] \mathfrak{k}'^{j} \dfrac{\partial w_j}{\partial s} \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}, \end{cases}
$$

wo s eine ganz beliebige Richtung vorstellt.

Setzen wir jetzt:

$$
\text{84)} \qquad n = \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}'}
$$

so folgt:

$$
\text{85)} \quad \begin{cases} |\, \mathfrak{k}^{j}\, u_j\, | \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \\ |\, \mathfrak{k}^{j}\, v_j\, | \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \\ |\, \mathfrak{k}^{j}\, w_j\, | \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \end{cases}
$$

und:

$$
\text{86)} \quad \begin{cases} \left| \mathfrak{k}^{j} \dfrac{\partial u_j}{\partial s} \right| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \\[2ex] \left| \mathfrak{k}^{j} \dfrac{\partial v_j}{\partial s} \right| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \\[2ex] \left| \mathfrak{k}^{j} \dfrac{\partial w_j}{\partial s} \right| \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } n^j, \end{cases}
$$

wo n einen echten Bruch bedeutet, und wir sehen, daß auch die Reihen:

87)
$$u = \sum_0^\infty {}_j\, t^j u_j, \quad v = \sum_0^\infty {}_j\, t^j v_j, \quad w = \sum_0^\infty {}_j\, t^j w_j$$

und:

88)
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_0^\infty {}_j\, t^j \frac{\partial u_j}{\partial s}, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \sum_0^\infty {}_j\, t^j \frac{\partial v_j}{\partial s}, \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \sum_0^\infty {}_j\, t^j \frac{\partial w_j}{\partial s}$$

in ganzer Erstreckung des Raumes τ konvergieren und eindeutige und stetige Funktionen der Stelle darstellen.

Nunmehr können wir das Resultat aussprechen:

Die Reihen 87) stellen, wie behauptet, die Lösungen unserer gestellten Aufgabe dar.

§ 7.

Wir haben bisher über die gegebenen Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ in den Differentialgleichungen 7) vorausgesetzt, daß sie der Differentialgleichung genügen:

89)
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$$

und daß sie in ganzer Erstreckung des Gebietes τ derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

90) abs. $| f_1 |_1^2 \overline{\overline{<}}$ endl. Konst. $r_{12}^\lambda, \ldots$ | λ echter Bruch;

für den Beweis ist aber von Wichtigkeit nur, daß die durch die Formeln:

$$91)\quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int\limits_\tau f_1 \dfrac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int\limits_\tau f_2 \dfrac{d\tau}{r} - V_0, \\ w_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int\limits_\tau f_3 \dfrac{d\tau}{r} - W_0 \end{cases}$$

definierten $u_0\, v_0\, w_0$ in τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, und daß die stetige, allgemeine Potentialfunktion:

$$92)\quad \theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}$$

in τ derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$93)\quad \text{abs.}\,|\,\theta_0\,|_1^2 \mathrel{\overline{\overline{<}}} \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda},$$

und daß schließlich in τ in irgend welcher im übrigen beliebig kleinen Entfernung von ω:

$$94)\quad \begin{cases} \Delta \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\limits_\tau \theta_0 \dfrac{d\tau}{r} = -4\pi \dfrac{\partial \theta_0}{\partial x}, \\ \Delta \dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int\limits_\tau \theta_0 \dfrac{d\tau}{r} = -4\pi \dfrac{\partial \theta_0}{\partial y}, \\ \Delta \dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int\limits_\tau \theta_0 \dfrac{d\tau}{r} = -4\pi \dfrac{\partial \theta_0}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt zunächst weiter zeigen, daß diese Voraussetzungen 92), 93), 94) auch erfüllt sind, wenn

$$95)\quad \begin{cases} f_1 = X + \dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ f_2 = Y + \dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0, \\ f_3 = Z + \dfrac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

XYZ wieder in τ derart stetig sind, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

96) $$\text{abs.}\,|X|_1^2 \overline{\gtrless} \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \ldots$$

und Θ eine stetige, allgemeine Potentialfunktion vorstellen soll, von der wir nur wissen, daß ihre Stetigkeit in τ die Bedingung erfüllt:

97) $$\text{abs.}\,|\Theta|_1^2 \overline{\gtrless} \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}$$

für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}.

