

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1973

MÜNCHEN 1974

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Kontaktrelationen (3. Mitteilung)

Von Georg Aumann in München

Vorgelegt am 1. Juni 1973

Die folgenden Betrachtungen stellen sich die Aufgabe, dem Begriff der „Konvexität“ als Hüllenoperator h durch gleichzeitige Betrachtung eines Paares von Hüllenoperationen t, h in einer beliebigen Menge S eine allgemeine Fassung zu geben. Die im Falle der „Konvexität“ zu t, h gehörigen „Extremalpunktmenge“ eX (als kleinste t -abgeschlossene Menge Y mit $hY = hX$) ergeben eine Mengenoperation $X \mapsto eX, X \subset S$, die „stark idempotent“ ist. Zusätzliche Forderungen topologischen Charakters an t liefern weitere Eigenschaften von e , die im klassischen Falle der Konvexität im $\mathbf{R}^n$ wohl bekannt sind.

1. Weiteres über Hüllenoperatoren.

1.1. Neben der Kennzeichnung einer Hüllenoperation $h: \mathfrak{P}S \rightarrow \mathfrak{P}S$ durch die drei Eigenschaften der Extensivität, Isotonie und Idempotenz gibt es eine *Charakterisierung durch eine einzige „Funktionalgleichung“*, nämlich:

$$(h^*) \quad \bigwedge_{X \subset S} hX = \bigcap \{hY : Y \subset S \wedge hY \supset X\}.$$

Auf einen Beweis sei hier verzichtet (man vergleiche dazu die Bemerkung, [1] S. 70).

1.2. Das System $\mathbf{H}$ aller Hüllenoperationen in S wird durch

$$h_1 \leq h_2: \Leftrightarrow \bigwedge_{X \subset S} h_1X \subset h_2X$$

vollständig geordnet. Dabei ist für $\mathbf{H}' \subset \mathbf{H}$

$$(\inf \mathbf{H}')X = \bigcap \{hX : h \in \mathbf{H}'\} \text{ und}$$

$$(\sup \mathbf{H}')X = \bigcap \{hX : h \in \mathbf{H} \wedge \bigwedge_{h' \in \mathbf{H}'} h' \leq h\}.$$

Beweis. Es sei $h^+X := \bigcap \{hX : h \in \mathbf{H}'\}$ und $\bigcap \{h^+Y : h^+Y \supset X\} =: D$. Dann ist wegen $h^+X \supset X$ bei der Bildung von D

die Menge X ein passendes Y , somit $D \subset h^+X$. Aus $h^+Y \supset X$ folgt für jedes $h \in \mathbf{H}'$ andererseits $hY = hhY \supset hh^+Y \supset hX$. Daher ist $h^+Y \supset h^+X$ und somit auch $D \supset h^+X$. Also erfüllt $\inf \mathbf{H}' = h^+(h^*)$ und ist ein Hüllenoperator, und dasselbe gilt für $\sup \mathbf{H}'$.

1.3. Eindeutigkeitssatz. *Für jede Hüllenoperation gilt:*

$$(e) \quad \bigwedge_{\mathfrak{X} \subset \mathfrak{P}S} h(\bigcup \mathfrak{X}) = h(\bigcup \{hX : X \in \mathfrak{X}\}),$$

oder etwas schwächer ausgedrückt: Für irgend welche gleich indizierten Teilmengensysteme $(A_i)_{i \in J}$ und $(B_i)_{i \in J}$ von S gilt:

$$(i) \quad (\bigwedge_{i \in J} hA_i = hB_i) \succ h(\bigcup_{i \in J} A_i) = h(\bigcup_{i \in J} B_i).$$

Beweis. (i) besagt bei Bezugnahme auf den Abbildungsbegriff, daß die Relation zwischen $h(\bigcup_{i \in J} A_i)$ und dem System $\{(i \mapsto hA_i) : i \in J\}$ Abbildungscharakter hat, was (e) explizit wiedergibt. (e) folgt unmittelbar aus

$$h(\bigcup \mathfrak{X}) \subset h(\bigcup \{hX : X \in \mathfrak{X}\}) \subset h(h(\bigcup \{X : X \in \mathfrak{X}\})) = h(\bigcup \mathfrak{X}).$$

1.3.1. Wir erheben (e) zu einer Definition: Eine Abbildung $g : \mathfrak{P}S \rightarrow \mathfrak{P}S$ heiße *stark idempotent*, wenn

$$(si) \quad \bigwedge_{\mathfrak{X} \subset \mathfrak{P}S} g(\bigcup \mathfrak{X}) = g(\bigcup \{gX : X \in \mathfrak{X}\}).$$

Jede stark idempotente Abbildung ist auch idempotent (man setze in (si) für $\mathfrak{X}$ das einelementige System $\{X\}$). Nach dem Eindeutigkeitssatz ist also jede Hüllenoperation stark idempotent.

