# Sitzungsberichte

der

# mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1933. Heft II
Mai-Juli-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

# Über Gleichungen unendlich hohen Grades in zwei Variabeln.

Von Fritz Lettenmeyer in München.

Vorgelegt von Herrn Perron in der Sitzung am 8. Juli 1933.

## § 1. Einleitung.

In der vorhergehenden Arbeit wurden für Gleichungen der Form

$$(\mathrm{I}) \qquad \sum_{\varrho=0}^{\infty} x^{\varrho} \Phi_{\varrho}(y) = 0,$$

wo die $\Phi_\varrho(y)$ Polynome in $y$ mit Koeffizienten aus einem Körper $\mathfrak{A}$ von der Charakteristik Null waren und $\Phi_0(y)$ nicht identisch Null sein sollte, sämtliche formale Lösungen der Form

$$(\mathrm{P}_0) \qquad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (k > 0 \text{ und ganz})$$

konstruiert. Die hierauf bezüglichen Existenzaussagen, die Sätze I und II der vorhergehenden Arbeit, werden im Folgenden als bekannt vorausgesetzt.

Es soll sich nun lediglich darum handeln, diese Ergebnisse auf Lösungen der Form

$$(\mathrm{P}) \qquad y = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (\nu_0 \text{ und } k \text{ ganz, } \nu_0 \gtreqless 0,\ k > 0)$$

zu übertragen und diejenigen Typen von Gleichungen unendlich hohen Grades in $x, y$ zu gewinnen, für welche formale Lösungen der Form (P) in Betracht kommen.

Wir legen der Untersuchung Gleichungen der Form

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum_{\varrho} \sum_{\sigma} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho} y^{\sigma} = 0$$

zugrunde, worin die $\varrho$, $\sigma$ eine vorgegebene endliche oder unendliche Menge von ganzzahligen Wertepaaren mit $\sigma \geqq 0$ durchlaufen; über die $a_{\varrho\sigma}$ wird lediglich vorausgesetzt, daß sie Größen irgendeines Körpers $\mathfrak{A}$ bedeuten, in welchem die üblichen Rechengesetze gelten (d. h. eines Körpers von der Charakteristik Null). Natürlich sollen nicht alle $a_{\varrho\sigma}$ gleich Null sein.

Eine Potenzreihe der Form (P) kann von vornherein nur dann als formale Lösung einer Gleichung (A) in Betracht kommen, wenn nach Einsetzung von (P) in die linke Seite von (A) und formaler Ausrechnung nur je endlich viele Glieder mit gleich hohen Potenzen von $x$ auftreten, da eine Zusammenfassung von unendlich vielen Gliedern mit gleichen Potenzen von $x$ in der formalen Algebra sinnlos ist. Diese notwendige Bedingung wollen wir die **Vorbedingung** nennen. Nur wenn die Vorbedingung erfüllt ist, hat die Aufgabe einen Sinn, die Koeffizienten $c_\nu$ in irgendeinem Erweiterungskörper von $\mathfrak{A}$ so zu wählen, daß nach der erwähnten Zusammenfassung die linke Seite von (A) identisch Null wird, also (P) eine formale Lösung von (A) ist.

Wir werden nun die Gleichungstypen der Form (A) lediglich nach dem Gesichtspunkt aufstellen, daß die Vorbedingung für das Vorhandensein einer formalen Lösung erfüllt sein soll. Ob dann für einen solchen Typus ohne weitere Einschränkung bereits formale Lösungen existieren, ist eine neue Frage. Es wird sich jedoch zeigen, daß keine weitere Einschränkung der unter dem Gesichtspunkt der Vorbedingung aufgestellten Typen nötig ist; daß also für diese Typen stets formale Lösungen existieren und konstruiert werden können, abgesehen von einem trivialen Fall, der ein Analogon dazu ist, daß ein nichtverschwindendes Polynom nullten Grades einer Variabeln keine Wurzel hat.

Die Notwendigkeit, mehrere Typen zu unterscheiden, rührt nun daher, daß die Erfülltheit der Vorbedingung auch wesentlich von der Zahl $\frac{\nu_0}{k}$, dem Anfangsexponenten der angesetzten Potenzreihe, abhängt. Wenn z. B. für eine gewisse Gleichung der Form (A) bei einem Lösungsansatz mit $\nu_0 = 0$ die Vorbedingung erfüllt ist, so wird dies zwar a fortiori auch bei einem Lösungsansatz mit nur positiven Exponenten der Fall sein, aber es braucht nicht mehr der Fall zu sein bei einem Lösungsansatz, der auch negative Exponenten enthält.

Wir werden in § 2 zunächst denjenigen Gleichungstypus aufstellen, für welchen Lösungen der Form ($P_0$), also mit dem Anfangsexponenten Null, in Betracht kommen. Es wird sich herausstellen, daß der allgemeinste derartige Gleichungstypus gerade der Typus (I) ist, welcher dem Existenzbeweis der vorhergehenden Arbeit zugrundegelegt wurde.