Es folgt nämlich in diesem Falle aus den Formeln 91) in derselben Weise, wie 46) aus 37) folgte,

98) $$\left\{\begin{aligned} \theta_0 = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\int_\tau X\frac{d\tau}{r}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\int_\tau Y\frac{d\tau}{r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\int_\tau Z\frac{d\tau}{r}\right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\int_\tau \frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{d\tau}{r}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\int_\tau \frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{d\tau}{r}\right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\int_\tau \frac{\partial\Theta}{\partial z}\frac{d\tau}{r}\right] - \frac{\partial U_0}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial z}, \\ \frac{2\theta_0}{1-\mathfrak{k}} = {} & -\Theta - \left\{\Theta - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \Theta\frac{d\tau}{r}\right|_a\right\} + H_0, \end{aligned}\right.$$

wo H_0 eine Funktion der Stelle an ω darstellt, die derart stetig ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

99) $$\text{abs.}\,|H_0|_1^2 < \Gamma \text{ abs. Max. } (\Theta, X, Y, Z)\cdot r_{12}^{\Lambda},$$

wo Λ ein ganz beliebiger echter Bruch, Γ eine endliche Konstante ist, die nur von der Gestalt der Fläche ω und der Wahl des echten Bruches Λ abhängig ist, den man z. B. gleich λ setzen kann.

Es ist ferner θ_0 nach wie vor eine stetige Potentialfunktion des Raumes, die nunmehr nach dem Satze IV des II. Abschnitts der vorstehenden Abhandlung[1]) im ganzen Raume τ bei genügend kleinem r_{12} der Bedingung 93) genügt.

[1]) Diese Berichte S. 28.

Auch die Bedingungen 94) sind erfüllt, da XYZ die Bedingung 96) erfüllen und Θ nach Voraussetzung eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ ist.

Der Beweis bleibt also nach wie vor richtig, wenn $f_1 f_2 f_3$ von der Form 95) sind.

Es bleibt jetzt schließlich noch der Fall zu behandeln, daß

$$100)\qquad F \equiv \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \neq 0,$$

aber eine derart stetige Funktion des Raumes τ ist, daß für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$101)\qquad \text{abs.}\,|F|_2^1 < \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}.$$

Wir setzen in diesem Falle:

$$102)\qquad \psi = -\frac{1}{4\pi(1+k)}\int_\tau F\frac{d\tau}{r}$$

und:

$$103)\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r} + \mathfrak{U} + u', \\ v &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r} + \mathfrak{V} + v', \\ w &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r} + \mathfrak{W} + w' \end{aligned}\right. \qquad \left|\ \begin{aligned} &\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}\ \text{Potentialfunktionen} \\ &\text{von } \tau \text{ mit den Randwerten:} \\ \mathfrak{U} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r}, \\ \mathfrak{V} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r}, \\ \mathfrak{W} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \psi\frac{d\tau}{r}; \end{aligned}\right\}\ \text{an } \omega,$$

dann ist:

$$104)\left\{\begin{aligned} \Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} &= (1+k)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \Delta u' + k\frac{\partial\theta'}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right), \\ \Delta v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} &= (1+k)\frac{\partial\psi}{\partial y} + \Delta v' + k\frac{\partial\theta'}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right), \\ \Delta w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} &= (1+k)\frac{\partial\psi}{\partial z} + \Delta w' + k\frac{\partial\theta'}{\partial z} + k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right), \end{aligned}\right.$$

und die neuen Funktionen $u'\ v'\ w'$ haben die Differentialgleichungen zu erfüllen:

$$105)\begin{cases} \Delta u' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial x} = \left[X - (1+k)\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\Theta - k\left(\dfrac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right], \\ \Delta v' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial y} = \left[Y - (1+k)\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\Theta - k\left(\dfrac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right], \\ \Delta w' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial z} = \left[Z - (1+k)\dfrac{\partial \psi}{\partial z}\right] + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\Theta - k\left(\dfrac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right]; \end{cases}$$

das sind aber wieder Differentialgleichungen von der früheren Form 7), bei denen die Funktionen $f_1 f_2 f_3$ die Form 95) haben. Dieser Fall ist damit auf den früheren zurückgeführt.

§ 8.

