Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIII. Jahrgang 1903.

München.

Verlag der K. Akademie.

1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Zur Theorie der Spektrallinien II.

Von **F. Lindemann.**

(Eingelaufen 7. Februar.)

In meiner früheren Arbeit[1]) wurde die vereinfachende Voraussetzung gemacht, dass der schwingende, Licht aussendende Körper (das Atom) eine kugelförmige Gestalt habe. Es war dies notwendig, um einen allgemeinen Überblick über die zu erwartenden Vorgänge zu gewinnen, besonders aber, weil nur bei der Kugel die vollständige mathematische Durchführung möglich schien; überdies lag die Vorstellung nahe, dass alle Atome wie Kugeln behandelt werden könnten. Nachdem aber die bei der Kugel sich für die Wellenlängen der Spektrallinien ergebenden Resultate in mancher Beziehung mit der Erfahrung nahezu in Uebereinstimmung sind, wie sich besonders beim Vergleichen der Spektren verschiedener Elemente ergab, bleibt die Frage zu untersuchen, ob nicht durch eine andere Annahme über die Gestalt der Atome die Übereinstimmung verbessert werden kann.

Im Folgenden wird der im Lichtäther gemäss den Gesetzen der Elastizitätstheorie schwingende Körper als dreiaxiges Ellipsoid vorausgesetzt. Es zeigt sich, dass sich auch für ein solches die mathematische Theorie durchführen lässt (was bisher nicht gelungen war), und dass sich daraus für die Beurteilung der in den Spektren der Elemente auftretenden Serien und vielleicht auch des sogenannten Zehmann-Effektes neue Gesichtspunkte gewinnen lassen.

---

[1]) Sitzungsberichte, Bd. XXXI, Heft 4, 1901, p. 441 ff.

Eingehender sind dann noch die Rotationsellipsoide behandelt; es ergibt sich, dass bei ihnen das Spektrum in eine Haupt-Serie und unendlich viele Neben-Serien zerfällt, die Haupt-Serie aber bei den Sphäroiden nur aus einer Linie oder aus sehr wenigen Linien besteht. Diesen Charakter zeigen nun gerade die Spektren der Elemente aus den beiden ersten Mendelejeffschen Gruppen nach den Untersuchungen von Rydberg, Kayser und Runge. So war es möglich, auf die Spektren der einzelnen Elemente die mathematische Theorie anzuwenden und umgekehrt die Gestalt der Atome dieser Elemente näherungsweise zu bestimmen.

Schliesslich ist noch als Grenzfall ein Sphäroid mit unendlich grosser Abplattung betrachtet; dasselbe führt auf die Balmersche Formel für die Spektrallinien des Wasserstoffs.

Manche der nachfolgenden Entwicklungen haben zunächst noch heuristischen Charakter; aber mehr war bei der Kompliziertheit des Gegenstandes wohl kaum zu erreichen.

§ 16. Einführung der elliptischen Koordinaten.

Die Schwingungen zerlegen wir mit Clebsch in longitudinale und transversale (vgl. § 1); erstere hängen von der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 P = b^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \tag{1}$$

ab, letztere von der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 \varphi . \tag{2}$$

Die Dilatationen im Punkte x, y, z sind dann

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial P}{\partial x} + \quad * \quad + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial z} + \quad * \quad + \frac{\partial W}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} + \quad * \quad , \end{aligned} \tag{3}$$

wenn $\varphi = U$, $\varphi = V$, $\varphi = W$ drei Lösungen der Gleichung (2) bezeichnen. Man setzt dann für periodische Schwingungen

$$P = \sum_n (\Pi_n \operatorname{cosin} n b t + \Pi'_n \sin n b t), \tag{4}$$

$$U = \sum_n (\Omega_n \operatorname{cosin} n a t + \Omega'_n \sin n a t), \tag{5}$$

und analog für V und W, wo nun Π_n und Π'_n der Gleichung

$$\Delta^2 \Pi_n + n^2 \Pi_n = 0 \tag{6}$$

genügen müssen, und ebenso Ω_n, Ω'_n der Gleichung

$$\Delta^2 \Omega_n + n^2 \Omega_n = 0. \tag{7}$$

Sollen die Schwingungen innerhalb und ausserhalb eines durch ein Ellipsoid begrenzten Körpers untersucht werden, so wird man elliptische Koordinaten einführen. Wir setzen also, indem wir uns in der Bezeichnungsweise an Heine[1]) anschliessen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varrho \mu \nu}{b c}, \\ y &= \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \\ z &= \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei

$$\infty > \varrho > c > \mu > b > \nu > 0$$

sein soll, so dass die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} - 1 = 0, \tag{9}$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} - 1 = 0, \tag{10}$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} - 1 = 0 \tag{11}$$

---

[1]) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Bd. 1, p. 352 ff.

bezw. ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid darstellen.

Die Differentialgleichung (7) geht dann bekanntlich über in

$$
(12)\qquad \begin{aligned}
&(\nu^2-\varrho^2)\frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial \xi^2}-(\varrho^2-\mu^2)\frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial \eta^2}-(\mu^2-\nu^2)\frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial \zeta^2}\\
&\quad+n^2(\nu^2-\varrho^2)(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)\,\Omega_n=0,
\end{aligned}
$$

wenn noch

$$
(13)\qquad \begin{aligned}
&i\,\xi=\int_b^\mu\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}},\qquad \eta=\int_0^\nu\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}},\\
&\zeta=\int_c^\varrho\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}}
\end{aligned}
$$

gesetzt wird. Bezeichnet man ferner mit Ξ, H, Z Funktionen, die bezw. nur von ξ, η, ζ abhängen, so wird $\Omega_n=\Xi_n\,H_n\,Z_n$ eine partikuläre Lösung der partiellen Gleichung (12), wenn Ξ, H, Z den folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen genügen:[1])

$$
(14)\qquad \begin{aligned}
&\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}-\Xi\,(n^2\mu^4+A\,\mu^2+B)=0,\\
&\frac{d^2 H}{d\eta^2}+H\,(n^2\nu^4+A\,\nu^2+B)=0,\\
&\frac{d^2 Z}{d\zeta^2}+Z\,(n^2\varrho^4+A\,\varrho^2+B)=0,
\end{aligned}
$$

wo A und B willkürliche Konstante bezeichnen. Führt man die ursprünglichen elliptischen Koordinaten ein, so werden diese Gleichungen von der Form

$$
(15)\qquad \begin{aligned}
&(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}+\lambda\,[2\lambda^2-b^2-c^2]\frac{d\Lambda}{d\lambda}\\
&\quad+[n^2\lambda^4+A\,\lambda^2+B]\,\Lambda=0;
\end{aligned}
$$

---

[1]) Vgl. die entsprechenden Rechnungen bei Heine a. a. O., Bd. 2, p. 164 ff. sowie Klein und Pockels: Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u+k^2 u=0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik, Leipzig 1891, p. 133 ff.

und Ξ, H, Z sind Integrale dieser einen Gleichung, in der λ durch μ, ν oder ϱ zu ersetzen ist. Der Übergang zu den Variabeln ξ, η, ζ geschieht durch die Formeln

$$\mu = c \cdot \Delta \,\mathrm{am}\,(K - c\,\xi; \varkappa), \quad \nu = b \cdot \sin \mathrm{am}\,(c\,\eta; \varkappa'), \tag{16}$$
$$\varrho = c \cdot \Delta \,\mathrm{am}\,(i\,c\,\zeta; \varkappa),$$

wo $\varkappa^2 = \dfrac{c^2 - b^2}{c^2}$, $\varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2$ den Modul und den komplementären Modul bezeichnen.

§ 17. Die eindeutigen Lösungen der aufgestellten Differentialgleichung.

Es handelt sich jetzt darum, zu untersuchen, ob die in der Differentialgleichung (15) auftretenden Konstanten A und B sich so bestimmen lassen, dass wenigstens eine Lösung der Gleichung eine überall eindeutige Funktion von λ wird. Es ist das dieselbe Aufgabe, welche bei den Funktionen des elliptischen Zylinder auftritt, wo es darauf ankommt, die Konstante $\mathfrak{B}$ in der Gleichung

$$\frac{d^2\,\mathfrak{E}\,(\varphi)}{d\,\varphi^2} + (\lambda^2 \operatorname{cosin}^2 \varphi - \mathfrak{B})\,\mathfrak{E}\,(\varphi) = 0 \tag{17}$$

so zu wählen, dass eines der beiden partikulären Integrale eine eindeutige periodische Funktion von φ wird. Diese Aufgabe hat bekanntlich Heine gelöst, indem er diejenige transscendente Gleichung aufstellte und untersuchte, welche zwischen den Konstanten λ und $\mathfrak{B}$ bestehen muss, damit eine solche überall eindeutige Lösung möglich ist.

Indem ich (dem Vorgange Hermite's bei der Laméschen Gleichung folgend) von der Gleichung dritter Ordnung ausging, die durch das Produkt der beiden partikulären Integrale von (17) befriedigt wird, habe ich gezeigt,[1]) wie man

[1]) Math. Annalen Bd. 22, 1883. — Die Heineschen Funktionen finden besonders bei dem Probleme der Schwingungen elliptischer Membranen ihre Anwendung, worauf Heine schon kurz hinwies (a. a. O., Bd. II, p. 209). Eingehender ist dasselbe auf meine Veranlassung von

die Heinesche eindeutige Lösung als Grenzfall aus der allgemeinen Lösung, die für beliebige Werte von $\mathfrak{B}$ und λ gültig bleibt, herleiten kann, und zwar durch Anwendung funktionentheoretischer Schlüsse, nicht (wie es bei Heine geschieht) durch rechnerisches Verfahren. Eine analoge Schlussweise lässt sich nun auch auf unsere obige Gleichung (15) anwenden, wodurch dann wenigstens im Prinzipe die Frage nach dem Auftreten eindeutiger Lösungen beantwortet ist; wenn auch die nähere Untersuchung der betreffenden transscendenten Gleichungen noch aussteht.

Durch die Substitution

$$\lambda^2 = b^2 \cdot t \tag{18}$$

geht die Gleichung (15) über in

$$\begin{aligned} t(t-1)(t-\varkappa^2)\frac{d^2 y}{d t^2} + \tfrac{1}{2}\left[3 t^2 - 2(\varkappa^2+1)t + \varkappa^2\right]\frac{d y}{d t} & \\ + \left[n'^2 t^2 + A' t + B'\right] y = 0, & \end{aligned} \tag{19}$$

wo

$$n'^2 = \tfrac{1}{4} n^2 b^2, \quad A' = \tfrac{1}{4} A, \quad B' = \frac{B}{4 b^2}, \quad \varkappa^2 = \frac{c^2}{b^2}.$$

An der Stelle $t = \infty$ hat das Integral y der Differentialgleichung (19) einen wesentlich singulären Punkt, wenn n^2 von Null verschieden ist; ausserdem treten nur die Punkte $t = 0$, $t = 1$ und $t = \varkappa^2$ als singuläre Punkte auf.

An der Stelle $t = 0$ lautet die Fuchssche determinierende Fundamentalgleichung

$$s(s-1) + \tfrac{1}{2} s = 0.$$

Folglich sind zwei von einander unabhängige partikuläre Integrale durch die Ausdrücke

Joh. Schubert in seiner Inaugural-Dissertation (Über die Integration der Differentialgleichung .... für Flächenstücke, die von confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzt werden, Königsberg i. P. 1886) behandelt worden. Dies sei als Ergänzung zu den bei Pockels (a. a. O., p. 117, 1891) gemachten Literaturangaben erwähnt, wo überdies gezeigt wird, dass gewisse von Schubert (und bei Parabeln von Weber) gemachte Beschränkungen nicht nötig sind.

$$(20)\qquad \begin{aligned} y_{00} &= a_{00} + a_{01}\, t + a_{02}\, t^2 + \cdots\cdots \\ y_{01} &= \sqrt{t}\,(b_{00} + b_{01}\, t + b_{02}\, t^2 + \cdots) \end{aligned}$$

gegeben; die Reihen konvergieren in dem Kreise, welcher um den Punkt $t = 0$ mit dem Radius Eins geschlagen werden kann.

Für den Punkt $t = 1$ ergibt sich dieselbe determinierende Fundamentalgleichung. Für das Innere eines Kreises mit dem Radius Eins und dem Mittelpunkte $t = 1$ gelten also Entwicklungen der Form

$$(21)\qquad \begin{aligned} y_{10} &= a_{10} + a_{11}\,(1 - t) + a_{12}\,(1 - t)^2 + \cdots\cdots \\ y_{11} &= \sqrt{1 - t}\,[b_{10} + b_{11}\,(1 - t) + b_{12}\,(1 - t)^2 + \cdots\cdots]. \end{aligned}$$

In dem gemeinsamen Gebiete beider Kreise bestehen zwischen den Integralen (20) und (21) Gleichungen der Form

$$(22)\qquad \begin{aligned} y_{10} &= \alpha_0\, y_{00} + \beta_0\, y_{01}, \\ y_{11} &= \gamma_0\, y_{00} + \delta_0\, y_{01}, \end{aligned}$$

wodurch die analytische Fortsetzung der Integrale über das ursprüngliche Konvergenzgebiet hinaus vermittelt wird.

In dem Punkt $t = \varkappa^2$ endlich ergibt sich wieder dieselbe Fundamentalgleichung, so dass auch hier zwei partikuläre Integrale in der Form

$$(23)\qquad \begin{aligned} y_{20} &= a_{20} + a_{21}\,(\varkappa^2 - t) + a_{22}\,(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots\cdots \\ y_{21} &= \sqrt{\varkappa^2 - t}\,[b_{20} + b_{21}\,(\varkappa^2 - t) + b_{22}\,(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots] \end{aligned}$$

aufgestellt werden können. Die Reihen konvergieren in einem Kreise mit dem Radius $\varkappa^2 - 1$ (es ist ja $\varkappa^2 > 1$) und dem Mittelpunkte $t = \varkappa^2$; dieser Kreis hat mit dem Konvergenzkreise der Reihen (21) ein Gebiet gemein, in dem Gleichungen der Form

$$(24)\qquad \begin{aligned} y_{20} &= \alpha_1\, y_{10} + \beta_1\, y_{11}, \\ y_{21} &= \gamma_1\, y_{10} + \delta_1\, y_{11} \end{aligned}$$

bestehen und die Fortsetzung der einzelnen Reihen vermitteln.

Betrachten wir jetzt die Funktion

$$(25)\qquad \eta = a\, y_{20}^2 + b\, y_{21}^2,$$

wo a und b Konstante seien; dieselbe bleibt nach (23) unverändert bei einem Umgange um den Punkt $\varkappa^2$. Lassen wir die Variable t einen Umgang um $t = 1$ beschreiben und bezeichnen mit η^* den Wert, den η dabei annimmt, so ist nach (21) und (24)

$$\begin{aligned}\eta^* &= a(\alpha_1 y_{10} - \beta_1 y_{11})^2 + b(\gamma_1 y_{10} - \delta_1 y_{11})^2.\\ &= a(\alpha_1 y_{10} + \beta_1 y_{11})^2 + b(\gamma_1 y_{10} + \delta_1 y_{11})^2\\ &\qquad - 4(a\alpha_1\beta_1 + b\gamma_1\delta_1)y_{10}y_{11}.\\ &= a y_{20}^2 + b y_{21}^2 - 4(a\alpha_1\beta_1 + b\gamma_1\delta_1)y_{10}y_{11}.\\ &= \eta - 4(a\alpha_1\beta_1 + b\gamma_1\delta_1)y_{10}y_{11}.\end{aligned}$$

Werden nun die Konstanten a, b so bestimmt, dass sie der Bedingung

$$a\alpha_1\beta_1 + b\gamma_1\delta_1 = 0 \tag{26}$$

genügen, so wird $\eta^* = \eta$, d. h. die Funktion η lässt sich so nach Potenzen von $(\varkappa^2 - t)$ entwickeln, dass die Entwicklung in dem ganzen Kreise konvergiert, welcher in $t = \varkappa^2$ seinen Mittelpunkt hat und durch den Punkt $t = 0$ hindurchgeht (also den Punkt $t = 1$ einschliesst).

Insbesondere kann η gleich dem Quadrate eines Integrals y werden; dann muss entweder $a = 0$ oder $b = 0$ sein. Ist $a = 0$, so folgt

$$\gamma_1 = 0 \text{ oder } \delta_1 = 0,$$

ist $b = 0$, so folgt

$$\alpha_1 = 0 \text{ oder } \beta_1 = 0.$$

Im Falle $\gamma_1 = 0$ setzt sich nach (24) die Funktion y_{21} (bis auf einen Faktor) direkt in y_{11} fort, so dass

$$\begin{aligned}y_{21} = \delta_1 y_{11} = \sqrt{(1-t)(\varkappa^2 - t)}\,[c_{20} + c_{21}(\varkappa^2 - t)\\ + c_{22}(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots].\end{aligned} \tag{27}$$

Im Falle $\delta_1 = 0$ setzt sich y_{21} in y_{10} fort, und es wird

$$y_{21} = \gamma_1 y_{10} = \sqrt{\varkappa^2 - t}\,[b_{20} + b_{21}(\varkappa^2 - t) + b_{22}(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots]. \tag{28}$$

Im Falle $\alpha_1 = 0$ ergibt sich

$$(29)\quad y_{20} = \beta_1 y_{11} = \sqrt{1-t}\,[c'_{20} + c'_{21}(\varkappa^2 - t) + c'_{22}(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots]$$

und im Falle $\beta_1 = 0$:

$$(30)\quad y_{20} = \alpha_1 y_{10} = a_{20} + a_{21}(\varkappa^2 - t) + a_{22}(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots.$$

Diese Reihen (27), (28), (29) und (30) konvergieren sämtlich in dem Kreise mit dem Radius $\varkappa^2$ und dem Mittelpunkte $t = \varkappa^2$.

In gleicher Weise kann man eine Funktion

$$(31)\quad \eta_1 = a_1 y_{10}^2 + b_1 y_{11}^2$$

bilden, die beim Umgange um $t = 0$ ungeändert bleibt; zu dem Zwecke müssen a_1 und b_1 der Bedingung

$$(32)\quad a_1 \alpha_0 \beta_0 + b_1 \gamma_0 \delta_0 = 0$$

genügen; und diese Funktion (31) wird ein vollständiges Quadrat, wenn a_1 oder b_1 verschwindet, was wieder zu vier Möglichkeiten führt, nämlich:

Wenn $\gamma_0 = 0$ ist, so wird

$$(33)\quad y_{11} = \delta_0 y_{01} = \sqrt{t(1-t)}\,[c_{10} + c_{11} t + c_{12} t^2 + \cdots];$$

im Falle $\delta_0 = 0$ haben wir

$$(34)\quad y_{11} = \gamma_0 y_{00} = \sqrt{1-t}\,[b_{10} + b_{11} t + b_{12} t^2 + \cdots];$$

im Falle $\alpha_0 = 0$:

$$(35)\quad y_{10} = \beta_0 y_{01} = \sqrt{t}\,[c_{00} + c_{01} t + c_{02} t^2 + \cdots];$$

endlich im Falle $\beta_0 = 0$:

$$(36)\quad \begin{aligned} y_{10} = \alpha_0 y_{00} &= a_{10} + a_{11}(1-t) + a_{12}(1-t)^2 + \cdots \\ &= \alpha_0 [a_{00} + a_{01} t + a_{02} t^2 + \cdots]. \end{aligned}$$

Diese Reihenentwicklungen (33), (34), (35), (36) gelten in einem Kreise mit dem Mittelpunkte $t = 0$ und dem Radius $\varkappa^2$.

Jede der Gleichungen

$$(37)\quad \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \delta_0 = 0,$$

$$(38)\quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \delta_1 = 0$$

gibt eine transscendente Beziehung zwischen den Konstanten A und B, deren Bestehen es ermöglicht, für eines der partikulären Integrale den Konvergenzbereich über die ursprüngliche Grenze hinaus zu erweitern. Insbesondere aber kann es vorkommen, dass eine der Gleichungen (37) mit einer der Gleichungen (38) gleichzeitig erfüllt ist; dann dehnt sich der Konvergenzbereich über die ganze Ebene aus, und das Integral y wird gleich einer ganzen transscendenten Funktion von t oder gleich dem Produkte einer solchen Funktion in einen oder mehrere der Faktoren

$$\sqrt{t}, \quad \sqrt{1-t}, \quad \sqrt{\varkappa^2 - t}.$$

Hierbei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_1 = 0$; die Gleichungen (29) und (35) geben zwei von einander verschiedene partikuläre Integrale;

2) $\alpha_0 = 0$, $\beta_1 = 0$; die Gleichungen (30) und (35) gelten gleichzeitig; es wird also

$$\alpha_1 y_{10} = \alpha_1 \beta_0 y_{01} = y_{20} = \sqrt{t} \cdot g_1(t), \tag{39}$$

wenn $g_1(t)$ eine ganze transscendente Funktion bezeichnet;

3) $\alpha_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$; man findet aus (27) und (35) zwei verschiedene partikuläre Integrale;

4) $\alpha_0 = 0$, $\delta_1 = 0$; es wird nach (28) und (35):

$$\gamma_1 y_{10} = \gamma_1 \beta_0 y_{01} = y_{21} = \sqrt{t(\varkappa^2 - t)} \cdot g_{13}(t), \tag{40}$$

wenn $g_{13}(t)$ eine ganze transscendente Funktion bedeutet;

5) $\beta_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$; (36) und (29) geben zwei verschiedene partikuläre Integrale;

6) $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 0$; aus (36) und (30):

$$\alpha_1 y_{10} = \alpha_1 \alpha_0 y_{00} = y_{20} = g_0(t); \tag{41}$$

7) $\beta_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$; zwei verschiedene partikuläre Integrale, dargestellt durch (27) und (36);

8) $\beta_0 = 0$, $\delta_1 = 0$; aus (28) und (36):

$$\gamma_1 y_{10} = \gamma_1 \alpha_0 y_{00} = y_{20} = \sqrt{\varkappa^2 - t} \cdot g_3(t); \tag{42}$$

9) $\gamma_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$; aus (29) und (33):

$$\beta_1 y_{11} = \beta_1 \delta_0 y_{01} = y_{20} = \sqrt{t(1-t)} \cdot g_{12}(t); \tag{43}$$

10) $\gamma_0 = 0$, $\beta_1 = 0$; (30) und (33) geben zwei verschiedene partikuläre Integrale;

11) $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$; aus (27) und (33):

$$\delta_1 y_{11} = \delta_0 \delta_1 y_{01} = y_{21} = \sqrt{t(1-t)(\varkappa^2 - t)} \cdot g_{123}(t); \tag{44}$$

12) $\gamma_0 = 0$, $\delta_1 = 0$; (28) und (33) geben zwei verschiedene partikuläre Integrale;

13) $\delta_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$; aus (34) und (29):

$$\beta_1 y_{11} = \beta_1 \gamma_0 y_{00} = y_{20} = \sqrt{1-t} \cdot g_2(t); \tag{45}$$

14) $\delta_0 = 0$, $\beta_1 = 0$; aus (30) und (34) erhält man zwei verschiedene partikuläre Integrale;

15) $\delta_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$; aus (27) und (34):

$$\delta_1 y_{11} = \gamma_0 \delta_1 y_{00} = y_{21} = \sqrt{(1-t)(\varkappa^2 - t)} \cdot g_{23}(t); \tag{46}$$

16) $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 0$; zwei verschiedene partikuläre Integrale aus den Gleichungen (28) und (34).

