Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1954

München 1955
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Beiträge zur Entwicklung numerischer Verfahren für programmgesteuerte Rechenanlagen

I. Quadratisch konvergente Durchführung der Bernoulli-Jacobischen Methode zur Nullstellenbestimmung von Polynomen

Von **Friedrich L. Bauer** in München

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 8. Oktober 1954

Die zunehmende Verwendung moderner programmgesteuerter Rechenanlagen hat die Aufgaben und Methoden der praktischen Mathematik belebt und bereichert. Den veränderten funktionalen Eigenschaften dieser Rechenanlagen entsprechend ist die numerische Analysis umzugestalten und zu ergänzen, kurz, eine neue praktische Mathematik für Rechenanlagen zu entwickeln.

Die vorliegende Untersuchung behandelt ein Teilproblem aus diesem Aufgabenkreis, nämlich das Studium maschinenbrauchbarer Iterationsverfahren für die Auflösung algebraischer Gleichungen, also für ein Problem, das bei den verschiedensten Anwendungen (einschließlich Eigenwertprobleme) immer wieder auftritt.

Unter den neuen Beurteilungsgesichtspunkten verdient manches halbvergessene Verfahren wieder ins Licht gerückt zu werden. Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchung war das klassische Bernoullische Verfahren, das zur Bestimmung reeller einfacher Nullstellen geradezu ideal zu nennen wäre, wenn es nicht unzureichend, nämlich nur linear konvergierte. Deshalb hat man ihm in der Praxis des Handrechners das Verfahren von Graeffe vorgezogen. Für programmgesteuerte Rechenanlagen mit festem Komma und auch solche mit gleitendem Komma ist das Graeffesche Verfahren wenig geeignet, auch muß ihm zur Bestimmung konjugiert-komplexer Paare von Nullstellen ein wesensfremder Zusatz aufgepfropft werden, dessen programm-

gesteuerte Durchführung wiederum umständlich und unbequem ist.

Eine auf Jacobi zurückgehende natürliche Erweiterung der Bernoullischen Methode, die von Aitken wieder in die Praxis eingeführt worden ist, löst die Aufgabe der Bestimmung eines komplexen Nullstellenpaares, vom Organisatorischen her gesehen, vorteilhafter. Wir teilen nun im folgenden ein Verfahren mit, das auch die Iterationsfolge von Bernoulli und Jacobi entscheidend abkürzt; die Konvergenz ist nunmehr quadratisch und ebenso rasch wie beim Graeffeschen Verfahren.

Ein Gesamtschritt unserer abgekürzten Iteration besteht zunächst aus n Schritten der gewöhnlichen Bernoullischen Iteration in einer Variante, die auf Lagrange zurückgeführt werden kann; sie ist in ihren Vorzügen anscheinend wenig bekannt. Sie gestattet unter anderem eine einfache laufende Verprobung und liefert direkt das Polynom, dem die approximierte Nullstelle fehlt. Der Prozeß ist ebenso wie die gewöhnliche Bernoullische Methode selbstkorrigierend, programmierungstechnisch ist er günstig. Der besondere Vorteil der Variante besteht nun aber darin, daß aus diesen n Zwischenergebnissen durch eine Summierung mit geeigneten Gewichtsfaktoren eine neue Approximationsstufe erreicht wird, die einer Verdoppelung der schon zurückgelegten Schritte entspricht und damit jeweils ungefähr die doppelte Anzahl genauer Stellen liefert. Es existiert wieder eine einfache Verprobungsmöglichkeit, außerdem ist auch der Summationsschritt und damit die gesamte abgekürzte Iteration numerisch stabil hinsichtlich wiederholter Rundungsfehler.

Die abgekürzte Iteration kann, abgesehen von simultanen Skalenänderungen (in Zweier- oder Zehnerpotenzen) divisionsfrei geführt werden und eignet sich damit besonders auch für die Nullstellenbestimmung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten.

Es sei noch die Bemerkung gestattet, daß die Abkürzung der Iteration mit der Aitkenschen Konvergenzbeschleunigung (δ^2-Prozeß) nichts zu tun hat.

Die Bestimmung eines Paares komplexer Nullstellen geschieht so, daß nach einem Differenzprozeß, der formal mit der «cross-multiplication» von Routh zusammenfällt, unmittelbar das

Polynom approximiert wird, dem der zu diesem Paar gehörige quadratische Faktor fehlt. Dieser selbst ergibt sich nebenbei, man erreicht das Endergebnis von Jacobi und Aitken nur auf einem anderen Weg.

Auch der Fall mehrfacher, realistischer gesprochen, nahezu zusammenfallender Nullstellen macht keine Ausnahme und bereitet nicht mehr als die ihm naturgemäß eigenen Schwierigkeiten. Für die Diskussion sei auf den Text verwiesen.

Die Untersuchungen für den Fall von Nullstellen gleichen Betrages führen in eine Richtung, die von anderer Seite her kürzlich Herr Rutishauser[1] eingeschlagen hat. Die Kenntnis der Rutishauserschen Ergebnisse war mir eine wertvolle Stütze. Jedoch ist unsere Tendenz eine andere als die von Rutishauser in seinem einen viel allgemeineren Fall betreffenden Verfahren. Gewisse Ansatzpunkte sind auch schon in einer Arbeit von Silva[2] enthalten.

Alle die praktische Durchführung betreffenden Untersuchungen werden in einer gesonderten Abhandlung publiziert werden.

Zusatz bei der Korrektur: In dieser Abhandlung wird der Prozeß der abgekürzten Iteration erweitert für den Fall, daß eine Nullstelle, die nicht notwendig vom größten Betrag ist, unmittelbar bestimmt werden soll.

§ 1. Der Algorithmus der Iteration mit x mod. $P(x)$

1.1. Die Methode von *Daniel Bernoulli* (1728)[3]

Gegeben sei ein Polynom

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

mit beliebigen Koeffizienten, jedoch seien die Nullstellen einfach und nicht verschwindend. Sie mögen nach einer nicht aufsteigenden Folge der Beträge numeriert sein, also

[1] H. Rutishauser, ZAMP, 5, 233. Herr Rutishauser hat mir freundlicherweise in sein Manuskript Einblick gewährt, wofür ich ihm herzlich danken darf.

[2] J. Sebastião e Silva, Complementi al metodo di Gräffe, II. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 1, 548–552 (1946).

[3] Commentarii Acad. Sc. Petropol. III (1732).

$$|\xi_1| \geqq |\xi_2| \geqq \cdots \geqq |\xi_n| > 0. \tag{2}$$

α_m bezeichne eine gewichtete Summe der m-ten Potenzen der Nullstellen ξ_ν mit irgendwelchen, aber festen Gewichten e_ν,

$$\alpha_m = e_1 \xi_1^m + e_2 \xi_2^m + \cdots + e_n \xi_n^m. \tag{3}$$

Selbstverständlich gilt mit $P(\xi_i) = 0$ auch $\sum_\gamma e_\gamma \xi_\gamma^k P(\xi_\gamma) = 0$ und damit die Bernoulli-Eulersche Rekursionsformel

$$\alpha_{n+k} = -a_1 \alpha_{n+k-1} - a_2 \alpha_{n+k-2} - \cdots - a_n \alpha_k, \tag{4}$$

welche gestattet, aus n aufeinanderfolgenden Werten, etwa $\alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}$, alle weiteren zu berechnen.

Der Kern der Bernoullischen Methode liegt nun in der Tatsache, daß man die Nullstelle ξ_1 erhält als

$$\xi_1 = \lim \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \quad \text{falls } |\xi_1| > |\xi_2| \tag{5}$$

ist (und falls das Gewicht e_1 in der Darstellung (3) der α_m nicht verschwindet, die Folge der Anfangswerte $\alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}$ also nicht unglücklich gewählt ist). Dabei ist es gleichgültig, ob man die Folge der α_i nach der Bernoulli-Eulerschen Differenzengleichung (4) erhält oder anders, zum Beispiel nach der folgenden Variante von Lagrange.