Theorem. Es sei vorgelegt das folgende Problem:

Wir suchen drei in einem von einer stetig gekrümmten Fläche ω begrenzten Raume τ eindeutige und stetige Funktionen u, v, w mit endlichen ersten Ableitungen, welche in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen genügen:

$$106)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -X - \dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -Y - \dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -Z - \dfrac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

und den Grenzbedingungen:

$$107)\qquad \left.\begin{cases} u = \bar{u}, \\ v = \bar{v}, \\ w = \bar{w}, \end{cases}\right\} \text{an } \omega,$$

wo $X\,Y\,Z\,\Theta$ gegebene Funktionen der Stelle des Raumes τ, $\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w}$ gegebene Funktionen der Oberfläche ω sein sollen, und zwar machen wir über diese gegebenen Funktionen die folgenden Voraussetzungen:

$X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ sollen in τ derart (abteilungsweise) stetig sein, daß für zwei Punkte 1 und 2 (der Teilgebiete) in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

108) abs. $| X |_1^2 \overline{\overline{<}}$ endl. Konst. $r_{12}^{\lambda}, \ldots$ | λ echter Bruch,

Θ soll eine stetige allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ sein, deren Stetigkeit im Raume τ der Bedingung:

109) $$\text{abs.} \, | \Theta |_1^2 \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}$$

bei genügend kleinem r_{12} genügt.

$\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w}$ sollen mit ihren ersten Ableitungen stetig sein, und zwar sollen die ersten Ableitungen derart stetig sein, daß für je zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

110) $$\text{abs.} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial h} \right|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda},$$

wenn $h_{1(2)}$[1]) eine beliebige tangentiale Richtung vorstellt.

Dieses Problem hat, wenn der Parameter k die Ungleichung erfüllt:

111) $$-1 < k < +\infty$$

stets ein und nur ein Lösungssystem, das man auf folgende Weise erhalten kann:

Man führe entsprechend den Ausführungen des § 1 und des § 7 das Problem auf das Grundproblem:

112) $$\left|\begin{array}{l} \Delta u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -f_1, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -f_2, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -f_3, \end{array}\right| \text{ in } \tau, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z} = 0,$$

---

1) $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \ldots, \quad \varepsilon_1 \overline{<}$ endl. Konst. $r_{12}, \ldots$

$$113)\qquad \left.\begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ w = 0 \end{cases}\right\} \text{an } \omega$$

zurück und bilde dann successive die folgenden Funktionen:

$$114)\quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \qquad k = \dfrac{2\mathfrak{k}}{1-\mathfrak{k}} \\ w_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r} - W_0, \\ \left.\begin{array}{l} u_j = u_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - U_j, \\ v_j = v_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - V_j, \\ w_j = w_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - W_j, \end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

wo die $U_j\ V_j\ W_j$ die Potentialfunktionen des Raumes τ vorstellen mit den Randwerten:

$$115)\quad \left.\begin{cases} U_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_1 \frac{d\tau}{r}, \quad U_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \\ V_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_2 \frac{d\tau}{r}, \quad V_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \quad j = 1, 2 \ldots \\ W_0 = \dfrac{1-\mathfrak{k}}{4\pi}\displaystyle\int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r}, \quad W_j = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} \end{cases}\right\} \text{an } \omega,$$

dann erfüllen die Funktionen:

116)
$$\begin{cases} u = \sum_0^\infty {}_j\, k^j u^j, \\ v = \sum_0^\infty {}_j\, k^j v^j, \\ w = \sum_0^\infty {}_j\, k^j w^j \end{cases}$$

in τ in irgend welcher, im übrigen beliebig kleiner Entfernung von der Fläche ω die Differentialgleichung 112) und an der Fläche die Randbedingungen 113). Die Funktionen $u\, v\, w$, die durch die Reihen 116) definiert werden, sind mit ihren ersten Ableitungen in ganzer Erstreckung des Raumes τ eindeutig und stetig.

Es ist von Interesse, dieses Resultat mit dem entsprechenden Resultat in der Potentialtheorie zu vergleichen:

Es sei V die Lösung der Differentialgleichung:

$$\varDelta V = -f(x, y, z),$$

welche in τ eindeutig und stetig ist und an ω die stetigen Randwerte

$$\overline{V}$$

annimmt; ist die in τ gegebene Funktion f derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 des Gebietes τ in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\,|f|_1^2 \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } r_{12}^\lambda, \quad | \ \lambda \text{ echter Bruch}$$

und ist $\overline{V}$ mit seinen ersten Ableitungen auf ω eindeutig und stetig, und zwar die ersten Ableitungen derart stetig, daß für zwei Punkte 1 und 2 der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial \overline{V}}{\partial h}\right|_1^2 \overline{<} \text{ endl. Konst. } r_{12}^\lambda,$$

wo $h_{1(2)}$[1]) eine beliebige tangentiale Richtung vorstellt, dann kann man aussagen, daß V mit seinen ersten Ableitungen im ganzen Gebiete τ eindeutig und stetig ist.