Dieser Existenzbeweis liefert auch alle ev. vorhandenen Lösungen der Form (P) mit $\nu_0 > 0$, also mit einem positiven Anfangsexponenten, da bei der Berechnung der $c_\nu$ sich für $c_0$ und noch weitere darauffolgende $c_\nu$ der Wert Null ergeben kann. Es ist aber nicht überflüssig, den Ansatz einer Lösung mit einem positiven Anfangsexponenten eigens zu behandeln, da hiefür ein umfassenderer Gleichungstypus zugrundegelegt werden kann. Dies wird sich in § 3 durch die Transformation

$$y = x^{\frac{\nu_0}{k}} z$$

leicht ergeben. Diese Transformation wird für $\nu_0 < 0$ zugleich den engeren Gleichungstypus liefern, für welchen Lösungen der Form (P) mit einem negativen Anfangsexponenten in Betracht kommen.

Es sei darauf hingewiesen, daß sich auch Gleichungstypen ergeben werden, welche unendlich viele Lösungen besitzen.

Zur Beschreibung der Gleichungstypen und auch zur Konstruktion sämtlicher Lösungen einer vorgegebenen Gleichung bedienen wir uns der von den Newtonschen oder Puiseuxschen Diagrammen her bekannten geometrischen Veranschaulichung der Wertepaare $\rho, \sigma$ durch die Gitterpunkte einer $\rho,\sigma$-Ebene[1]: Zu jeder auf der linken Seite von (A) vorkommenden Größe $a_{\rho\sigma}$ werde der Gitterpunkt $\rho, \sigma$ markiert; die Gesamtheit der markierten Gitterpunkte soll das **Gitterpunktsgebiet** der Gleichung (A) heißen. Es gehört eo ipso der oberen Halbebene ($\sigma \geq 0$) an. Ein bestimmter Typus von Gleichungen der Form (A) wird dann durch gewisse geometrische Eigenschaften des Gitterpunktsgebietes charakterisiert werden.

[1] In der üblichen Weise sei die $\rho$-Achse nach rechts, die $\sigma$-Achse nach oben gerichtet.

## § 2. Der Gleichungstypus, für welchen Lösungen mit dem Anfangsexponenten Null in Betracht kommen.

Geht man mit dem Ansatz

$$(\mathrm{P}_0) \qquad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{h}}$$

in eine Gleichung der Form (A) hinein, so treten auf der linken Seite unter anderm alle Glieder der Doppelsumme

$$\sum_{\varrho} \sum_{\sigma} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho} c_0^{\sigma}$$

auf. Zur Erfülltheit der in § 1 erwähnten Vorbedingung ist also nötig, daß zu jedem $\rho$ nur endlich viele $\sigma$ vorhanden sind; es kommen daher nur Gleichungen der Form

$$\sum_{\varrho} x^{\varrho} \sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^{\sigma} = 0$$

in Betracht, wo die $n_\varrho$ beliebige ganze Zahlen $\geqq 0$ sein dürfen.[2]

Das soweit eingeschränkte Gitterpunktsgebiet muß nun weiterhin, wenigstens was die Gitterpunkte mit $\sigma > 0$ betrifft, nach links beschränkt sein; d. h. es muß eine Zahl $\rho_0$ derart geben, daß für alle markierten Gitterpunkte mit $\sigma > 0$ die Beziehung $\rho \geqq \rho_0$ erfüllt ist. Angenommen nämlich, das Gitterpunktsgebiet enthalte eine unendliche Folge von Punkten $\rho_\mu$, $\sigma_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3, \ldots$) mit $\rho_\mu > \rho_{\mu+1}$ und $\sigma_\mu > 0$, dann läßt sich zu jedem $\rho_\mu$ in der Entwicklung von

$$x^{\varrho_\mu} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{h}} \right)^{\sigma_\mu}$$

mindestens ein Glied mit $x^0$ finden; es treten also unendlich viele Glieder mit $x^0$ auf, sodaß die Vorbedingung gewiß nicht erfüllt ist.[3]

---

[2] Das gilt auch für $c_0 = 0$; es sei denn, daß man eigens für einen derartigen Fall die Summe von unendlich vielen 0 in einem Körper definieren wollte. Wir ziehen es jedoch vor, den allgemeinen Ansatz von Lösungen mit einem positiven Anfangsexponenten eigens zu behandeln und werden gleich nachher die Fragestellung auf Lösungen $(\mathrm{P}_0)$ mit $c_0 \neq 0$ beschränken.

[3] Analog zu dem in der vorhergehenden Fußnote Bemerkten spielt es keine Rolle, ob der Koeffizient eines solchen Gliedes mit $x^0$ gleich oder ungleich Null ist.

