BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1963

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkungen über normale Systeme linearer partieller Differentialgleichungen. II

Von Georg Aumann in München

Vorgelegt am 8. November 1963

Die kürzlich[1] entwickelte Methode der „matriziellen Trennung der Veränderlichen" liefert in Verbindung mit dem Superpositionsprinzip eine beträchtliche Mannigfaltigkeit von Lösungen der betreffenden partiellen Differentialgleichungen; ihr wahrer Umfang oder gar allumfassender Charakter erweist sich erst beim Studium des Anfangswertproblems. Die folgenden Bemerkungen gehen in diese Richtung.

Zunächst wird die in „I" aufgeworfene Frage, ob sich jede holomorphe Funktion $f(z)$ durch ein Integral der Form $\int e^{sz}\, dm(s)$ mit einem komplexwertigen Maß m darstellen läßt, positiv beantwortet. Ferner wird die in „I" in etwas speziellerer Form behandelte Matrix-Differentialgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum H_i U K_i + \sum B_j \frac{\partial U}{\partial x_j} \tilde{K}_j \tag{1}$$

unter der Voraussetzung betrachtet, daß die Matrixkoeffizienten konstant sind, dabei H_i und B_j beliebig sein dürfen, dagegen die K_i und $\tilde{K}_j$ einem kommutativen Ring $\mathfrak{K}$ angehören. Um die zu gewinnende Mannigfaltigkeit von Lösungen möglichst umfangreich zu machen, bequemen wir uns hier zu der Auffassung, daß die Lösung der gewöhnlichen Matrix-Differentialgleichung

$$\frac{dZ}{dt} = \sum_i A_i Z B_i$$

mit konstanten Matrizen A_i und B_i unproblematisch sei, ebenso auch die Frage nach der Abhängigkeit der Integrale von den

[1] G. Aumann, Bemerkungen über normale Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. I. Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., 1963, S. 7–13.

Koeffizienten. Bei analytischen Anfangsbedingungen für (1) im Sinne des Cauchy-Kowalewskischen Problems kommt man dabei auf ein „matrizielles Momentenproblem", das von (1) völlig abgetrennt formuliert ist und selbständiges Interesse verdient. Schließlich können wir noch durch ein Beispiel darauf hinweisen, daß die matrizielle Trennung der Veränderlichen in einfachen Fällen auch auf Systeme mit veränderlichen Koeffizienten anwendbar ist; z. B. gehören die Tricomi-Gleichungen hierher. Für diese liefert die hier verfolgte Methode neuartige Gesichtspunkte der Behandlung.

1. Die in der vorausgehenden Note I aufgeworfene Frage nach der Darstellbarkeit einer jeden holomorphen Funktion durch ein Integral der Form $\int e^{sz}\, dm(s)$, worin m ein komplexwertiges Maß in der komplexen s-Ebene bezeichnet, findet durch folgenden Satz eine positive Antwort:

Ist $f(z) = \sum_\nu a_\nu z^\nu$ eine in $|z| < 1$ reguläre Potenzreihe, so gibt es (auf vielfältige Weise) ein komplexes Maß m, so daß $f(z) = \int e^{sz}\, dm(s)$ für $|z| < 1$; dabei ist das Integral über die ganze s-Ebene zu erstrecken.

Beweis. Man betrachte die Kreise $|s| = r_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit Radien $r_n > r_{n+1} > 0$ und $\sum_n r_n < +\infty$. Wenn M eine Teilmenge der s-Ebene mit der Eigenschaft, daß ihr Schnitt mit jedem der genannten Kreise im Sinne des dazu gehörigen Bogenlängenmaßes λ meßbar ist, so nehme man als Maß $\mu(M)$ die Summe der Maße aller dieser Kreisschnitte:

$$\mu(M) = \sum_n \lambda\,(M \cap \{s : |s| = r_n\}).$$

Für $|s| = r_n$ werde

$$\varphi(s) = \frac{1}{2\pi} e^{-in \operatorname{arc} s}\, r_n^{-(n+1)} f^{(n)}(0),$$

und sonst $\varphi(s) = 0$ gesetzt. Ein Maß der gesuchten Art ist dann

$$m(M) = \int_M \varphi(s)\, d\mu(s).$$

Mit Verwendung der Potenzreihe für e^{sz} verifiziert man leicht die Gültigkeit der behaupteten Gleichung.