Es folgt dies leicht aus dem Satze IX meiner Abhandlung I zur Potentialtheorie[2]) mit Hilfe eines bekannten Theoremes von Hölder.[3])

Die Analogie wird noch größer, wenn man für V die folgende Differentialgleichung in τ fordert:

$$\Delta V = -X - \frac{\partial \Theta}{\partial s},$$

wo s eine beliebige feste Richtung, X eine gegebene Funktion von $(x\,y\,z)$, Θ eine gegebene, stetige allgemeine Potentialfunktion in τ vorstellt, bei den Voraussetzungen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{abs.}\,|\,X\,|_1^2 \overline{<} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \\ \text{abs.}\,|\,\Theta\,|_1^2 \overline{<} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \end{array}\right| \; \lambda \text{ echter Bruch.}$$

Auch in diesem allgemeineren Falle ist V mit seinen ersten Ableitungen in ganzer Erstreckung von τ eindeutig und stetig.

---

[1]) $\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \ldots;\quad |\,\varepsilon_1\,| < \text{endl. Konst. } r_{12}, \ldots$

[2]) Abhandulngen zur Potentialtheorie (Berlin, F. Dümmlers Verlag, 1901—1902).

[3]) Daß bei der Voraussetzung über f:

$$\Delta \int_\tau f \frac{d\tau}{r} = -4\pi f.$$

Anhang.

Die von mir in dieser Abhandlung gegebene Methode beruht auf der Umformung der Gleichungen des elastischen Gleichgewichts 7) auf die Form 8):

$$\Delta u - \mathfrak{k}\left(\Delta u - 2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = -F_1,$$
$$\Delta v - \mathfrak{k}\left(\Delta v - 2\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = -F_2, \qquad k = \frac{2\mathfrak{k}}{1-\mathfrak{k}},$$
$$\Delta w - \mathfrak{k}\left(\Delta w - 2\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = -F_3,$$

und der Reihenentwickelung von $u\ v\ w$ nach Potenzen von $\mathfrak{k}$. Die Methode gilt für

$$-1 < \mathfrak{k} < 1$$

also für den Bereich von k:

$$-1 < k < +\infty.$$

Nach dem hier gegebenen Beweise kann man nun auch die früheren Entwickelungen, durch welche von Lauricella und E. und F. Cosserat die Lösung versucht wurde, in den Grenzen, in denen diese Entwickelungen konvergent sind, sicher stellen.

Wir wollen die Entwickelung, die von der Form:

$$\text{117)} \qquad \left\{\begin{aligned} \Delta u + k\frac{\partial \theta}{\partial x} &= -f_1 \\ \Delta v + k\frac{\partial \theta}{\partial y} &= -f_2, \\ \Delta w + k\frac{\partial \theta}{\partial z} &= -f_3 \end{aligned}\right.$$

ausgeht, nach Potenzen von k als die Entwickelung von Lauricella bezeichnen.

Man setzt bei derselben:

$$118)\quad \begin{cases} u = \sum_0^\infty{}^i k^i u_i, \\ v = \sum_0^\infty{}^i k^i v_i, \\ w = \sum_0^\infty{}^i k^i w_i, \end{cases}$$

wobei die Funktionen $u_i\ v_i\ w_i$ in der folgenden Weise gebildet werden:

$$119)\quad \begin{cases} u_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau f_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau f_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \\ w_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau f_3 \frac{d\tau}{r} - W_0, \\ u_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - U_i, \\ v_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - V_i, \\ w_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - W_i, \end{cases}$$

$U_i\ V_i\ W_i$ die Potentialfunktionen des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$120)\quad \left\{\begin{matrix} U_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau f_1 \frac{d\tau}{r}, & U_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r} & \\ V_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau f_2 \frac{d\tau}{r}, & V_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r}, & i = 1, 2 \ldots \\ W_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau f_3 \frac{d\tau}{r}, & W_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r} & \end{matrix}\right\} \text{ an } \omega.$$

Für:

121) $$1 < k < +1$$

kann man analog, wie in § 3, nachweisen, daß die Reihe:

$$k^{2i} J_i, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

in der:

122) $$J_i = \int_\tau \theta_i^2 \, d\tau$$

gesetzt ist, konvergiert, mit Hilfe der Ungleichung:

123) $$k^{2i} J_i \lesseqgtr a \cdot k^{2i}, \quad | \; a \text{ endliche Konstante.}$$