Damit ist gezeigt, daß auf Grund der Vorbedingung nur Gleichungen der Form

$$\sum_{\varrho=-\infty}^{\varrho_0-1} a_{\varrho 0} x^\varrho + \sum_{\varrho=\varrho_0}^{\infty} x^\varrho \sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^\sigma = 0$$

in Betracht kommen. Hier kann aber der erste Term ohne Einschränkung der Allgemeinheit weggelassen werden, wenn dies auch nicht mehr mit der Vorbedingung zusammenhängt. Es kann sich nämlich nach Einsetzung einer Potenzreihe $(P_0)$ kein Glied des ersten Terms gegen ein Glied des zweiten Terms wegheben; soll also $(P_0)$ eine Lösung sein, so müssen alle $a_{\varrho 0}$ des ersten Terms gleich Null sein. Von diesem trivialen Fall sehen wir natürlich ab.

Für die Existenz einer Lösung der Form $(P_0)$ ist es also notwendig, sich auf den Gleichungstypus

$$\text{(I a)} \qquad \sum_{\varrho=\varrho_0}^{\infty} x^\varrho \sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^\sigma = 0$$

zu beschränken.

Für einen späteren Zweck sei das dem Typus (I a) zugrundeliegende Gitterpunktsgebiet der oberen Halbebene ($\sigma \geqq 0$) nochmals geometrisch beschrieben. Es ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

1) Es gibt eine ganze Zahl $\rho_0$ derart, daß für alle Punkte des Gebietes $\rho \geqq \rho_0$ ist, d. h. kein Punkt des Gebietes liegt links von der Vertikalen $\rho = \rho_0$.
2) Jede Vertikale mit $\rho \geqq \rho_0$ enthält höchstens endlich viele Gitterpunkte des Gebietes.

Für diesen durch 1) und 2) gekennzeichneten Sachverhalt sagen wir kurz: **Das Gitterpunktsgebiet ist nach Vertikalen von links her abzählbar.**

Da nicht alle $a_{\varrho\sigma}$ gleich Null sein sollen, darf angenommen werden, daß auf der Vertikalen $\rho = \rho_0$ mindestens ein Gitterpunkt des Gebietes liegt, für welchen die zugehörige Größe $a_{\varrho\sigma}$ von Null verschieden ist. (Andernfalls bräuchte man nur in (I a) endlich viele Glieder mit $a_{\varrho\sigma} = 0$ wegzulassen.) Dadurch ist die Vertikale $\rho = \rho_0$ eindeutig festgelegt; sie soll die **Anfangsvertikale** heißen.

Multipliziert man die Gleichung (I a) mit $x^{-\varrho_0}$ durch, so erhält man (unter gleichzeitiger Indexverschiebung bei den $n_\varrho$) die Form

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \Phi_\varrho(y) = 0,$$

wo $\sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^\sigma = \Phi_\varrho(y)$ gesetzt ist und $\Phi_0(y)$ nicht identisch verschwindet. (Die Anfangsvertikale ist also in die $\sigma$-Achse gelegt.)

Damit erweist sich der gesuchte Gleichungstypus gerade als der in der vorhergehenden Arbeit behandelte; die Vorbedingung für Lösungen der Form $(P_0)$ ist also erfüllt, was man auch direkt leicht nachprüfen kann.

Dieser Gleichungstypus (Ia) läßt sich noch in einer zweiten äquivalenten Form schreiben, in welcher die linke Seite nach Potenzen von $y$ geordnet ist; dadurch wird die Eigenschaft, eine Gleichung unendlich hohen Grades in $y$ zu sein (abgesehen von dem Spezialfall, daß die $n_\varrho$ beschränkt sind), mehr in Evidenz gesetzt. Diese Form ist folgende:[4]

$$\text{(I b)} \qquad \sum_{\sigma=0}^{\infty} y^\sigma \sum_{\varrho=g_\sigma}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^\varrho = 0 \quad \text{mit} \lim_{\sigma\to\infty} g_\sigma = +\infty$$ [5]

---

[4] Daß jede Gleichung (I a) auch von der Form (I b) ist (im Fall beschränkter $n_\varrho$ klar), ergibt sich ohne weiteres aus der Betrachtung des der Gleichung (I a) zugrundeliegenden Gitterpunktsgebietes: alle über einer hinreichend hoch gewählten Abszisse liegenden markierten Gitterpunkte werden rechts von einer beliebig weit rechts vorgeschriebenen Ordinate liegen. Umgekehrt gibt es auf der linken Seite von (I b) nur endlich viele Glieder mit ein und derselben Potenz von $x$.