1.2. Die Variante von *Lagrange*[1]

Mit $P_\nu(x)$ bezeichnen wir das Lagrangesche Polynom vom Grad $n-1$, das die Nullstelle ξ_ν nicht mehr enthält,

$$P_\nu(x) = \frac{P(x)}{x - \xi_\nu}. \tag{6}$$

Sei $Q^{(0)}(x)$ ein beliebiges Polynom vom Grad $n-1$ oder geringer. Dann gilt die Partialbruchzerlegung von $Q^{(0)}(x) / P(x)$

$$\frac{Q^{(0)}(x)}{P(x)} = \frac{e_1}{x - \xi_1} + \frac{e_2}{x - \xi_2} + \cdots + \frac{e_n}{x - \xi_n} \tag{7}$$

---

[1] J. L. Lagrange, Résolution des équations numériques, Note 6.

mit

$$e_\nu = \frac{Q^{(0)}(\xi_\nu)}{P'(\xi_\nu)}. \tag{8}$$

Das bedeutet, daß $Q^{(0)}(x)$ im Raum der n Basispolynome $P_1(x) \ldots P_n(x)$ ausgedrückt werden kann,

$$Q^{(0)}(x) = e_1 P_1(x) + e_2 P_2(x) + \cdots + e_n P_n(x). \tag{9}$$

Betrachten wir daneben die Folge der Polynome

$$Q^{(i)}(x) = e_1 \xi_1^i P_1(x) + e_2 \xi_2^i P_2(x) + \cdots + e_n \xi_n^i P_n(x), \tag{10}$$

so gilt wegen (6)

$$x P_\nu(x) = \xi_\nu P_\nu(x) + P(x)$$

und damit

$$x \cdot Q^{(i)}(x) = e_1 \xi_1^{i+1} P_1(x) + e_2 \xi_2^{i+1} P_2(x) + \cdots + e_n \xi_n^{i+1} P_n(x) + \\ + (e_1 \xi_1^i + e_2 \xi_2^i + \cdots + e_n \xi_n^i) P(x),$$

also hat man die Rekursionsformel

$$Q^{(i+1)}(x) = x \cdot Q^{(i)}(x) - \alpha_i P(x). \tag{11}$$

$Q^{(i)}(x)$ beginnt demnach mit $\alpha_i x^{n-1}$.

Eine andere Form für (11) ist

$$\frac{Q^{(i)}(x)}{P(x)} = \frac{\alpha_i}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{Q^{(i+1)}(x)}{P(x)}, \tag{12}$$

woraus sich ergibt

$$\frac{Q^{(0)}(x)}{P(x)} = \frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \frac{\alpha_2}{x^3} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{x^k} + \frac{1}{x^k} \frac{Q^{(k)}(x)}{P(x)}. \tag{12a}$$

Lagrange trifft die besonders naheliegende Wahl $Q^{(0)}(x) = P'(x)$ und schreibt vor, den Quotienten $Q^{(0)}(x)/P(x)$ nach fallenden Potenzen von x zu entwickeln. Man durchläuft dabei offensichtlich gerade die Folge der $Q^{(i)}$, allerdings ohne sich um sie zu kümmern, sondern nur bedacht, die Folge der α_i (im Spezialfall Lagranges die algebraischen Potenzsummen, da sich nach (8) $e_\nu \equiv 1$ ergibt) zu erhalten. Damit verschenkt man jedoch wertvolle Information, denn unter Heranziehung der $Q^{(i)}$-Polynome läßt sich die Iteration erheblich rascher vorantreiben, wie in § 2 ausgeführt werden soll.

1.3. Die Iteration mit x mod. $P(x)$

Die Rekursionsformel (11) wird besonders durchsichtig, wenn man jedem Polynom $Q^{(i)}(x)$ einen (Zeilen-) Vektor $\mathfrak{u}^{(i)}$ zuordnet, $Q^{(i)}(x) \leftrightarrow \mathfrak{u}^{(i)}$ nach der ganz allgemeinen Beziehung[1]

$$R(x) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots + r_{n-1} x^{n-1} \leftrightarrow (r_0 r_1 r_2 \cdots r_{n-1}). \tag{13}$$

Dann übersetzt sich (11) in die Iteration an einem Zeilenvektor

$$\mathfrak{u}^{(i+1)} = \mathfrak{u}^{(i)} \mathfrak{X} \tag{14}$$

mit der Iterationsmatrix

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

die nichts anderes als die Frobeniusmatrix zum Polynom $P(x)$ ist.

Es wird kaum nötig sein zu bemerken, daß die Eigenwerte von $\mathfrak{X}$ mit den Nullstellen von $P(x)$ identisch sind und daß die Matrix $\mathfrak{X}$ die Cayleysche Gleichung $P(\mathfrak{X}) = 0$ erfüllt. Die Wirkung der Schrägzeile neben der Diagonale entspricht der Multiplikation mit x, die Wirkung der letzten Zeile entspricht der Subtraktion von $\alpha_i P(x)$ in (11).

Schreibt man für (11)

$$Q^{(i+1)}(x) = Q^{(i)}(x) \cdot x \text{ mod. } P(x), \tag{11a}$$

so hat man auch äußerlich Übereinstimmung mit (14). Dort handelt es sich um eine Iteration mit der Matrix $\mathfrak{X}$, hier um eine solche mit dem Operator x im Restklassenring aller Polynome. Wir bezeichnen sie kurz als „Iteration mit x mod. $P(x)$" und werden sie als gleichwertig mit der Vektoriteration (14) betrachten.

[1] Vgl. z. B. O. Perron, Algebra I, 3. Aufl. Berlin 1951, S. 236.

Offensichtlich können wir nun auch schreiben

$$Q^{(i)}(x) = Q^{(0)}(x) \cdot x^i \bmod P(x) \tag{16}$$

in Analogie zu (vgl. 14)

$$\mathfrak{u}^{(i)} = \mathfrak{u}^{(0)} \mathfrak{X}^i. \tag{17}$$

Für die Basispolynome $P_\nu(x)$ gilt wegen (6) die Beziehnung

$$x P_\nu(x) - P(x) = \xi_\nu P_\nu(x) \tag{18}$$

oder jetzt geschrieben als

$$P_\nu(x)\, x = \xi_\nu P(x) \bmod P. \tag{18a}$$

Sie sind also Eigenfunktionen des Operators x zum Eigenwert ξ_ν im Restklassenring aller Polynome mod. $P(x)$. Natürlich ist auch das nur eine andere Sprechweise für die Tatsache, daß die ihnen nach (13) zugeordneten (Zeilen-)Vektoren

$$P_\nu(x) \leftrightarrow \mathfrak{u}_\nu \tag{19}$$

(Links-) Eigenvektoren der Frobenius-Matrix $\mathfrak{X}$ sind

$$\mathfrak{u}_\nu \mathfrak{X} = \xi_\nu \mathfrak{u}_\nu. \tag{20}$$

Explizit lauten die Basispolynome $P_\nu(x)$

$$\begin{aligned} P_\nu(x) = x^{n-1} + h_1(\xi_\nu)\, x^{n-2} + h_2(\xi_\nu)\, x^{n-3} + \\ + \ldots h_{n-2}(\xi_\nu)\, x + h_{n-1}(\xi_\nu) \end{aligned} \tag{21}$$

und die Linkseigenvektoren von $\mathfrak{X}$

$$\mathfrak{u}_\nu = (h_{n-1}(\xi_\nu),\ h_{n-2}(\xi_\nu),\ h_{n-3}(\xi_\nu) \cdots\cdots h_1(\xi_\nu),\ 1) \tag{22}$$

wo $h_m(x)$ das m-te Hornerpolynom bezüglich $P(x)$ ist mit der definitorischen Rekursionsformel

$$\left.\begin{aligned} h_0(x) &\equiv 1 \\ h_{m+1}(x) &= h_m(x) \cdot x + a_{m+1} \\ h_n(x) &\equiv P(x) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Mittels (23) verifiziert man unmittelbar, daß (18), (18a) für $P_\nu(x)$ der Form (21); (20) für $\mathfrak{u}_\nu$ der Form (22) erfüllt ist.

Offensichtlich hat man nach (10)[1]

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{i\to\infty} Q^{(i)}(x) & \text{proportional } P_1(x) \\ \lim\limits_{i\to\infty} \mathfrak{u}^{(i)} & \text{proportional } \mathfrak{u}_1 \end{array}\right\} \quad \text{falls } |\xi_1| > |\xi_2|. \qquad (24)$$

Man erhält also im Falle der Konvergenz durch die Iteration mod. $P(x)$ unmittelbar das Polynom $P_1(x)$, dem die absolut größte Nullstelle ξ_1 fehlt. Die Nullstelle ξ_1 selbst erhält man als den Faktor, mit dem sich $Q^{(i)}(x)$ in der Grenze bei Anwendung von x mod. $P(x)$ multipliziert, und zwar natürlich als α_{i+1}/α_i.

§ 2. Quadratisch konvergente Durchführung der Iteration mod. $P(x)$

2.1. Das Verfahren der abgekürzten Iteration

Wählt man als spezielles Ausgangspolynom $Q^{(0)}(x) = 1$ (nach (8) sind dann sicher alle $e_\nu \neq 0$) bzw. als Ausgangsvektor[2] $\mathfrak{u}^{(0)} = (1, 0, \ldots, 0, 0)$, so erhält man zunächst trivialerweise $Q^{(i)}(x) = x^i$, $i < n$; auch $Q^{(n)}(x) = x^n - P(x)$ ist unmittelbar gegeben, so daß man praktisch sagen wird, man beginne mit diesem Polynom. Sodann erhält man $Q^{(i)}(x) = x^i$ mod. $P(x)$, ausgedrückt als Polynom (höchstens) vom Grade $n-1$. Die weitere Fortsetzung der Iteration kann aber beträchtlich abgekürzt werden.

---

[1] J. Sebastião e Silva, Complementi al metodo di Gräffe, II. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 1, 548–552 (1946) kommt bei Betrachtung des Euklidischen Algorithmus von x^i und $P(x)$, dessen erster Rest unser $Q^{(i)}$ (für $Q^{(0)} = 1$) ist, zu demselben Ergebnis.