Es gibt somit acht Möglichkeiten, dargestellt durch die Gleichungen (39) bis (46), in denen sich ein partikuläres Integral der Gleichung (19) durch eine in der ganzen Ebene gültige Formel derart darstellen lässt, dass dies Integral gleich einem der folgenden Ausdrücke wird:

$$\begin{gathered} g_0(t),\ \sqrt{t}\, g_1(t),\ \sqrt{1-t}\, g_2(t),\ \sqrt{\varkappa^2 - t}\, g_3(t), \\ \sqrt{(1-t)(\varkappa^2-t)}\, g_{23}(t),\ \sqrt{\varkappa^2 - t}\, g_{13}(t),\ \sqrt{t(1-t)}\, g_{12}(t), \\ \sqrt{t(1-t)(\varkappa^2-t)}\, g_{123}(t), \end{gathered} \tag{47}$$

wenn mit g gewisse ganze transscendente Funktionen bezeichnet werden. Jeder dieser acht Fälle ist dadurch charakterisiert, dass zwei von den Gleichungen (37) und (38) gleichzeitig erfüllt sind, d. h. je zwei transscendente Gleichungen zwischen den gegebenen Konstanten n^2, A und B. Eine weitere Diskussion [1]) dieser Gleichungen in Bezug auf Existenz und Eigenschaften der Wurzeln lassen wir vorläufig beiseite.

§ 18. Entwicklungen nach Produkten $\mathfrak{G}_i(\mu)\,\mathfrak{G}_i(\nu)$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}^{(n)}_{i,s}(\mu)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots .8$ der Reihe nach die (47) aufgeführten acht Funktionen; die Indices n, s beziehen sich auf die verschiedenen Werte von n und A_s und B_s, durch welche sich die Funktionen unterscheiden. Wir lassen der Kürze halber die Indices fort und nennen die eine Funktion $\mathfrak{G}$, die andere $\mathfrak{G}_1$; der Indix i soll beiden gemeinsam sein. Es genüge $\mathfrak{G}$ der ersten Differentialgleichung (13):

$$\frac{d^2\,\mathfrak{G}}{d\,\xi^2} = \mathfrak{G}\,(n^2\,\mu^4 + A\,\mu^2 + B). \tag{48}$$

Wir wenden hier das in solchen Fällen übliche Verfahren an, multiplizieren diese Gleichung mit $\mathfrak{G}_1(\mu)$ und integrieren nach ξ zwischen 1 und K', d. h. nach μ zwischen b und c, dann wird

$$\int_1^{K'} \mathfrak{G}_1(\mu)\,\frac{d^2\,\mathfrak{G}(\mu)}{d\,\xi^2}\,d\,\xi = \int_1^{K'} (n^2\mu^4 + A\mu^2 + B)\,\mathfrak{G}(\mu)\cdot\mathfrak{G}_1(\mu)\,d\xi \tag{49}$$

und nach zweimaliger Anwendung der partiellen Integration auf die linke Seite

$$= \int_1^{K'} \mathfrak{G}(\mu)\,\frac{d^2\,\mathfrak{G}_1(\mu)}{d\,\xi^2}\,d\,\xi + \left[\mathfrak{G}_1(\mu)\,\frac{d\,\mathfrak{G}(\mu)}{d\,\xi} - \mathfrak{G}(\mu)\,\frac{d\,\mathfrak{G}_1(\mu)}{d\,\xi}\right]_b^c.$$

Die rechts auftretende eckige Klammer ist

$$\left[\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}\left(\mathfrak{G}_1(\mu)\,\frac{d\,\mathfrak{G}(\mu)}{d\,\mu} - \mathfrak{G}(\mu)\,\frac{d\,\mathfrak{G}_1(\mu)}{d\,\mu}\right)\right]_b^c,$$

---

[1]) Eine solche wird man mit analogen Methoden durchführen können, wie sie Poincaré für gewisse Fälle angewandt hat: American journal of mathematics, vol. XII, und Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. VIII, 1894.

also gleich Null. Die linke Seite von (49) bleibt somit ungeändert, wenn man $\mathfrak{G}(\mu)$ mit $\mathfrak{G}_1(\mu)$ vertauscht; folglich wird

$$
\begin{aligned}
(50)\qquad (n^2 - n_1^2)\int_K^{K'} \mu^4 \mathfrak{G}(\mu)\mathfrak{G}_1(\mu)\,d\xi + (A - A_1)\int_K^{K'} \mu^2 \mathfrak{G}(\mu)\mathfrak{G}(\mu)\,d\xi \\
+ (B - B_1)\int_K^{K'} \mathfrak{G}(\mu)\,\mathfrak{G}_1(\mu)\,d\xi = 0.
\end{aligned}
$$

Ebenso finden wir aus der zweiten Gleichung (14)

$$
\begin{aligned}
(51)\qquad (n^2 - n_1^2)\int_0^{K'} \nu^4 \mathfrak{G}(\nu)\,\mathfrak{G}_1(\nu)\,d\eta + (A - A_1)\int_0^{K'} \nu^2 \mathfrak{G}(\nu)\,\mathfrak{G}_1(\nu)\,d\eta \\
+ (B - B_1)\int_0^{K'} \mathfrak{G}(\nu)\,\mathfrak{G}_1(\nu)\,d\eta = 0.
\end{aligned}
$$

Ist insbesondere $n = n_1$, so folgt aus (50) und (51)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{K'} \nu^2\,\mathfrak{G}(\nu)\,\mathfrak{G}_1(\nu)\,d\eta \int_K^{K'} \mathfrak{G}(\mu)\,\mathfrak{G}_1(\mu)\,d\xi \\
= \int_0^{K'} \mathfrak{G}(\nu)\,\mathfrak{G}_1(\nu)\,d\eta \int_K^{K'} \mu^2\,\mathfrak{G}(\mu)\,\mathfrak{G}_1(\mu)\,d\xi
\end{aligned}
$$

oder

$$
(52)\qquad \int_0^{K'} d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\,\mathfrak{G}(\mu)\,\mathfrak{G}_1(\mu)\,\mathfrak{G}(\nu)\,\mathfrak{G}_1(\nu)\,d\xi = 0,
$$

wo nun $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ sich auf dieselbe Zahl n, aber auf verschiedene Werte von A und B beziehen; die Gleichung gilt nicht mehr für $A = A_1$ und $B = B_1$, denn dann enthält die linke Seite neben dem Faktor $\mu^2 - \nu^2$, der stets positiv ist, das vollständige Quadrat $[\mathfrak{G}(\mu)\cdot\mathfrak{G}(\nu)]^2$, welches auch positiv ist, es sei denn, dass A und B komplexe Werte haben. In letzterem Falle aber könnte man $\mathfrak{G}_1(\mu)$ gleich der zu $\mathfrak{G}(\mu)$ konjugiert imaginären Funktion setzen, und es würde sich aus (52) eine Gleichung der Form

$$
\int_0^{K'} d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)(p^2 + q^2)\,d\xi\,d\eta = 0
$$

ergeben; und eine solche kann nicht bestehen, da bei der

Integration stets $\mu^2 > \nu^2$ ist. So ergibt sich beiläufig, dass nur *reelle* Werte von A und B den im vorigen Paragraphen erwähnten transscendenten Gleichungen genügen können, wenn n^2 reell ist.

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$T_2 = \int_0^{K'} d\,\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\, \mathfrak{G}(\mu)\, \mathfrak{G}(\nu)\, \mathfrak{G}_1(\mu)\, \mathfrak{G}_1(\nu)\, d\,\xi,$$

$$T_4 = \int_0^{K'} d\,\eta \int_K^{K'} (\mu^4 - \nu^4)\, \mathfrak{G}(\mu)\, \mathfrak{G}(\nu)\, \mathfrak{G}_1(\mu)\, \mathfrak{G}_1(\nu)\, d\,\xi,$$

$$T_6 = \int_0^{K'} d\,\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\, \mu^2 \nu^2\, \mathfrak{G}(\mu)\, \mathfrak{G}(\nu)\, \mathfrak{G}_1(\mu)\, \mathfrak{G}_1(\nu)\, d\,\xi,$$

so leitet man aus (50) und (51) leicht die drei Gleichungen ab

$$\begin{aligned} &(n^2 - n_1^2)\, T_4 + (A - A_1)\, T_2 = 0, \\ (53) \qquad &(n^2 - n_1^2)\, T_6 - (B - B_1)\, T_2 = 0, \\ &(A - A_1)\, T_6 + (B - B_1)\, T_4 = 0. \end{aligned}$$

Die aufgestellten Relationen wird man benutzen, um gegebene Funktionen von μ und ν nach Produkten $\mathfrak{G}(\mu)\, \mathfrak{G}(\nu)$ zu entwickeln; insbesondere ist für den Fall $n = n_1$ die Relation (52) wichtig. Sei in diesem Falle

$$(54) \qquad f(\mu, \nu) = \sum_s \Gamma_{is}^{(n)}\, \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\nu),$$

wo also alle rechts vorkommenden Funktionen $\mathfrak{G}$ sich auf dieselbe Zahl n beziehen; und je nach Wahl des Index i bestehen acht solche Gleichungen. Wir multiplizieren beiderseits mit $\mathfrak{G}_{it}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{it}^{(n)}(\nu)\, (\mu^2 - \nu^2)$ und integrieren nach ξ und η, so ergibt sich aus (52):

$$\begin{aligned} &\Gamma_{it}^{(n)} \cdot \int_0^{K} d\,\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\, [\mathfrak{G}_{it}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{it}^{(n)}(\nu)]^2\, d\,\xi \\ (55) \qquad &= \int_0^{K} d\,\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\, f(\mu, \nu)\, \mathfrak{G}_{it}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{it}^{(n)}(\nu)\, d\,\xi. \end{aligned}$$

Insbesondere kann man eine Konstante, z. B. die Einheit nach der Formel (54) entwickeln; dann wird

$$(56)\qquad 1 = \sum_s \gamma_{is}^{(n)}\, \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\nu),$$

wenn γ_{is} durch die Bedingung

$$(57)\qquad \begin{aligned} &\gamma_{is}^{(n)} \cdot \int_0^K d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\, [\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\nu)]^2\, d\xi \\ &= \int_0^K d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\, \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\nu)\, d\xi \end{aligned}$$

bestimmt wird; es bestehen wieder acht verschiedene Gleichungen von der Form (56).

Für das Folgende ist noch die Aufgabe wichtig, die Reihen

$$(58)\qquad \Sigma A_{is}\, \Gamma_{is}\, \mathfrak{G}_{is}(\mu)\, \mathfrak{G}_{is}(\nu) \quad \text{und} \quad \Sigma B_{is}\, \Gamma_{is}\, \mathfrak{G}_{is}(\mu)\, \mathfrak{G}_{is}(\nu)$$

durch diejenige Funktion $f(\mu, \nu)$ zu bestimmen, welche durch die Relation (54) dargestellt ist.

Wie man mittelst der ersten beiden Gleichungen (14) leicht bestätigt, genügt jedes Produkt

$$Z = \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\nu)$$

den drei partiellen Differentialgleichungen

$$(59)\qquad \begin{aligned} &\nu^4 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \mu^4 \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} - Z[A_{is}\mu^2\nu^2(\nu^2 - \mu^2) + B_{is}(\nu^4 - \mu^4)] = 0, \\ &\nu^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} - Z[n^2\mu^2\nu^2(\mu^2 - \nu^2) + B_{is}(\nu^2 - \mu^2)] = 0, \\ &\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} - Z[n^2(\mu^4 - \nu^4) + A_{is}(\mu^2 - \nu^2)] = 0. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die zweite und dritte Gleichung mit Γ_{is} und summieren nach s, so folgt mit Rüchsicht auf (54):

$$\begin{aligned} \nu^2 \frac{\partial^2 f(\mu,\nu)}{\partial \xi^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 f(\mu,\nu)}{\partial \eta^2} &= n^2\mu^2\nu^2(\mu^2 - \nu^2) \cdot f(\mu,\nu) \\ &\quad - (\mu^2 - \nu^2) \sum_s B_{is}\, \Gamma_{is}\, \mathfrak{G}_{is}(\mu)\, \mathfrak{G}_{is}(\nu) \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial^2 f(\mu,\nu)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f(\mu,\nu)}{\partial \eta^2} = n^2(\mu^4 - \nu^4) f(\mu,\nu)$$
$$+ (\mu^2 - \nu^2) \sum_s A_{is} \Gamma_{is} \mathfrak{G}_{is}(\mu) \mathfrak{G}_{is}(\nu),$$

womit die gestellte Aufgabe erledigt ist, die Werte der Reihen (58) zu bestimmen. Zwischen den beiden Reihen besteht die aus (59) folgende Relation:

$$\nu^4 \frac{\partial^2 f(\mu,\nu)}{\partial \xi^2} + \mu^4 \frac{\partial^2 f(\mu,\nu)}{\partial \eta^2} = \mu^2 \nu^2 (\nu^2 - \mu^2) \Sigma A_{is} \Gamma_{is} \mathfrak{G}_{is}(\mu) \mathfrak{G}_{is}(\nu)$$
$$+ (\nu^4 - \mu^4) \Sigma B_{is} \Gamma_{is} \mathfrak{G}_{is}(\mu) \mathfrak{G}_{is}(\nu).$$

Ist insbesondere $f(\mu,\nu) = 1$, also $\Gamma_{is} = \gamma_{is}$, so gehen die aufgestellten Relationen in die folgenden über

$$(60) \quad \begin{aligned} &\sum_s B_{is} \gamma_{is} \mathfrak{G}_{is}(\mu) \mathfrak{G}_{is}(\nu) = n^2 \cdot \mu^2 \nu^2, \\ &\sum_s A_{is} \gamma_{is} \mathfrak{G}_{is}(\mu) \mathfrak{G}_{is}(\nu) = - n^2 (\mu^2 + \nu^2), \end{aligned}$$

wobei alle links stehenden Ausdrücke sich auf denselben Index n beziehen, und die Koëffizienten $\gamma_{is}^{(n)}$ durch (57) definiert sind. Für $i = 1, 2, 3, \ldots 8$ erhält man acht Paare solcher Gleichungen.

§ 19. Elastische Schwingungen eines im Lichtäther ruhenden Ellipsoids.

Um die Elongationen elastischer transversaler Schwingungen analytisch darzustellen, bedienen wir uns der Formeln (3); es genügt für uns, eine der drei Funktionen U, V, W zu betrachten, welche durch (5) und (7) definiert sind; wir erhalten

$$(61) \quad U = \sum_n \sum_s \sum_{i=1}^{8}$$
$$(A_{i,n,s} \operatorname{cosin} n_i a t + B_{i,n,s} \sin n_i a t) \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\mu) \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\nu) \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\varrho).$$

Hier bedeutet a die Elastizitäts-Konstante für das Innere des Ellipsoids; mit $A_{i,n,s}$ und $B_{i,n,s}$ sind konstante Koëffizienten bezeichnet; die Zahl n_i bestimmt die Schwingungsdauer des einzelnen Gliedes und ist durch weitere Grenzbedingungen noch festzulegen. Mit

$$\mathfrak{G}_1(\lambda), \quad \mathfrak{G}_2(\lambda), \; \ldots \ldots \; \mathfrak{G}_8(\lambda)$$

sind, wie oben, der Reihe nach die in (47) angegebenen Funktionen bezeichnet, welche im Innern des Ellipsoids eindeutig und endlich bleiben. Jede dieser Funktionen hängt noch von der Zahl n ab und ausserdem von zwei Konstanten A, B, die als zusammengehörige Wurzeln zweier transscendenter Gleichungen nach § 17 bestimmt werden; zu jedem Index $i\,(=1,2,3,\ldots 8)$ gehören also bei gegebenem n noch unendlich viele Funktionen $\mathfrak{G}_i$, die in (61) durch den Index s von einander unterschieden sind, während der obere Index n sich auf die Zahl n bezieht, von der Schwingungsdauer und Wellenlänge abhängen und welche selbst noch wieder vom Index i abhängt, wie die späteren Grenzbedingungen verlangen werden; es ist also nach (19)

$$\mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\lambda) = F_i\left(\frac{\lambda^2}{b^2};\ \frac{c^2}{b^2},\ n^2 b^4,\ A_s b^2,\ B_s\right), \tag{62}$$

wobei der Index i angibt, welche von den acht Funktionen (47) gewählt ist.

Sollen sich nun diese elastischen Schwingungen ausserhalb des Ellipsoids in den Lichtäther fortsetzen, so gilt für das Äussere eine ganz analoge Formel. Es werde durch die Gleichung

$$\varrho = \varrho_0 \tag{63}$$

die Oberfläche des betrachteten Ellipsoids, entsprechend Gleichung (9), dargestellt. Ausserhalb desselben ist dann immer $\varrho > \varrho_0$; hier kommen also die kritischen Werte b und c für ϱ nicht in Betracht; es braucht daher hier die zu benutzende Lösung der Differentialgleichung (15) nicht für alle Werte von ϱ eindeutig zu sein; wohl aber muss letztere Bedingung auch jetzt für die Variabeln μ und ν, d. h. für die Funktionen $\mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\mu)$ und $\mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\nu)$ erfüllt sein. Die Konstanten A_s und B_s sind daher an dieselben Gleichungen gebunden, wie früher;

nur ist zu beachten, dass jetzt der Elastizitäts-Konstante a^2 ein anderer Wert a_1^2 zukommt. Neben der Funktion $\mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\varrho)$ kann aber im Äussern auch das zweite Integral $\mathfrak{H}_{i,s}^{(n)}(\varrho)$ auftreten, das in bekannter Weise aus $\mathfrak{G}$ gewonnen wird nach der Formel:

$$\mathfrak{H}_{i,s}^{(n)}(\varrho) = C \cdot \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\varrho) \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\lambda}{[\mathfrak{G}(\varrho)]^2 \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}}\,, \tag{64}$$

wo C eine zunächst unbestimmte Konstante bedeutet.

Ausserhalb des Ellipsoids $\varrho = \varrho_0$ ist demnach die Funktion U zu ersetzen durch die Funktion

$$\begin{aligned} U_1 = & \sum_n \sum_s \sum_{i=1}^{8} \\ & (A'_{i,n,s} \cdot \operatorname{cosin} n_{1\,i} a_1 t + B'_{i,n,s} \sin n_{1\,i} a_1 t)\, \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\nu)\, \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\varrho) \\ & + \sum_n \sum_s \sum_{i=1}^{8} \\ & (C_{i,n,s} \operatorname{cosin} n_{1\,i} a_1 t + D_{i,n,s} \sin n_{1\,i} a_1 t)\, \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\nu)\, \mathfrak{H}_{i,s}^{(n)}(\varrho). \end{aligned} \tag{65}$$

Die hier vorkommenden Funktionen $\mathfrak{G}(\mu)$, $\mathfrak{G}(\nu)$, $\mathfrak{G}(\varrho)$, $\mathfrak{H}(\varrho)$ wären eigentlich zur Unterscheidung von den früheren mit einem Index 1 zu versehen, da die Konstante a jetzt durch a_1 ersetzt ist; im Folgenden sollen diese Funktionen mit $\mathfrak{G}_{1is}$ bezw. $\mathfrak{H}_{1is}$ bezeichnet werden, wo eine genauere Unterscheidung nötig wird.

§ 20. Einführung der Grenzbedingungen.

Soll an der Oberfläche des Ellipsoids weder für die Dilatationen noch für die Druckkraft eine Unstetigkeit eintreten, so müssen Dilatationen und Kräfte an der inneren und der äusseren Seite der Oberfläche des Ellipsoids übereinstimmen.

Beschränken wir uns auf die Funktion U, so sind die Dilatationen nach (3)

$$u = 0, \quad v = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial y}; \tag{66}$$

es müssen also die Gleichungen

$$(67)\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U_1}{\partial z}$$

für jeden Punkt der Oberfläche $\varrho = \varrho_0$ erfüllt sein.