[5] Es sei ausdrücklich bemerkt, daß nicht etwa $a_{g_\sigma,\sigma} \neq 0$ vorausgesetzt ist. Diese Bemerkung spielt in den Fällen eine Rolle, wo es sich um Gleichungen der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} y^{\sigma_\nu} \sum_{\varrho=g_{\sigma_\nu}}^{\infty} a_{\varrho\sigma_\nu} x^\varrho = 0 \quad \text{mit } \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots \text{ und } \lim_{\nu\to\infty} g_{\sigma_\nu} = +\infty$$

handelt, in denen also gewisse Potenzen von $y$ überhaupt fehlen. Auch solche Gleichungen gehören zum Typus (I b); man braucht ja nur bei den fehlenden $\sigma$ die Glieder $0 \cdot x^{g_\sigma} y^\sigma$ einzuschalten, wo die $g_\sigma$ $(\sigma \neq \sigma_\nu)$ beliebig gewählt werden können, also speziell auch so, daß zusammen mit den $g_{\sigma_\nu}$ die Limesbeziehung $\lim_{\sigma\to\infty} g_\sigma = +\infty$ erfüllt ist. Ein solcher Fall wird in § 5 beim 7. Beispiel auftreten.

(dem Spezialfall beschränkter $n_0$ entspricht eine Gleichung endlichen Grades in $y$, wobei natürlich die Limesbedingung wegfällt).

Die Koeffizienten der $y^\sigma$ sind also Potenzreihen in $x$, deren Anfangsexponenten $g_\sigma$ mit $\sigma$ gegen $+\infty$ wachsen. (Endlich viele der $g_\sigma$ können negativ sein, was natürlich unwesentlich ist.)

Es sei in (I) $m$ ($m \geqq 0$) der Grad des „Anfangspolynoms“ $\Phi_0(y)$[6], dann besitzt die Gleichung (I) nach Satz I der vorhergehenden Arbeit genau $m$ Lösungen der Form ($P_0$), wobei mehrfache Lösungen in ihrer Vielfachheit zu zählen sind.

Wir wollen jetzt aber nur die Lösungen mit $c_0 \neq 0$ berücksichtigen, da die Lösungen mit $c_0 = 0$ im nächsten Paragraphen eigens betrachtet werden.

Schreiben wir

$$\Phi_0(y) = a_{0m} y^m + \cdots + a_{0m_0} y^{m_0}$$
$$(a_{0m} \neq 0, \quad a_{0m_0} \neq 0, \quad 0 \leq m_0 \leq m),$$

sodaß also $m - m_0$ ($\geqq 0$) die Anzahl der von Null verschiedenen Wurzeln des Polynoms $\Phi_0(y)$ bezeichnet, so besitzt die Gleichung (I) nach Satz II der vorhergehenden Arbeit genau $m - m_0$ Lösungen der Form ($P_0$) mit $c_0 \neq 0$.

Nun sei folgende geometrische Ausdrucksweise eingeführt: Eine Gerade der $\rho,\sigma$-Ebene soll eine **linke Stützgerade** des Gitterpunktsgebietes heißen, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1) sie ist keine Horizontale;
2) sie enthält nur endlich viele Gitterpunkte des Gebietes, darunter mindestens zwei, für welche die zugehörige Größe $a_{\rho\sigma}$ von Null verschieden ist;
3) alle weiteren Gitterpunkte des Gebietes liegen rechts von ihr.

Auf Grund dieser Erklärung gibt es auf jeder Stützgeraden eine eindeutig bestimmte kleinste Strecke, welche von den in 2) genannten Gitterpunkten diejenigen mit $a_{\rho\sigma} \neq 0$ enthält. Es sind somit die beiden Endpunkte dieser Strecke solche Gitterpunkte mit $a_{\rho\sigma} \neq 0$; weitere ev. vorhandene derartige Gitterpunkte liegen im Innern der Strecke. Diese Strecke soll die zugehörige **Stützstrecke** heißen. (Von den auf der Stützgeraden liegenden Gitterpunkten

---

[6] Also $m = n_0$, falls $a_{0n_0} \neq 0$.

des Gebietes können also solche mit $a_{\varrho\sigma}=0$ außerhalb der Stützstrecke liegen.)

Wenn in der Gleichung (I) $m=0$, also $\Phi_0(y)=a_{00}\neq 0$ ist, so gibt es keine Lösung der Form $(P_0)$, und die Anfangsvertikale (das ist die $\sigma$-Achse) ist keine linke Stützgerade, da auf ihr nur ein Gitterpunkt mit $a_{\varrho\sigma}\neq 0$ markiert ist.

Ist $m>0$ und $m_0=m$, so gibt es keine Lösung der Form $(P_0)$ mit $c_0\neq 0$, und die Anfangsvertikale ist aus demselben Grund wie soeben keine linke Stützgerade.

In diesen beiden Fällen gibt es offenbar überhaupt keine vertikale linke Stützgerade.

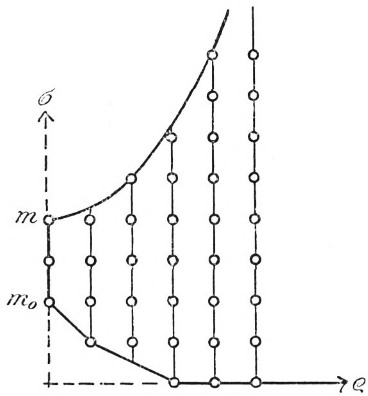



Fig. 1.