2. Bei der Behandlung der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_i H_i U K_i + \sum_j B_j \frac{\partial U}{\partial x_j}$$

hatten wir in der ersten Mitteilung angenommen, daß die quadratischen Matrizen B_j nicht-singulär sind, und dasselbe auch für eine Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} = B\,\mathfrak{u} + \sum_j B_j \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x_j}. \qquad (\mathfrak{u}\ \text{Vektor}) \tag{2}$$

Aber gerade in wichtigen Fällen ist diese Bedingung nicht erfüllt. Der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ für das Skalar u entspricht die Vektordifferentialgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} = B_1 \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}$$

mit singulären Matrizen B_1 und B_2, und der Wärmegleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ist das System

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} = B_0\,\mathfrak{u} + B_1 \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} + B_2 \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}$$

ebenfalls mit singulären Koeffizientenmatrizen zugeordnet. Man braucht aber im nachfolgenden Ansatz auf solche Singularität keine Rücksicht zu nehmen.

3. Zunächst eine Zwischenbemerkung.

Die gewöhnliche homogen lineare Matrixdifferentialgleichung

$$\frac{dZ}{dt} = \sum_{i=1}^{k} A_i Z B_i$$

kann ohne besondere zusätzliche Überlegungen nach der Methode von Picard behandelt werden. Um die Anfangsbedingung $Z(t_0) = C^*$ zu garantieren, setzt man $Z_0(t) = C^*$,

$$Z_{n+1}(t) = C^* + \int_{t_0}^{t} \sum_i A_i Z_n(s) B_i \, ds, \; n = 0, 1, \ldots$$

Definiert man Konvergenz mittels der Norm $\| A \|$, die gleich dem Maximum der absoluten Beträge der Elemente der Matrix A ist, so erhält man die Abschätzung

$$\| Z_{n+1}(t) - Z_n(t) \| \leqq k a b \int_{t_0}^{t} \| Z_n(s) - Z_{n-1}(s) \| \, ds,$$

worin a bzw. b eine Schranke aller $\| A_i \|$ bzw. $\| B_i \|$ bedeutet. Hieraus erschließt man nach den üblichen Methoden die Konvergenz der Z_n gegen eine Lösung und auch die Eindeutigkeit derselben.

4. Um Lösungen der Gleichung (1) zu gewinnen, bezeichnen wir mit C_0, $C_1, \ldots, C_m$ (m ist die Anzahl der Variablen x_j) irgendwelche Matrizen aus $\mathfrak{K}$ und setzen

$$U = Z(t)\, e^{C_1 x_1 + \cdots + C_m x_m} C_0.$$

Wegen der Vertauschbarkeit der Exponentialfaktoren und von C_0 mit den K_i und $\tilde{K}_j$ ergibt sich für Z das gewöhnliche System

$$\frac{dZ}{dt} = \sum_i H_i Z K_i + \sum B_j Z C_j \tilde{K}_j.$$

Die allgemeine Lösung dieses Systems sei mit $Z(t, C^*, C_0, \ldots, C_m)$ bezeichnet, $C^* = Z(t_0, C^*, C_1, \ldots, C_m)$. Dann ergibt sich eine allgemeinere Lösung von (1) nach dem Superpositionsprinzip in der Gestalt

$$(1^*) \qquad U = \int_{(C)} Z(t, C^*, C_1, \ldots, C_m)\, e^{C_1 x_1 + \cdots + C_m x_m} C_0 \, dm(C),$$

wo m ein Maß im (endlich-dimensionalen) Raum (C) der $C = (C^*, C_1, \ldots, C_m, C_0)$ bedeutet.