[2] Man hat also nach (11) als entsprechende Anfangsbedingung für die Bernoulli-Eulersche Differenzengleichung $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-2} = 0$, $\alpha_{n-1} = 1$. Ferner ergibt sich leicht

$$\alpha_n = -a^1, \qquad \alpha_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix}, \qquad \alpha_{n+2} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 \\ & 1 & a_1 \end{vmatrix}$$

usw. (H. Wronski, Introd. à la philos. des math., Paris 1811; E. Fürstenau, Darstellung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Koeffizienten, Marburg 1860).

α_{n+i} ist eine Schur-Funktion zum Symbol $\{i\}$, vgl. (55).

Nehmen wir allgemein etwa an, es seien n sukzessive Polynome

$$Q^{(\varkappa)}, Q^{(\varkappa+1)}, \ldots . Q^{(\varkappa+n-1)}$$

bereits bekannt, speziell sei eines davon, $Q^{(\varkappa+\iota)}$ $(\iota = 0 \ldots n-1)$

$$Q^{(\varkappa+\iota)} = \gamma_1^{(\iota)} x^{n-1} + \gamma_2^{(\iota)} x^{n-2} + \cdots \gamma_{n-1}^{(\iota)} x + \gamma_n^{(\iota)}. \qquad (25)$$

Dann ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} Q^{(\varkappa+\varkappa+\iota)} &= Q^{(\varkappa)} . \; Q^{(\varkappa+\iota)} \bmod P \\ &= \gamma_1^{(\iota)} x^{n-1} Q^{(\varkappa)} + \gamma_2^{(\iota)} x^{n-2} Q^{(\varkappa)} + \cdots + \gamma_n^{(\iota)} Q^{(\varkappa)} \bmod P, \end{aligned}$$

also

$$Q^{(2\varkappa+\iota)} = \gamma_1^{(\iota)} Q^{(\varkappa+n-1)} + \gamma_2^{(\iota)} Q^{(\varkappa+n-2)} + \cdots + \gamma_n^{(\iota)} Q^{(\varkappa)}. \qquad (26)$$

Man erhält z. B. $Q^{(3n-1)}$ durch gewichtete Summierung über die durch Iteration mod. $P(x)$ berechneten n Polynome $Q^{(n)} \ldots Q^{(2n-1)}$, die Koeffizienten von $Q^{(2n-1)}$ dienen als Gewichtsfaktoren. Verschafft man sich durch einfache Iteration mod. P weiterhin, ausgehend von $Q^{(3n-1)}$, die Polynome $Q^{(3n)} \ldots Q^{(4n-2)}$, so erhält man durch analoge gewichtete Summierung dieser n Polynome mit den Koeffizienten des letzteren als Gewichtsfaktoren bereits $Q^{(7n-3)}$. Allgemein hat man nach dem j-ten Gesamtschritt das Iterationspolynom $Q^{(\beta_j)}$, wobei

$$\beta_j = (2n - 1) \cdot 2^j - (n-1), \qquad (27)$$

also

$$\beta_{j+1} = 2\,\beta_j + (n-1) \qquad (28)$$

ist.

Wir haben eben die gewichtete Summierung so durchgeführt, daß die Gewichtsfaktoren jeweils aus dem letzten der n Polynome entnommen wurden. Das bedeutet, daß jeweils n^2 Koeffizienten gespeichert werden müssen, bis die Mittelung vorgenommen werden kann. Für Rechenautomaten ist das heute meist unproblematisch. Wählt man jedoch die Gewichtsfaktoren jeweils aus dem ersten Polynom, das als Ausgang der $(n-1)$-maligen Itera-

tion mod. $P(x)$ dient, so kann eine laufende Aufsummierung erfolgen. Die Approximation erfolgt nach der Formel

$$\beta_{i+1} = 2\,\beta_i \tag{29}$$

und ist gegenüber (28) nur unwesentlich langsamer.

In jedem Fall ist die Approximation pro Gesamtschritt mindestens ebenso rasch wie beim Verfahren von Graeffe, der Fehler nach einem Gesamtschritt ist in der Grenze proportional dem Quadrat des Fehlers vor dem Gesamtschritt. Man hat also quadratische Konvergenz wie beim Graeffeschen Verfahren.

2.2. Zusammenhang mit der Matrizenpotenzierung

Das Verfahren der abgekürzten Iteration kann auch an Hand einer Iteration mit der Matrix $\mathfrak{X}$ (15) gedeutet werden.

Ist $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}^{(0)}$ der Vektor (1, 0, 0, . . . 0), so bauen die n Zeilenvektoren $\mathfrak{u}\mathfrak{X} = \mathfrak{u}^{(1)}$, $\mathfrak{u}\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{u}^{(2)}$, ... $\mathfrak{u}\mathfrak{X}^n = \mathfrak{u}^{(n)}$ offensichtlich die Matrix $\mathfrak{X}$ auf

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} \mathfrak{u}\,\mathfrak{X} \\ \mathfrak{u}\,\mathfrak{X}^{(2)} \\ \mathfrak{u}\,\mathfrak{X}^{(3)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{u}\,\mathfrak{X}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{u}^{(1)} \\ \mathfrak{u}^{(2)} \\ \mathfrak{u}^{(3)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{u}^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Allgemeiner ist

$$\mathfrak{X}^i = \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{X}^{i-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{u}\,\mathfrak{X}^i \\ \mathfrak{u}\,\mathfrak{X}^{i+1} \\ \mathfrak{u}\,\mathfrak{X}^{i+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{u}\,\mathfrak{X}^{i+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{u}^{(i)} \\ \mathfrak{u}^{(i+1)} \\ \mathfrak{u}^{(i+2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{u}^{(i+n-1)} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Angenommen, dies sei richtig für $i-1$, so bewirkt die Anwendung der Matrix $\mathfrak{X}$ von links eine Translation der ersten $n-1$ Zeilen-

vektoren, die vorgeschriebene Neubildung des letzten ist wegen der Gültigkeit der Cayleyschen Gleichung für $\mathfrak{X}$ evident. Damit ist aber $\mathfrak{X}^{\varkappa}\mathfrak{X}^{\varkappa} = \mathfrak{X}^{2\varkappa}$,

$$\begin{pmatrix} u^{(\varkappa)} \\ u^{(\varkappa+1)} \\ u^{(\varkappa+2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^{(\varkappa+n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^{(\varkappa)} \\ u^{(\varkappa+1)} \\ u^{(\varkappa+2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^{(\varkappa+n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(2\varkappa)} \\ u^{(2\varkappa+1)} \\ u^{(2\varkappa+2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^{(2\varkappa+n-1)} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

also, wenn man die $(\varkappa + \iota)$-te Zeile herausgreift

$$u^{(\varkappa+\iota)} \cdot \begin{pmatrix} u^{(\varkappa)} \\ u^{(\varkappa+1)} \\ u^{(\varkappa+2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^{(\varkappa+n-1)} \end{pmatrix} = u^{(2\varkappa+\iota)} . \tag{33}$$

(33) stimmt mit (26) überein. Wesentlich ist nun, daß man, von einem solcherart gewonnenen $u^{(2\varkappa+\iota)}$ ausgehend, weitere $n-1$ sukzessive durch gewöhnliche Anwendung von $\mathfrak{X}$ von rechts erhalten kann und nicht gezwungen ist, sie alle durch Matrizenmultiplikation gemäß (32) zu bilden.

Das letztere Vorgehen käme lediglich auf die bekannte Methode der Potenzierung einer Matrix, hier $\mathfrak{X}$, hinaus.

2.3. Varianten der abgekürzten Iteration

Eine weitere Möglichkeit besteht darin,

1. von einem bereits erhaltenen Polynom $Q^{(i)}(x)$ ausgehend, $(Q^{(i)}(x))^2$ durch Ausmultiplizieren als Polynom vom Grad $2n-2$ darzustellen und sodann
2. mittels des Polynoms $P(x)$ auf das Polynom $Q^{(2i)}(x)$ vom Grad $n-1$ zu reduzieren:

$$Q^{(2i)}(x) = (Q^{(i)}(x))^2 \text{ mod. } P(x). \tag{34}$$

Dies wiederum kann auf zweierlei Arten geschehen: entweder man subtrahiert sukzessive passende Multipla von $x^{n-2} P(x)$, $x^{n-3} P(x)$, ... $x P(x)$, $P(x)$ oder man subtrahiert passende Multipla der Polynome vom Grad $n-1$: x^{2n-2} mod. P, x^{2n-3} mod. P ... x^n mod. P.

Diese Variante ähnelt im ersten Teil am meisten dem Graeffeschen Verfahren[1] und benötigt insgesamt etwa $^3/_4$ der Operationen gegenüber der erstbeschriebenen Art. Das kann nur für Handrechner ausschlaggebend sein, für Rechenautomaten ist die erstere Art programmierungstechnisch übersichtlicher. Zudem liefert sie Ausgangsdaten für die einleitend erwähnte Variante des Jacobi-Aitken-Tricks. Wir werden uns aus diesen Gründen auf ihre weitere Diskussion allein beschränken.