Ist $m>0$ und $m_0<m$, so gibt es $m-m_0$ Lösungen der Form $(P_0)$ mit $c_0\neq 0$, und die Anfangsvertikale ist jetzt linke Stützgerade. Die Stützstrecke ist die Strecke $m_0\leqq\sigma\leqq m$ der $\sigma$-Achse, also von der Länge $m-m_0$. (Siehe Fig. 1.)

Wir fassen diese Aussagen, indem wir sie gleich auf den Typus (I a) anstelle von (I) übertragen, folgendermaßen zusammen:

Eine Gleichung vom Typus (I a) hat dann und nur dann Lösungen der Form $(P_0)$ mit $c_0\neq 0$, wenn die Anfangsvertikale des zugrundeliegenden Gitterpunktsgebietes zugleich linke Stützgerade ist. Wenn dies der Fall ist, dann gibt die Länge der Stützstrecke die Anzahl dieser Lösungen an.

Anmerkung: Hat die vertikale Stützstrecke die Länge 1, so folgt aus dem Zusatz zu Satz II der vorhergehenden Arbeit, daß die Koeffizienten $c_\nu$ dem Körper $\mathfrak{A}$ selbst angehören. (Die damaligen Zahlen $w$ und $q$ sind beide gleich 1.) Wegen $q = 1$ enthält die Lösung nur ganze Exponenten (s. § 2 der vorhergehenden Arbeit).

## § 3. Allgemeinere Gleichungstypen.

Soll mit dem Ansatz (P), also mit einer Potenzreihe, deren Anfangsexponent positiv, Null oder negativ sein kann, in eine Gleichung der Form (A) hineingegangen werden, so läßt sich diese Aufgabe im Fall $\nu_0 \neq 0$ mittels der Transformation

$$y = x^{\frac{\nu_0}{k}} z$$

auf die in § 2 behandelte Aufgabe, also auf den Fall $\nu_0 = 0$, zurückführen; denn diese Transformation bedeutet für $z$ den Ansatz einer Potenzreihe mit dem Anfangsexponenten Null. Es muß daher das der Gleichung (A) zugrundeliegende Gitterpunktsgebiet so beschaffen sein, daß die Umrechnung in die Variabeln $x$, $z$ auf eine Gleichung vom Typus (I a) bzw. (I) führt, lediglich mit der unwesentlichen Modifikation, daß $x^{\frac{1}{k}}$ an die Stelle von $x$ tritt. Die Umrechnung liefert, wenn $k\rho + \nu_0\sigma = \alpha$ gesetzt wird:

$$\sum_\alpha x^{\frac{\alpha}{k}} \sum a_{\rho\sigma} z^\sigma = 0,$$

wo die äußere Summe über alle $\alpha$ zu erstrecken ist, für welche die Gerade $k\rho + \nu_0\sigma = \alpha$ einen Punkt des Gitterpunktsgebietes von (A) enthält, und die innere Summe über alle Gitterpunkte $\rho$, $\sigma$ mit $k\rho + \nu_0\sigma = \alpha$ dieses Gebietes.

Damit diese Gleichung von der Form (I a) (mit $x^{\frac{1}{k}}$, $z$ statt $x$, $y$) sei, sind folgende Eigenschaften des (eo ipso der oberen Halbebene ($\sigma \geqq 0$) angehörigen) Gitterpunktsgebietes notwendig und hinreichend:

1) Es gebe eine ganze Zahl $\alpha_0$ derart, daß für alle Punkte des Gebietes $k\rho + \nu_0\sigma \geqq \alpha_0$ ist; d. h. kein Punkt des Gebietes liegt links von der Geraden $k\rho + \nu_0\sigma = \alpha_0$.
2) Jede Gerade $k\rho + \nu_0\sigma = \alpha$ mit $\alpha \geqq \alpha_0$ enthalte höchstens endlich viele Gitterpunkte des Gebietes.

In Analogie zu der in § 2 eingeführten Ausdrucksweise sagen wir für die Forderungen 1) und 2) kurz:

**Das Gitterpunktsgebiet soll nach Parallelen der Steigung $-\frac{k}{\nu_0}$ von links her abzählbar sein.**

Wiederum darf angenommen werden, daß auf der Geraden $k\varrho + \nu_0\sigma = \alpha_0$ mindestens ein Gitterpunkt des Gebietes mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ liege. Dadurch ist $\alpha_0$ und damit diese Gerade eindeutig festgelegt; sie soll dann die **Anfangsparallele** heißen.

Hat nun das Gitterpunktsgebiet die eben geforderten Eigenschaften, so liefern die Ergebnisse des § 2 die Aussage, daß die transformierte Gleichung

$$\sum_{\alpha=\alpha_0}^{\infty} x^h \sum^{\alpha} a_{\varrho\sigma} z^\sigma = 0$$

dann und nur dann Lösungen der Form

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \left(x^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{\nu}{k_1}} \qquad (k_1 > 0 \text{ und ganz, } d_0 \neq 0)$$

hat, wenn die Anfangsparallele zugleich linke Stützgerade des Gitterpunktsgebietes ist, und daß, wenn sie es ist, die Anzahl dieser Lösungen gleich der Länge der vertikalen Komponente der Stützstrecke ist.