In Folge der Schwingungen im Innern des Ellipsoids wirken auf jedes Oberflächenelement Druckkräfte, die in drei Komponenten N_ϱ, N_μ, N_ν zerlegt werden sollen, welche in Richtung der Kurven gemessen werden mögen, in denen sich die durch den betreffenden Punkt gehenden confocalen Flächen schneiden. Es wirkt also N_ϱ senkrecht zur Oberfläche des Ellipsoids, N_μ und N_ν in Richtung der durch den Punkt gehenden Krümmungslinien. Diese Komponenten sind durch folgende Formeln gegeben[1]):

$$N_\varrho = 2a^2\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varrho\,\partial\nu}\cos(\mu, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial\varrho\,\partial\mu}\cos(\nu, x)\right],$$

$$(68)\qquad \begin{aligned} N_\mu = {} & a^2\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varrho\,\partial\nu}\operatorname{cosin}(\varrho, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial\mu\,\partial\nu}\operatorname{cosin}(\mu, x)\right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\mu^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial\varrho^2}\right)\operatorname{cosin}(\nu, x)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_\nu = {} & a^2\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varrho\,\partial\mu}\operatorname{cosin}(\varrho, x) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\nu^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial\varrho^2}\right)\operatorname{cosin}(\mu, x)\right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 U}{\partial\mu\,\partial\nu}\operatorname{cosin}(\nu, x)\right]. \end{aligned}$$

Entsprechende Ausdrücke hat man für die Funktion U_1 und die Konstante a_1 aufzustellen; nennen wir sie N'_ϱ, N'_μ, N'_ν, so müssen die Gleichungen

$$(69)\qquad N_\varrho = N'_\varrho, \quad N_\mu = N'_\mu, \quad N_\nu = N'_\nu$$

an der Fläche $\varrho = \varrho_0$ bestehen.

Den fünf Bedingungen (67) und (69) kann man auf folgende Weise genügen. Man setze

---

1) Vergl. Henneberg: Annali di matematica Serie II, t. 9.

$$(70)\quad \begin{aligned} U &= \sum_n \sum_i (\mathfrak{V}_{ni} \operatorname{cosin} n_i a t + \mathfrak{W}_{ni} \sin n_i a t), \\ U_1 &= \sum_{n_1} \sum_i (\mathfrak{V}'_{ni} \operatorname{cosin} n_{1i} a_1 t + \mathfrak{W}'_{ni} \sin n_{1i} a_1 t). \end{aligned}$$

In erster Linie muss natürlich

$$(71)\quad n_i a = n_{1i} a_1$$

sein. Ferner sei für $\varrho = \varrho_0$:

$$(72)\quad \mathfrak{V}_{ni} = C_{ni}, \quad \mathfrak{W}_{ni} = D_{ni}, \quad \mathfrak{V}'_{ni} = C'_{ni}, \quad \mathfrak{W}'_{ni} = D'_{ni},$$

wo C_{ni}, D_{ni}, C'_{ni}, D'_{ni} Konstante bezeichnen. Dann ist für $\varrho = \varrho_0$:

$$(73)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{V}_{ni}}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}_{ni}}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \nu} = 0, \\ &\frac{\partial \mathfrak{V}'_{ni}}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}'_{ni}}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \nu} = 0, \end{aligned}$$

wodurch die Gleichungen (67) sich auf die Bedingungen

$$\frac{\partial \mathfrak{V}_{ni}}{\partial \varrho} = \frac{\partial \mathfrak{V}'_{ni}}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \varrho} = \frac{\partial \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \varrho} \quad \text{für } \varrho = \varrho_0$$

reduzieren, die wir durch die Forderung

$$(74)\quad \frac{\partial \mathfrak{V}_{ni}}{\partial \varrho} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \varrho} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}'_{ni}}{\partial \varrho} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \varrho} = 0 \text{ für } \varrho = \varrho_0$$

befriedigen. In den Komponenten (68) sind dann auch die Glieder

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho \, \partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho \, \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \mu \, \partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2}$$

einzeln gleich Null an der Oberfläche; es ist also $N_\varrho = 0$ und $N'_\varrho = 0$ für $\varrho = \varrho_0$, und die Gleichungen (69) reduzieren sich auf

$$(75)\quad \begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_{ni}}{\partial \varrho^2} &= a_1^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{V}'_{ni}}{\partial \varrho^2}, \\ a^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \varrho^2} &= a_1^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \varrho^2}, \end{aligned}$$

welche für $\varrho = \varrho_0$ bestehen müssen. Die Gleichungen (73) und (74) sagen aus, dass jeder Punkt der Oberfläche unseres Ellipsoids bei den betrachteten Schwingungen in Ruhe bleibt und dass die senkrecht zur Oberfläche wirkenden Druckkomponenten gleich Null sind (wegen $N_\varrho = 0$, $N'_\varrho = 0$).

Um die Gleichungen (72) zu befriedigen, hat man die in (61) aufgestellte Entwicklung anzuwenden; man findet dann

$$(76) \qquad \frac{\mathfrak{V}_{ni}}{C_{ni}} = \frac{\mathfrak{W}_{ni}}{D_{ni}} = \sum_s c_{is}^{(n)}\, \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\mu) \cdot \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\nu) \cdot \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\varrho),$$

wo der Koëffizient c_{is} durch die Gleichung

$$(77) \qquad c_{is}^{(n)}\, \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\varrho_0) = \gamma_{is}^{(n)}$$

bestimmt wird, wenn $\gamma_{is}^{(n)}$ durch (57) definiert wird.

Die ersten beiden Gleichungen (74) werden durch die Bedingung

$$(78) \qquad \left(\frac{d\, \mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\varrho)}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0} = 0$$

befriedigt, welche die bisher noch fehlende Bestimmung der Zahlen n gibt, über die in (61) und (70) summiert wurde. Diese transscendente Gleichung zwischen den Grössen n, A_s und B_s definiert diese Konstanten zusammen mit den in § 17 besprochenen beiden transscendenten Gleichungen vollständig. Nach (71) ist dann auch n_1 bestimmt.

Für die nach (65) in U_1 auftretenden Konstanten A', B', C, D sollen die Gleichungen

$$(79) \qquad \begin{aligned} A'_{ins} \frac{d\, \mathfrak{G}_{1\,is}^{(n)}(\varrho_0)}{d\varrho_0} + C_{ins} \frac{d\, \mathfrak{H}_{1\,is}^{(n)}(\varrho_0)}{d\varrho_0} &= 0 \\ B'_{ins} \frac{d\, \mathfrak{G}_{1\,is}^{(n)}(\varrho_0)}{d\varrho_0} + D_{ins} \frac{d\, \mathfrak{H}_{1\,is}^{(n)}(\varrho_0)}{d\varrho_0} &= 0 \end{aligned}$$

gültig sein; infolge derselben können wir setzen:

$$
(80)\quad \begin{aligned}
A'_{ins} &= \frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\,a_{ins}, & C_{ins} &= -\frac{d\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\,a_{ins},\\
B'_{ins} &= \frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\,b_{ins}, & D_{ins} &= -\frac{d\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\,b_{ins}.
\end{aligned}
$$

Es werden dann in (70) für $\mathfrak{V}'_{ni}$ und $\mathfrak{W}'_{ni}$ folgende Ausdrücke einzuführen sein:

$$
(81)\quad \begin{aligned}
\mathfrak{V}'_{in} &= \sum_s \left[\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho)\frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0} - \mathfrak{H}^{(n)}_{is}(\varrho)\frac{d\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\right] a_{ins}\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\mu)\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\nu),\\
\mathfrak{W}'_{in} &= \sum_s \left[\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho)\frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0} - \mathfrak{H}^{(n)}_{is}(\varrho)\frac{d\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\right] b_{ins}\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\mu)\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\nu).
\end{aligned}
$$

Hiermit sind auch die dritte und vierte Gleichung des Systems (74) erfüllt.

Um auch die zweite Hälfte der Gleichungen (73) zu befriedigen, richten wir es so ein, dass $\mathfrak{V}'_{in}$ und $\mathfrak{W}'_{in}$ für $\varrho = \varrho_0$ gleich Konstanten C'_{in} bezw. D'_{in} werden. Zu dem Zwecke setzen wir

$$
(82)\quad \begin{aligned}
\mathfrak{K}^{(n)}_{is}(\varrho_0)\,a_{isn} &= C'_{in}\cdot\gamma^{(n)}_{1is},\\
\mathfrak{K}^{(n)}_{is}(\varrho_0)\,b_{isn} &= D'_{in}\cdot\gamma^{(n)}_{1is},
\end{aligned}
$$

wenn $\gamma^{(n)}_{1is}$ eine zu den Funktionen $\mathfrak{G}_{1is}$ in derselben Weise zugehörige Konstante bezeichnet, wie $\gamma^{(n)}_{is}$ zu $\mathfrak{G}_{is}$ gehört, so dass also nach (56):

$$
(82^a)\quad 1 = \sum_s \gamma^{(n)}_{1is}\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\mu)\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\nu),
$$

und wo $\mathfrak{K}$ durch die Gleichung

$$
\mathfrak{K}^{(n)}_{is}(\varrho) = \mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho)\left(\frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho)}{d\,\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0} - \mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho)\left(\frac{d\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho)}{d\,\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0}
$$

definiert wird.

Um endlich auch den Bedingungen (75) zu genügen, bedienen wir uns der Differentialgleichung (15), welcher die Funktionen $\mathfrak{G}$ genügen. Es wird nämlich:

$$(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{B}_{ni}}{\partial \varrho^2}$$

$$= - C_{ni}\,\varrho\,(2\varrho^2 - b^2 - c^2)\sum_s c_{is}^{(n)}\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\mu)\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\nu)\,\frac{d\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\varrho)}{d\,\varrho}$$

$$- C_{ni}\,n^2\varrho^4 \sum_s c_{is}^{(n)}\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\mu)\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\nu)\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\varrho)$$

$$- C_{ni}\,\varrho^2 \sum_s A_{is}^{(n)}\,c_{is}^{(n)}\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\mu)\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\nu)\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\varrho)$$

$$- C_{ni} \sum_s B_{is}^{(n)}\,c_{is}^{(n)}\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\mu)\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\nu)\,\mathfrak{G}_{is}^{(n)}(\varrho),$$

also für $\varrho = \varrho_0$ unter Benutzung von (76), (77), (78) und (60)

$$(\varrho_0^2 - b^2)(\varrho_0^2 - c^2)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}_{ni}}{\partial \varrho^2}\right)_{\varrho=\varrho_0} = - C_{ni}\,n_i^2\,(\varrho_0^2 - \mu^2)(\varrho_0^2 - \nu^2).$$

Ebenso findet man

$$(\varrho_0^2 - b^2)(\varrho_0^2 - c^2)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \varrho^2}\right)_{\varrho=\varrho_0} = - D_{ni}\,n_i^2\,(\varrho_0^2 - \mu^2)(\varrho_0^2 - \nu^2),$$

ferner, wenn alle Funktionen mit dem Index 1 versehen und die Gleichungen (80), (81), (82), (82^a) angewandt werden:

$$(\varrho_0^2 - b^2)(\varrho_0^2 - c^2)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}'_{ni}}{\partial \varrho^2}\right)_{\varrho=\varrho_0} = - C'_{ni}\,n_{1i}^2\,(\varrho_0^2 - \mu^2)(\varrho_0^2 - \nu^2),$$

$$(\varrho_0^2 - b^2)(\varrho_0^2 - c^2)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \varrho^2}\right)_{\varrho=\varrho_0} = - D'_{ni}\,n_{1i}^2\,(\varrho_0^2 - \mu^2)(\varrho_0^2 - \nu^2).$$

Da $a^2 n_i^2$ nach (71) gleich $a_1^2 n_{1i}^2$ ist, so sind die Gleichungen (75) erfüllt, sobald nur die Bedingungen

(83) $$C_{ni} = C'_{ni}, \quad D_{ni} = D'_{ni}$$

bestehen.

Um alle Grenzbedingungen zu befriedigen, hat man schliesslich in folgender Weise zu verfahren:

Zuerst kombiniere man die transscendente Gleichung (78) mit einem der acht Paare von Gleichungen, welche nach § 17 die eindeutigen Lösungen der Differentialgleichungen (14) definieren; man bestimmt dadurch zusammengehörige Werte der Zahlen-Tripel

$$n_i, \quad A_{is}, \quad B_{is}.$$

Solche Wurzeln n_i können in endlicher oder unendlicher Zahl vorhanden sein; das bedarf noch näherer Untersuchung, die wir unten in § 24 wenigstens an besonderen Fällen anstellen werden. Zu jedem Werte von n_i gehören Paare von Werten A_{is} und B_{is}; wir haben vorausgesetzt, dass solche Paare (analog wie in dem entsprechenden Probleme bei den Funktionen des elliptischen Zylinders) für jedes n_i in unendlicher Anzahl existieren, denn andernfalls wären die am Schlusse von § 18 aufgestellten Reihenentwicklungen nicht möglich. Die wirkliche Durchführung dieser Entwicklungen bedarf übrigens, wie bei den meisten derartigen Problemen der mathematischen Physik, einer genaueren Diskussion. Aus den Zahlen n_i bestimmen sich nach (71) die Zahlen n_{1i}, dann nach § 17 die Zahlen A_{1is}, B_{1is}; die Koëffizienten der auftretenden Reihen sind durch (77) und (80) gegeben, und endlich die noch unbestimmt gebliebenen Faktoren C und D durch (83). Schliesslich bleibt für jede Zahl n_i, d. h. für jede auftretende Schwingungsdauer nur die eine Konstante C_{ni}, bezw. D_{ni} noch willkürlich, d. i. die Intensität der betreffenden Schwingungen. Um auch diese festzulegen müsste man bestimmte Voraussetzungen über den Zustand im Innern des Ellipsoids zur Zeit $t = 0$ machen.

Es scheint als ob den Grenzbedingungen (67) und (69) nur durch die hier angegebenen Schwingungs-Zustände genügt werden könnte; zum genaueren Beweise der Eindeutigkeit wird man das bekannte Verfahren anwenden können.

§ 21. Unterscheidung des vom Ellipsoide ausgesandten und des absorbierten Lichtes.

Bei Behandlung der Wirkungen einer elastischen Schwingung einer Kugel auf den Lichtäther (§ 4 meiner früheren Arbeit) habe ich angenommen, dass die in der Kugel (etwa durch Stösse gegen andere Kugeln) entstandenen Schwingungen sich auf den Lichtäther gemäss den Grenzbedingungen der Elastizitätstheorie übertragen, und sich nach allen Richtungen hin nach aussen radial fortpflanzen. Dem entsprechend verlangten wir, dass in die mathematische Darstellung die Zeit t nur in der Form $r - a_1 t$, nicht in der Form $r + a_1 t$ eingehe. Diesem Verlangen konnten wir nachkommen, da unsere Funktion U_1 sich damals in der Form

$$\begin{aligned}U_1 &= \sum_n [E_n \operatorname{cosin} n_1 a_1 t + F_n \sin n_1 a_1 t] \frac{\sin n_1 r}{r} \\ &+ \sum_n [E_n' \operatorname{cosin} n_1 a_1 t + F_n' \sin n_1 a_1 t] \frac{\operatorname{cosin} n_1 r}{r}\end{aligned} \tag{84}$$

darstellte, wo mit r die Entfernung vom Anfangspunkte, mit E_n, F_n, E_n', F_n' Konstante bezeichnet sind; wir brauchten daher nur

$$E_n' = F_n, \quad F_n' = -E_n$$

anzunehmen.

Beim Ellipsoide tritt die elliptische Koordinate ϱ an Stelle der Entfernung r; die Funktionen $\mathfrak{G}(\varrho)$ lassen sich nicht in gleich einfacher Weise mit $\operatorname{cosin} n_1 a_1 t$ und $\sin n_1 a_1 t$ vereinigen; deshalb ist ein analoges Verfahren nicht angezeigt. Es genügt aber auch, dass für unendlich grosse Werte von ϱ, wo dann ϱ mit r wesentlich identisch ist, eine entsprechende Darstellung zu ermöglichen, und das ist durchführbar, wenn man zuvor die asymptotischen Werte der Funktionen $\mathfrak{G}(\varrho)$ berechnet.

Zu dem Zwecke transformieren wir die Differentialgleichung (19) mittelst der Substitution

$$t = \tau^{-1},$$

und erhalten:

$$\tau(1-\tau)(1-\varkappa^2\tau)\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \tfrac{1}{2}[1 - 2\tau(1+\varkappa^2) + 3\varkappa^2\tau^2]\frac{dy}{d\tau} + \left[\frac{n'^2}{\tau^2} + \frac{A'}{\tau} + B'\right] y = 0.$$

Für kleine Werte von τ dürfen wir statt dessen die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \frac{1}{2\tau}\frac{dy}{d\tau} + \frac{n'^2}{\tau^3} y = 0$$

benutzen, aus welcher wir durch die Substitution

$$\tau = u^{-2} = t^{-1}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \frac{2}{u}\frac{dy}{du} + 4 n'^2 y = 0$$

finden. Die partikulären Fundamentalintegrale der letztern sind bekanntlich durch die Ausdrücke

$$\frac{\sin(2 n' u)}{u} \quad \text{und} \quad \frac{\cos\text{in}(2 n' u)}{u}$$

gegeben. Für unendlich grosse Werte des Arguments verhalten sich daher die Integrale der Differentialgleichung (19) bezw. (15) wie die Funktionen

$$\frac{\sin(2 n' \sqrt{t})}{\sqrt{t}} = b\,\frac{\sin(n\lambda)}{\lambda}$$

und

$$\frac{\cos\text{in}(2 n' \sqrt{t})}{\sqrt{t}} = b\,\frac{\cos\text{in}(n\lambda)}{\lambda}.$$

Für hinreichend grosse Werte von ϱ verhalten sich somit die Glieder der in (65) auftretenden Funktion U_1 wie die Glieder der entsprechenden Funktion U_1 in (84), welche bei der Kugel auftrat. Sollen für unendlich grosse Werte von ϱ nur Funktionen von $\varrho - a_1 t$ auftreten, müssen wir demnach in (79)

$$C_{ins} = B'_{ins}, \quad D_{ins} = -A'_{ins}$$

wählen. Dann aber bleiben die Gleichungen (80) nur mit einander verträglich, wenn die Bedingung

$$(85) \qquad \left(\frac{d\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\varrho_0}\right)^2 + \left(\frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\varrho_0}\right)^2 = 0$$

erfüllt ist. Dies wäre eine vierte Bedingung für die Konstanten n_{1i}, A_{1is}, B_{1is}, welcher man nur bei ganz besonderen Werten der übrigen Konstanten nämlich

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2, \quad \left(\frac{\varrho_0}{b}\right)^2, \quad \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

wird genügen können. Damit also elastische Schwingungen der hier betrachteten Art möglich werden, müsste eine besondere Relation zwischen dem Verhältnisse der beiden Elastizitätskonstanten (des Ellipsoids und des Lichtäthers) und den Verhältnissen der Hauptaxen des Ellipsoids erfüllt seien. Die Wurzeln der Gleichung (85) sind dann natürlich komplexe Zahlen.

Bei dem in § 20 betrachteten Schwingungs-Zustande des Ellipsoids und des umgebenden Lichtäthers treten aber gleichzeitig Funktionen von $r - a_1 t$ und Funktionen von $r + a_1 t$ auf. Das Ellipsoid sendet also nach allen Richtungen Strahlen bestimmter Wellenlänge aus, und empfängt solche gleicher Wellenlänge zugleich aus allen Richtungen. Ein solches Verhalten des Ellipsoids ist immer notwendig, wenn es in der Tat keine andere als die in § 20 aufgestellte Möglichkeit gibt, den Grenzbedingungen zu genügen.

Als Ergänzung zum § 4 sei hier erwähnt, dass sich die damals aufgestellte transscendente Gleichung nicht ändert, wenn man $r + a_1 t$ an Stelle von $r - a_1 t$ setzt. Die bei allseitiger Symmetrie von einer leuchtenden materiellen Kugel ausgesandten Lichtstrahlen haben also dieselben Wellenlängen, wie die unter gleicher Bedingung von der Kugel empfangenen (und absorbierten) Strahlen.

§ 22. Das verlängerte Rotationsellipsoid.

An Stelle der elliptischen Koordinaten treten beim Rotationsellipsoide Koordinaten r, φ, ϑ, welche durch die Gleichungen

$$
(86) \qquad \begin{aligned}
x &= h\, r \cos\vartheta, & 0 &< \vartheta < \pi, \\
y &= h \sqrt{r^2 - 1} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\psi, & 0 &< \psi < 2\pi, \\
z &= h \sqrt{r^2 - 1} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\psi, & r &> 1,
\end{aligned}
$$

eingeführt werden; hierbei fällt die X-Axe mit der Rotations-Axe zusammen; h bedeutet die geometrische Exzentrizität der Meridianellipse; und die Gleichung des Ellipsoids ist

$$
(87) \qquad \frac{x^2}{h^2 r^2} + \frac{y^2 + z^2}{h^2 (r^2 - 1)} = 1 .
$$

An Stelle der partiellen Differentialgleichung (12) erhalten wir hier[1]):

$$
(88) \qquad \begin{aligned}
&(r^2 - \cos^2\vartheta) \frac{n^2}{h^2} \Omega_n + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial \Omega_n}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial \psi^2} \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial r} \left[(r^2 - 1) \frac{\partial \Omega_n}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 - 1} \frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial \psi^2} = 0 .
\end{aligned}
$$

Setzen wir wieder

$$
(89) \qquad \Omega_n = R \cdot \Theta \cdot \Psi,
$$

wo R nur von r, Θ nur von ϑ, Ψ nur von ψ abhängen soll, so ergibt sich

$$
(90) \qquad \begin{aligned}
&\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left[(r^2 - 1) \frac{\partial R}{\partial r} \right] + \frac{1}{\Theta \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) \\
&\qquad + \frac{1}{\Psi} \left(\frac{1}{\sin^2\vartheta} + \frac{1}{r^2 - 1} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} + \frac{n^2}{h^2} (r^2 - \cos^2\vartheta) = 0 .
\end{aligned}
$$

Da nun Ω eine periodische Funktion von ψ sein muss, so können wir

$$
\Psi = \operatorname{cosin} m\psi \quad \text{oder} \quad \Psi = \sin m\psi
$$

setzen, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet; es wird dann

$$
(91) \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} = - m^2 \Psi,
$$

und unsere partielle Differentialgleichung zerlegt sich in die beiden:

---

[1]) Vergl. z. B. Heine a. a. O., Bd. II, p. 106 und 328.

$$(92)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dr}\left[(r^2-1)\frac{dR}{dr}\right]+\left[\frac{n^2}{h^2}(r^2-1)-\frac{m^2}{r^2-1}+\mathfrak{A}\right]R=0,\\ &\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right)+\left[\frac{n^2}{h^2}\sin^2\vartheta-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}-\mathfrak{A}\right]\Theta=0,\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{A}$ eine noch willkürliche Konstante bedeutet. Es kommt wieder darauf an, eindeutige Lösungen dieser Gleichungen zu finden und $\mathfrak{A}$ dem entsprechend zu bestimmen.