2.4. Abschluß einer abgekürzten Iteration

Wir mußten in diesem Paragraphen bisher annehmen, daß das Ausgangspolynom $Q^{(0)}$ speziell gewählt, und zwar eine Konstante ist. Diese Einschränkung ist nicht wesentlich. Denn offensichtlich erhält man für beliebiges $Q^{(0)}(x)$ das i-fach iterierte $Q^{(i)}(x) = Q^{(0)}(x) \cdot (x^i \text{ mod. } P) \text{ mod. } P$ auch dadurch, daß man sich wie bisher n Polynome $x^{i+\iota}$ mod. P ($\iota = 0 \ldots n-1$) verschafft und damit, analog zu (26), die Multiplikation mit $Q^{(0)}(x)$ modulo $P(x)$ durchführt. Anders gesprochen, bildet man $\mathfrak{X}^i$ wie in Abschnitt 2.2 und wendet dies auf den zu $Q^{(0)}(x)$ gehörigen Zeilenvektor an.

In erster Linie wird man daran denken, nachträglich mit dem Polynom $P'(x)$ mod. $P(x)$ zu multiplizieren, was auf die Wahl $Q^{(0)}(x) = P'(x)$ hinauskommt. Mit einem Aufwand, der einem Gesamtschritt entspricht, erhält man jedoch höchstens eine geringfügige Verbesserung; die Gewichtsfaktoren e_ν werden nach (10) und (18a) mit $P'(\xi_\nu)$ multipliziert. Über die Auswirkung bei mehrfachen Wurzeln vgl. später.

---

[1] Die von Silva aaO. angedeutete Möglichkeit eines Graeffeartigen Verfahrens dürfte, nach dem Ausgangspunkt seiner Überlegungen zu urteilen, auf eben diese Variante hinauslaufen.

§ 3. Bestimmung von Nullstellen gleichen Betrages

3.1. Die Iteration an einem Spaltenvektor und die ursprüngliche *Bernoulli*sche Methode

Wir beginnen damit, einen Seitenblick auf die ursprüngliche Bernoullische Methode nachzuholen. Fry[1] hat darauf hingewiesen, daß diese als Iteration mit der Matrix $\mathfrak{X}$ an einem Spaltenvektor aufgefaßt werden kann. Sie ist damit gewissermaßen kontragredient zu der, wie wir gezeigt haben, auf eine Iteration an einem Zeilenvektor hinauskommenden Variante von Lagrange. Die Kontragredienz wird uns einige für das weitere benötigte Ausdrücke liefern. Bekanntlich sind die n Spaltenvektoren

$$\mathfrak{x}_\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_\nu \\ \xi_\nu^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_\nu^{n-1} \end{pmatrix} \qquad (\nu = 1 \ldots n) \qquad (35)$$

Rechtseigenvektoren von $\mathfrak{X}$. Ein beliebiger Vektor $\mathfrak{x}^{(0)}$ kann ausgedrückt werden als

$$\mathfrak{x}^{(0)} = e_1 \mathfrak{x}_1 + e_2 \mathfrak{x}_2 + \cdots + e_n \mathfrak{x}_n \qquad (36)$$

d. h. als

$$\mathfrak{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{wegen (3).} \qquad (37)$$

[1] Thornton C. Fry, Some numerical methods for locating roots of poly nomials, Quart. Appl. Math. *3*, 189 (1945). Fry erwähnt, daß Dietzold in einer unpublizierten Arbeit den Prozeß (14) der Iteration mit $\mathfrak{X}$ an einem Zeilenvektor ins Auge gefaßt hat, ohne Ergebnisse theoretischer oder praktischer Art mitzuteilen. Der Zusammenhang mit der Lagrangeschen Variante entgeht ihm anscheinend.

Die (Rechts-) Iterationsfolge $\mathfrak{x}^{(0)}$, $\mathfrak{x}^{(1)}$, $\mathfrak{x}^{(2)}$, ... $\mathfrak{x}^{(i)}$ ergibt sich zu

$$\mathfrak{x}^{(i)} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{x}^{(i-1)} = \mathfrak{A}^i \mathfrak{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_{i+1} \\ \alpha_{i+2} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{i+n-1} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

In der Tat bedeutet die vorliegende Anwendung der Matrix eine Translation der α_i-Folge im Vektor $\mathfrak{x}^{(i-1)}$ und die Neubildung des letzten Elementes von $\mathfrak{x}^{(i)}$ nach der Bernoulli-Eulerschen Rekursion.

Die beiden Möglichkeiten der Links- oder Rechtsiteration sind natürlich im mathematischen Kern (nicht in der numerischen Praxis) äquivalent, insofern als die feste, nach dem Schema der Hornerpolynome gebildete Matrix

$$T = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & 1 & 0 \\ . & . & \dots & & & \\ . & . & \dots & & & \\ . & . & \dots & & & \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

die Rechtseigenvektoren (35) von $\mathfrak{A}$ in die (transponierten) Linkseigenvektoren (22) überführt

$$\mathfrak{u}_\nu^{\mathsf{T}} = T\,\mathfrak{x}_\nu \tag{40}$$

und damit die Matrix $\mathfrak{A}$ in die transponierte $\mathfrak{A}^{\mathsf{T}}$ transformiert

$$T\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathsf{T}}\,T. \tag{41}$$

Falls $(\mathfrak{u}^{(0)})^{\mathsf{T}} = T\,\mathfrak{x}^{(0)}$ ist, korrespondieren also auch die Rechts- und die Linksiterationsfolge,

$$(\mathfrak{u}^{(i)})^{\mathsf{T}} = T\,\mathfrak{x}^{(i)}. \tag{42}$$

Damit erhält man unmittelbar

$$\mathfrak{u}^{(i)} = (H_{n-1}^{(i)}, \quad H_{n-2}^{(i)}, \quad \dots \; H_1^{(i)}, \quad H_0^{(i)}), \tag{43}$$

wo $H_m^{(i)}$ nach dem Schema T gebildet ist:

$$H_m^{(i)} = \alpha_{m+i} + a_1 \alpha_{m+i-1} + a_2 \alpha_{m+i-2} + \cdots + a_m \alpha_i . \tag{44}$$

Für die Polynome $Q^{(i)}(x)$ bedeutet das:

$$Q^{(i)} x = H_0^{(i)} x^{n-1} + H_1^{(i)} x^{n-2} + \cdots + H_{n-2}^{(i)} x + H_{n-1}^{(i)}, \tag{45}$$

wobei, wie schon in 1.2 erwähnt, $H_0^{(i)} = \alpha_i$ (44a)
ist und

$$H_{n-1}^{(i)} = -a_n \alpha_{i-1} \tag{44b}$$

wegen (4).

Durch Umordnung ergibt sich schließlich

(46)

$$Q^{(i)}(x) = \alpha_i h_{n-1}(x) + \alpha_{i+1} h_{n-2}(x) + \cdots + \alpha_{i+n-2} h_1(x) + \alpha_{i+n-1}$$

mit Hornerpolynomen (23), oder

(47)

$$\overline{Q}^{(i)}(x) = h_{n-1}(x) + \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} h_{n-2}(x) + \frac{\alpha_{i+2}}{\alpha_i} h_{n-3}(x) + \cdots + \frac{\alpha_{i+n-2}}{\alpha_i} h_1(x) + \frac{\alpha_{i+n-1}}{\alpha_i} .$$

Damit ergibt sich nach (5)

$$\lim_{i \to \infty} \overline{Q}^{(i)}(x) = h_{n-1}(x) + \xi_1 h_{n-2}(x) + \xi_1^2 h_{n-3}(x) + \cdots + \xi_1^{n-2} h_1(x) + \xi_1^{n-1} = P_1(x), \tag{48}$$

die Übereinstimmung mit (21) ist nach Umordnung der Terme ersichtlich.[1]

---

[1] Betrachtet man nun den Koeffizienten $\alpha_{2\varkappa+\iota}$ von x^{n-1} in $Q^{(2\varkappa+\iota)}$ (26), so ergibt sich nach (45) für die Fürstenau'schen α_i

$$\alpha_{2\varkappa+\iota} = H_0^{(\varkappa+\iota)} \alpha_{\varkappa+n-1} + H_1^{(\varkappa+\iota)} \alpha_{\varkappa+n-2} + \cdots H_{n-1}^{(\varkappa+\iota)} \alpha_\varkappa$$
$$= (\mathfrak{x}^{(\varkappa+\iota)})^{\mathsf{T}} \, T \, \mathfrak{x}^{(\varkappa)} .$$

Diese bilineare Beziehung in den Vektoren $\mathfrak{x}^{(i)}$, (38), erlaubt eine direkte abgekürzte Berechnung der α_i. Sie ist jedoch mehr von theoretischer Bedeutung, die praktische Durchfürung läuft auf die Methoden von § 2 hinaus.