Für die ursprüngliche Gleichung (A) ist damit (man darf wohl sagen: mit dem ersten Blick auf ihr Gitterpunktsgebiet) entschieden, ob es Lösungen gibt, die mit einem Glied

$$d_0 x^{\frac{\nu_0}{k}} \qquad (d_0 \neq 0)$$

beginnen, und die Anzahl aller derartigen Lösungen bestimmt.

Man beachte, daß mit der Angabe dieses Anfangsexponenten nicht etwa gesagt ist, daß die folgenden größeren Exponenten den Hauptnenner $k$ hätten. Dieser Hauptnenner ist von der Form $k \cdot k_1$ (s. oben).[7]

[7] Es ist ja auch durch Angabe eines Anfangsexponenten $\frac{\nu_0}{k}$ die Zahl $k$ nicht eindeutig bestimmt, es sei denn, daß $\frac{\nu_0}{k}$ als reduzierter Bruch vorausgesetzt wird.

Es soll nun noch die analytische Formulierung dafür hergeleitet werden, daß das Gitterpunktsgebiet der Gleichung (A) nach Parallelen der Steigung $-\frac{k}{\nu_0}$ von links her abzählbar ist. Es ist zweckmäßig, die Fälle $\nu_0 < 0$ und $\nu_0 > 0$ getrennt zu behandeln.

1. Fall: $\nu_0 < 0$ (s. Fig. 2).

Die Geraden der Parallelenschar steigen nach rechts an. Die Gleichung (A) muß also zunächst sicher von der Form des Typus (I a) sein:

$$\sum_{\varrho=\varrho_0}^{\infty} x^{\varrho} \sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^{\sigma} = 0.$$

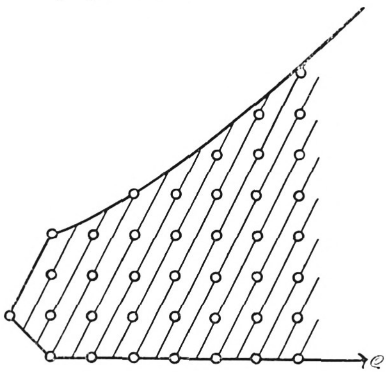


Fig. 2.

Nun kommt noch die Bedingung dazu, daß jede Gerade $k\rho + \nu_0\sigma = \alpha$ ($\alpha \geqq \alpha_0$) der Parallelenschar höchstens endlich viele Gitterpunkte des Gebietes enthalten soll.

Dies bedeutet, daß für jedes $\alpha \geqq \alpha_0$ von einem gewissen Index $\rho_\alpha$ an alle Gitterpunkte $(\rho, n_\varrho)$ unterhalb der Geraden $k\rho + \nu_0\sigma = \alpha$ liegen sollen. In Formeln:

Zu jedem $\alpha \geqq \alpha_0$ gebe es ein $\rho_\alpha$ derart, daß

$$n_\varrho < \frac{\alpha - k\rho}{\nu_0} \quad \text{oder} \quad n_\varrho + \frac{k}{\nu_0}\rho < \frac{\alpha}{\nu_0} \quad \text{für } \rho > \rho_\alpha.$$

D. h.:

$$\lim_{\varrho \to +\infty} \left( n_\varrho + \frac{k}{\nu_0}\rho \right) = -\infty.$$

Die Zahlen $n_\varrho$ dürfen also mit $\rho$ nicht so stark ins Unendliche wachsen wie die Zahlen $\frac{k}{|\nu_0|}\rho$; den genauen Sinn dieses „nicht so stark" gibt die Limesbeziehung an.

Wir haben also für Lösungen mit einem negativen Anfangsexponenten $\frac{\nu_0}{k}$ folgenden (gegenüber (I a) eingeschränkten) Gleichungstypus erhalten:

$$\text{(IIa)} \qquad \sum_{\varrho=\varrho_0}^{\infty} x^\varrho \sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^\sigma = 0 \text{ mit } \lim_{\varrho \to +\infty} \left(n_\varrho + \frac{k}{\nu_0}\rho\right) = -\infty.$$

2. Fall: $\nu_0 > 0$ (s. Fig. 3).

Die Geraden der Parallelenschar steigen nach links an. Wir schreiben zunächst die Gleichung (A) in der allgemeinen Form:

$$\sum_{\varrho=-\infty}^{\infty} x^\varrho \sum_{\sigma=h_\varrho}^{\infty} a_{\varrho\sigma}\, y^\sigma = 0.$$

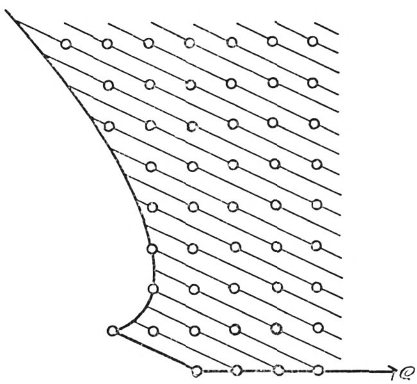



Fig. 3.