Ein analoger Ansatz führt bei (2) auf die Gleichung

$$\frac{dZ}{dt} = B_0 Z + \sum_j B_j Z C_j,$$

worin die C_j Matrizen aus einem kommutativen Ring $\mathfrak{C}$ bezeichnen. Nennt man die allgemeine Lösung dieser Gleichung wieder $Z(t, C^*, C\ , \ldots, C_m)$, so erhält man in

$$(2^*) \qquad \mathfrak{u} = \int_{(C)} Z(t, C^*, C_1, \ldots, C_m)\, e^{C_1 x_1 + \cdots + C_m x_m}\, \mathfrak{c} \, dm(C),$$

wo m ein Maß im Raume der $C = (C^*, C, \ldots, C_m, \mathfrak{c})$ bezeichnet ($\mathfrak{c}$ ein beliebiger Vektor) Lösungen von (2).

Bemerkung. In (1^*) bzw. (2^*) kann man $C_0\, dm(C)$ bzw. $\mathfrak{c}\, dm(C)$ allgemeiner ersetzen durch dM, ein Maß im Raume der $(C^*, C_1, \ldots, C_m)$ mit Werten aus $\mathfrak{K}$, bzw. durch $d\mathfrak{m}$, ein vektorwertiges Maß im Raume der $(C^*, C_1, \ldots, C_m)$.

Will man mit den obigen Formeln das *Anfangswertproblem* ($t_0 = 0$) lösen, so führt dies auf die Frage, ob, etwa im Falle (1), die vorgegebene Funktion $U(0, x_1, \ldots, x_m) = V(x_1, \ldots, x_m)$ durch geeignete Wahl des matrixwertigen Maßes M (vgl. vorausgehende Bemerkung) in der Gestalt

$$(1^{**}) \qquad V = \int\limits_{(C^*, C_1, \ldots, C_m)} C^* e^{C_1 x_1 + \cdots + C_m x_m}\, dM$$

darstellbar ist.

Setzt man Analytizität von $V(x_1, \ldots, x_m)$, etwa in der Umgebung der Stelle $x_1 = \ldots = x_m = 0$, voraus und die gleichmäßige Konvergenz von (1^{**}) in einer solchen Umgebung, so ergibt sich für die partiellen Ableitungen von V an dieser Stelle

$$\frac{\partial^{k_1 + \ldots k_m} V}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} = \int C^* C_1^{k_1} \ldots C_m^{k_m}\, dM$$

ein System von Gleichungen, was man als ein „matrizielles Momentenproblem" bezeichnen kann.

Besondere Beachtung verdient der Umstand, daß *das Anfangswertproblem im Falle* (1) gemäß (1^{**}) *von der Gleichung* (1) *völlig abgetrennt ist, also für alle Gleichungen* (1) *formal dasselbe ist*; die Besonderheiten von (1) kommen in der Lösung $Z(t, C^*, C_1, \ldots, C_m)$ und in Konvergenzfragen zur Geltung.

5. Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß man auch bei Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten in einfachen Fällen die hier verwendete Methode der matriziellen Trennung der Veränderlichen anwenden kann. Hierzu als Beispiel die *Tricomi-Gleichung*

$$(3) \qquad u_{xx} - x u_{yy} = 0.$$

Mit $u_x = v$, $u_y = w$, $\mathfrak{u} = \binom{v}{w}$ und $T = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nimmt diese die Form

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} = T \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} \tag{3'}$$

an.