3.2. Approximation des Polynoms, das r Nullstellen nicht mehr enthält

Ein wesentlicher Zug des bisher diskutierten Verfahrens ist, daß nicht nur die absolut größte Nullstelle, sondern *unmittelbar* auch das diese Nullstelle nicht mehr enthaltende Polynom bestimmt wird. Die Methode läßt sich sofort dahingehend verallgemeinern, daß sie ein Polynom liefert, das $r \geqq 2$ Nullstellen $\xi_1 \ldots \xi_r$ nicht mehr enthält, falls nur $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$ ist.

Wir betrachten die Linearkombination von r Polynomen $Q^{(h)}$:

$$ {}^rQ^{(i)}(x) = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{i+r-2} & Q^{(i)}(x) \\ \alpha_{i+1} & \alpha_{i+2} \cdots \alpha_{i+r-1} & Q^{(i+1)}(x) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r} \cdots \alpha_{i+2r-3} & Q^{(i+r-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{49} $$

Nach (46) ist ${}^rQ^{(i)}$ ein Polynom höchstens vom Grade $n-r$:

$$ \begin{aligned} {}^rQ^{(i)}(x) = {} & \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{i+r-2} & \alpha_{i+r-1} \\ \alpha_{i+1} & \alpha_{i+2} \cdots \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r} \cdots \alpha_{i+2r-3} & \alpha_{i+2r-2} \end{vmatrix} h_{n-r}(x) + \\ + {} & \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{i+r-2} & \alpha_{i+r} \\ \alpha_{i+1} & \alpha_{i+2} \cdots \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r+1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r} \quad \alpha_{i+2r-3} & \alpha_{i+2r-1} \end{vmatrix} h_{n-r-1}(x) + \cdots + \\ + {} & \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{i+r-2} & \alpha_{i+n-1} \\ \alpha_{i+1} & \alpha_{i+2} \cdots \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r} \quad \alpha_{i+2r-3} & \alpha_{i+n+r-2} \end{vmatrix} h_0(x) \end{aligned} \tag{50} $$

Wir betrachten allgemein die aus den Größen α_k aufgebaute Determinante $|{}^rA_i\{f_1 \dots f_r\}|$,

$$|{}^rA_i\{f_1 \dots f_r\}| = \begin{vmatrix} \alpha_{i+f_r} & \alpha_{i+1+f_{r-1}} & \cdots & \alpha_{i+r-1+f_1} \\ \alpha_{i+1+f_r} & \alpha_{i+2+f_{r-1}} & \cdots & \alpha_{i+r+f_1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{i+r-1+f_r} & \alpha_{i+r+f_{r-1}} & \cdots & \alpha_{i+2r-2+f_1} \end{vmatrix} \tag{51}$$

deren Matrix ${}^rA_i\{f_1 \dots f_r\}$ die Produktzerlegung in zwei im allgemeinen nicht quadratische Matrizen

$${}^rA_i\{f_1 \dots f_r\} = \begin{pmatrix} e_1\xi_1^i & e_2\xi_2^i & \cdots & e_n\xi_n^i \\ e_1\xi_1^{i+1} & e_2\xi_2^{i+1} & \cdots & e_n\xi_n^{i+1} \\ e_1\xi_1^{i+2} & e_2\xi_2^{i+2} & \cdots & e_n\xi_n^{i+2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ e_1\xi_1^{i+r-1} & e_2\xi_2^{i+r-1} & \cdots & e_n\xi_n^{i+r-1} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \xi_1^{f_r} & \xi_1^{1+f_{r-1}} & \xi_1^{2+f_{r-2}} & \cdots & \xi_1^{r-1+f_1} \\ \xi_2^{f_r} & \xi_2^{1+f_{r-1}} & \xi_2^{2+f_{r-2}} & \cdots & \xi_2^{r-1+f_1} \\ \xi_3^{f_r} & \xi_3^{1+f_{r-1}} & \xi_3^{2+f_{r-2}} & \cdots & \xi_3^{r-1+f_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \xi_n^{f_r} & \xi_n^{1+f_{r-1}} & \xi_n^{2+f_{r-2}} & \cdots & \xi_n^{r-1+f_1} \end{pmatrix} \tag{52}$$

gestattet. Nach dem Cauchy-Binetschen Determinantensatz ist die Determinante dieser Matrix aber gleich der Summe der $\binom{n}{r}$ Produkte von Determinanten, gebildet aus korrespondierenden quadratischen, r-reihigen Untermatrizen der beiden Faktoren. Unter der Bedingung $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$ sind aber gegenüber dem Produkt

$$\begin{vmatrix} e_1\xi_1^i & e_2\xi_2^i & \dots & e_r\xi_r^i \\ e_1\xi_1^{i+1} & e_2\xi_2^{i+1} & \dots & e_r\xi_r^{i+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ e_1\xi_1^{i+r-1} & e_2\xi_2^{i+r-1} & \dots & e_r\xi_r^{i+r-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1^{f_r} & \xi_1^{1+f_{r-1}} & \xi_1^{2+f_{r-2}} & \dots & \xi_1^{r-1+f_1} \\ \xi_2^{f_r} & \xi_2^{1+f_{r-1}} & \xi_2^{2+f_{r-2}} & \dots & \xi_2^{r-1+f_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \xi_r^{f_r} & \xi_r^{1+f_{r-1}} & \xi_r^{2+f_{r-2}} & \dots & \xi_r^{r-1+f_1} \end{vmatrix} =$$

$$= e_1 e_2 \dots e_r \cdot (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_r)^i \prod_{i>k} (\xi_i - \xi_k) \cdot \left| \xi_{\rho+1}^{\sigma+f_{r-\sigma}} \right| ; \quad \begin{cases} \rho = 0 \dots r-1 \\ \sigma = 0 \dots r-1 \end{cases} \quad (53)$$

alle anderen Summanden klein von der Ordnung $\left| \frac{\xi_r}{\xi_{r+1}} \right|^i$ (falls keines der $e_1 \dots e_r$ verschwindet) und für $i \to \infty$ vernachlässigbar.

In (50) verschwindet unter der getroffenen Annahme über die $e_1 \dots e_r$ der Koeffizient von $h_{n-r}(x)$ sicher nicht. Es bezeichne ${}^r\overline{Q}^{(i)}(x)$ wieder das durch den Koeffizienten von $h_{n-r}(x)$ dividierte und dadurch normierte Polynom. So gilt also unter Benützung von (51), (52), (53) mit

$$f_1 = 0 \dots r-1, \; f_2 = f_3 = \dots = f_{r-1} \equiv 0$$

$$\lim_{i \to \infty} {}^r\overline{Q}^{(i)}(x) = h_{n-r}(x) + \frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{r-2} & \xi_1^r \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{r-2} & \xi_2^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & \xi_r & \xi_r^2 & \dots & \xi_r^{r-2} & \xi_r^r \end{vmatrix}}{N} h_{n-r-1}(x) +$$

$$+ \dots\dots \frac{\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{r-2} & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{r-2} & \xi_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & \xi_r & \xi_r^2 & \dots & \xi_r^{r-2} & \xi_r^{n-1} \end{vmatrix}}{N} h_0(x), \quad (54)$$

$$\text{wo } N = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{r-2} & \xi_1^{r-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{r-2} & \xi_2^{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & \xi_r & \xi_r^2 & \dots & \xi_r^{r-2} & \xi_r^{r-1} \end{vmatrix} = D(\xi_1 \dots \xi_r) \text{ ist,}$$

falls $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$ und keines der $e_1 \ldots e_r$ verschwindet, das Ausgangspolynom also nicht unglücklich gewählt ist.

Die in (54) vorkommenden Faktoren sind Schur-Funktionen von der gewöhnlich mit dem Symbol $\{f_1 f_2 \ldots f_r\}$ bezeichneten Form

$$\{f_1 f_2 \ldots f_r\} = \frac{\left|\xi_{1+\rho}^{\sigma+f_{r-\sigma}}\right|}{\left|\xi_{1+\rho}^{\sigma}\right|}, \quad \begin{cases} \rho = 0 \ldots r-1 \\ \sigma = 0 \ldots r-1, \end{cases} \tag{55}$$

sie sind als Quotienten von Determinanten symmetrische Funktionen in dem Variablen $\xi_1 \ldots \xi_r$. Damit schreibt sich (54)[1]

$$\lim_{i \to \infty} {}^{r}\overline{Q}^{(i)}(x) = h_{n-r} + \{1\} h_{n-r-1}(x) + \{2\} h_{n-r-2}(x) + \cdots + \{n-r\}, \tag{56}$$

wobei die Koeffizienten $\{g\}$ nach bekannten Beziehungen[2] die Summe aller verschiedenen Produkte g-ter Ordnung der Variablen $\xi_1 \ldots \xi_r$ sind („total-symmetrische" oder „Aleph"-Funktionen). Offensichtlich hat man die Beziehung

$${}^{r}\{g\} - \xi_r \cdot {}^{r}\{g-1\} = {}^{r-1}\{g\} \tag{57}$$

wo ${}^{r}\{g\}$ sich auf $\xi_1 \ldots \xi_r$, ${}^{r-1}\{g\}$ sich auf $\xi_1 \ldots \xi_{r-1}$ bezieht.