Die Bedingung, daß jede Gerade $k\rho + \nu_0\sigma = \alpha$ $(\alpha \geqq \alpha_0)$ der Parallelenschar höchstens endlich viele Gitterpunkte des Gebietes enthalten soll, bedeutet, daß für jedes $\alpha \geqq \alpha_0$ ein Index $\rho_\alpha$ vorhanden sein soll derart, daß für alle $\rho < \rho_\alpha$ die Gitterpunkte $(\rho, h_\varrho)$ oberhalb der Geraden $k\rho + \nu_0\sigma = \alpha$ liegen. In Formeln:

$$h_\varrho > \frac{\alpha - k\rho}{\nu_0} \quad \text{oder} \quad h_\varrho + \frac{k}{\nu_0}\rho > \frac{\alpha}{\nu_0} \quad \text{für} \quad \rho < \rho_\alpha.$$

D. h.:

$$\lim_{\varrho \to -\infty} \left(h_\varrho + \frac{k}{\nu_0}\varrho\right) = +\infty.$$

Die Zahlen $h_\varrho$ müssen also mit $\varrho \to -\infty$ stärker ins Unendliche wachsen als die Zahlen $-\frac{k}{\nu_0}\varrho = \frac{k}{\nu_0}|\varrho|$; den genauen Sinn dieses „stärker“ gibt die Limesbedingung an.

Wir haben also für Lösungen mit einem positiven Anfangsexponenten $\frac{\nu_0}{k}$ den folgenden (gegenüber (I a) erweiterten) Gleichungstypus erhalten:

$$\text{(III a)} \quad \sum_{\varrho=-\infty}^{\infty} x^\varrho \sum_{\sigma=h_\varrho}^{\infty} a_{\varrho\sigma} y^\sigma = 0 \quad \text{mit} \quad \lim_{\varrho \to -\infty} \left(h_\varrho + \frac{k}{\nu_0}\varrho\right) = +\infty.$$ [8]

Die beiden so erhaltenen Gleichungstypen (II a) und (III a) lassen sich noch je in einer zweiten äquivalenten Form schreiben, in welcher die linke Seite nach Potenzen von $y$ geordnet ist (vgl. (I a) und (I b) in § 2).

Am einfachsten erhält man diese Formen, wenn man von der aus (A) mittels $y = x^{\frac{\nu_0}{k}} z$ transformierten Gleichung

$$\sum_\sigma \left(\sum_\varrho a_{\varrho\sigma} x^{\varrho + \frac{\nu_0}{k}\sigma}\right) z^\sigma = 0$$

verlangt, daß sie in $x^{\frac{1}{k}}$, $z$ (anstelle von $x, y$) vom Typus (I b) sei. Dies gibt die Forderung, daß die innere Summe von der Gestalt sei:

$$\sum_{\varrho=g_\sigma}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho + \frac{\nu_0}{k}\sigma} \quad \text{mit} \quad \lim_{\sigma \to +\infty} \left(g_\sigma + \frac{\nu_0}{k}\sigma\right) = +\infty.$$

---

[8] Dieser Gleichungstypus hätte dem § 4 meiner früheren Arbeit „Über den Koeffizientenkörper von Reihenentwicklungen, insbesondere algebraischer Funktionen“ (S. 114 dieses Jahrganges) anstelle der damaligen Gleichung (11) S. 115 zugrundegelegt werden können.

(IIa) und (IIIa) lassen sich also in folgender gemeinsamen äquivalenten Form schreiben, welche auch (Ib) mit enthält:[9]

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} y^{\sigma} \sum_{\varrho=g_\sigma}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho} = 0 \quad \text{mit} \quad \lim_{\sigma \to +\infty} \left( g_\sigma + \frac{\nu_0}{k} \sigma \right) = +\infty. \begin{cases} \text{(IIb) für } \nu_0 < 0 \\ \text{(Ib) für } \nu_0 = 0 \\ \text{(IIIb) für } \nu_0 > 0 \end{cases}$$

## § 4. Konstruktion sämtlicher Lösungen einer gegebenen Gleichung der Form (A).

Während im vorigen Paragraphen von einem gegebenen Anfangsexponenten $\frac{\nu_0}{k}$ ausgegangen und der Gleichungstypus festgestellt wurde, dem eine Gleichung der Form (A) angehören muß, um auf Grund der Vorbedingung (s. § 1) eine mit diesem Anfangsexponenten beginnende Lösung überhaupt besitzen zu können, sei jetzt eine Gleichung der Form (A) vorgelegt; die Aufgabe ist nun die Auffindung sämtlicher formalen Lösungen der Form (P) dieser gegebenen Gleichung.