1.3.2. *Jede stark idempotente Operation g in S liefert eine Hüllenoperation H_g , erklärt durch*

$$H_g X := \bigcup \{Y : Y \subset S \wedge gY = gX\}.$$

Beweis. 1. $H_g X \supset X$ ist klar. – 2. $H_g H_g X = \bigcup \{Z : gZ = g(\bigcup \{Y : gY = gX\})\}$. Wegen der starken Idempotenz von g ist aber $g(\bigcup \{Y : gY = gX\}) = g(\bigcup \{gY : gY = gX\}) = ggX = gX$, somit $H_g H_g X = \bigcup \{Z : gZ = gX\} = H_g X$. – 3. Zum Beweis der Isotonie sei vorausgeschickt, daß

$$(*) \quad gH_g = g;$$

denn $g(\bigcup \{Y : gY = gX\}) = gX$, wie eben festgestellt wurde. Nun sei $X \subset Y$. Dann folgt $g(H_g X \cup H_g Y) = g(gH_g X \cup gH_g Y) = g(gX \cup gY) = g(X \cup Y) = g(Y) = gH_g Y$, somit (nach Definition von $H_g H_g Y$) $H_g Y = H_g H_g Y \supset H_g X \cup H_g Y$ oder $H_g X \subset H_g Y$.

Bemerkungen. 1. Ist h irgend eine Hüllenoperation in S , so gilt $H_h = h$, d. h. man kann jede Hüllenoperation h als eine zu einer stark idempotenten Operation g gehörige Hüllenoperation H_g darstellen. – 2. Neben (*) gilt, wie unmittelbar ersichtlich

$$(**) \quad g \subset H_g \text{ und } H_g g = H_g.$$

2. Konvexität.

2.1. Jede Hüllenoperation h in S hat die Eigenschaft, daß es zu jedem $X \subset S$ ein größtes $Y \subset S$ gibt mit $hY = hX$, nämlich $Y := hX$. Dagegen besitzt die Frage nach einem „kleinsten“ Y mit $hY = hX$ im allgemeinen keine positive Antwort. Im Verfolg dieser Frage wäre nämlich die Menge

$$X_+ := \bigcap \{Y : Y \subset S \wedge hY = hX\}$$

zu betrachten. Aber nicht für jedes X und jedes h ist $hX_+ = hX$.

Beispiel: h ist die topologische Hülle im $\mathbf{R}^1$ und $X = [0; 1]$. Hier ist $X_+ = X \cap \mathbf{Q} \cap \mathbf{Q}$, wobei $\mathbf{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen bezeichnet, also $hX_+ = \emptyset = X = hX$.

2.2. Die Angelegenheit wird aussichtsreicher, wenn man verallgemeinert: Man betrachtet neben h noch eine zweite Hüllenoperation $t : \mathfrak{P}S \rightarrow \mathfrak{P}S$ in S und sucht jetzt nach einem h -hüllengleichen Y mit kleinster t -Hülle. Jetzt haben wir es also mit der Operation $e := e_{t,h}$ zu tun, erklärt durch

$$(2) \quad eX := \bigcap \{tY : Y \subset S \wedge hY = hX\}, \quad X \subset S,$$

und mit der Frage, wann

$$(2^+) \quad heX = hX$$

gilt.

2.2.1. Daß es zu jedem h immer ein t gibt, so daß (2^+) sogar für alle $X \subset S$ gilt, ist fast trivial; man nehme $t := h$, so ist $e = h$, also $he = h$.

2.2.2. Ein nicht triviales Beispiel liefern die Extrempunktmengen bei den kompakten konvexen Teilmengen des $\mathbf{R}^n$. Hier ist S eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, hX die abgeschlossene (!) konvexe Hülle und tX die abgeschlossene Hülle (beides bezüglich der üblichen Topologie im $\mathbf{R}^n$ verstanden). (2^+) gilt für alle $X \subset S$. Es sei hier noch bemerkt, daß (2^+) nicht mehr für alle X gilt, wenn man das Beispiel dahin verallgemeinert, daß man S als nicht-beschränkte konvexe Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ zuläßt, z. B. $S = \mathbf{R}^n$ voraussetzt. Für einem Halbraum X ist jetzt $eX = \emptyset$, also (2^+) nicht erfüllt.