Damit gilt

$$\begin{aligned} (x-\xi_r) \cdot & \left(h_{n-r}(x) + {}^{r}\{1\} h_{n-r-1}(x) + {}^{r}\{2\} h_{n-r-2}(x) + \cdots \right. \\ & \left. + {}^{r}\{n-r-1\} h_1(x) + {}^{r}\{n-r\}\right) \\ & = h_{n-(r-1)}(x) + {}^{r-1}\{1\} h_{n-r} + {}^{r-1}\{2\} h_{n-r-1} + \cdots \\ & + {}^{r-1}\{n-r\} \cdot h_1(x) + {}^{r-1}\{n-(r-1)\} - \\ & - \left[a_{n-(r-1)} + a_{n-r}\, {}^{r}\{1\} + a_{n-r-1}\, {}^{r}\{2\} + \cdots + {}^{r}\{n-(r-1)\}\right]. \end{aligned}$$

Die eckige Klammer verschwindet jedoch. Multipliziert man nämlich die Koeffizienten a_ν in die letzte Spalte der Zählerdeterminanten der ${}^{r}\{g\}$ und faßt man die Determinanten additiv zusammen, so ergibt sich im Zähler

---

[1] Nullen im Symbol $\{f\}$ sind wie üblich unterdrückt.

[2] Enzyklopädie der math. Wiss., Leipzig 1898–1904, Bd. I p. 465 oder Littlewood, Theory of Group Characters, Oxford 1950, § 6.

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{r-2} & N(\xi_1) \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{r-2} & N(\xi_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & \xi_r & \xi_r^2 & & \xi_r^{r-2} & N(\xi_r) \end{vmatrix},$$

wo $N(\xi_\nu) = a_{n-(r-1)}\, \xi_\nu^{r-1} + a_{n-r}\, \xi_\nu^r + \dots + \xi_\nu^n$ ist.

Wegen $P(\xi_\nu) = 0$ wird damit die letzte Spalte zu einer Linearkombination der $r-1$ vorhergehenden. Also hat man nach Multiplikation mit $x-\xi_r$ denselben Ausdruck (56) für $r-1$ statt r. Multipliziert man weiterhin mit $x-\xi_{r-1}$, so hat man nur oben r durch $r-1$ zu ersetzen, usf. Schließlich gelangt man nach Multiplikation von $x-\xi_2$ zu dem Ausdruck

$$h_{n-1}(x) + \xi_1\, h_{n-2}(x) + \xi_1^2\, h_{n-3}(x) \dots + \xi_1^{n-1},$$

was nach (48) identisch ist mit $P_1(x) = \dfrac{P(x)}{x-\xi_1}$.

Damit ist gezeigt

$$\lim_{i \to \infty} {}^r\bar{Q}^{(i)}(x) = P_{12\dots r}(x), \tag{58}$$

wo

$$P_{12\dots r}(x) = \frac{P(x)}{(x-\xi_1)\,(x-\xi_2)\dots(x-\xi_r)}. \tag{59}$$

Zur praktischen Gewinnung der Iterationspolynome ${}^r\bar{Q}^{(i)}(x)$ benutzt man zweckmäßig, daß die mit (49) bis aufs Vorzeichen identische Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i+r-2} & \alpha_{i+r-1} & \dots \alpha_{i+1} & \alpha_i & Q^{(i)}(x) \\ \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r} & \dots \alpha_{i+2} & \alpha_{i+1} & Q^{(i+1)}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{i+2r-4} & \alpha_{i+2r-3} & \dots \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r-2} & Q^{(i+r-2)}(x) \\ \alpha_{i+2r-3} & \alpha_{i+2r-2} & \dots \alpha_{i+r-2} & \alpha_{i+r-1} & Q^{(i+r-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{60}$$

bis auf einen (belanglosen) Faktor übereinstimmt mit der zusammengesetzten Determinante

(61)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i+r-2} & \alpha_{i+r-1} & \cdots & \alpha_{i+1} & \alpha_i \\ \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r} & \cdots & \alpha_{i+2} & \alpha_{i+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \alpha_{i+2r-4} & \alpha_{i+2r-3} & \cdots & \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r-2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{i+r-1} & \cdots & \alpha_{i+1} & \alpha_i & Q^{(i)}(x) \\ \alpha_{i+r} & \cdots & \alpha_{i+2} & \alpha_{i+1} & Q^{(i+1)}(x) \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{i+2r-3} & \cdots & \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r-2} & Q^{(i+r-2)}(x) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r} & \cdots & \alpha_{i+2} & \alpha_{i+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \alpha_{i+2r-4} & \alpha_{i+2r-3} & \cdots & \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r-2} \\ \alpha_{i+2r-3} & \alpha_{i+2r-2} & \cdots & \alpha_{i+r} & \alpha_{i+r-1} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{i+r} & \cdots & \alpha_{i+2} & \alpha_{i+1} & Q^{(i+1)}(x) \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{i+2r-3} & & \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r-2} & Q^{(i+r-2)}(x) \\ \alpha_{i+2r-2} & & \alpha_{i+r-2} & \alpha_{i+r-1} & Q^{(i+r-1)}(x) \end{vmatrix}$$

und damit rekursiv durch fortgesetzte zweireihige zusammengesetzte Determinanten aufgebaut wird. Dieser Aufbau bedeutet aber, daß

$$^{\rho}\overline{Q}^{(i)} = (^{\rho-1}\overline{Q}^{(i)} - {}^{\rho-1}\overline{Q}^{(i+1)}) \,/\, \text{Normierungsfaktor} \qquad (62)$$

ist und daß man durch $(r-1)$-malige Bildung der normierten Differenzen (« Cross-multiplication » von Routh) $^{r}Q^{(i)}$ erhält.

Die Bildungen in (62) erinnern formal stark an die wiederholten Quotienten-Differenzen-Bildungen in dem Verfahren, das H. Rutishauser unter der Bezeichnung „qd-Algorithmus" vor kurzem mitgeteilt hat[1]. In der Tat sind die Polynome $^{r}\overline{Q}^{(i)}(x)$ den Näherungszählerpolynomen der Kettenbruchentwicklung von

$$Q^{(i)}(x) \,/\, P(x) = \frac{\alpha_i}{x} + \frac{\alpha_{i+1}}{x^2} + \cdots\cdots, \qquad (63)$$

proportional, vgl. (12).

Wir können uns mit dieser Andeutung des Zusammenhangs mit dem qd-Algorithmus um so mehr begnügen, als unsere Tendenz anders als die von Rutishauser in seinem nicht ausschließlich auf die Nullstellenbestimmung von Polynomen ausgerichteten Verfahren ist.

---

[1] a. a. O.

Wir betonen, daß wir die hergeleiteten Formeln zur Abtrennung mehrerer Linearfaktoren nur benützen wollen, um Nullstellen gleichen Betrags zu eliminieren, d. h. nur, wenn die direkte (quadratisch konvergente) Methode der abgekürzten Iteration mod. $P(x)$ nicht oder nur sehr schlecht konvergiert. Sobald bzw. solange dies der Fall ist, entsteht nur eine geringfügige Auslöschung von Ziffern.

3.3. Approximation des Polynoms für die abgetrennten Nullstellen

Das Polynom $S_{12\ldots r}(x)$, das die abgetrennten Nullstellen $\xi_1 \ldots . \xi_r$ enthält, erhält man durch Division von $P_{12\ldots r}(x)$ in $P(x)$. Im Grunde läuft das darauf hinaus, daß die Koeffizienten von $S_{12\ldots r}(x)$, die bis aufs Vorzeichen (elementare) symmetrische Funktionen der Variablen $\xi_1 \ldots . \xi_r$ sind und in der Gestalt (55) durch $\{1^h\}$, $h = 0 \ldots r-1$, bezeichnet werden[1]:

$$S_{12\ldots r}(x) = x^r - \{1\}x^{r-1} + \{1^2\}x^{r-2} - \{1^3\}x^{r-3} + \cdots \pm \{1^r\}, \quad (64)$$

sich in Determinanten aus Größen $\{g\}$ ausdrücken lassen. Die Gleichung von Jacobi[2] und Trudi[3] besagt, daß

$$\{1^h\} = \begin{vmatrix} \{1\} & \{2\} & \ldots & \{h-2\} & \{h-1\} & \{h\} \\ \{0\} & \{1\} & \ldots & \{h-3\} & \{h-2\} & \{h-1\} \\ 0 & \{0\} & \ldots & \{h-4\} & \{h-3\} & \{h-2\} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \{0\} & \{1\} & \{2\} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \{0\} & \{1\} \end{vmatrix} \quad (65)$$

ist. Eine unabhängige Berechnung der Koeffizienten von $S_{12\ldots r}(x)$, wie sie in Jacobis[4] Erweiterung der Bernoullischen Methode mittels des Ausdrucks

---

[1] Übliche formale Potenzschreibweise mit der Bedeutung $f_1 = f_2 = \cdots f_h = 1$, $f_{h+1} \cdots f_r = 0$.

[2] De functionibus alternantibus, Werke Bd. 3.

[3] Gi. di math. 3 (1865).