Andererseits geht die Formel 46) S. 57, auf die es vor allem ankommt, in die folgende über:

124) $$\theta_i = -\frac{\theta_{i-1}}{2} - \frac{1}{2}\left(\theta_{i-1} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\tau \theta_{i-1}\frac{d\tau}{r}\right|_a\right) + H_i$$

und hierauf die Formel 51) S. 58 in die folgende:

125) $$\begin{cases} \text{abs.}\,|\,\theta_i\,|_1^2 \lesseqgtr \dfrac{1}{2}\left[(1+\varepsilon_i)\,C_{i-1} + \dfrac{c}{\varepsilon_\delta\,\sigma\,(1-\delta)^{i-1}}\,\text{abs.Max.}\,\theta_{i-1}\right] r_{12}^{\lambda}, \\ (0 \lesseqgtr r_{12} \lesseqgtr \sigma\,(1-\delta)^i), \end{cases}$$

wo ε_i eine Zahl ist, die durch Vergrößerung von i unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, und hierauf ist es auch möglich, die Konvergenz der Reihen 118) und ihrer ersten Ableitungen zu beweisen.

Man kann also zeigen, daß die Lauricellasche Entwickelung für:

$$-1 < k < +1$$

die Lösung des Problems darstellt.

Wir wollen schließlich die Entwickelung, die von der Form:

126) $$\begin{cases} \Delta u - \varkappa\left(\Delta u - \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) = -\varphi_1, \quad \varphi_1 = (1-\varkappa) f_1, \\ \Delta v - \varkappa\left(\Delta v - \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right) = -\varphi_2, \quad \varphi_2 = (1-\varkappa) f_2, \quad k = \dfrac{\varkappa}{1-\varkappa}, \\ \Delta w - \varkappa\left(\Delta w - \dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right) = -\varphi_3, \quad \varphi_3 - (1-\varkappa) f_3, \end{cases}$$

ausgeht, nach Potenzen von $\varkappa$ als die Entwickelung von Cosserat bezeichnen. Man setzt bei derselben:

$$127)\quad \begin{cases} u = \sum_0^\infty {}^i \varkappa^i u_i, \\ v = \sum_0^\infty {}^i \varkappa^i v_i, \\ w = \sum_0^\infty {}^i \varkappa^i w_i, \end{cases}$$

wobei die Funktionen $u_i\, v_i\, w_i$ in der folgenden Weise gebildet werden:

$$128)\quad \begin{cases} u_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau \varphi_1 \frac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau \varphi_2 \frac{d\tau}{r} - V_0, \\ w_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau \varphi_3 \frac{d\tau}{r} - W_0, \\ u_i = u_{i-1} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - U_i, \\ v_i = v_{i-1} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - V_i, \quad i = 1, 2 \ldots \\ w_i = w_{i-1} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r} - W_i, \end{cases}$$

$U_i\, V_i\, W_i$ die Potentialfunktionen des Gebietes τ mit den Randwerten:

$$129)\quad \left\{ \begin{array}{ll} U_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau \varphi_1 \frac{d\tau}{r}, & U_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r}, \\ V_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau \varphi_2 \frac{d\tau}{r}, & V_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r}, \quad i = 1, 2 \ldots \\ W_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau \varphi_3 \frac{d\tau}{r}, & W_i = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r}, \end{array} \right\} \text{ an } \omega.$$

Für:

130) $$-1 < \varkappa < +1$$

kann man analog, wie in § 3, nachweisen, daß die Reihe:

$$\varkappa^{2i} J_i,$$

in der:

131) $$J_i = \int_\tau \theta_i^2 \, d\tau$$

gesetzt ist, konvergiert, mit Hilfe der Ungleichung:

132) $$\varkappa^{2i} J_i < a \cdot \varkappa^{2i}, \quad | \; a \text{ endliche Konstante.}$$

Andererseits geht die Formel 46), auf die es vor allem ankommt, in die folgende über:

133) $$\theta_i = + \frac{\theta_{i-1}}{2} - \frac{1}{2}\left(\theta_{i-1} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\tau \theta_{i-1} \frac{d\tau}{r}\right|_a\right) + H_i,$$

und hierauf die Formel 51) S. 58 in die folgende:

134) $$\begin{cases} \text{abs.}\,|\theta_i|_1^2 < \frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon_i)\, C_{i-1} + \frac{c}{\varepsilon_\delta \sigma (1-\delta)^{i-1}} \text{abs. Max.}\, \theta_{i-1}\right] r_{12}^{\lambda}, \\ \qquad (0 \overline{\overline{<}} r_{12} \overline{\overline{<}} \sigma (1-\delta)^i), \end{cases}$$

wo ε_i eine Zahl ist, die durch Verkleinerung von i unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, und hierauf ist es auch möglich, die Konvergenz der Reihen 127) und ihrer ersten Ableitungen zu beweisen.