Die zweite Gleichung geht aus der ersten durch die Substitution $r = \operatorname{cosin}\vartheta$ hervor; wir haben also nur die eine Gleichung

$$(93)\quad (r^2-1)\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+\left[\frac{n^2}{h^2}(r^2-1)-\frac{m^2}{r^2-1}+\mathfrak{A}\right]R=0$$

zu untersuchen. Die Fuchssche determinierende Fundamentalgleichung wird

$$s(s-1)\cdot 2+2s-\frac{m^2}{2}=0,\quad \text{also } s=\pm\frac{m}{2};$$

d. h. die beiden unabhängigen partikulären Integrale werden durch Reihen von der Form

$$r^{\frac{m}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}c_i r^i,\quad r^{-\frac{m}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}c_i' r^i$$

dargestellt; da aber die Differenz der beiden Werte für s hier die ganze Zahl m ist, so bleibt zu untersuchen, ob in das zweite partikuläre Integral nicht auch Glieder mit $\log r$ eingehen. Jedenfalls kann eine in Bezug auf r und $\sqrt{r^2-1}$ eindeutige Lösung nur vorkommen, wenn m eine ganze Zahl ist. Die Differentialgleichung (93) ist dieselbe, auf welche Heine (a. a. O.) beim Probleme der Wärmeleitung im Innern eines Ellipsoids geführt wurde; er reduziert sie durch die Substitutionen

$$(94)\qquad R=\mathfrak{R}\cdot(r^2-1)^{\frac{m}{2}},\quad \varrho=r^2-1,$$

auf die einfachere Form

$$(95)\quad \begin{aligned} & 4\,\varrho\,(\varrho+1)\frac{d^2\,\mathfrak{R}}{d\,\varrho^2} + 2\left[\varrho + (2\,m+2)(\varrho+1)\right]\frac{d\,\mathfrak{R}}{d\,\varrho} \\ & \qquad + \left[\frac{n^2}{h^2}\,\varrho + m\,(m+1) + \mathfrak{A}\right]\mathfrak{R} = 0\,. \end{aligned}$$

Bei der weiteren Diskussion ist zu unterscheiden, ob m gerade oder ungerade ist.

1) Es sei m eine gerade Zahl. Dann ist in jedem der beiden singulären Punkte $r = 1$ und $r = -1$ eines der beiden partikulären Integrale eine holomorphe Funktion von r und also nach Potenzen von $(r-1)$ bezw. von $(r+1)$ im Innern eines Kreises entwickelbar, dessen Zentrum in dem einen dieser Punkte liegt und der durch den andern hindurchgeht. Bei besonderen Werten von $\mathfrak{A}$ kann sich die eine Reihe stetig in die andere fortsetzen. Das zweite Integral in jedem der beiden Punkte wird dort unendlich; das erste darf sich also niemals in das zweite fortsetzen. Es ergibt sich also hier eine Klasse von überall eindeutigen Integralen, die durch eine transscendente Gleichung in $\mathfrak{A}$ bestimmt wird. Diese Betrachtung gilt auch für den Fall $m = 0$, in dem jeweils das zweite Fundamentalintegral an den singulären Stellen sicher logarithmisch unendlich wird.

2) Es sei m eine ungerade Zahl. Jetzt gehören zu den beiden singulären Punkten bezw. erste partikuläre Integrale der Form

$$\sqrt{r-1}\,(r-1)^{\mu}\sum c_i\,(r-1)^i \quad \text{und} \quad \sqrt{r+1}\,(r+1)^{\mu}\sum c_i'\,(r+1)^i,$$

wobei $m = 2\,\mu + 1$ genommen ist; die andern Integrale werden an diesen Stellen unendlich gross; auch hier dürfen (für besondere Werte von $\mathfrak{A}$) sich nur diese beiden Reihen in einander analytisch fortsetzen, so dass es auch hier nur eine Möglichkeit gibt, eindeutige Funktionen von r und $\sqrt{r^2-1}$ durch eine transscendente Gleichung für $\mathfrak{A}$ als Integrale der Gleichung (93) zu bestimmen.

Dasselbe Resultat würde man durch Betrachtung der Gleichung (95) ableiten; da es sich hier um Entwicklungen nach

Potenzen von $\varrho = r^2 - 1$ handelt, die in der ganzen Ebene konvergieren sollen, so lässt sich das entsprechende Integral (94), abgesehen von dem Faktor $(r^2 - 1)^{\frac{1}{2}m}$, nach Potenzen von r^2 entwickeln. Gehen wir also durch die Substitution $r = \cos\vartheta$ zu der zweiten Differentialgleichung (92) über, so werden die eindeutigen Lösungen sich in folgender Form darstellen:

$$\Theta_{ms}^{(n)} = (\sin\vartheta)^m \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (\operatorname{cosin}\vartheta)^{2i} \tag{96}$$

und entsprechend setzen wir

$$R_{ms}^{(n)} = (r^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \sum \gamma_i r^{2i}. \tag{97}$$

Hier bezieht sich der obere Index n auf die in Gleichung (93) vorkommende, noch nicht näher bestimmte Zahl n, der Index m auf die in (93) auftretende ganze Zahl m und der Index s auf die verschiedenen Werte, welche die Konstante $\mathfrak{A}$ gemäss den aufgestellten Bedingungen annehmen kann, wenn die Funktionen (96) und (97) eindeutig sein sollen.

Sind R und R_1 zwei verschiedene Funktionen, die sich auf denselben oberen Index n und auf dieselbe ganze Zahl m, aber auf verschiedene Konstante $\mathfrak{A}_s$ und $\mathfrak{A}_t$ beziehen, so leitet man aus der Differentialgleichung (93) die Relation ab:

$$\int \left[(r^2 - 1)^2 \frac{d^2 R}{d r^2} + 2 r (r^2 - 1) \frac{d R}{d r}\right] R_1 \, d r$$

$$= \int \frac{d}{dr}\left((r^2 - 1) \frac{d R}{d r}\right) \cdot R_1 (r^2 - 1) \, d r$$

$$= - \int \left[\frac{n^2}{h^2} (r^2 - 1) - m^2 + \mathfrak{A}_s (r^2 - 1)\right] R R_1 \, d r,$$

und durch Anwendung der partiellen Integration:

$$= (r^2-1)^2 \frac{dR}{dr} R_1 - (r^2-1)^2 R \frac{d R_1}{dr} + \int R \cdot \frac{d}{dr}\left((r^2-1)\frac{d R_1}{d r^2}\right) \cdot (r^2-1)\, dr.$$

Nach (97) verschwinden die ersten beiden Glieder der rechten Seite, wenn man $r = 1$ oder $r = -1$ setzt; es wird also:

$$\int_{-1}^{+1}(r^2-1)R_1\frac{d}{dr}(R(r^2-1))dr=\int_{-1}^{+1}(r^2-1)R\frac{d}{dr}(R_1(r^2-1)^2)dr$$

$$=-\int_{-1}^{+1}\left[\frac{n^2}{h^2}(r^2-1)-m^2+\mathfrak{A}_s(r^2-1)\right]R\,R_1\,dr$$

$$=-\int_{-1}^{+1}\left[\frac{n^2}{h^2}(r^2-1)-m^2+\mathfrak{A}_t(r^2-1)\right]R\,R_1\,dr,$$

folglich, wenn $\mathfrak{A}_s$ von $\mathfrak{A}_t$ verschieden ist:

$$\int_{-1}^{+1}(r^2-1)\,R\cdot R_1\,dr=0$$

und wenn man $r=\text{cosin}\,\vartheta$ setzt:

$$\int_0^\pi \sin^3\vartheta\cdot\Theta_{ms}^{(n)}\cdot\Theta_{mt}^{(n)}\,d\vartheta=0, \tag{98}$$

wenn $\mathfrak{A}_s$ von $\mathfrak{A}_t$ verschieden ist; für $\mathfrak{A}_s=\mathfrak{A}_t$ ist dagegen das Integral von Null verschieden.

Die Relation (98) kann man in bekannter Weise benutzen, um eine Funktion von ϑ nach Funktionen Θ zu entwickeln. Man findet

$$f(\vartheta)=\sum_s \Gamma_s\,\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta),$$

wenn Γ_s durch die Bedingung

$$\Gamma_s\cdot\int_0^\pi\sin^3\vartheta\cdot[\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta)]^2\,d\vartheta=\int_0^\pi f(\vartheta)\cdot\sin^3\vartheta\cdot\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta)\,d\vartheta$$

bestimmt wird. Insbesondere gilt die Gleichung

$$1=\sum_s \delta_{ms}^{(n)}\,\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta), \tag{99}$$

wenn:

$$\delta_{ms}^{(n)}\cdot\int_0^\pi\sin^3\vartheta\,[\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta)]^2\,d\vartheta=\int_0^\pi\sin^3\vartheta\cdot\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{100}$$

§ 23. Die Grenzbedingungen beim verlängerten Rotationsellipsoide.

Das weitere Verfahren ist ganz analog demjenigen, welches wir beim dreiaxigen Ellipsoide einschlugen. Wir beschränken uns wieder auf die durch die Funktion U dargestellten Schwingungen.

Ein Unterschied macht sich aber durch folgenden Umstand bemerkbar. Im allgemeinen Falle hatten wir es mit drei Grössen

$$n, \quad A, \quad B$$

zu tun, die durch drei transscendente Gleichungen in gegenseitige Abhängigkeit gebracht wurden. Wir konnten also uns zuerst die Reihe der Zahlen n aus den drei Gleichungen berechnet denken und nach ihnen zuerst ordnen. Jetzt sind diese Grössen bezw. durch

$$n, \quad \mathfrak{A}, \quad m^2$$

ersetzt; die Grösse B also ist von vornherein als Quadrat einer beliebigen ganzen Zahl bekannt; $\mathfrak{A}$ und n erscheinen demnach als Funktionen von m. Wir müssen deshalb die für U aufzustellenden Reihen in erster Linie nach den Zahlen m ordnen. Demnach setzen wir für das Innere des Ellipsoids

$$U = \sum_m (\mathfrak{B}_m \operatorname{cosin} m\,\psi + \mathfrak{W}_m \sin m\,\psi) \tag{101}$$

und ebenso für das Äussere des Ellipsoids

$$U_1 = \sum_m (\mathfrak{B}'_m \operatorname{cosin} m\,\psi + \mathfrak{W}'_m \sin m\,\psi); \tag{102}$$

und hierin sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_m &= \sum_s \sum_n (A^{(n)}_{ms} \operatorname{cosin} n\,a\,t + B^{(n)}_{ms} \sin n\,a\,t)\; \Theta^{(n)}_{ms}\; R^{(n)}_{ms} \\ \mathfrak{W}_m &= \sum_s \sum_n (C^{(n)}_{ms} \operatorname{cosin} n\,a\,t + D^{(n)}_{ms} \sin n\,a\,t)\; \Theta^{(n)}_{ms}\; R^{(n)}_{ms}. \end{aligned} \tag{103}$$

Für das Äussere des Ellipsoids benötigen wir noch das zweite Integral S der Differentialgleichung (93), welches für $r^2 = 1$ unendlich wird, und das in bekannter Weise aus dem ersten Integrale gefunden wird; dann sei

$$\mathfrak{V}'_m = \sum_s \sum_n (A^{(n)}_{1ms} \cos n_1 a_1 t + B^{(n)}_{1ms} \sin n_1 a_1 t)\, \Theta^{(n)}_{1ms}\, R^{(n)}_{1ms}$$
$$+ \sum_s \sum_n (A^{(n)}_{2ms} \cos n_1 a_1 t + B^{(n)}_{2ms} \sin n_1 a_1 t)\, \Theta^{(n)}_{1ms}\, S^{(n)}_{1ms},$$
$$\mathfrak{W}'_m = \sum_s \sum_n (C^{(n)}_{1ms} \cos n_1 a_1 t + D^{(n)}_{1ms} \sin n_1 a_1 t)\, \Theta^{(n)}_{1ms}\, R^{(n)}_{1ms}$$
$$+ \sum_s \sum_n (C^{(n)}_{2ms} \cos n_1 a_1 t + D^{(n)}_{2ms} \sin n_1 a_1 t)\, \Theta^{(n)}_{1ms}\, S^{(n)}_{1ms}.$$

Zunächst muss wieder die Bedingung

$$n\, a = n_1\, a_1 \tag{104}$$

erfüllt sein. Für die Oberfläche

$$r = r_0 \tag{105}$$

des Ellipsoids haben wir die Bedingungen

$$\frac{\partial \mathfrak{V}_m}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_m}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}'_m}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}'_m}{\partial \vartheta} = 0 \tag{106}$$

und ausserdem für $r = r_0$:

$$\frac{\partial \mathfrak{V}_m}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_m}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}'_m}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}'_m}{\partial r} = 0. \tag{107}$$

Die ersten beiden Gleichungen dieses letzten Systems befriedigen wir dadurch, dass wir die zu (81) analoge Gleichung

$$\left(\frac{d\, R^{(n)}_{ms}(r)}{d\, r}\right)_{r = r_0} = 0 \tag{108}$$

zur Bestimmung der Zahlen n dienen lassen; sie muss zu dem Zwecke mit der zwischen $\mathfrak{A}_s$ und n nach § 22 bestehenden transscendenten Gleichung verbunden werden. Für jede ganze Zahl m ergeben sich hieraus im Allgemeinen unendlich viele Zahlen n als Lösungen, d. h. unendlich viele mögliche Werte für die Schwingungsdauern. Sämtliche Schwingungsdauern ordnen sich also nach den Zahlen m in Gruppen, jede Gruppe wieder nach den zugehörigen Werten von n in Untergruppen (oder „Serien").

Die ersten beiden Gleichungen (106) befriedigen wir durch die Forderungen:

$$A_{ms}^{(n)} R_{ms}^{(n)}(r_0) = a_{mn}\,\delta_{ms}^{(n)},$$
$$B_{ms}^{(n)} R_{ms}^{(n)}(r_0) = b_{mn}\,\delta_{ms}^{(n)},$$
$$C_{ms}^{(n)} R_{ms}^{(n)}(r_0) = c_{mn}\,\delta_{ms}^{(n)},$$
$$D_{ms}^{(n)} R_{ms}^{(n)}(r_0) = d_{mn}\,\delta_{ms}^{(n)},$$

wo $\delta_{ms}^{(n)}$ durch die obige Gleichung (100) definiert sein soll und mit a, b, c, d neue von $\mathfrak{A}_s$ unabhängige Konstante bezeichnet sind. Dann wird infolge von (99)

$$(109)\quad \begin{aligned} (\mathfrak{V}_m)_{r=r_0} &= \sum_n (a_{mn} \operatorname{cosin} n\,a\,t + b_{mn} \sin n\,a\,t), \\ (\mathfrak{W}_m)_{r=r_0} &= \sum_n (c_{mn} \operatorname{cosin} n\,a\,t + d_{mn} \sin n\,a\,t), \end{aligned}$$

also in der Tat unabhängig von ϑ.

Für die Funktion U_1 kommen die zu (79) analogen Gleichungen

$$A_{1\,ms}^{(n)} R'(r_0) + A_{2\,ms}^{(n)} S'(r_0) = 0,$$
$$B_{1\,ms}^{(n)} R'(r_0) + B_{2\,ms}^{(n)} S'(r_0) = 0,$$
$$C_{1\,ms}^{(n)} R'(r_0) + C_{2\,ms}^{(n)} S'(r_0) = 0,$$
$$D_{1\,ms}^{(n)} R'(r_0) + D_{2\,ms}^{(n)} S'(r_0) = 0$$

in Betracht, wenn zur Abkürzung

$$R'(r_0) = \left(\frac{d\,R_{1\,ms}^{(n)}}{d\,r}\right)_{r=r_0}, \quad S'(r_0) = \left(\frac{d\,S_{1\,ms}^{(n)}}{d\,r}\right)_{r=r_0}$$

gesetzt wird. Durch diese Gleichungen sind die dritte und vierte Gleichung des Systems (107) befriedigt. Infolge derselben machen wir

$$A_{1\,ms}^{(n)} = a_{ms}^{(n)} \cdot S'(r_0), \quad A_{2\,ms}^{(n)} = -\,a_{ms}^{(n)} R'(r_0),$$
$$B_{1\,ms}^{(n)} = b_{ms}^{(n)} \cdot S'(r_0), \quad B_{2\,ms}^{(n)} = -\,b_{ms}^{(n)} R'(r_0),$$
$$C_{1\,ms}^{(n)} = c_{ms}^{(n)} \cdot S'(r_0), \quad C_{2\,ms}^{(n)} = -\,c_{ms}^{(n)} R'(r_0),$$
$$D_{1\,ms}^{(n)} = d_{ms}^{(n)} \cdot S'(r_0), \quad D_{2\,ms}^{(n)} = -\,d_{ms}^{(n)} R'(r_0).$$

Wird also eine Funktion $\mathfrak{T}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{T}_{ms}^{(n)} = R_{ms}^{(n)} \cdot S'(r_0) - S_{ms}^{(n)} R'(r_0) \tag{110}$$

definiert, so erhalten wir in Rücksicht auf (104):

$$\mathfrak{B}'_m = \sum_n \sum_s \Theta_{1\,ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}^{(n)}(r) \cdot (a_{ms}^{(n)} \operatorname{cosin} n\,a\,t + b_{ms}^{(n)} \sin n\,a\,t),$$

$$\mathfrak{W}'_m = \sum_n \sum_s \Theta_{1\,ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}^{(n)}(r) \cdot (c_{ms}^{(n)} \operatorname{cosin} n\,a\,t + d_{ms}^{(n)} \sin n\,a\,t).$$

Die noch verfügbaren Konstanten a_{ms} und b_{ms} bestimmen wir so, dass $\mathfrak{B}'_m$ und $\mathfrak{W}'_m$ für $r = r_0$ von ϑ unabhängig werden; es sei demnach

$$a_{ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}(r_0) = \delta_{1\,ms}^{(n)} \cdot \alpha_{mn},$$

$$b_{ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}(r_0) = \delta_{1\,ms}^{(n)} \cdot \beta_{mn},$$

$$c_{ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}(r_0) = \delta_{1\,ms}^{(n)} \cdot \gamma_{mn},$$

$$d_{ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}(r_0) = \delta_{1\,ms}^{(n)} \cdot \delta_{mn},$$

wenn $\delta_{1\,ms}^{(n)}$ für die mit dem Index 1 versehenen Funktionen dieselbe Bedeutung hat, wie $\delta_{ms}^{(n)}$ nach (100) für die Funktionen ohne Index. Dann wird in der Tat

$$\begin{aligned}(\mathfrak{B}'_m)_{r=r_0} &= \sum_n (\alpha_{mn} \operatorname{cosin} n\,a\,t + \beta_{mn} \sin n\,a\,t),\\ (\mathfrak{W}'_m)_{r=r_0} &= \sum_n (\gamma_{mn} \cdot \operatorname{cosin} n\,a\,t + \delta_{mn} \sin n\,a\,t),\end{aligned} \tag{111}$$

und dadurch ist auch der dritten und vierten Gleichung (106) genügt.