2.3. Die Beziehung (2^+) ist etwas verwickelter Art und es ist schwierig, ohne besondere Voraussetzungen bequeme Bedingungen aufzustellen, die das Bestehen von (2^+) garantieren. Wir müssen daher praktisch (2^+) selbst als Forderung stellen. In leichter Anpassung an das Beispiel 2.2.2 setzen wir als Erstes voraus, daß

$$(a) \quad ht = h$$

gilt, womit bereits allgemein $heX \subset hX$ gesichert ist; denn mit (a) ergibt sich sofort $eX \subset hX$ und damit $heX \subset hX$. Im übrigen verlangen wir, noch ein wenig über (2^+) hinausgehend und mit Rücksicht auf (a), wenn $\mathfrak{F}_t$ das System aller t -abgeschlossenen Mengen bezeichnet, die Gültigkeit von

$$(k) \quad \bigwedge_{\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_t, X \subset S} (\bigwedge_{F \in \mathfrak{F}} hF = hX) \succ h(\bigcap \mathfrak{F}) = hX,$$

einen Beziehung welche einen gewissen Zusammenhang zwischen den h - und t -Hüllen herstellt, und definieren:

Sind h und t Hüllenoperationen in S , so heißt h eine *Konvexität in S bzgl. t* , kurz *t -Konvexität*, wenn h und t (a) und (k) erfüllen. Bemerkung. Aus (a) folgt auch $th = h$; denn es ist $th \supset h$ und andererseits $th \subset hth = hh = h$.

Satz. Ist h t -konvex, so gilt (2^+) für alle $X \subset S$.

Beweis. Man setze in (k) $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}_t$ und berücksichtige (a). Ist h t -konvex, so heißt

$$eX = \bigcap \{F : F \in \mathfrak{F}_t \wedge hF = hX\}$$

die (t, h) -Extremalpunktmenge von X ; sie ist die kleinste t -abgeschlossene Teilmenge von S , deren h -Hülle gleich der von X ist.

2.3.0. Die *Orizykel-Konvexität* als ein Beispiel einer Konvexität ohne Linearität.

1. Es sei $U := \{z : |z| < 1\}$ die Kreisscheibe vom Radius 1 in der komplexen z -Ebene; ferner sei $A := \{a : 0 < |a| < 1\}$. Für $a \in A$ heißt die Punktmenge

$$Z_a := \{z : z \in U \wedge |z - a| \leq 1 - |a|\}$$

eine *Orizykelscheibe*, kurz *OZ-Scheibe*, in U mit dem *Ursprung* $u := a / |a|$. Je zwei verschiedene Punkte z', z'' bestimmen eindeutig die „spindelförmige“ Menge (Kreisziweck)

$$T_{z', z''} := Z_{a_1} \cap Z_{a_2},$$

wobei Z_{a_1}, Z_{a_2} jene OZ-Scheiben bezeichnen, auf deren Peripherien z' und z'' liegen.

2. Für ein festes ϱ , $0 < \varrho < 1$, betrachten wir auf der Menge $X := \{z : |z| \leq \varrho\}$ neben der Hülle t der gewöhnlichen Topologie die Hüllenoperation k , deren k -abgeschlossenen Mengen als die Mengen

$$K_B := X \cap \left(\bigcap \{Z_a : a \in B\} \right) \text{ mit } B \subset A$$

erklärt sind; es ist dann für $Y \subset X$

$$kY = \bigcap \{K_B : B \subset A \wedge K_B \supset Y\}$$

und es gilt der

Satz 1. Es ist $Y \subset X$ k -abgeschlossen, d. h. $kY = Y$ genau dann, wenn Y t -abgeschlossen $\wedge \bigcap_{z', z'' \in Y} T_{z', z''} \subset Y$. – 2. k ist t -konvex.