Man kann also zeigen, daß die Cosseratsche Entwickelung für:

$$-1 < \varkappa < +1, \quad -\frac{1}{2} < k < +\infty$$

die Lösung des Problems darstellt.

Unser Beweis kann also auch dazu dienen, die Lauricellaschen und Cosseratschen Entwickelungen streng zu begründen, die Entwickelung von Lauricella für:

$$-1 < k < +1$$

die von Cosserat für:

$$-\frac{1}{2} < k < +\infty .$$

Unsere Entwickelung ist die allgemeinste, sie gibt die Lösung des Problems für:

$$-1 < k < +\infty .$$

Für manche Untersuchungen wird noch die folgende Bemerkung von Wichtigkeit sein:

Es ergibt sich nach den Ausführungen des § 5:

$$\left.\begin{array}{r} |\mathfrak{T}^i \theta_i| \leqq \text{endl. Konst. } A \cdot m^i, \\ \text{abs.} |\mathfrak{T}^i \theta_i|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. } A\, m^i r_{12}^\lambda, \\ (0 < r_{12} \leqq \sigma(1-\delta)^i), \end{array}\right| \; m < 1,$$

wenn

$$\text{abs.} |\theta_0|_1^2 \leqq C_0 r_{12}^\lambda, \quad (0 \leqq r_{12} < \sigma)$$

und A den größeren der beiden Werte C_0 und abs. Max. θ_0 darstellt; dabei sind die hier auftretenden endlichen Konstanten lediglich von der Gestalt der Oberfläche ω abhängig.

Bei der Definition von

$$\theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}$$

durch die drei ersten Formeln 15) S. 44 ist mit Rücksicht auf Satz II des II. Abschnittes und Zusatz 4 zu III des I. Abschnittes der vorstehenden Abhandlung

$$A \leqq \text{abs. Max. } (F_1, F_2, F_3) \cdot \text{endl. Konst.},$$

und es folgt somit:

$$135) \quad \left\{\begin{array}{r} |\theta| \leqq \text{endl. Konst. abs. Max. } (F_1, F_2, F_3), \\ \text{abs.} |\theta|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. abs. Max. } (F_1, F_2, F_3)\, r_{12}^\lambda, \\ (0 \leqq r_{12} \leqq \sigma'), \quad (\sigma' < \sigma), \end{array}\right.$$

wobei λ ein ganz beliebiger echter Bruch sein kann und die endlichen Konstanten in keiner Weise von den Funktionen $F_1\, F_2\, F_3$ abhängen.

Die Lösungen u, v, w des Problems 7) S. 41 erfüllen also stets die Ungleichungen:

$$136)\begin{cases}\text{abs. Max.}\,(u, v, w, D_1 u, D_1 v, D_1 w) \overline{<} \text{endl. K. abs. Max.}\,(f_1, f_2, f_3), \\ \qquad \text{abs.}\,|\,\theta\,|_1^2 < \text{endl. Konst. abs. Max.}\,(f_1, f_2, f_3)\, r_{12}^{\lambda},\end{cases}$$

wenn $D_1 u$, $D_1 v$, $D_1 w$ irgend welche erste Ableitungen von u, v, w bezeichnen.

Ist

$$F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \neq 0,$$

so ergeben die Ausführungen des § 7 (Formeln 103), 105)) mit Rücksicht auf das soeben gefundene Resultat 136) die Ungleichungen:

$$137)\begin{cases}\text{abs. Max.}\,(u, v, w, D_1 u, D_1 v, D_1 w) \overline{<} \text{endl. K. abs. Max.}\,(f_1, f_2, f_3, F), \\ \qquad \text{abs.}\,|\,\theta\,|_1^2 < \text{endl. Konst. abs. Max.}\,(f_1, f_2, f_3, F)\, r_{12}^{\lambda},\end{cases}$$

wobei nach wie vor λ ein beliebiger echter Bruch ist und die endlichen Konstanten in keiner Weise von den Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ abhängen.

Die Formeln 137) sind noch einer weiteren Verallgemeinerung fähig, worauf ich bei einer späteren Gelegenheit zurückkommen werde.