Jetzt können wir auch die Bedingung erfüllen, welche zu (106) in unserem Falle noch ergänzend hinzutritt, nämlich

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \quad \text{für } r = r_0. \tag{112}$$

Ihr wird einfach durch die folgenden Gleichungen genügt:

$$\begin{aligned}\alpha_{mn} &= a_{mn}, \quad & \beta_{mn} &= b_{mn},\\ \gamma_{mn} &= c_{mn}, \quad & \delta_{mn} &= d_{mn}.\end{aligned} \tag{113}$$

Was endlich die Druckkräfte an der Oberfläche betrifft, so bestehen nach (106), (107), (108), (109) bereits die Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \psi \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial r \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial r \partial \psi} = 0$$

$$\text{für } r = r_0 .$$

Nach (68) kommt es noch auf die Druckkräfte N_μ und N_ν an, wenn der Index μ sich auf die Richtung ϑ, der Index ν auf die Richtung ψ, der Index ϱ auf die Richtung r bezieht. Es ist nach obigem

$$N_\varrho = 0, \quad N'_\varrho = 0, \quad N_\mu = 0, \quad N'_\mu = 0;$$

und es bleibt nur noch die Bedingung

$$(114) \quad a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2} \right) = a_1^2 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varrho^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial \nu^2} \right) \text{ für } r = r_0$$

zu erfüllen; hierbei bezeichnete $d\varrho$ das Linienelement in Richtung der Flächen-Normale, also

$$d\varrho = h \sqrt{\frac{r_0^2 - \cos^2 \vartheta}{r_0^2 - 1}} \cdot dr,$$

ebenso $d\nu$ das Linienelement in Richtung eines Parallelkreises:

$$d\nu = h \sqrt{r_0^2 - 1} \cdot \sin \vartheta \cdot d\psi .$$

Die Gleichung (114) wird daher

$$(115) \quad \begin{aligned} & a^2 \left[\frac{1}{r_0^2 - \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{(r_0^2 - 1) \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right] \\ & = a_1^2 \left[\frac{1}{r_0^2 - \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} - \frac{1}{(r_0^2 - 1) \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} \right] \text{für } r = r_0 . \end{aligned}$$

Infolge der bisher aufgestellten Gleichungen erhalten wir aus der Differentialgleichung (93) (der auch die Funktion $\mathfrak{T}$ genügt, wenn n und $\mathfrak{A}$ den Index 1 erhalten):

$$(r_0^2-1)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_m}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}$$

$$=-\sum_n\left[\mathfrak{M}_{mn}\left(\frac{n_m^2}{h^2}(r_0^2-1)-\frac{m^2}{r_0^2-1}+\sum_s \mathfrak{A}_{ms}^{(n)}\,\delta_{ms}^{(n)}\,\Theta_{ms}^{(n)}\right)\right],$$

$$(r_0^2-1)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_m}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}$$

$$=-\sum_n\left[\mathfrak{N}_{mn}\left(\frac{n_m^2}{h^2}(r_0^2-1)-\frac{m^2}{r_0^2-1}+\sum_s \mathfrak{A}_{ms}^{(n)}\,\delta_{ms}^{(n)}\,\Theta_{ms}^{(n)}\right)\right],$$

wobei zur Abkürzung:

$$\mathfrak{M}_{mn}=a_{mn}\operatorname{cosin} n\,a\,t+b_{mn}\sin n\,a\,t$$

$$\mathfrak{N}_{mn}=c_{mn}\operatorname{cosin} n\,a\,t+d_{mn}\sin n\,a\,t;$$

dem Buchstaben n ist der Index m beigelegt, um seine Abhängigkeit von m hervorzuheben. Die hier rechts auftretenden, auf den Index s bezüglichen Summen können wir durch das folgende Verfahren näher bestimmen. Stellt man eine Funktion $f(\vartheta)$ von ϑ nach den am Schlusse von § 22 aufgestellten Formeln durch die Funktionen Θ dar, so ist infolge der für letztere geltenden Differentialgleichung (92):

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d f(\vartheta)}{d\vartheta}\right)=f(\vartheta)\left[\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}-\frac{n^2}{h^2}\sin^2\vartheta\right]+\sum_s \Gamma_s\,\mathfrak{A}_{ns}^{(n)}\,\Theta_{ms}^{(n)};$$

nimmt man also $f(\vartheta)=1$ und folglich $\Gamma_s=\delta_s$, so ergibt sich

$$\sum_s \mathfrak{A}_{ms}^{(n)}\,\delta_{ms}^{(n)}\,\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta)=\frac{n^2}{h^2}\sin^2\vartheta-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta},$$

und die obigen Formeln werden:

$$(r_0^2-1)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_m}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}$$

$$=-\sum_n \mathfrak{M}_{mn}\left[\frac{n^2}{h^2}(r_0^2-\cos^2\vartheta)-m^2\left(\frac{1}{r_0^2-1}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)\right],$$

$$(r_0^2-1)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_m}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}$$

$$=-\sum_n \mathfrak{N}_{mn}\left[\frac{n^2}{h^2}(r_0^2-\cos^2\vartheta)-m^2\left(\frac{1}{r_0^2-1}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)\right],$$

und hieraus nach (101)

$$(r_0^2 - 1)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_{r = r_0} = -\sum_m \sum_n (\mathfrak{M}_{mn} \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{N}_{mn} \sin m\psi)$$
$$+ \left(\frac{n^2}{h^2} - \frac{m^2}{(r_0^2 - 1)\sin^2\vartheta}\right)(r_0^2 - \cos^2\vartheta),$$

andererseits ist nach (101) und (109):

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi}\right)_{r = r_0} = -m^2 \sum_m \sum_n (\mathfrak{M}_{mn} \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{N}_{mn} \sin m\psi),$$

also wird die linke Seite von (114) oder (115) gleich

$$a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2}\right)$$
$$= -\frac{a^2}{h^2(r_0^2 - 1)} \sum_m \sum_n n^2 (\mathfrak{M}_{mn} \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{N}_{mn} \sin m\psi),$$

ebenso findet man

$$a_1^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varrho^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial \nu^2}\right)$$
$$= -\frac{a_1^2}{h^2(r_0^2 - 1)} \sum_m \sum_n n_1^2 (\mathfrak{M}'_{mn} \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{N}'_{mn} \sin m\psi),$$

wenn in analoger Weise:

$$\mathfrak{M}'_{mn} = \alpha_{mn} \operatorname{cosin} n a t + \beta_{mn} \sin n a t,$$
$$\mathfrak{N}'_{mn} = \gamma_{mn} \operatorname{cosin} n a t + \delta_{mn} \sin n a t.$$

Nun ist nach (104) $n a = n_1 a_1$, und so ergibt sich, dass die letzte noch zu befriedigende Gleichung (114) bezw. (115) durch die Gleichung (112) bezw. die Gleichungen (113) schon von selbst mit erfüllt ist.

Auch beim Rotations-Ellipsoide ist daher ein System von Schwingungen gefunden, das im Innern desselben und im umgebenden Lichtäther gleichzeitig besteht, und für welches die Grenzbedingungen der Elastizitätstheorie genau erfüllt sind. Die entsprechenden Schwingungsdauern werden durch die Gleichung (108) definiert.

Besonders ausgezeichnet ist der Fall $m = 0$; denn dann ist die Funktion U vom Winkel ψ unabhängig; d. h. es herrscht völlige Symmetrie in Bezug auf die Rotations-Axe. Ist $m > 0$, so besteht keine derartige Symmetrie.

Die symmetrischen Schwingungen, welche zur Funktion U gehören, werden in einer Pendelung eines jeden Ellipsoidpunktes um die X-Axe bestehen, die durch die Gleichungen (66) dargestellt wird. Dabei können verschiedene Schichten des Ellipsoids (ebenso des umgebenden Lichtäthers) zu gleicher Zeit in entgegengesetztem Sinne schwingen; und diese Schichten werden durch konfokale Ellipsoide begrenzt, die als Knotenflächen auftreten; die Parameter r der letzteren berechnen sich für das Innere des Ellipsoids aus der Gleichung

$$\frac{d\, R_{ms}^{(n)}(r)}{d\, r} = 0,$$

in welcher nun m, n_s, $\mathfrak{A}_s$ als gegeben zu betrachten sind. Für den Lichtäther findet man diese Knotenflächen aus der Gleichung

$$\frac{d\, \mathfrak{T}_{ms}^{(n)}(r)}{d\, r} = 0,$$

wo $\mathfrak{T}$ durch (110) definiert ist. Beiden Gleichungen ist die Lösung $r = r_0$ gemeinsam.

Berücksichtigt man auch die Funktionen V und W, so bewegen sich bei den entsprechenden, durch die Gleichungen (3) dargestellten, Schwingungen die einzelnen Punkte für $m = 0$ (d. h. bei Symmetrie gegen die X-Axe) auf Meridianen oder auf einer Art loxodromischer Kurven, für $m > 0$ in unregelmässigerer Weise. Die Schwingungsdauern für diese Funktionen bestimmen sich aber aus derselben Gleichung (108), die für U aufgestellt wurde.

Die völlig symmetrischen Schwingungen ($m = 0$) werden am häufigsten und leichtesten auftreten, ihre Intensitäten am stärksten sein; wir bezeichnen sie als die Haupt-Serie, welcher wir eine Reihe von Neben-Serien ($m > 0$) gegenüberstellen.

§ 24. Vergleich mit dem abgeplatteten Rotations-Ellipsoide.

Die Parameterdarstellung für ein Sphäroid[1]) wird durch die Gleichungen

$$(116)\qquad \begin{aligned} x &= \mathfrak{h} \cdot \mathfrak{r} \cdot \operatorname{cosin} \vartheta, && 0 < \vartheta < \pi, \\ y &= \mathfrak{h} \cdot \sqrt{\mathfrak{r}^2 + 1} \cdot \sin \vartheta \cos \psi, && 0 < \psi < 2\pi, \\ z &= \mathfrak{h} \cdot \sqrt{\mathfrak{r}^2 + 1} \cdot \sin \vartheta \sin \psi, && \mathfrak{r} > 0 \end{aligned}$$

vermittelt, welche aus den Gleichungen (86) hervorgehen, wenn man die Grössen

$$h \text{ durch } -i\,\mathfrak{h} \quad \text{und} \quad r \text{ durch } i\,\mathfrak{r}$$

ersetzt. Die Gleichung des Ellipsoids ist

$$(117)\qquad \frac{x^2}{\mathfrak{r}^2 \mathfrak{h}^2} + \frac{y^2 + z^2}{(\mathfrak{r}^2 + 1)\,\mathfrak{h}^2} = 1.$$

Es ist also $\mathfrak{r}\,\mathfrak{h}$ die kleine Halbaxe und $\mathfrak{h}\sqrt{\mathfrak{r}^2 + 1}$ die grosse Halbaxe desselben und $\mathfrak{h}$ die geometrische Exzentrizität.

Es wären jetzt ganz dieselben Rechnungen wie in § 22 zu wiederholen, wobei nur immer die angegebenen Substitutionen zu machen sind. Die Gleichungen (92) würden also z. B. durch die folgenden zu ersetzen sein:

$$(118)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{d\mathfrak{r}}\left((\mathfrak{r}^2+1)\frac{dR}{d\mathfrak{r}}\right) + \left[\frac{n^2}{\mathfrak{h}^2}(\mathfrak{r}^2+1) + \frac{m^2}{\mathfrak{r}^2+1} + \mathfrak{A}\right] R = 0, \\ &\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) - \left[\frac{n^2}{\mathfrak{h}^2}\sin^2\vartheta + \frac{m^2}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{A}\right]\Theta = 0, \end{aligned}$$

und es wird

---

[1]) Mit dem elastischen Probleme für das abgeplattete Rotationsellipsoid hat sich auch Mathieu beschäftigt und zwar versucht er, zu der für die Kugel bekannten Lösung ergänzende Glieder hinzuzufügen; vgl. den Bericht darüber bei Pockels a. a. O., p. 135. Übrigens hat auch Abraham die elastischen Schwingungen eines verlängerten Rotationsellipsoids behandelt (Math. Annalen Bd. 52); seine Ansätze, bei denen unsere Konstante $\mathfrak{A}$ gleich Null gewählt wird, sind für das uns beschäftigende Problem im allgemeinen nicht zu verwerten.

(119) $$R = (\mathfrak{r}^2 + 1)^{\frac{m}{2}} \mathfrak{R}', \quad \varrho = \mathfrak{r}^2 + 1$$

zu setzen sein, wenn $\mathfrak{R}$ als Funktion von ϱ der aus (95) hervorgehenden Differentialgleichung

(120) $$4\varrho(\varrho - 1)\frac{d^2\mathfrak{R}'}{d\varrho^2} + 2[\varrho + (2m + 2)(\varrho - 1)]\frac{d\mathfrak{R}'}{d\varrho} + \left[m(m+1) + \frac{n^2}{\mathfrak{h}^2}\varrho + \mathfrak{A}\right]\mathfrak{R}' = 0$$

genügt. Auch in den Formeln von § 23 hat man überall dieselbe Substitution anzuwenden; es ist daher nicht nötig auf die Einzelheiten nochmals einzugehen. Auch beim abgeplatteten Rotationsellipsoide sind demnach zwei Fälle zu unterscheiden; der Fall voller Symmetrie gegen die Axe ($m = 0$) und der Fall gestörter Symmetrie ($m > 0$).

Der Charakter der aufgestellten transscendenten Gleichungen, von denen die Schwingungsdauern der möglichen elastischen Schwingungen abhängen, wird jedoch ein ganz anderer sein, als beim verlängerten Rotationsellipsoide. Eine allgemeine Erledigung der sich hier bietenden Frage scheint ausserordentlich schwierig und umständlich zu sein. Man kann sich aber hinreichend über die einschlägigen Verhältnisse für den besonderen Fall Rechenschaft geben, wo die Exzentrizität h bezw. $\mathfrak{h}$ der Rotationsellipsoide eine sehr kleine Grösse ist. Dann ist die in unseren Gleichungen vorkommende Konstante

(121) $$\mu = \frac{n}{h}$$

eine sehr grosse Zahl; und da h auch nur in dieser Kombination vorkommt, so wird es sich darum handeln, für sehr grosse Werte von μ einen asymptotischen Wert der Funktion R zu ermitteln.

Zu dem Zwecke gehen wir von der Gleichung (95) aus und setzen darin

(122) $$\mu\varrho = t,$$

wodurch sie in die Form

$$4\,t\,(t+\mu)\,\frac{d^2\,\Re}{d\,t^2}+2\,[t+(2\,m+2)\,(t+\mu)]\,\frac{d\,\Re}{d\,t}$$
$$+\,[\mu\,t+m\,(m+1)+\mathfrak{A}]\,\Re=0$$

übergeht. Für sehr grosse Werte von μ muss also die Bedingung

(123) $$\frac{d^2\,\Re}{d\,t^2}+\frac{m+1}{t}\,\frac{d\,\Re}{d\,t}+\tfrac{1}{4}\,\Re=0$$

erfüllt sein, wenn m und $\mathfrak{A}$ endlich bleiben. Diese Gleichung lässt sich durch Besselsche Funktionen integrieren; das für $t=0$ endlich bleibende Integral derselben ist

$$\Re=j_m\,(\sqrt{t})=(-1)^m\,\frac{\Pi(2\,m)}{\Pi\,(m)}\,\frac{d^m\,J\,(\sqrt{t})}{d\,t^m},$$

wobei wir Heines Bezeichnungsweise anwenden:[1])

$$J\,(\sqrt{t})=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{i\cos\varphi\,\cdot\,\sqrt{t}}\,d\,\varphi.$$

Nach (94) wird daher für unendlich grosse Werte von μ:

(124) $$R=(r^2-1)^{\frac{m}{2}}\,j_m\left(\sqrt{\mu\,(r^2-1)}\right)\cdot C \qquad \text{für } \mu=\infty,$$

wo μ durch (121) definiert ist und C eine Konstante bedeutet. Da das Argument dieser Funktion selbst unendlich gross wird für $\mu=\infty$, können wir uns ferner des asymptotischen Wertes für j_m bedienen; setzt man

(125) $$J_m\,(\sqrt{t})=\frac{t^{\frac{m}{2}}\,j_m\,(\sqrt{t})}{1\cdot 3\,.\,.\,.\,.\,.\,(2\,m-1)}=(-2\,\sqrt{t})^m\,\frac{d^m\,J(\sqrt{t})}{d\,t^m},$$

so ist bekanntlich für unendlich grosse Werte von t:

$$J_m\,(\sqrt{t})=\frac{\cos\sqrt{t}+\sin\sqrt{t}}{i^m\,\sqrt{\pi\,\sqrt{t}}} \quad \text{für gerades } m,$$

$$J_m\,(\sqrt{t})=\frac{\cos\sqrt{t}-\sin\sqrt{t}}{i^{m+1}\,\sqrt{\pi\,\sqrt{t}}} \quad \text{„ ungerades } m.$$

---

[1]) Vgl. Heine a. a. O., Bd. I, p. 233 ff.

Folglich erhalten wir aus (124), wenn C' eine neue Konstante bezeichnet

$$(126)\quad R = \frac{\cos \sqrt{\mu (r^2 - 1)} \pm \sin \sqrt{\mu (r^2 - 1)}}{\sqrt[4]{r^2 - 1}} \cdot C' \text{ für } \mu = \infty,$$

wo das obere Zeichen für gerade Zahlen m, das untere für ungerade Zahlen m gilt.

Zur Bestimmung der Zahlen n (und damit der Schwingungsdauern) diente die Gleichung (108); diese wird unter Benutzung des asymptotischen Wertes (126)

$$(127)\qquad \operatorname{tang} \xi = \frac{\pm 2 \xi - 1}{2 \xi \pm 1}, \quad \text{wo } \xi = \sqrt{\frac{n}{h} (r_0^2 - 1)},$$

sie ist also von m und $\mathfrak{A}$ unabhängig. Näherungswerte von $\mathfrak{A}$ findet man dann für jedes m und n_s mittels der ursprünglichen Gleichung (92):

$$\mathfrak{A}_{ms}^{(n)} = -\left[\frac{1}{R} \frac{d}{d r}\left((r^2 - 1) \frac{d R}{d r}\right) + \frac{n_s^2}{h^2} (r^2 - 1) - \frac{m^2}{r^2 - 1}\right]_{r = r_0}.$$

Für ein verlängertes Rotationsellipsoid mit sehr kleiner Exzentrizität h ist also die Bestimmung der Zahlen n auf die Gleichung (127) zurückgeführt, welche bekanntlich unendlich viele reelle Wurzeln besitzt.

Kehren wir nun zum abgeplatteten Rotationsellipsoide zurück, so haben wir die entsprechenden Ueberlegungen an die Gleichung (120) anzuknüpfen. Wir setzen

$$\frac{n}{\mathfrak{h}} = \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad \varrho \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{t}$$

und erhalten

$$\frac{d^2 \mathfrak{R}^*}{d \mathfrak{t}^2} + \frac{m + 1}{\mathfrak{t}} \frac{d \mathfrak{R}^*}{d \mathfrak{t}} - \tfrac{1}{4} \mathfrak{R}^* = 0.$$

An Stelle von (124) tritt daher die Gleichung[1])

[1]) Das zweite partikuläre Integral der letzten Differentialgleichung wird für $\mathfrak{r} = 0$ (also im Innern des gegebenen Ellipsoids) unendlich gross und ist deshalb nicht brauchbar.

$$R = (\mathfrak{r}^2+1)^{\frac{m}{2}}\,\mathfrak{R}' = (\mathfrak{r}^2+1)^{\frac{m}{2}}\, j_m\left(i\sqrt{\mathfrak{m}(\mathfrak{r}^2+1)}\right) \quad \text{für } \mathfrak{m}=\infty,$$

und wir haben weiter die asymptotischen Werte der Funktion $\mathfrak{J}_m$ mit rein imaginärem Argumente zu benutzen:

$$(128) \qquad J_m(i\sqrt{\mathfrak{t}}) = \frac{i^m \cdot e^{\sqrt{\mathfrak{t}}}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\mathfrak{t}}}},$$

wobei J_m wieder in der obigen Weise mit j_m zusammenhängt, so dass

$$j_m(i\sqrt{\mathfrak{t}}) = C \cdot \mathfrak{t}^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} \cdot e^{\sqrt{\mathfrak{t}}}$$

$$R = C' \cdot (\mathfrak{r}^2+1)^{-\frac{1}{4}}\, e^{\sqrt{\mathfrak{m}(\mathfrak{r}^2+1)}} \quad \text{für } \mathfrak{m}=\infty.$$

Die Gleichung (108) liefert hier das Resultat

$$(129) \qquad \left[\left(\tfrac{1}{2}-\sqrt{\mathfrak{m}}\sqrt{\mathfrak{r}^2+1}\right)\cdot \mathfrak{r}\cdot e^{\sqrt{\mathfrak{m}(\mathfrak{r}^2+1)}}\right]_{\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0} = 0,$$

wo $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0$ die Gleichung der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids in elliptischen Koordinaten darstellt.

Hieraus ergibt sich für n der einzige Wert:

$$n = \frac{1}{4}\,\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{r}_0^2+1}.$$

Da der gefundene asymptotische Wert von m nicht wesentlich abhängt, so ist hier eine Unterscheidung der beiden Fälle $m=0$ und $m>0$ noch nicht möglich. Man wird indessen eine solche erreichen, indem man die Formel (128) zunächst nur für $m=0$ benutzt und dann mittelst der Relation (125) zu höheren Werten von m aufsteigt. In der entsprechenden Gleichung (129) treten dann neben der Exponentialfunktion Ausdrücke höheren Grades in $\mathfrak{m}$ auf; grösseren Werten von m entsprechen daher im Allgemeinen mehr als ein Wert von $\mathfrak{m}$ und n.

Für ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit sehr kleiner Exzentrizität gibt es daher bei völliger Symmetrie gegen die Rotationsaxe (d. h. $m=0$) nur eine einzige Schwingungsdauer (somit auch Wellenlänge), bei der eine elastische Schwingung (unter Einwirkung des Lichtäthers) möglich ist; bei gestörter Symmetrie ($m > 0$) wächst die Anzahl der möglichen Schwingungsdauern mit wachsendem Werte von m.

Auch bei grösserer Exzentrizität wird ein ähnliches Verhalten stattfinden; und dadurch unterscheiden sich die elastischen Schwingungen eines abgeplatteten Rotationsellipsoids sehr wesentlich von denjenigen eines verlängerten Rotationsellipsoids. Aber ebenso wie dort unterscheiden wir eine Haupt-Serie $m = 0$ (hier aus wenigen Linien bestehend) von den Neben-Serien ($m > 0$).

§ 25. Vergleich mit der Kugel. — Spaltung der Spektrallinien.