Zum Beweis sei nur bemerkt, daß sich die Extremalpunkte einer t -abgeschlossenen Menge Y bzgl. k hier (in analoger Weise wie im Beispiel 2.2.2) in folgender Weise ergeben: Zu jedem Ursprung u ($|u| = 1$) gibt es eine minimale, Y überdeckende OZ-Scheibe Z_a , auf deren Peripherie Z_a' genau ein Extremalpunkt liegt, wenn $Z_a' \cap Y$ aus nur einem Punkt besteht, nämlich dieser Punkt selbst, oder genau zwei Extremalpunkte, wenn $Z_a' \cap Y$

mehrpunktig ist, nämlich jene zwei Punkte p, q von $Z_a^r \cap Y$, für welche der (u nicht enthaltene) Peripheriebogen $\widehat{pq}$ von Z_a alle Punkte von $Z_a^r \cap Y$ trägt.

2.3.1. *Ist h t -konvex, so ist e stark idempotent.*

Beweis. Es ist $x \in eZ$ gleichwertig mit der Aussage

$$\forall_{F \in \mathfrak{F}_t} x \in F \wedge hF = hZ.$$

Um also die starke Idempotenz von e zu erhalten, haben wir die Gleichwertigkeit der Aussagen

$$\forall_{F \in \mathfrak{F}_t} x \in F \wedge hF = h(\bigcup \mathfrak{X}) \text{ und}$$

$$\forall_{F' \in \mathfrak{F}_t} x \in F' \wedge hF' = h(\bigcup \{eX : X \in \mathfrak{X}\})$$

zu beweisen. Nach 1.3 ist aber $h(\bigcup \mathfrak{X}) = h(\bigcup \{hX : X \in \mathfrak{X}\}) = h(\bigcup \{heX : X \in \mathfrak{X}\}) = h(\bigcup \{eX : X \in \mathfrak{X}\})$. Die fragliche Gleichwertigkeit wird also durch $F = F'$ hergestellt.

2.3.2. *Ist h t -konvex, so gilt (mit der Bezeichnung von 1.3.2)*

$$H_e = h.$$

Beweis. Es ist $H_e X$ gleich $\bigcup \{Y : eY = eX\}$ und wegen $eh = e$ auch gleich $\bigcup \{hY : eY = eX\}$. Aus $eY = eX$ aber folgt $heY = heX$ oder $hY = hX$, also $H_e X = hX$.

2.3.3. Über die Menge $\mathbf{T}_h$ der Hüllenoperationen t , bezüglich welcher h t -konvex ist, läßt sich folgendes aussagen:

$$\bigwedge_{t, t', t'' \in \mathbf{H}} (\{t, t'\} \subset \mathbf{T}_h \wedge t \leq t'' \leq t') \succ t'' \in \mathbf{T}_h$$

(Man sagt auch, $\mathbf{T}_h$ sei „intervallkonvex“ in $\mathbf{H}$).

Beweis. 1. Wegen $t'' \leq t'$ ist $ht'' \leq ht' = h$. Da aber auch $ht'' \geq h$, so folgt $ht'' = h$. - 2. $e''X = \bigcap \{t''Y : hY = hX\} \supset \bigcap \{tY : hY = hX\} = eX$, also $hX = heX \subset he''X \subset hX$, also $he''X = hX$ für jedes $X \subset S$.

Bemerkung. Da h h -konvex, so ist bei t -Konvexität von h auch h t' -konvex für jede Hüllenoperation t' zwischen t und h (h ist ja die größte Hüllenoperation, bezüglich welcher h konvex ist).

2.3.4. Hinsichtlich der Frage nach minimalen Elementen (oder gar nach einem kleinsten) in T_h sei hier nur das folgende Resultat genannt:

Ist h die klassische Konvexität auf $S := [0; 1]$, bezogen auf die gewöhnliche Topologie t (vgl. 2.2.2.), so ist t in T_h minimal.

Beweis. Es sei t' eine Hüllenoperation in S mit $t' \leq t$ und $t' \neq t$. Dann gibt es ein $X_0 \subset S$ und ein $a \in S$, so daß $tX_0 \ni a$ und $t'X_0 \subset (tX_0) \setminus \{a\}$. Ohne Beschränkung können wir $a = 0$ setzen. Aus X_0 können wir zwei Teilmengen Y_1, Y_2 ausgreifen, so daß $tY_1 \ni 0$, $tY_2 \ni 0$, $\sup Y_1 = \sup Y_2 = \sup X_0 =: \varrho > 0$ und $(tY_1) \cap (tY_2) \cap (0; \varrho/2) = \emptyset$. Es ist $hY_1 = hY_2 = hX_0 = [0; \varrho]$ und wegen $t'Y_i \subset t'X_0 \subset (tX_0) \setminus \{0\}$ und $t'Y_1 \cap t'Y_2 \cap (0; \varrho/2) = \emptyset$ auch $t'Y_1 \cap t'Y_2 \cap [0; \varrho/2) = \emptyset$, also $e'X_0 \cap [0; \varrho/2) = \emptyset$ und somit $(he'X_0) \cap [0; \varrho/2) = \emptyset$, also $he'X_0 \neq hX_0$, d. h. h nicht konvex bezüglich t' : t ist minimal.