[4] Observatiunculae, Werke Bd. 3. Durch Aitken, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 46, (1926) 289 wieder in die numerische Praxis eingeführt.

$$S_{12\ldots r}(x) \text{ proportional } \lim_{i\to\infty} \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_{i+2} & \ldots & \alpha_{i+r} \\ \alpha_{i+1} & \alpha_{i+2} & \alpha_{i+3} & \ldots & \alpha_{i+r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{i+r-1} & \alpha_{i+r} & \alpha_{i+r+1} & \ldots & \alpha_{i+2r-1} \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^r \end{vmatrix} \tag{64a}$$

erfolgt, erübrigt sich hier. Auf Grund der Beziehungen am Anfang dieses Abschnittes bestätigt man übrigens leicht, daß (64a) auf (64) führt.

3.4. Zusammenhänge mit Interpolationsformeln

Zur Bestimmung der Nullstelle kleinsten Betrags kann man das Verfahren mit $x^n \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)$ durchführen. Kennt man schon einen Näherungswert δ, so ist es natürlich vorteilhaft, durch Verschiebung des Nullpunktes um den Wert δ diesen Umstand nutzbar zu machen. Wir wollen der Vollständigkeit halber zeigen, daß dies auf bekannte Interpolationsformeln zur Nullstellenbestimmung führt. Sei gegeben das Polynom $U(x)$, so setze man also

$$U_\delta(x) = U(x+\delta) \tag{66}$$

und, wenn c_n das konstante Glied von $U_\delta(x)$ bezeichnet,

$$P(x) = \frac{x^n}{c_n}\, U_\delta\left(\frac{1}{x}\right). \tag{67}$$

Sind $x_1 \ldots x_n$ die Nullstellen von $U(x)$, so sind

$$\frac{1}{x_i - \delta} = \xi_i, \tag{68}$$

die Nullstellen von $P(x)$, die es zu bestimmen gilt. Man beginnt zunächst wie bei der Iteration mod. $P(x)$ oder der Bernoulli-Eulerschen Rekursion, benützt aber früher oder später die erhaltenen Näherungswerte, um damit durch eine Nullpunktverschiebung ein neues Polynom herzustellen, worauf man von vorne beginnt.

Die abgekürzte Iteration ist somit nicht nötig, da man im allgemeinen jeweils nur wenige Schritte der Iteration mod. P durchführen wird. Damit kann man auch mit $Q^{(0)} = P'(x)$ beginnen und wir werden nur diesen Fall betrachten, der (vgl. § 4) bekanntlich bei mehrfachen Nullstellen besondere Vorzüge hat. Es wird $\alpha_i = s_i$, wo s_i die algebraischen Potenzsummen sind, mit Gewichten K_ν, d. h. mehrfache Nullstellen in ihrer Vielfachheit K_ν gezählt. Brauchbare Näherungswerte $\bar{\xi}$ für ξ_ν, woraus sich Näherungswerte $\bar{x} = \delta + \frac{1}{\bar{\xi}}$ für x_ν sofort ergeben, erhält man in der Form

$$\frac{1}{\bar{\xi}} = \frac{s_i}{s_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{69}$$

die Wahl $i = 0$ stellt ein offensichtlich zu grobes Verfahren dar.

Die Tendenz zur Konvergenz setzt bei diesen Interpolationsvorschriften dann ein, wenn δ *einer* Nullstelle wesentlich näher kommt als alle anderen. Nur reelle Nullstellen können approximiert werden. Verwendet man dagegen die Formel von Jacobi für $r = 2$, so erhält man eine quadratische Hilfsgleichung in der Form

$$\begin{vmatrix} s_i & s_{i+1} & s_{i+2} \\ s_{i+1} & s_{i+2} & s_{i+3} \\ \left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)^2 & \left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{70}$$

bei der die Tendenz zur Konvergenz bereits einsetzt, wenn δ *zwei* Nullstellen wesentlich näher kommt als allen anderen. Nunmehr approximiert die Hilfsgleichung auch einen zu einem komplexen Paar gehörigen quadratischen Faktor. Man kann sich entscheiden, welches der beiden Vorzeichen man heranziehen will.

Den erwähnten Zusammenhang mit bekannten Näherungsvorschriften erkennt man, wenn man beachtet, daß wegen

$$s_1 = \Sigma \frac{K_\nu}{x_\nu - \delta} \text{ und } U(\delta) = (\delta - x_1)(\delta - x_2) \ldots (\delta - x_n)$$

$$-s_1 = U'(\delta)/U(\delta) = \frac{d}{d\delta} \ln U(\delta) \tag{71}$$

und ferner wegen $\quad s_i = \Sigma \frac{K_\nu}{(x_\nu - \delta)^i}$

$$-(i-1)!\, s_i = \left(\frac{d}{d\delta}\right)^i \ln U(\delta) \quad \text{ist.} \tag{72}$$

Mit diesen Werten für s_i wurde (69) für $i = 1$ bereits von Schröder[1] angegeben. (70) für $i = 1$ hat kürzlich Maehly[2] mitgeteilt. Er erhält sie durch die Forderung, daß die Güte der Konvergenz von der Vielfachheit der Nullstellen nicht abhängen soll – die Laguerresche Formel hat bekanntlich diesen Nachteil noch. Da aber bei mehrfachen Nullstellen die Gewichte von der Vielfachheit K_ν abhängen, ist es von unserem Standpunkt aus nicht überraschend, daß diese Forderung bereits zu einer Beziehung führt, die selbst für die wesentlich allgemeiner definierten α_i noch gilt. Maehly findet eine kubische Konvergenz seines Verfahrens, wegen der Einzelheiten können wir auf eine angekündigte Arbeit verweisen.

§ 4. Mehrfache Nullstellen

$P(x)$ sei nunmehr ein Polynom mit nicht notwendig einfachen Nullstellen, die Nullstellen seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ mit den entsprechenden Vielfachheiten $K_1, K_2, \ldots, K_r$,

$$\sum_1^r K_\nu = n.$$

Neben den Eigenfunktionen $P_\nu(x)$, $\nu = 1 \ldots r$, des Operators x mod. $P(x)$ gemäß (18a), (20) gibt es zu jeder mehrfachen Nullstelle noch $K_\nu - 1$ Hauptfunktionen $\overset{(\rho)}{P}_\nu(x)$, definiert als

$$\overset{(\rho)}{P}_\nu(x) = P(x)/(x-\xi_\nu)^{\rho+1}, \quad \rho = 1 \ldots K_\nu - 1, \tag{73}$$

die die Beziehung erfüllen:

$$\overset{(\rho)}{P}_\nu(x) \cdot x = \xi_\nu \overset{(\rho)}{P}_\nu(x) + \overset{(\rho-1)}{P}_\nu(x), \quad \overset{(0)}{P}_\nu = P_\nu. \tag{73a}$$

---

[1] E. Schröder, Math. Ann. 2, 317 (1870). Durch Spezialisierung kann man aus der Formel für $i = 0$ die Newtonsche Vorschrift erhalten, ebenso aus (70) für $i = 0$ die Laguerresche Formel.

[2] H. J. Maehly, Z. angew. Math. Phys. 5, 260 (1954). Herr Maehly hat uns in einem Kolloquium über seine Ergebnisse berichtet und sein Manuskript übersandt, wofür wir ihm herzlich danken.

Im System der $\overset{(0)}{P}_1, \overset{(1)}{P}_1, \ldots \overset{(K_1-1)}{P}_1, \overset{(0)}{P}_2, \overset{(1)}{P}_2, \ldots, \ldots, \overset{(Kr-1)}{P}_r$ wird also der Operator x dargestellt in der kanonischen Form

$$\hat{\mathfrak{x}} = \begin{pmatrix} \Lambda_1^{(K_1)} & & & & \\ & \Lambda_2^{(K_2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Lambda_r^{(K_r)} \end{pmatrix} \tag{74}$$

wo

$$\Lambda_\nu^{(K_\nu)} = \begin{pmatrix} \xi_\nu & & & & & \\ 1 & \xi_\nu & & & & \\ & 1 & \xi_\nu & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & \xi_\nu \end{pmatrix} \tag{75}$$

ein K_ν-reihiger irreduzibler Bestandteil ist.