Bei meiner früheren Behandlung der Kugel (§ 4) habe ich gerade den Fall, der für die Ellipsoide allein in Betracht kommt, nicht eingehender behandelt, nämlich den Fall, wo die Oberfläche der Kugel in Ruhe bleibt und der Normaldruck gegen die Kugel gleich Null ist. Für unsere Funktion U hatten wir, wenn die Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$(130)\qquad \begin{aligned} x &= r\cos\vartheta, & 0 &< r < r_0, \\ y &= r\sin\vartheta\cdot\cos\psi, & 0 &< \psi < 2\pi, \\ z &= r\sin\vartheta\cdot\sin\psi, & 0 &< \vartheta < \pi \end{aligned}$$

gegeben werden:

$$(131)\qquad \begin{aligned} U &= \sum_n (\mathfrak{V}_n \operatorname{cosin} n a t + \mathfrak{W}_n \sin n a t), \\ U_1 &= \sum_n (\mathfrak{V}'_n \operatorname{cosin} n_1 a_1 t + \mathfrak{W}'_n \sin n_1 a_1 t), \end{aligned}$$

wo

$$(132)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{V}_n &= \sum_m \sum_q (A^{(n)}_{m\,q} \operatorname{cosin} m\psi + B^{(n)}_{m\,q} \sin m\psi)\, P^q_m(\cos\vartheta)\cdot R_{q+\frac{1}{2}}(nr), \\ \mathfrak{W}_n &= \sum_m \sum_q (C^{(n)}_{m\,q} \operatorname{cosin} m\psi + D^{(n)}_{m\,q} \sin m\psi)\, P^q_m(\cos\vartheta)\cdot R_{q+\frac{1}{2}}(nr). \end{aligned}$$

Hier bedeutet in bekannter Weise $P^q_m(\cos\vartheta)$ eine zugeordnete Kugelfunktion und $R_{q+\frac{1}{2}}$ eine Besselsche Funktion, definiert bezw. durch die Gleichung

$$(133)\quad \begin{aligned} &\frac{d^2 P_m^q}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{d P_m^q}{d\vartheta} + \left[q(q+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] P_m^q = 0, \\ &\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[n^2 - \frac{q(q+1)}{r^2}\right] R = 0. \end{aligned}$$

Unter m und q sind ganze Zahlen verstanden. Ebenso ist für das Äussere der Kugel

$$(134)\quad \begin{aligned} \mathfrak{V}_n' = &\sum_m \sum_q (A_{1mq}^{(n)} \operatorname{cosin} m\psi + B_{1mq}^{(n)} \sin m\psi) P_m^q(\cos\vartheta) R_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r) \\ &+ \sum_m \sum_q (A_{2mq}^{(n)} \operatorname{cosin} m\psi + B_{2mq}^{(n)} \sin m\psi) P_m^q(\cos\vartheta) S_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r) \end{aligned}$$

und $\mathfrak{W}_n'$ geht hieraus hervor, indem man die Buchstaben A, B durch andere C, D ersetzt; $S_{q+\frac{1}{2}}$ bedeutet das zweite partikuläre Integral der angegebenen Besselschen Gleichung.

Es besteht natürlich wieder die Gleichung (104). Bezeichnet ferner r_0 den Radius unserer Kugel, so bestimmen wir die möglichen Schwingungsdauern durch die zu (108) analoge Gleichung

$$(135)\quad \left(\frac{d R_{q+\frac{1}{2}}(nr)}{dr}\right)_{r=r_0} = 0,$$

in der nun q eine ganze positive Zahl bezeichnet und n die Unbekannte ist; im Gegensatze zu früher ist diese Gleichung von m unabhängig; die Lösung n hängt aber jetzt noch von q ab. Die Koëffizienten A, B, C, D in U_1 bestimmen wir so, dass

$$\mathfrak{V}_n' = \sum_m \sum_q (\alpha_{mq}^{(n)} \operatorname{cosin} m\psi + \beta_{qm}^{(n)} \sin m\psi) P_m^q(\cos\vartheta) \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r)$$

$$\mathfrak{W}_n' = \sum_m \sum_q (\gamma_{mq}^{(n)} \operatorname{cosin} m\psi + \delta_{mq}^{(n)} \sin m\psi) P_m^q(\cos\vartheta) \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r)$$

wird, wobei zur Abkürzung:

$$(136)\quad \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}^{(n)} = R_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r) \frac{d S_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r_0)}{d r_0} - S_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r) \frac{d R_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r_0)}{d r_0}.$$

Da aber n von q abhängt, muss überall die Summation nach q zuerst und dann die nach n ausgeführt werden; wir erhalten also

$$U = \sum_m (\mathfrak{Q}_m \ \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{Q}'_m \ \sin m\psi),$$

$$U_1 = \sum_m (\mathfrak{Q}_{1m} \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{Q}'_{1m} \sin m\psi),$$

wenn die Grössen $\mathfrak{Q}$ durch folgende Gleichungen definiert werden:

$$\mathfrak{Q}_m = \sum_n \sum_q (A_{mq}^{(n)} \operatorname{cosin} nat + C_{mq}^{(n)} \sin nat) P_m^q(\cos\vartheta) R_{q+\frac{1}{2}}(nr),$$

$$\mathfrak{Q}'_m = \sum_n \sum_q (B_{mq}^{(n)} \operatorname{cosin} nat + D_{mq}^{(n)} \sin nat) P_m^q(\cos\vartheta) R_{q+\frac{1}{2}}(nr),$$

$$\mathfrak{Q}_{1m} = \sum_n \sum_q (\alpha_{mq}^{(n)} \operatorname{cosin} nat + \gamma_{mq}^{(n)} \sin nat) P_m^q(\cos\vartheta) \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r),$$

$$\mathfrak{Q}'_{1m} = \sum_n \sum_q (\beta_{mq}^{(n)} \operatorname{cosin} nat + \delta_{mq}^{(n)} \sin nat) P_m^q(\cos\vartheta) \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r).$$

Zwischen den auftretenden Konstanten sollen nun folgende Relationen bestehen:

(137) $\quad A_{mq}^{(n)} R_{q+\frac{1}{2}}(n r_0) = \alpha_{mq}^{(n)} \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r_0)$, u. s. f.,

oder abgekürzt:

$$\frac{R(n r_0)}{\mathfrak{S}(n_1 r_0)} = \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C} = \frac{\delta}{D}.$$

Dann bestehen an der Oberfläche der Kugel die Relationen

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{\partial U_1}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U_1}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \, \partial \psi} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta \, \partial \psi},$$

$$(138) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \, \partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta \, \partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \psi \, \partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi \, \partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2}.$$

Lassen wir die Richtung ϱ mit r, μ mit ϑ, ν mit ψ zusammenfallen, so blieben nach (68) für die Gleichheit der Druckkomponenten noch die Bedingungen

$$N_\mu = N'_\mu, \quad N_\nu = N'_\nu$$

zu befriedigen, wo nun

$$N_\mu = a^2\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2}\right)\text{cosin}(\nu, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial \mu\, \partial \nu}\text{cosin}(\mu, x)\right],$$

$$N_\nu = a^2\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2}\right)\text{cosin}(\mu, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial \mu\, \partial \nu}\text{cosin}(\nu, x)\right].$$

Um hier ϑ und ψ einzuführen, ist die Bedeutung der Differentiale $d\varrho$, $d\mu$, $d\nu$ zu beachten (wie auch soeben in § 23 beim Rotationsellipsoide). Es ist

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \cdot d\psi^2,$$

also wird:

$$d\varrho = dr, \quad d\mu = r\, d\vartheta, \quad d\nu = r \sin\vartheta \cdot d\psi.$$

Ferner ist

$$\text{cosin}(\nu, x) = \text{cosin}(\vartheta, x) = \text{cosin}\,\vartheta,$$
$$\text{cosin}(\mu, x) = \text{cosin}(\psi, x) = 0.$$

Für die Gleichheit der Druckkomponenten bleiben also für $r = r_0$ noch die Bedingungen

$$(139)\qquad \begin{aligned} a^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right) &= a_1^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2}\right), \\ a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta\, \partial \psi} &= a_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta\, \partial \psi}. \end{aligned}$$

Nun folgt aus (135) und aus der zweiten Gleichung (133):

$$(140)\qquad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{Q}_m}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}$$
$$= \sum_n\sum_q (A_{mq}^{(n)} \text{cosin}\, nat + C_{mq}^{(n)} \sin nat) P_m^q(\cos\vartheta) \cdot \left(\frac{q(q+1)}{r_0^2} - n^2\right) R_{q+\frac{1}{2}}(nr_0).$$

Bildet man auch $\frac{\partial^2 \mathfrak{Q}}{\partial \vartheta^2}$ für $r = r_0$, so ergibt sich kein Ausdruck, der sich mit dem vorhergehenden zusammenziehen liesse; da überdies schon die Bedingung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2} \quad \text{für } r = r_0$$

durch die Festsetzungen (138) erfüllt ist, so kann die erste Gleichung (139) in die Bedingungen

$$(141)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} \quad \text{für } r = r_0$$

zerspalten werden. Wir setzen demgemäss

$$R_{q+\frac{1}{2}}(n\, r_0) \cdot A_{m\,q}^{(n)} = a_n \cdot \varepsilon_{m\,q} \qquad \text{u. s. f.}$$

oder:

$$\frac{\varepsilon_{m\,q}}{R(r_0)} = \frac{A_{m\,q}^{(n)}}{a_n} = \frac{B_{m\,q}^{(n)}}{b_n},$$

$$\frac{\eta_{m\,q}}{R(r_0)} = \frac{C_{m\,q}^{(n)}}{c_n} = \frac{D_{m\,q}^{(n)}}{d_n},$$

wo $\varepsilon_{m\,q}$ und $\eta_{m\,q}$ die aus der Theorie der Kugelfunktionen bekannten Konstanten bezeichnen, welche in der Gleichung

$$1 = \sum_m \sum_q (\varepsilon_{m\,q} \operatorname{cosin} m\,\psi + \eta_{m\,q} \sin m\,\psi)\, P_m^q(\cos\vartheta)$$

auftreten.[1]) Ebenso sei für die Funktion U_1

$$\frac{\varepsilon_{m\,q}}{\mathfrak{S}(r_0)} = \frac{\alpha_{m\,q}^{(n)}}{\alpha_n} = \frac{\beta_{m\,q}^{(n)}}{\beta_n}, \qquad \frac{\eta_{m\,q}}{\mathfrak{S}(r_0)} = \frac{\gamma_{m\,q}^{(n)}}{\gamma_n} = \frac{\delta_{m\,q}^{(n)}}{\delta_n}.$$

Aus (140) und der entsprechenden Gleichung für $\mathfrak{Q}'$ erhält man dann

$$(142)\qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}$$

$$= -\sum_n (a_n \operatorname{cosin} n\,a\,t + c_n \sin n\,a\,t)\, n^2 - \sum_n (c_n \operatorname{cosin} n\,a\,t + d_n \sin n\,a\,t)\, n^2$$

$$+ r_0^{-2} \sum_m \operatorname{cosin} m\,\psi \sum_n \sum_q q(q+1)(a_n\, \varepsilon_{q\,m} \operatorname{cosin} n\,a\,t + c_n\, \eta_{q\,m} \sin n\,a\,t)$$

$$+ r_0^{-2} \sum_m \sin m\,\psi \sum_n \sum_q q(q+1)(b_n\, \varepsilon_{q\,m} \operatorname{cosin} n\,a\,t + d_n\, \eta_{q\,m} \sin n\,a\,t).$$

Eine entsprechende Formel gilt für U_1. Um die dritte Gleichung (141) zu erfüllen, bleibt nur die Möglichkeit $q = 0$, denn andernfalls kämen wir mit den Relationen (138) in Kon-

[1]) Vgl. z. B. Heine a. a. O., Bd. 1, p. 327 ff.

flikt. Da aber im Interesse der Endlichkeit der Funktionen P_m^q die Zahl $m \leqq q$ sein muss, so folgt auch $m = 0$, d. h. die Funktion U und damit die Schwingung im Innern der Kugel ist allein von der Entfernung des betreffenden Punktes vom Kugelmittelpunkte abhängig, insofern nach (16) und (130) die Komponenten der Elongationen durch die Gleichungen

$$(143)\quad u = 0, \quad v = -\frac{\partial U}{\partial r}\sin\vartheta\cos\psi, \quad w = \frac{\partial U}{\partial r}\sin\vartheta\sin\psi$$

dargestellt werden. Dadurch ist auch die zweite Gleichung (139) von selbst erfüllt.

Machen wir jetzt $m = 0$, $q = 0$, so wird

$$(144)\quad \begin{aligned} U &= \sum_n (a_n \operatorname{cosin} nat + b_n \sin nat)\, R_{\frac{1}{2}}(nr), \\ U_1 &= \sum_n (\alpha_n \operatorname{cosin} nat + \beta_n \sin nat)(R_{\frac{1}{2}}(n_1 r) S'_{\frac{1}{2}}(n_1 r_0) - R'_{\frac{1}{2}}(n_1 r_0) S_{\frac{1}{2}}(n_1 r)). \end{aligned}$$

Die Gleichung (135) ist zu ersetzen durch

$$(145)\qquad \frac{d\,R_{\frac{1}{2}}(nr_0)}{d\,r_0} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tang} nr_0 - nr_0 = 0,$$

von welcher bekannt ist, dass sie unendlich viele reelle Wurzeln besitzt (vgl. § 3 meiner früheren Arbeit), die sich mit wachsender Grösse den ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2r_0}$ nähern. Die Oberfläche bleibt jetzt in Ruhe und die Gleichheit der Druckkräfte liefert noch unter Benutzung von (104) und (141) die Bedingungen

$$(146)\qquad \begin{aligned} a^2 a_n R_{\frac{1}{2}}(nr_0) &= a_1^2 \alpha_n \mathfrak{S}_{\frac{1}{2}}(n_1 r_0), \\ a^2 b_n R_{\frac{1}{2}}(nr_0) &= a_1^2 \beta_n \mathfrak{S}_{\frac{1}{2}}(n_1 r_0), \end{aligned}$$

wo wieder $\mathfrak{S}_{\frac{1}{2}}$ durch (136) definiert ist.

Bei der Kugel sind hiernach zwei wesentlich verschiedene Klassen von transversalen elastischen Schwingungen mit den Grenzbedingungen der Elastizitätstheorie verträglich:

erstens die soeben durch die Gleichungen (143)—(146) dargestellten Schwingungen, bei denen die Kugel gleichzeitig Licht aussendet und empfängt (vgl. § 21),

zweitens die in § 4 eingehend behandelten Schwingungen, bei denen die Kugel nur Licht nach aussen ausstrahlt.[1])

Die Schwingungen der ersten Art können wir hier als Haupt-Serie, die der zweiten Art als Neben-Serie bezeichnen, denn die letzteren sind wesentlich schwächer, als die ersteren, da die zugehörige transscendente Gleichung für n komplexe Wurzeln liefert.

Lassen wir nun ein dreiaxiges Ellipsoid allmählich in eine Kugel stetig übergehen. Sämtliche möglichen Schwingungsdauern zerlegten sich in acht Gruppen, entsprechend den acht Klassen von eindeutigen Funktionen

$$\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{G}_2, \quad \ldots \, . \, \mathfrak{G}_8,$$

die den aufgestellten Differentialgleichungen genügen konnten (vgl. § 17). Bei der Kugel fallen alle diese acht Funktionen in eine einzige zusammen; je acht Schwingungen, die beim Ellipsoide zusammengehören, vereinigen sich also beim Übergange zur Kugel in eine einzige.

Umgekehrt wird es sein, wenn man eine Kugel so deformiert, dass sie in ein dreiaxiges Ellipsoid übergeht: jede Schwingung bestimmter Wellenlänge, die bei der Kugel möglich war, zerspaltet sich dabei in acht neue Schwingungen.

---

[1]) In meiner früheren Arbeit kam es mir hauptsächlich darauf an zu zeigen, dass es möglich ist, bei einem kugelförmigen Körper die Grenzbedingungen der Elastizitätstheorie wirklich zu erfüllen. Es ist dies in Uebereinstimmung mit dem von Jaerisch erlangten Resultate (Crells Journal Bd. 88 und für Rotationskörper Bd. 104); hier werden die auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte gleich Null angenommen, was bei den von uns behandelten Problemen der Optik nicht zulässig ist.

Wenn man also ein kugelförmiges Atom durch Druck in ein Ellipsoid deformiert, so zerspaltet sich jede der Kugel zukommende Spektrallinie in acht Spektrallinien des Ellipsoids.

Bekanntlich werden nun die Spektrallinien eines Atoms bei dem sogenannten Zeeman-Effekt, d. h. durch Einwirkung starker Magnete, in der Tat in eine mehr oder weniger grosse Anzahl von Linien zerspalten;[1]) es liegt hiernach nahe, die Ursache dieser Erscheinung in dem Drucke zu suchen, der im Lichtäther durch die Wirkung des Magneten nicht mehr gleichmässig verteilt ist, demnach eine Deformation des Atoms sehr wohl veranlassen kann.

Die einzelnen Linien, in welche eine Spektrallinie des ursprünglichen Atoms durch den Magneten zerfällt wird, erweisen sich dabei als polarisiert. Auch das ist mit unseren Formeln in Uebereinstimmung, denn eine elastische Schwingung, wie sie durch die Gleichungen (66) dargestellt wird, besteht in einer Pendelung um die X-Axe (also um eine Hauptaxe des Ellipsoids); dabei bewegt sich jeder Punkt des Raumes (innerhalb und ausserhalb des Ellipsoids) auf einer bestimmten Geraden (Tangente eines konfokalen Ellipsoids) hin und her; ein an diesem Punkte befindlicher Beobachter wird das Licht also stets polarisiert sehen. Die Richtung der Polarisation kann, je nachdem es sich um die Funktion U, V oder W handelt, eine verschiedene sein. Welche Axe des Ellipsoids dabei vorwiegend in Betracht kommt, wird von der Axen-Richtung des Magneten abhängen.

Wird eine Spektrallinie in weniger als acht Linien zerspalten, so wird man schliessen dürfen, dass die Gestalt der Kugel noch nicht hinreichend geändert wurde; beträgt aber die Anzahl der neuen Linien mehr als acht, so ist zu bedenken, dass wir über die Gestalt der Atome nicht genauer unterrichtet

[1]) Vgl. die ausführlichen Untersuchungen von Paschen und Runge: Ueber die Strahlung des Quecksilbers im magnetischen Felde; Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften 1902.

sind; es kann eine Kugel in ein Ellipsoid, aber vielleicht auch in eine höhere Fläche durch Druck verwandelt werden, bei der dann die Anzahl der charakteristischen Funktionen grösser als acht sein mag; es kann aber auch das Atom schon ursprünglich eine von der Kugel abweichende Form gehabt haben, wo dann die ganze Frage sich zunächst der genaueren mathematischen Behandlung entzieht. Jedenfalls wird man aber aus den vorstehenden Untersuchungen schliessen dürfen, dass die Anzahl der Spektrallinien eines Atoms von der äusseren Gestalt desselben wesentlich abhängt und dass die Anzahl sich ändern muss, wenn das Atom durch Druckkräfte im Lichtäther (z. B. im magnetischen Felde) eine Deformation erleidet.

Die Art der Abhängigkeit der Linien von der Gestalt wird im Folgenden an einigen Beispielen näher erläutert.

§ 26. Die Atome der ersten Mendelejeffschen Gruppe.

Wenn wir am Schlusse von § 23 und § 24 von Haupt- und Neben-Serien sprachen, so war damit schon die Anwendung angedeutet, die wir von den damaligen Entwicklungen auf die Spektra der Elemente vornehmen wollen, in welchen man nach Rydberg, Kayser und Runge solche Haupt- und Neben-Serien unterscheidet. Von den Genannten sind die ersten drei Mendelejeffschen Gruppen der Elemente einer besonders sorgfältigen Untersuchung unterworfen worden.

Zur ersten Gruppe gehören die Alkalien: Lithium, Natrium, Kalium, Rubidium, Caesium. Die Spektra derselben sind durch folgende gemeinsame Eigenschaften zu charakterisieren.[1])

Unter einer Serie von Linien versteht man eine Reihe von Spektrallinien, die sich den ganzen Zahlen N in der Weise zuordnen lassen, dass der reziproke Wert der Wellenlängen λ sich durch eine Formel der Form

[1]) Vgl. Kayser und Runge: Über die Spektren der Elemente, dritter Abschnitt (Über die Linienspektren der Alkalien). Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften 1890.

$$(147) \qquad \lambda^{-1} \cdot 10^8 = A - B N^{-2} - C N^{-4},$$

wobei N meist die Werte $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ annehmen kann; die Konstanten A, B, C sind bei verschiedenen Elementen verschieden. Sie sind auch verschieden für verschiedene Serien, die im Spektrum eines und desselben Elements auftreten.

Bei jedem der genannten Elemente lassen sich eine Haupt-Serie und mehrere Neben-Serien unterscheiden. Die Haupt-Serie geht vom roten Ende des Spektrums bis ins Ultraviolett; sie besteht aus leicht umkehrbaren, scharfen Linien, enthält die hellsten Linien des Elements und diejenigen, welche am leichtesten erscheinen. Die Neben-Serien bestehen aus weniger hellen, meist unscharfen Linien, die weniger leicht erscheinen; während bei der Haupt-Serie die Linie $N = 3$ meist im roten Teile des Spektrums, die Linie $N = 4$ aber schon im ultravioletten Teile liegt, verteilen sich die Linien der Neben-Serien mit grösserer Gleichmässigkeit durch das ganze sichtbare und unsichtbare Spektrum.