Der folgende Ansatz ist auch unter der allgemeineren Voraussetzung durchführbar, daß T irgendeine nur von x abhängige Matrix bezeichnet. Wir setzen

$$\mathfrak{u} = X(x)\, Y(y)\, \mathfrak{c} \tag{4}$$

mit einem konstanten Vektor $\mathfrak{c}$. Wählen wir noch eine beliebige konstante Matrix C_1, so ist durch

$$Y' = C_1 Y, \quad X' = T X C_1 \tag{5}$$

Gleichung (3') erfüllt.
Verlangen wir dabei, etwa mit $y_0 = 0$, daß $Y(y_0) = E$ und $X(x_0) = C_2$, wo E die Einheitsmatrix und C_2 irgend eine weitere konstante Matrix bedeuten, so liefert Superposition

$$\mathfrak{u} = \int\limits_{(C_1, C_2)} X(x, C_2)\, e^{C_1 y}\, d\,\mathfrak{m}\,(C_1, C_2)$$

ein allgemeineres Integral von (3'); darin bedeutet $\mathfrak{m}$ ein vektorwertiges Maß im Raume aller Matrizenpaare (C_1, C_2).

Betrachtet man das Anfangswertproblem zu (3') in der Form, daß

$$\mathfrak{u}\,(x_0, y) = \mathfrak{u}_0\,(y)$$

vorgegeben ist, so stellt sich die Aufgabe, die Gleichung

$$\mathfrak{u}_0\,(y) = \int\limits_{(C_1, C_2)} C_2\, e^{C_1 y}\, d\,\mathfrak{m}\,(C_1, C_2) \tag{6}$$

durch geeignete Wahl des vektorwertigen Maßes $\mathfrak{m}$ zu befriedigen.

Ist $\mathfrak{u}_0(y)$ analytisch in einer Umgebung von $y = 0$ und dort das Integral in (6) gleichmäßig konvergent, so gilt auch

$$\frac{d^n \mathfrak{u}_0}{dy^n}\,(0) = \int\limits_{(C_1, C_2)} C_2\, C_1^n\, d\,\mathfrak{m}\,(C_1, C_2),$$

so daß die Vorgabe der Ableitungen $\mathfrak{a}_n$ von $\mathfrak{u}_0$ an der Stelle $y = 0$ auf das „*matrizielle Momentenproblem*"

$$\mathfrak{a}_n = \int\limits_{(C_1, C_2)} C_2 C_1^n \, d\,\mathfrak{m}\,(C_1, C_2), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

führt. Ist das Maß $\mathfrak{m}$ auf $C_2 = E$ konzentriert, so verbleibt das einfachere Momentenproblem

$$\mathfrak{a}_n = \int\limits_{(C)} C^n \; d\,\mathfrak{m}\,(C), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Darüber soll bei anderer Gelegenheit berichtet werden.

Wir kommen auf den Fall, daß T die obige spezielle Form hat, zurück. Gleichung (5) für X ergibt für die zweite Spalte $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \mathfrak{p}$ von X^T eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(5') \qquad \mathfrak{p}'' = x A \,\mathfrak{p}$$

mit $A = (C_1^T)^2$. Schränken wir C_1 so ein, daß A verschiedene charakteristische Wurzeln a_1, a_2 hat (die übrigens reell sind, wenn es die von C_1 sind), so können wir durch Transformation auf die Normalform $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ übergehen, und erhalten für das transformierte $\mathfrak{p}$, nämlich $\tilde{\mathfrak{p}}$, die Gleichung $\tilde{\mathfrak{p}}'' = x \tilde{A} \tilde{\mathfrak{p}}$. Mit $\tilde{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ zerfällt diese Gleichung in

$$p_1'' = x\, a_1 p_1, \quad p_2'' = x\, a_2 p_2.$$

Für die Beherrschung der Gleichung (3) ist also die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - x y = 0$$

von grundsätzlicher Bedeutung.

Bei der Tricomi-Gleichung zweiter Art

$$(3^*) \qquad u_{xx} - y\, u_{yy} = 0$$

ist ein analoger Ansatz durchführbar; jedoch erhält man für die Matrix $Y(y)$ eine Gleichung $S\, Y' = Y C_1$ mit einer Matrix $S = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, die für $y = 0$ singulär ist, was eine Unterscheidung der Fälle $y \geq 0$ und $y \leq 0$ notwendig macht.