3. Weitere Eigenschaften von e ergeben sich, wenn man von t gewisse „topologische“ Eigenschaften fordert.

3.1. *Ist t ein topologischer Hüllenoperator in S und ist h t -konvex, so ist e „endlich unteradditiv“, d. h.*

$$\bigwedge_{X_1, X_2 \subset S} e(X_1 \cup X_2) \subset eX_1 \cup eX_2.$$

Beweis. Wenn $z \notin eX_1$ und $z \notin eX_2$, so gibt es Y_1 und Y_2 , sodaß $hY_i = hX_i$ und $z \notin tY_i$, $i = 1, 2$. Da t topologisch ist, so folgt daraus $z \notin t(Y_1 \cup Y_2)$, ferner wegen 1.3 $h(X_1 \cup X_2) = h(Y_1 \cup Y_2)$, also nach Definition von e auch $z \notin e(X_1 \cup X_2)$.

3.2. Um die Unteradditivität für beliebige Mengensysteme zu erreichen, brauchen wir die Regularität und Kompaktheit der Operation t .

I. t heißt *regulär*, wenn t durch ein KT-System $\mathfrak{B}$ darstellbar ist, für welches gilt:

$$\bigwedge_{x \in S, V \in \mathfrak{B}} x \in V \succ \bigvee_{V' \in \mathfrak{B}} x \in V' \wedge tV' \in \mathfrak{B}.$$

II. t heißt *kompakt*, wenn für das System $\mathfrak{F}_t$ aller t -abgeschlossenen Mengen der „Durchschnittssatz“ gilt:

$$\bigwedge_{\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_i} (\bigwedge_{\mathfrak{F}' \in \mathfrak{F}} \mathfrak{F}' \text{ endlich } \succ \bigcap \mathfrak{F}' \neq \emptyset) \succ \bigcap \mathfrak{F} \neq \emptyset.$$

Es gilt der Satz:

Ist t eine reguläre und kompakte Hüllenoperation in S und ist h t -konvex, so ist e „stark t -unteradditiv“, d. h.

$$\bigwedge_{\mathfrak{X} \subset \mathfrak{P}_S} e(\bigcup \mathfrak{X}) \subset t(\bigcup \{eX : X \in \mathfrak{X}\}).$$

Beweis: Es sei z ein Punkt, der nicht zur rechten Seite der zu beweisenden Inklusion gehört. Dann gibt es ein $V \in \mathfrak{B}$ mit $V \ni z$ und V fremd zu $\bigcup \{eX : X \in \mathfrak{X}\} =: W$. Wegen der Regularität gibt es weiter ein $V' \subset V$ mit $tV' \subset V$, so daß auch tV' fremd zu W ist, d. h. $eX \cap tV' = \emptyset$ für alle $X \in \mathfrak{X}$. Wegen $eX = \bigcap \{F : F \in \mathfrak{F}_i \wedge hF = hX\}$ und wegen der Kompaktheit gibt es endlich viele $F_1, \dots, F_n$ mit $hF_i = hX$ und $F_X := F_1 \cap \dots \cap F_n$ fremd zu tV' und erst recht zu V' , und damit ist auch $F^+ := t \bigcup \{F_X : X \in \mathfrak{X}\}$ fremd zu V' . Ferner ist wegen der Konvexität $\bigwedge_{X \in \mathfrak{X}} hF_X = hX$. Nach dem Eindeutigkeitssatz folgt mit $X^* := \bigcup \mathfrak{X}$ $hF^+ = h(\bigcup \{F_X : X \in \mathfrak{X}\}) = h(\bigcup \{hX : X \in \mathfrak{X}\}) = hX^+$. Daraus folgt $eX^+ \subset F^+$, also eX^+ fremd zu V' , somit $z \notin eX^+$.

Ostern 1973.

Literatur

- [1] G. Aumann, Kontaktrelationen, Sitz. Ber. Bayer. Ak. Wiss., Math.-Nat. Kl., 1970, S. 67-77; [2] dto. (2. Mitteilung), 1971, S. 119-122.