Was den allgemeinen Charakter dieser Serien anbetrifft, so stimmt die Unterscheidung von Haupt- und Neben-Serien mit dem für das verlängerte Rotationsellipsoid gefundenen Resultate, denn im Falle $m = 0$ (Haupt-Serie) herrscht bei der Schwingung vollständige Symmetrie um die Rotationsaxe, und derartige Schwingungen werden bei jeder Rotationsfläche am leichtesten auftreten, die entsprechenden Linien also scharf und hell sein. Nach unseren Formeln werden sie bei kleinem Werte der Exzentrizität h oder bei grossem Werte der Schwingungszahl n durch die Formel

$$\frac{d\,J\left(\sqrt{\mu\,(r_0^2 - 1)}\right)}{d\,r_0} = 0, \quad \text{wo } \mu = \frac{n}{h}$$

bestimmt, oder durch die weitere Näherungsformel (127). Dabei ist die Schwingungszahl n der Wellenlänge λ umgekehrt proportional. Für kleine Wellenlängen nähern sich die Wurzeln der Gleichung (127) den ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{4}$; deshalb wird man angenähert

$$(148) \qquad \sqrt{\lambda^{-1}} = a_0 (2N+1) \frac{\pi}{4} - \frac{b_1}{N} - \frac{b_2}{N^2} - \cdots\cdots$$

setzen können. Wenn diese Gleichung auch von der obigen scheinbar ganz verschieden ist, kann doch eine praktische Übereinstimmung hergestellt werden, wie ich in § 14 erörtert habe; man sieht es auch dadurch, dass die Gleichung (147) nur für eine gewisse Anzahl ganzzahliger Werte gelten soll, also nicht wesentlich geändert wird, wenn man sie durch eine Gleichung der Form

$$(149)\ \lambda^{-1} = A - BN^{-2} - Cn^{-4} + \varphi(N) \cdot (N-3)(N-4) \ldots (N-9)$$

ersetzt, wo $\varphi(N)$ eine willkürliche Funktion von N bezeichnet, die an den Stellen $N = 3, 4, \ldots. 9$ nicht unendlich gross wird.[1])

Für $m > 0$ ist die Symmetrie gestört, die Linien erscheinen schwächer; für $m = 1, 2, 3 \ldots.$ hätte man unendlich viele Serien zu erwarten. Für kleine Werte der Exzentrizität h sind sie beim verlängerten Rotationsellipsoide nach § 24 durch die Gleichung

$$\frac{dR}{dt} = 0, \quad \text{wo } R = t^{\frac{m}{2}} \frac{d^m J(\sqrt{t})}{dt^m}, \quad t = \mu(r_0^2 - 1),$$

näherungsweise dargestellt. Benutzt man auch hier den Näherungswert (126), so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$(150) \qquad \operatorname{tang} \xi = F(\xi),$$

wo ξ dieselbe Bedeutung hat, wie in (127) und wo $F(\xi)$ eine rationale Funktion bezeichnet, deren Grad mit m wächst. Denkt man sich die beiden Kurven

$$\eta = \operatorname{tang} \xi \quad \text{und} \quad \eta = F(\xi)$$

in der ξ-η-Ebene gezeichnet, so ist klar, dass diese Gleichung für endliche Werte von ξ weit mehr und dichter gelegene Wurzeln liefert, als die Gleichung (127); für $\xi = \infty$ aber sind beide Gleichungen nicht mehr zu unterscheiden. Mit wach-

[1]) Auf die Frage, wie man diese Funktion $\varphi(N)$ in einzelnen Fällen zu wählen hat, denke ich demnächst zurückzukommen.

sendem m verschieben sich daher die Neben-Serien nach dem roten Ende des Spektrums, während ihr Verlauf im ultravioletten Teile gleichmässig mit demjenigen der Haupt-Serie verbleibt. Dieses Resultat ist in Übereinstimmung mit den Beobachtungen an den Spektren der Alkalien.

Beim Lithium sind zwei Neben-Serien beobachtet worden, beim Natrium ebenfalls zwei und der Anfang einer dritten, beim Kalium zwei Neben-Serien, beim Rubidium eine Neben-Serie und wahrscheinlich einzelne Linien einer zweiten, beim Caesium ebenso.

Nach ihrem allgemeinen Typus verhalten sich hiernach die Linienspektra der Alkalien so, als wenn ihre Atome die Gestalt von verlängerten Rotationsellipsoiden besässen.

Die obigen Angaben über die verschiedenen Serien sind allerdings nur beim Lithium genau erfüllt. Bei den übrigen Alkalien sind die Linien der Neben-Serien in je zwei zerspalten. Man könnte daraus schliessen, dass die Zahl der beobachteten Neben-Serien (die theoretisch unendlich gross sein soll) einfach zu verdoppeln ist. Dagegen spricht aber, dass bei Kalium, Rubidium und Caesium auch die Linien der Haupt-Serie verdoppelt sind und dass die einzelnen Linien solcher Paare in eigentümlicher Beziehung zu einander stehen. Wird nämlich die Serie durch eine Formel der Form (147) dargestellt, so gilt für eine zweite zugehörige Serie eine Formel der Form

$$(150) \qquad 10^8 \lambda_1^{-1} = A_1 - B_1 N^{-2} - C_1 N^{-4},$$

wo A_1 von A verschieden ist, B_1 und C_1 aber mit den in (147) vorkommenden Konstanten B und C genau oder wenigstens nahezu übereinstimmen; so ist z. B. für die erste Neben-Serie des Natriums

$$A = 24549{,}12, \quad B = 120726, \quad C = 197891,$$
$$A_1 = 24565{,}83, \quad B_1 = 120715, \quad C_1 = 197935.$$

Durch die Gleichungen (147) und (150) werden jeder Zahl N zwei Linien zugeordnet, die zusammen eines der besprochenen Paare bilden.

In solcher Weise verdoppelt treten aber beim Kalium, Rubidium und Caesium auch die Linien der Haupt-Serie auf; da es nun nur eine Haupt-Serie beim Rotations-Ellipsoide gibt, so müssen wir schliessen, dass die betreffenden Atome nur näherungsweise die Gestalt von Rotationsellipsoiden haben, und dass hierdurch sowohl bei der Haupt-Serie als bei den Neben-Serien die Zerspaltung der Linien in Paare gemäss den obigen Erörterungen in § 25 veranlasst wird.

Da B und C mit B_1 und C_1 nahezu übereinstimmen, so ist nahezu

$$10^8(\lambda^{-1} - \lambda_1^{-1}) = A - A_1,$$

diese „Schwingungs-Differenz" also nahezu konstant, d. h. unabhängig von N. Diese Differenz ist aber nicht nur bei einer einzelnen Serie konstant, sondern hat auch bei allen Serien desselben Elements ungefähr denselben Wert und zwar

172 bei Na, 568 bei K, 2344 bei Rb, 5450 bei Cs.

Nun sind die Atomgewichte dieser Elemente bezw. gleich

22,995, 33,09, 85,2, 132,7

und es ist nahezu

$$(151)\quad \begin{aligned} \sqrt{172} &= 1{,}706 \cdot 22{,}995, & \sqrt{568} &= 1{,}706 \cdot 33{,}09, \\ \sqrt{2344} &= 1{,}706 \cdot 85{,}2\;, & \sqrt{5450} &= 1{,}706 \cdot 132{,}7, \end{aligned}$$

d. h. es besteht das von Rydberg und Kayser und Runge bemerkte Gesetz, dass jene Schwingungsdifferenzen den Quadraten der Atom-Gewichte nahezu proportional sind.

Bedeutet λ die Wellenlänge einer bestimmten Schwingung eines Rotationsellipsoids, bezeichnen ferner λ_1 und λ_2 diejenigen Wellenlängen, welche daraus entstehen, wenn das Rotationsellipsoid sich in ein dreiaxiges verwandelt, so ist:

$$(152)\qquad \begin{aligned} \lambda_1^{-1} &= \lambda^{-1} + a_1\,\varepsilon^2 + a_2\,\varepsilon^4 + \cdots \\ \lambda_2^{-1} &= \lambda^{-1} + a_1'\,\varepsilon^2 + a_2'\,\varepsilon^4 + \cdots, \end{aligned}$$

wenn ε die numerische Exzentrizität derjenigen Ellipse bezeichnet, in welche der Äquator des Rotationsellipsoids verwandelt wird, vorausgesetzt, dass die lange Axe des Ellipsoids sich nicht wesentlich ändert. Die Schwingungsdifferenz $\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}$ wird demnach dem Quadrate der numerischen Exzentrizität näherungsweise proportional; der Vergleich mit dem erwähnten Gesetze, das in den Gleichungen (151) seinen Ausdruck findet, führt dann zu folgendem Resultate:

Die Atome der Alkalien haben die Gestalt von Ellipsoiden, deren eine Axe die beiden anderen an Länge wesentlich übertrifft; die Exzentrizität des zu dieser ausgezeichneten Axe senkrechten Hauptschnittes ist dem Atomgewichte proportional.

Dass in der Tat in (152) nur gerade Potenzen von ε vorkommen können, folgt daraus, dass die Funktionen $\mathfrak{G}$, durch welche die Werte λ_1 und λ_2 bestimmt werden, als Integrale der Gleichung (19) nur von $\varkappa^2 = \frac{b^2}{c^2}$ und $\frac{\varrho_0^2}{c^2}$ abhängen, wenn die beiden kleineren Axen des Ellipsoids mit b und c, die grosse Axe mit ϱ_0 bezeichnet werden. Indem wir das Verhältnis $\frac{\varrho_0}{c}$ in die Konstanten a_i, a_i', eingehen lassen, setzen wir voraus, dass das Verhältnis der grossen zur kleinen Axe des Rotationsellipsoids bei den verschiedenen Alkalien dasselbe sei.

Die Druckkräfte, welche im Lichtäther tätig sind, um das Ellipsoid zu deformieren, können von der elektrischen Erregung herrühren, da ja die Beobachtungen zwischen den Polen eines Lichtbogens angestellt werden. Sie können aber auch in dem Widerstande ihren Grund haben, den das Atom bei seiner Bewegung im Lichtäther findet. Dieser Äther verhält sich gegenüber den schnellen Bewegungen elastischer Schwingungen wie ein starrer Körper, aber (nach Lord Kelvin) gegenüber den vergleichsweise sehr langsamen Bewegungen der Atome wie eine Flüssigkeit; der Widerstand aber, den letztere auf eine bewegte Kugel ausübt, ist bekanntlich dem Volumen der verdrängten Flüssigkeitsmenge proportional. Haben nun die Atome verschiedener Elemente gleiche Dichte, wie es nach meinen früheren Untersuchungen (vgl. auch unten § 27) wahrscheinlich ist, so ist dieser Widerstand dem Atom-Gewichte proportional. Umgekehrt würde die Exzentrizität ε des deformierten Rotationsellipsoids dem Widerstande proportional sein, den das Atom bei seiner Bewegung im Lichtäther erleidet, und dadurch das obige empirische Gesetz verständlich werden.

§ 27. Die Atome der alkalischen Erden.

Mit den Spektren der alkalischen Erden (Magnesium, Calcium, Strontium, Baryum) habe ich mich schon in meiner früheren Arbeit eingehend beschäftigt. Über das Beryllium liegen noch zu wenige Beobachtungen vor; es bleibt deshalb von der Betrachtung ausgeschlossen. Unter der Annahme, dass das einzelne Atom die Gestalt einer Kugel habe und dass die Dichte der Atome bei verschiedenen Elementen denselben Wert habe, hatte ich in § 6 zwischen den Wellenlängen λ und λ' und den Atomgewichten G und G' zweier verschiedenen Elemente für kleine Wellenlängen das in der Formel

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \sqrt[3]{\frac{G}{G'}} \tag{153}$$

ausgesprochene Gesetz als näherungsweise richtig nachgewiesen. Die Prüfung dieser Formel an den Beobachtungen, wie sie infolge der Arbeiten von Kayser und Runge vorliegen, ergab, dass dieses Gesetz bei den alkalischen Erden sich bestätigt. Man konnte so aus jeder Linie des einen Elements eine Linie des andern berechnen; und im Allgemeinen entsprach dabei einer Serie des einen Elements wieder eine Serie des andern. Hieraus schliessen wir:

Die Gestalt der Atome weicht bei den alkalischen Erden wenig von der Kugel ab; die innere Dichte der Atome ist bei verschiedenen Elementen dieselbe.

Da nach den vorhergehenden Untersuchungen die Verteilung der Linien im Spektrum ganz wesentlich von der Gestalt der Atome abhängt, werden wir die Abweichungen, welche sich in den früheren Tabellen finden, jetzt dadurch erklären, dass die Kugel durch ein dreiaxiges Ellipsoid zu ersetzen ist. Insbesondere wird es so erklärlich, dass in jenen Tabellen öfter bei dem gegenseitigen Entsprechen der Linien verschiedener Spektra die Serien durch einander geworfen erscheinen; denn wir haben in § 25 gesehen, dass sich bei der Kugel nur eine Serie ergibt; es ist also unmöglich, unter Voraussetzung der Kugelgestalt die verschiedenen Serien aus einander zu halten.

Die Formel (153) behält aber ihren Wert, da sie die vielfach beobachtete Tatsache, dass die augenscheinlich analogen Linien in den Spektren verwandter Elemente sich mit wachsendem Atomgewichte in Richtung auf das rote Ende des Spektrums verschieben, in eine mathematische Formel kleidet. In § 11 und § 12 versuchte ich die bei den Alkalien auftretenden grösseren Abweichungen durch Annahme verschiedener innerer Dichte der Atome zu erklären. Nachdem wir jetzt in § 26 gesehen haben, dass die Gestalt der Atome der Alkalien von der Kugel stark abweicht, werden wir an dieser Annahme verschiedener innerer Dichten nicht mehr festzuhalten brauchen. Wir werden vielmehr in der Annahme bestärkt, die meinen damaligen Betrachtungen zu Grunde lag, dass es nur eine Art von Materie gibt und dass sich die chemischen Elemente nur durch Gestalt und Grösse ihrer Atome unterscheiden.

Bei den alkalischen Erden fehlt die Haupt-Serie; daraus schliessen wir, dass von den drei Axen des Ellipsoids keine durch ihre Länge vor den beiden anderen wesentlich ausgezeichnet ist. Bei Magnesium, Calcium und Strontium treten zwei Nebenserien auf; jede Linie zerlegt sich in drei zusammengehörige Linien. Man könnte diese Verhältnisse so auffassen, als ob im Ganzen sechs verschiedene Serien in Betracht kommen; da aber bei je drei zusammengehörigen Linien wieder das Gesetz von der Konstanz der Schwingungsdifferenzen näherungsweise erfüllt ist, werden wir das Auftreten der Linien-Triplets in ähnlicher Weise erklären, wie das Auftreten der Doppellinien bei den Alkalien.

Die Schwingungsdifferenzen sind jetzt den Quadraten der Atomgewichte nur noch der Grössen-Ordnung nach proportional; wir werden daraus schliessen, dass es nicht möglich ist, durch eine einzelne Grösse ε die Abweichung der Gestalt vom Rotationsellipsoide bei den verschiedenen Elementen zu unterscheiden. Während also bei den Alkalien den Hauptaxen $2\varrho_0$, $2b$, $2c$ des Ellipsoids die Eigenschaft zukam, dass ϱ_0 die beiden anderen wesentlich an Grösse übertraf, dass b nahezu gleich c war, und dass das Verhältnis $\varrho_0 : b$ (oder $\varrho_0 : c$) bei allen Alkalien denselben Wert hatte, erscheinen die drei Axen bei den alkalischen Erden als wesentlich gleich berechtigt.

Beim Baryum sind keine Serien beobachtet worden; das Mittel, die Serien aus der grossen Anzahl von Linien auszuscheiden, besteht nämlich darin, dass man Linien-Paare oder Linien-Triplets mit konstanter Schwingungsdifferenz heraussucht; nach unserer Auffassung ist das Auftreten solcher Paare dadurch bedingt, dass die Abweichung von der Gestalt eines Rotationsellipsoids nur gering ist; wird diese Abweichung grösser, so versagt jenes Mittel, wenn es auch noch mittelst der Formel (153) gelingt, im Baryum Linien zusammen zu ordnen, die annähernd eine Serie bilden (vgl. § 9 meiner hinteren Arbeit). Das Fehlen der Serien-Paare im Baryum zeigt uns demnach, dass dessen Atomgestalt am meisten von einem Rotationsellipsoide abweicht.

Da bei der Kugel nur eine Serie auftrat, und da die Atome der alkalischen Erden nahezu kugelförmig sind, so haben wir uns vorzustellen, dass diese eine Kugel-Serie sich in die beiden Neben-Serien aufgelöst hat, ohne dass eine Haupt-Serie (welche Symmetrie um eine bevorzugte Axe voraussetzt) erscheint. Die stärkere Abweichung von der Gestalt eines Rotationskörpers wird auch durch das Auftreten von dreifachen Linien bestätigt, während bei den Alkalien sich die Linien nur verdoppelten.

§ 28. Die Atome einiger Metalle.

Zu den Elementen der ersten Mendelejeffschen Gruppe gehören neben den Alkalien die Metalle Kupfer, Silber und Gold; zu denen der zweiten Gruppe die Metalle Cadmium, Zink, Quecksilber. Von letzteren habe ich früher gezeigt (§ 8 und § 10), dass die Formel (153) auf sie mit besonders gutem Erfolge angewandt werden kann. Die Gestalt ihrer Atome wird daher nahezu kugelförmig sein. Auch bei Kupfer, Silber und Gold (a. a. § 13) wird die Formel (153) noch nicht unbrauchbar; auch für sie wird demnach analoges gelten.

Bei Kupfer und Silber finden Kayser und Runge wieder zwei Neben-Serien, bestehend aus Linien-Paaren mit konstanter Schwingungsdifferenz, bei Zink, Cadmium und Quecksilber ebenfalls zwei Neben-Serien, jede aus Triplets von Linien zusammengesetzt. Hierdurch ist die Zugehörigkeit der ersteren Metalle zu den Alkalien, der letzteren zu den alkalischen Erden auch spektralanalytisch zum Ausdrucke gebracht. Die Atome der letzteren weichen (wegen Auftretens der Triplets) mehr von der Kugelform ab als die der ersteren.

Den Spektren aller sechs Metalle ist aber eine Eigenschaft gemeinsam, die sie von den übrigen Elementen beider Gruppen trennen. „Von den Elementen Kupfer, Silber und Gold besitzt jedes im Ultravioletten ein starkes umgekehrtes Paar mit der dem Elemente eigentümlichen Schwingungsdifferenz; diese Linien sind die stärksten des ganzen Spektrums. Ob man in ihnen das erste Glied einer Haupt-Serie sehen soll, ist zweifelhaft; da kein anderes entsprechendes Paar beobachtet ist, lässt sich eine solche Hypothese nicht kontrollieren. Ebenso gut ist es möglich, dass wir ein isoliertes Linienpaar vor uns haben, welches dieselbe Rolle spielt wie die isolierten Linien in den Spektren der alkalischen Erden.“

Ebenso hat von den Elementen Zink, Cadmium und Quecksilber jedes eine sehr stark verbreiterte und umgekehrte Linie im Ultravioletten, die stärkste des ganzen Spektrums.

Die Rolle dieser isolierten hellen Linien dürfte durch unsere Untersuchungen in § 24 aufgeklärt werden. Beim Rotationsellipsoide werden die stärksten Linien diejenigen sein, die einem zur Axe symmetrischen Schwingungszustande ententsprechen; diesem entspricht aber beim abgeplatteten Rotationsellipsoide mit geringer Exzentrizität, wie wir sahen, in der Tat nur eine mögliche Wellenlänge. Die Linie wird sich zerspalten, wenn das Ellipsoid nur annähernd eine Rotationsfläche ist. Wir schliessen also:

Die Atome der Metalle Kupfer, Silber, Gold, Zink, Cadmium, Quecksilber haben annähernd die Gestalt von abgeplatteten Rotationsellipsoiden; die Atome der letzteren drei sind fast kugelförmig.

Auch beim Magnesium zeigt sich die charakteristische isolierte Linie im Ultravioletten; von den alkalischen Erden nähert sich also die Gestalt des Magnesium-Atoms am meisten einem abgeplatteten Rotationsellipsoide.

Die Schwingungsdifferenzen bei den Linien derselben Serie sind hier, wie bei den alkalischen Erden, den Quadraten der Atomgewichte nur der Grössenordnung nach proportional.

Letzteres gilt auch für die Elemente Aluminium, Indium und Thallium, die der dritten Mendelejeffschsn Gruppe angehören.[1]) Auch bei ihnen sind je zwei Neben-Serien beobachtet worden; ausserdem gibt es einzelne isolierte Linienpaare mit konstanter Schwingungsdifferenz; wir haben also dreiaxige Ellipsoide, die noch eine Annäherung an abgeplattete Rotationsellipsoide aufweisen.

Wenn wir bei den Atomen der genauer untersuchten Elemente wesentliche Abweichungen von der gewöhnlich gedachten

---

[1]) Vgl. Kayser und Runge: Über die Spektren der Elemente, sechster Abschnitt; Abhandlungen der Berliner Akademie 1892.

Kugelgestalt finden, so ist der Grund für das Fehlen der Kugelgestalt vielleicht in Folgendem zu suchen. Ein kugelförmiges Atom ist nach § 25 imstande, seine innere Energie frei in den Lichtäther auszuströmen. Gerät aber ein ellipsoidisch gestaltetes Atom in Schwingungen, so ist das nur möglich, wenn gleichzeitig der Aether einen Theil seiner Schwingungen dem Atome zurückgibt, indem nach § 21 Funktionen von $r - at$ und $r + at$ gleichzeitig auftreten müssen. Ein solches Atom gibt also Energie an den Aether ab und empfängt stets gleichzeitig Energie zurück; ein kugelig gestaltetes Atom dagegen würde seine innere Energie gänzlich verlieren können, folglich allen äusseren Einwirkungen gegenüber sich apathisch verhalten, und sich am Spiele der chemischen und physikalischen Kräfte nicht mehr beteiligen, bis es durch Stösse von neuem erregt wird. In der That kann man diese Kräfte in ihrer Abhängigkeit von der inneren Energie der Atome mathematisch darstellen, worauf ich bei anderer Gelegenheit eingehen werde.[1])

§ 29. Über die Serien-Formeln, insbesondere beim Wasserstoffe.