Für ein beliebiges Polynom $Q^{(0)}(x)$ vom Grad $n-1$ oder geringer gilt bekanntlich stets die Partialbruchzerlegung

$$\frac{Q^{(0)}(x)}{P(x)} = \frac{\overset{(0)}{e}_1}{(x-\xi_1)^{K_1}} + \frac{\overset{(1)}{e}_1}{(x-\xi_1)^{K_1-1}} + \cdots + \frac{\overset{(K_1-1)}{e}}{(x-\xi_1)} + \frac{\overset{(0)}{e}_2}{(x-\xi_2)^{K_2}} + \cdots \tag{76}$$

aus der folgt, daß $Q^{(0)}$ im System der Eigen- und Hauptfunktionen dargestellt werden kann in der Gestalt

$$Q^{(0)}(x) = \overset{(0)}{e}_1 \quad \overset{(K_1-1)}{P}_1(x) + \overset{(1)}{e}_1 \quad \overset{(K_1-2)}{P}_1(x) + \cdots + \overset{(K_1-1)}{e}_1 \quad \overset{(0)}{P}_1(x) + \\ + \overset{(0)}{e}_2 \quad \overset{(K_2-1)}{P}_2(x) + \cdots \tag{77}$$

Aus (14) und (73a) ergibt sich für $\rho = 0 \ldots K_\nu - 1$

$$\overset{(\rho)}{P}_\nu(x) \cdot x_i = \xi_\nu^i \overset{(\rho)}{P}_\nu(x) + \binom{i}{1} \xi_\nu^{i-1} \overset{(\rho-1)}{P}_\nu(x) + \binom{i}{2} \xi_\nu^{i-2} \overset{(\rho-2)}{P}_\nu(x) + \cdots + \\ \binom{i}{\rho} \xi_\nu^{i-\rho} \overset{(0)}{P}_\nu(x) \bmod P(x). \tag{78}$$

Damit wird

$$Q^{(i)}(x) = x^i\, Q^{(0)}(x) \bmod P(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=1}^{r} \Bigg\{ \left[{}^{(K_\nu-1)}_{e_\nu}\, \xi_\nu^i + {}^{(K_\nu-2)}_{e_\nu} \binom{i}{1} \xi_\nu^{i-1} + {}^{(K_\nu-3)}_{e_\nu} \binom{i}{2} \xi_\nu^{i-2} + \cdots + {}^{(0)}_{e_\nu} \binom{i}{K_\nu-1} \xi_\nu^{i-K_\nu+1} \right] {}^{(0)}_{P_\nu}(x) \\
&\quad + \left[{}^{(K_\nu-2)}_{e_\nu}\, \xi_\nu^i + {}^{(K_\nu-3)}_{e_\nu} \binom{i}{1} \xi_\nu^{i-1} + \cdots + {}^{(0)}_{e_\nu} \binom{i}{K_\nu-2} \xi^{i-K_\nu+2} \right] {}^{(1)}_{P_\nu}(x) \\
&\quad + \left[{}^{(K_\nu-3)}_{e_\nu}\, \xi_\nu^i + \cdots + {}^{(0)}_{e_\nu} \binom{i}{K_\nu-3} \xi_\nu^{i-K_\nu+3} \right] {}^{(2)}_{P_\nu}(x) \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + {}^{(0)}_{e_\nu}\, \xi_\nu^i\, {}^{(K_\nu-1)}_{P_\nu}(x) \qquad (79)
\end{aligned}$$

Dabei ergeben sich die Gewichte ${}^{(\rho)}_{e_\nu}$ nunmehr zu

$${}^{(\rho)}_{e_\nu} = \lim_{x \to \xi_\nu} \frac{1}{\rho!} \frac{d^\rho}{dx^\rho} \frac{Q^{(0)}(x)}{{}^{(K_\nu-1)}_{P_\nu}(x)} \qquad (80)$$

Für $Q^{(i)}$ ist eine (46) entsprechende Darstellung vorteilhafter. Es gilt zunächst

$${}^{(\rho)}_{P_\nu}(x) = h_{n-\rho-1}(x) + \binom{\rho+1}{\rho} \xi_\nu\, h_{n-\rho-2}(x) + \cdots \binom{n-1}{\rho} \xi_\nu^{n-\rho-1}\, h_0(x) \qquad (81)$$

Denn man hat

$$\begin{aligned}
(x-\xi_\nu)\, {}^{(\rho)}_{P_\nu} &= h_{n-\rho}(x) + \left[\binom{\rho+1}{\rho} - \binom{\rho}{\rho} \right] \xi_\nu\, h_{n-\rho-1}(x) + \left[\binom{\rho+2}{\rho} - \binom{\rho+1}{\rho} \right] \xi_\nu^2\, h_{n-\rho-2}(x) \\
&\quad + \cdots + \left[\binom{n-1}{\rho} - \binom{n-2}{\rho} \right] \xi_\nu^{n-\rho-1}\, h_1(x) + \left[\binom{n}{\rho} - \binom{n-1}{\rho} \right] \xi_\nu^{n-\rho}\, h_0(x) \\
&\quad - \left[a_{n-\rho} + \binom{\rho+1}{\rho} \xi_\nu\, a_{n-\rho-1} + \binom{\rho+2}{\rho} \xi_\nu^2\, a_{n-\rho-2} + \cdots + \binom{n-1}{\rho} \xi_\nu^{n-\rho-1}\, a_1 + \binom{n}{\rho} \xi_\nu^{n-\rho} \right] \\
&= {}^{(\rho-1)}_{P_\nu}(x) - \frac{1}{\rho!}\, P^{(\rho)}(\xi_\nu).
\end{aligned}$$

$P^{(\rho)}(\xi_\nu)$ verschwindet jedoch für $\rho = 0 \ldots K_\nu - 1$, und damit erfüllt (81) die Definition (73). Nach kurzer Umformung ergibt sich, daß (46) weiter gilt mit

$$\alpha_i = \sum_{\nu=1}^{r} {}^{(K_\nu-1)}e_\nu \, \xi_\nu^i + {}^{(K_\nu-2)}e_\nu \binom{i}{1} \xi_\nu^{i-1} + {}^{(K_\nu-3)}e_\nu \binom{i}{2} \xi_\nu^{i-2} + \cdots \tag{82}$$
$$+ {}^{(0)}e_\nu \binom{i}{K_\nu-1} \xi_\nu^{i-K_\nu+1}.$$

Selbstverständlich erfüllen die so definierten α_i immer noch die Bernoullische Rekursionsformel, was man auch unmittelbar nachprüft.

Wählt man als Ausgangspolynom $Q^{(0)} = 1$, so ist jedenfalls nach (80) ${}^{(0)}e_\nu \neq 0$. Man erkennt, daß die gewöhnliche Iteration mod. $P(x)$ für mehrfaches ξ_1 zwar noch konvergiert, falls $|\xi_1| > |\xi_2|$, aber in der Grenze nur logarithmisch und damit völlig ungenügend. Bei abgekürzter Iteration ergibt sich statt quadratischer nur noch lineare Konvergenz. Glücklicherweise kann man aber mehrfache Nullstellen wie bisher einfache Nullstellen gleichen Betrags behandeln. Die Konvergenzergebnisse in § 3 bleiben im wesentlichen unverändert. Um dies zu sehen, denke man sich die dortige Diskussion mit n Unbestimmten ξ_ν geführt. Bei festgehaltenem Ausgangs-Polynom $Q^{(0)}$ kommt es dann auf das Verhalten der Gewichtsfaktoren e_ν beim Grenzübergang der eingesetzten numerischen Werte zu zusammenfallenden Nullstellen an. Eine eingehendere Untersuchung zeigt, daß das Nichtverschwinden des als $e_1^{(0)}$ bezeichneten Grenzwertes notwendig und hinreichend ist. Für die Wahl $Q^{(0)} = 1$ ist diese Bedingung aber erfüllt.

Besondere Vorteile bietet natürlich, wie seit Lagrange bekannt ist, die Wahl $Q^{(0)} = P'(x)$, wobei trivialerweise ${}^{(K_\nu-1)}e_\nu = K_\nu$, ${}^{(\rho)}e_\nu = 0$ für $\rho = 0 \ldots K_{\nu-2}$ wird. Es wird also nur der Raum der Eigenvektoren aufgespannt, es gibt keine Elementarteiler-Komplikationen. Wir haben gelegentlich auf den Vorteil dieses Umstandes hingewiesen, so in 3.4. Bei Durchführung der abgekürzten Iteration ist es jedoch nicht möglich, mit $Q^{(0)}(x) = P'(x)$ zu beginnen. Eine abschließende Multiplikation mit $P'(x)$, vgl. 2.4, bringt bei mehrfachen Nullstellen einen Stellenverlust durch Auslöschung mit sich, wie man aus (79) erkennt. Im übrigen ist wegen ${}^{(0)}e_1 = 0$ die Abtrennung aller K_1 Nullstellen ξ_1 durch den Prozeß der «cross-multiplication» nicht möglich.

Zwar führt, wie man ebenfalls an der Gestalt von (79) unmittelbar sieht, auch ein erneuter Gesamtschritt der abgekürzten Iteration zu einer ungefähr ebenso großen Auslöschung; zu einer um so stärkeren, je weiter die Iteration fortgeschritten ist. Im allgemeinen konvergieren jedoch die durch fortgesetzte «cross-multiplication» gebildeten Iterationspolynome ${}^{K_1}\overline{Q}^{(i)}$, bevor es zu einer nennenswerten Auslöschung kommt.

Es wird kaum nötig sein, zu bemerken, daß exakt zusammenfallende Nullstellen bei einem numerisch gegebenen Polynom unwahrscheinlich sind. Unsere Überlegungen sind deshalb eher dafür gedacht, erkennen zu lassen, was im Falle sehr nahe benachbarter Nullstellen eintritt – in dem Fall, in welchem auch eine Abtrennung etwa durch den Euklidschen Algorithmus zwischen $P'(x)$ und $P(x)$ äußerst problematisch ist.