Durch vorstehende Untersuchungen ist meine früher ausgesprochene Ansicht über die Natur der Serien (vgl. § 5 und § 14) im Ganzen bestätigt etc.: die Linien jeder Serie entsprechen den Wurzeln einer gewissen transscendenten Gleichung. Bei Annahme kugelförmiger Atome erschien es notwendig, verschiedene Arten von Grenzbedingungen in Betracht zu ziehen, um eine entsprechende Anzahl von transscendenten Gleichungen zu erhalten. Bei den Ellipsoiden sehen wir aber, dass die Theorie sogar auf unendlich viele solche Gleichungen führt, die sich in Gruppen ordnen. Wenn also bei der früheren Auffassung das Zusammenlaufen verschiedener Serien an einer Stelle oder an benachbarten Stellen als etwas zufälliges erschien, so erscheint dies bei den

---

[1]) Im Sommer-Semester 1902 habe ich meine entsprechenden Überlegungen in einer Vorlesung näher entwickelt.

jetzt aufgestellten Gleichungssystemen als natürlich, denn mit abnehmender Wellenlänge (zunehmender Schwingungszahl) kann man die Wurzeln dieser verschiedenen Gleichungen immer weniger von einander unterscheiden. Immerhin bleibt auch jetzt die Möglichkeit, dass neben den von uns studierten Schwingungen, die den Forderungen der Elastizitätstheorie streng genügen, noch andere auftreten, bei denen infolge der (z. B. elektrischen) Erregung des umgebenden Lichtäthers die Druckkräfte an der Oberfläche nicht ausgeglichen sind.

Jedenfalls bleiben die früheren Angaben über die wahrscheinliche allgemeine Form der Serienformel gültig, denn allen transscendenten Gleichungen, die auftreten, ist die Eigenschaft gemeinsam, dass ihre Wurzeln bei abnehmender Wellenlänge den ganzen Vielfachen gewisser Konstanten proportional werden, wie in Gleichung (148); und die Abweichung von der empirischen Formel (147) wird durch die Hülfs-Formel (149) hinreichend erklärt.

Die erwähnte empirische Formel verdankt ihre Entstehung dem einfachen Balmerschen Gesetze, nach dem sich die Wellenlängen des Wasserstoffs aus der Gleichung

$$\lambda^{-1} = A\left(1 - \frac{4}{N^2}\right) \tag{154}$$

für $N = 3, 4, 5 \ldots 15$ mit überraschender Genauigkeit berechnen lassen. Diese Tatsache wird man ungern einem Zufalle zuschreiben wollen, und deshalb soll im Folgenden noch eine Erklärung versucht werden.

Wir haben in § 24 das verlängerte Rotationsellipsoid mit sehr kleiner Exzentrizität h untersucht. Setzt man:

$$\frac{n}{h} = \mu \quad \text{und} \quad \mu\,\varrho = t, \tag{155}$$

wo ϱ die in (94) angegebene Bedeutung hat, so kam es auf die Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

$$4\,t\,(t+\mu)\frac{d^2\mathfrak{R}}{d\,t^2} + 2\,[t + (2m+2)(t+\mu)]\frac{d\,\mathfrak{R}}{d\,t}$$
$$+ [\mu\,t + m\,(m+1) + \mathfrak{A}]\,\mathfrak{R} = 0.$$

Für grosse Werte von μ reduzierte sie sich auf die oben behandelte Gleichung (123); für kleine Werte von μ dagegen erhalten wir

$$(156)\quad t^2\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2}+\tfrac{1}{2}t[2m+3]\frac{d\mathfrak{R}}{dt}+\tfrac{1}{4}[m(m+1)+\mathfrak{A}]\mathfrak{R}=0.$$

Bekanntlich sind die partikulären Integrale der Gleichung

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+at\frac{dy}{dt}+by=0$$

durch die Ausdrücke[1])

$$(157)\qquad y_1=t^{-\alpha+\beta}\quad\text{und}\quad y_2=t^{-\alpha-\beta}$$

gegeben, wenn

$$\alpha=\frac{a-1}{2},\quad \beta=\sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2-b}.$$

Bei uns ist

$$a=m+\tfrac{3}{2},\quad b=\tfrac{1}{4}m(m+1)+\tfrac{1}{4}\mathfrak{A}.$$

Hier bedeutet m eine ganze Zahl; $\mathfrak{A}$ ist so zu bestimmen, dass das eine Integral der Differentialgleichung (92) für $h=\infty$ endlich bleibt. Letztere geht aber dadurch in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{d\vartheta^2}+\operatorname{cotg}\vartheta\cdot\frac{dy}{d\vartheta}-\left(\mathfrak{A}+\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)y=0$$

über, welche mit der Gleichung für die „Zugeordneten" der Kugelfunktionen übereinstimmt,[2]) wenn man $\mathfrak{A}=-n(n+1)$ setzt, unter n eine ganze Zahl verstanden. Dann wird

$$(158)\qquad \alpha=\frac{2m+1}{4},\quad \beta=\frac{2n+1}{4},$$

und es muss nach der Theorie der Kugelfunktionen $m<n$ sein. Es ist ferner nach (94) die gesuchte Funktion R durch die Gleichung

---

[1]) Auch diese Gleichung ist ein Grenzfall der Besselschen Gleichung, vgl. Lommel, Math. Annalen Bd. 3, p. 487.

[2]) Vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen I, p. 216.

$$R = (r^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \mathfrak{R} = \left(\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{m}{2}} \mathfrak{R}$$

gegeben, wo $\mathfrak{R}$ sich aus den Funktionen (157) linear zusammensetzt. Damit $\mathfrak{R}$ endlich bleibt für $r = 1$, d. h. $t = 0$, ist nur das eine Integral y_1 brauchbar, folglich bis auf einen konstanten Faktor

$$R = t^{\frac{n}{2}}.$$

Die Gleichung (108) oder $\frac{dR}{dt} = 0$ führt hier also nicht zu brauchbaren Resultaten.

Anders ist es, wenn wir einen entsprechenden Grenzübergang für das abgeplattete Rotationsellipsoid durchführen. Hier müssen wir auf die Gleichung (120) zurückgehen. Setzen wir

$$(159) \qquad \frac{n}{\mathfrak{h}} = \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m}\,\varrho = \mathfrak{t},$$

so ergibt sich

$$4\,\mathfrak{t}(\mathfrak{t} - \mathfrak{m}) \frac{d^2 \mathfrak{R}^*}{d\,\mathfrak{t}^2} + 2\,[\mathfrak{t} + (2\,m + 2)(\mathfrak{t} - \mathfrak{m})] \frac{d\,\mathfrak{R}^*}{d\,\mathfrak{t}}$$
$$+ [m\,(m+1) + \mathfrak{m}\,\mathfrak{t} + \mathfrak{A}]\,\mathfrak{R}^* = 0$$

und hieraus für $\mathfrak{m} = 0$:

$$(160) \quad 4\,\mathfrak{t}^2 + \frac{d^2 \mathfrak{R}^*}{d\,\mathfrak{t}^2} + 2\,\mathfrak{t}(2\,m+3)\frac{d\,\mathfrak{R}^*}{d\,\mathfrak{t}} + [m(m+1) + \mathfrak{A}]\,\mathfrak{R}^* = 0.$$

Hier bedeutet m eine ganze positive Zahl, und $\mathfrak{A}$ ist so zu bestimmen, dass die zweite Gleichung (118) für $\mathfrak{h} = \infty$, d. h. $\mathfrak{m} = 0$, eine eindeutige Lösung zulässt. Die gefundene Gleichung (160) ist zwar von (156) nicht verschieden; aber für die Bestimmung von $\mathfrak{A}$ bleibt eine andere Möglichkeit, als die oben benutzte. Die Kugelfunktionen bleiben nämlich brauchbar, wenn

$$n = -\tfrac{1}{2} + i\,\mu$$

gewählt wird; sie gehen dann in die Mehlerschen Kegelfunktionen über. Es wird:

$$\mathfrak{A} = -n(n+1) = -(\tfrac{1}{2} - i\mu)(\tfrac{1}{2} + i\mu) = -(\tfrac{1}{4} + \mu^2)$$

und somit nach (158)

$$\alpha = \frac{2m+1}{4}, \quad \beta = \frac{\mu i}{2}.$$

Aus den partikulären Integralen (157) kann man zwei reelle lineare Kombinationen herleiten

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \mathfrak{t}^{-\frac{1}{4}-\frac{m}{2}} \cos\left(\frac{\mu}{2}\log \mathfrak{t}\right),$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = \mathfrak{t}^{-\frac{1}{4}-\frac{m}{2}} \sin\left(\frac{\mu}{2}\log \mathfrak{t}\right).$$

Beim verlängerten Rotationsellipsoide war $t = \mu(r^2 - 1)$, also gleich Null für den Grenzfall $r = 1$; es wären dann diese Integrale und ebenso die daraus hervorgehenden Funktionen

$$(161) \qquad \begin{aligned} R &= \mathfrak{t}^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{\mu}{2}\log \mathfrak{t}\right) = \frac{\mathfrak{t}^{\frac{\mu}{2}i} + \mathfrak{t}^{-\frac{\mu}{2}i}}{2\sqrt[4]{\mathfrak{t}}} \\ S &= \mathfrak{t}^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{\mu}{2}\log \mathfrak{t}\right) = \frac{\mathfrak{t}^{\frac{\mu}{2}i} - \mathfrak{t}^{-\frac{\mu}{2}i}}{2i\sqrt[4]{\mathfrak{t}}} \end{aligned}$$

unendlich für $\mathfrak{t} = 0$; nur beim abgeplatteten Rotationsellipsoide ($\mathfrak{r} = 0$) kann daher der jetzt vorliegende Fall in Betracht kommen.

Die Zahl μ ist zunächst noch willkürlich; um sie genauer zu bestimmen, müssen wir überlegen, wie die Integrale (161) bei genauerer Durchführung zu Stande kommen. Im Allgemeinen hatten wir eindeutige Funktionen, die sich nach Potenzen von $r = \cos\vartheta$ entwickeln lassen, ausserdem eine Potenz von $\sin\vartheta$ als Faktor enthalten können. Da aber bei einem sehr stark abgeplatteten Ellipsoide die Haupt-Serie (mit zur Axe symmetrischen Schwingungen) allein von Bedeutung sein kann, so kommt hier nur der Fall $m = 0$ in Betracht, bei dem ein solcher Faktor $\sin^m\vartheta$ nicht auftritt. Wenn nun jetzt Entwicklungen nach Potenzen von $\log \mathfrak{t}$ vorkommen, so ist dies nur dadurch möglich, dass der Grenzwert einer gewissen Potenzreihe eben auf einen solchen Logarithmus führt. Man kann daher etwa auf die Formel

$$\mu \log \mathrm{t} = \log \mathrm{t}^{\mu} = \lim_{m=\infty} (m\, \mathrm{t}^{\frac{\mu}{m}} - 1) = \lim_{m=\infty} [m\, (\mathrm{t}^{\mu} + \varphi\,(\mathrm{t}))^{\frac{1}{m}} - 1]$$

Bezug nehmen, wo $\varphi\,(\mathrm{t})$ eine Funktion ist, die für $m = \infty$ nicht in Betracht kommt.

Es soll R eine eindeutige Funktion von r und $\sqrt{\mathrm{r}^2 + 1}$, und der zugehörige Faktor, der den Winkel ϑ enthält und in den betreffenden Reihen-Entwicklungen der Funktion U hinzutrat, eine eindeutige Funktion von $r = \cos\vartheta$ und $\sqrt{1 - r^2} = \sin\vartheta$ sein. Dementsprechend können ganze Potenzen von t und $\sqrt{t} = \sqrt{r^2 - 1}$, ebenso von t und $\sqrt{\mathrm{t}} = \sqrt{\mathrm{r}^2 + 1}$ auftreten. Wenn also auf diese Weise der Logarithmus in die Funktionen (161) beim Grenzübergange eingeht, so muss μ oder wenigstens 2μ eine ganze positive Zahl sein.

Die vorstehende Überlegung lässt vielleicht noch andere Möglichkeiten offen; deshalb habe ich oben (p. 92) nur von einem Versuche für den Fall $\mathfrak{h} = \infty$ gesprochen. Immerhin wird der gemachte Schluss durch den asymptotischen Wert der Kegelfunktion[1])

$$\mathfrak{f}^{\mu}\,(\text{cosin}\,\vartheta) = \frac{2}{\sqrt{\mu\,\pi}}\,\frac{\text{cosin}\left(\mu\,\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}} \qquad (\mu = \infty)$$

bestätigt; denn für sehr grosse Werte der Zahl μ muss auch der Zähler dieses Ausdruckes sich nach Potenzen von $\cos\vartheta$ so entwickeln lassen, dass die Reihe für jeden Wert von ϑ konvergiert; und zu dem Zwecke muss μ eine ganze Zahl oder eine rationale Zahl mit dem Nenner 2 sein.

Wir haben noch zu entscheiden, welche der beiden Funksionen (161) für das Innere des stark abgeplatteten Sphäroids zu wählen ist. Da $\mathfrak{h}$ sehr gross ist, so ist nach (159) t sehr klein vorausgesetzt; wir können also die Funktionen (161)

---

[1]) Vgl. Heine a. a. O., Bd. II, p. 224.

nicht durch ihr Verhalten bei sehr grossen Werten von $\mathfrak{t}$ unterscheiden; wohl aber müssen sie bei kleinen Werten von $\mathfrak{t}$ unseren bisherigen Resultaten entsprechen. Die durch (119) eingeführte Funktion R war für $\varrho = \mathfrak{m}^{-1} = \infty$, d. h. $\mathfrak{t} = 1$, nicht gleich Null; die in (161) gegebene Funktion S dagegen verschwindet für $\mathfrak{t} = 1$; wir wollen deshalb die Funktion R zur Darstellung der inneren Schwingungen wählen.

Um die Schwingungsdauern der letzteren zu bestimmen, haben wir nach (108) die Gleichung

$$\frac{d\,R}{d\,\mathfrak{t}} = 0,$$

in der nun $\mathfrak{m} = \frac{n}{\mathfrak{h}}$ als Unbekannte zu betrachten ist, aufzulösen. Dieses gibt

$$\left[\left(-\tfrac{1}{4} + \frac{\mu}{2} i\right) \mathfrak{t}^{\frac{\mu}{2} i} - \left(\tfrac{1}{4} + \frac{\mu}{2} i\right) \mathfrak{t}^{-\frac{\mu}{2} i}\right]_{\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0} = 0,$$

oder

$$\mathfrak{t}_0^{\mu i} = \frac{\mu i + \frac{1}{2}}{\mu i - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\mu i - \frac{1}{2}},$$

oder

$$\frac{n}{\mathfrak{h}} (\mathfrak{r}_0^2 + 1) = \left(1 + \frac{1}{\mu i - \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\mu i}},$$

oder in erster Annäherung

$$\frac{n}{\mathfrak{h}} (\mathfrak{r}_0^2 + 1) = 1 + \frac{1}{\mu i (\mu i - \frac{1}{2})} = 1 - \frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{2} i \mu}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{2} i \mu} = \frac{1}{\mu} \frac{\mu - \frac{1}{2} i}{\mu^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{4}} - i \frac{2}{4 \mu^3 + \mu}.$$

Es wird also n eine komplexe Zahl; setzen wir

$$n = n' + i n'',$$

so kommt für die Schwingungsdauer nur der reelle Teil n' in Betracht, denn n kommt in den Entwicklungen der Funktion

U nur in der Verbindung cosin $n\,a\,t$ und sin $n\,a\,t$ vor, wo a die Elastizitätskonstante im Innern des Sphäroids bedeutet; die Schwingungsdauer T ist dann

$$T = \frac{2\pi}{n'a} = \frac{\lambda}{a},$$

wenn λ die Wellenlänge bedeutet. Diese Grössen beziehen sich auf das Innere des Sphäroids; ausserhalb desselben im freien Lichtäther ist nach unserer früheren Bezeichnungsweise wegen Gleichung (104)

$$T = \frac{2\pi}{n_1 a_1} = \frac{2\pi}{n'a} = \frac{\lambda_1}{a_1},$$

also

$$(162)\quad \lambda_1^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \frac{a}{a_1} = \frac{a}{a_1} \cdot \frac{n'}{2\pi} = \frac{a\,\mathfrak{h}}{a_1 \pi (\mathfrak{r}_0^2 + 1)} \left(1 - \frac{4}{4\mu^2 + 1}\right).$$

Nun sollte 2μ eine ganze Zahl sein; setzen wir dieselbe gleich N, so wird

$$\lambda_1^{-1} = A\left(1 - \frac{4}{N^2 + 1}\right)$$

was im Wesentlichen die Formel (154) ist, denn das Hinzutreten des Gliedes 1 im Nenner ist bei grösseren Werten von N ohne Einfluss auf das numerische Resultat. Diese Balmersche Formel stellt also näherungsweise die Wellenlängen eines ausserordentlich stark abgeplatteten Rotationsellipsoides in ihrer Abhängigkeit von einer ganzen Zahl N dar.

Da nun die numerischen Folgerungen für die Werte $N = 3$ bis $N = 15$ sich in überraschender Weise mit den Beobachtungen beim Wasserstoff decken,[1]) so werden wir umgekehrt einen Schluss auf die Gestalt des Wasserstoff-Atoms ziehen können. Zweifelhaft bleibt es, ob wir hier das Wort „Atom" nicht besser durch „Molekül" ersetzen; denn das Wasserstoff-Molekül ist zweiatomig. Möglich wäre es aber, dass das

---

[1]) Vgl. die bei Nernst (Theoretische Chemie, Stuttgart 1893, 1. Auflage p. 169) nach Versuchen Cornus (Journal de physique, II. Serie, t. 5) mitgeteilte Tabelle.

Molekül sich unter Einwirkung der Elektrizität in seine Atome zerspaltet, und dann würde das Wort „Atom“ richtig sein. Dem Wasserstoff kommen in der Tat zwei verschiedene Spektren zu; wahrscheinlich entspricht das eine dem Moleküle, das andere (aus einer weit grösseren Anzahl von Linien bestehend) dem einzelnen Atome. Die Gestalt des Wasserstoff-Moleküls ist demnach wahrscheinlich die eines dünnen kreisrunden Blattes.

Das Wasserstoffatom würde hiernach aus der Hälfte eines solchen sehr platten Sphäroids bestehen, indem sich letzteres längs des Äquators in zwei Teile zerspaltet. Es wäre ferner zu erwarten, dass eine solche Eigenschaft auch den anderen Sphäroiden (also Cu, Ag, Au) zukommt, so dass auch ihre Moleküle als zweiatomig zu betrachten wären.

Die in der Balmerschen Formel auftretende Konstante A hat bei Benutzung der üblichen Einheiten den Wert $A = (3645{,}42)^{-1}$ oder $10^8 \cdot A = 27431{,}5$. Der Vergleich mit (162) lehrt also, dass zwischen der Exzentrizität $\mathfrak{h}$ des Sphäroids, der halben kleinen Axe $\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{h}$ desselben, der Elastizitäts-Konstante a (Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes) im Innern des Moleküls und der entsprechenden Konstante a_1 für den umgebenden Lichtäther die Relation besteht

$$\pi\,(3645{,}42)^{-1} = \frac{a}{a_1} \cdot \frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{r}_0^2 + 1}. \tag{163}$$

Hierin ist $\mathfrak{h}$ sehr gross, $\mathfrak{r}_0$ sehr klein; das Verhältnis $a : a_1$ ist also eine ausserordentlich kleine Zahl. Um ähnliche Formeln für die inneren Konstanten (a, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{r}_0$) anderer Moleküle zu berechnen, müsste man die Formeln von Kayser und Runge benutzen, zuvor aber den noch zweifelhaft erscheinenden Anfangspunkt der Zählung genauer festlegen.

Besonders bemerkenswert erscheinen noch die von Kayser und Runge für Kupfer und Silber angegebenen Serien-Formeln. Es ist nämlich bei Kupfer:

$$10^8 \cdot \lambda^{-1} = 31591{,}6 - 131150\,N^{-2} - 1085060\,N^{-4},$$

oder

$$= 31840{,}1 - 131150\,N^{-2} - 1085060\,N^{-4}.$$

Hier ist 131150 = 4.32787,5 und für eine zweite Serie von Linienpaaren:

$$10^8 \cdot \lambda^{-1} = 31591{,}6 - 124809\, N^{-2} - 440582\, N^{-4},$$

oder

$$= 31840{,}1 - 124809\, N^{-2} - 440582\, N^{-4},$$

und hier ist 124809 = 4.31202,5. In beiden Fällen ist also das Verhältnis der beiden ersten Konstanten nahezu gleich 4, wie beim Wasserstoff. Ähnlich verhält sich das Silber. Für eine erste Serie von Linienpaaren haben wir

$$10^8 \cdot \lambda^{-1} = 30712{,}4 - 130621\, N^{-2} - 1093823\, N^{-4},$$

oder

$$= 31633{,}2 - 130621\, N^{-2} - 1093823\, N^{-4},$$

und für eine zweite Serie

$$10^8 \cdot \lambda^{-1} = 30696{,}2 - 123788\, N^{-2} - 394303\, N^{-4},$$

oder

$$= 31617{,}0 - 123788\, N^{-2} - 394303\, N^{-4}.$$

Hierin ist 130621 = 4.32454,2 und 123788 = 4.30947,0. Man wird hieraus schliessen, dass auch die Sphäroide der Atome von Silber und Kupfer sehr stark abgeplattet sind, und zwar gilt hier, analog zu (163), angenähert die Formel

$$10^8 \cdot \frac{a}{a_1} \cdot \frac{\mathfrak{h}}{\pi\,(\mathfrak{r}_0^2 + 1)} = 31600{,}0 \quad \text{für } Cu,$$
$$= 30700{,}0 \quad \text{„} \quad Ag.$$

Nimmt man an, dass a in diesen Elementen denselben Wert hat, so ergibt sich die Proportion:

$$\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{r}_0^2 + 1}\right)_H : \left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{r}_0^2 + 1}\right)_{Ag} : \left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{r}_0^2 + 1}\right)_{Cu} = 27431{,}5 : 30700{,}0 : 31600{,}0.$$

Ähnliches gilt wahrscheinlich für Gold, da es auch zur ersten Mendelejeffschen Gruppe gehört; bei Zn, Cd und Hg dagegen weicht das Verhältnis der entsprechenden Konstanten wesentlich von 4 ab. Es ist dies damit in Übereinstimmung, dass die Gestalt der Atome dieser letzteren Metalle nach Obigem mehr kugelförmig ist.