Nun wurde in § 3 festgestellt, daß das Vorhandensein von Lösungen, die mit einem Glied

$$d_0 x^{\frac{\nu_0}{k}} \quad (d_0 \neq 0)$$

beginnen, umkehrbar eindeutig folgender Eigenschaft des der Gleichung (A) zugrundeliegenden Gitterpunktsgebietes entspricht: Es ist eine linke Stützgerade der Steigung $-\frac{k}{\nu_0}$ (bzw. eine vertikale linke Stützgerade im Fall $\frac{\nu_0}{k} = 0$) vorhanden, mit welcher als Anfangsparalleler das Gebiet von links her nach Parallelen abzählbar ist. Die Anzahl der betreffenden Lösungen (mehrfache in ihrer Vielfachheit gezählt) ist dann gleich der Länge der vertikalen Komponente der Stützstrecke. Die Aufgabe

---

[9] Man kann auch direkt zeigen, daß sowohl (IIa) und (IIb) als auch (IIIa) und (IIIb) äquivalente Gleichungstypen sind; vgl. den § 5 der in der vorigen Fußnote angeführten Arbeit, wo dies für negative $\nu_0$ ($\nu_0 = -s$; $s > 0$) durchgeführt ist; für positive $\nu_0$ verläuft die Betrachtung ähnlich.

besteht also darin, sämtliche linken Stützgeraden des Gitterpunktsgebietes zu finden und sodann jede daraufhin zu prüfen, ob mit ihr als Anfangsparalleler das Gitterpunktsgebiet von links her nach Parallelen abzählbar ist.

Der erste Teil dieser Aufgabe wird in bekannter Weise durch die Konstruktion desjenigen von links her gesehen konvexen Streckenzuges gelöst, dessen „Äußeres" keine Gitterpunkte mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ enthält, während seine Ecken solche Gitterpunkte sind. Die Konstruktion dieses (nicht notwendig vorhandenen, aber, wenn vorhanden, eindeutigen) Streckenzuges soll nun im einzelnen besprochen werden.

Wir dürfen von der vorgelegten Gleichung (A) annehmen, daß mindestens ein $a_{\varrho 0} \neq 0$ vorkomme; dies läßt sich, da nicht alle $a_{\varrho\sigma}$ gleich Null sein sollen, durch Wegdividieren einer geeigneten Potenz von $y$ stets erreichen. Ferner sollen natürlich in der Gleichung (A) Größen $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ mit $\sigma > 0$ vorkommen.

Die Menge der auf der $\varrho$-Achse liegenden Gitterpunkte mit $a_{\varrho 0} \neq 0$ ist also nicht leer. Ist diese Menge nach links nicht beschränkt, so gibt es keine Lösung der Gleichung (A), da keine linke Stützgerade des Gitterpunktsgebietes vorhanden sein kann. Ist diese Menge nach links beschränkt, so bezeichne $Q_0$ den am weitesten links liegenden ihrer Punkte. (Siehe von hier ab Fig. 4.)

Eventuell liegen noch links von $Q_0$ Gitterpunkte des Gebietes mit $a_{\varrho 0} = 0$. Wir wollen aber für einen solchen Fall einfach verabreden, daß bereits in der gegebenen Gleichung (A) die betreffenden Glieder weggelassen werden sollen.

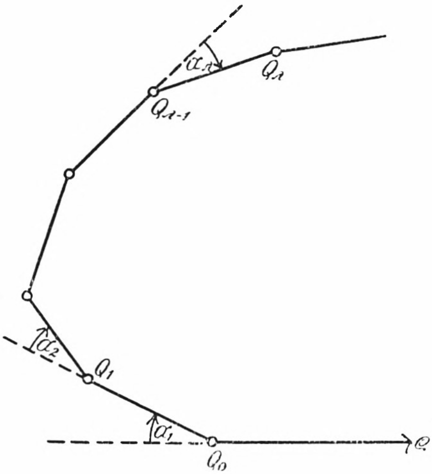
Nun werde der von $Q_0$ nach links gehende horizontale Strahl um $Q_0$ im Uhrzeigersinn gedreht.

Wenn es überhaupt eine Lösung gibt, also eine linke Stützgerade vorhanden ist, so ist offenbar[10] auch eine durch $Q_0$ gehende linke Stützgerade vorhanden; der Strahl wird also nach Drehung um einen gewissen Winkel (zwischen 0 und $\pi$) zum ersten Mal auf einen Gitterpunkt mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$, ev. gleichzeitig auf mehrere, endlich viele, solche treffen. In allen anderen Fällen, die bei dieser Drehung eintreten können, ist also keine Lösung vorhanden. Folgende Fälle kommen dabei in Betracht:

[10] Der Kürze der Darstellung halber berufe ich mich auf die Anschauung.

Es kann zunächst vorkommen, daß bei jeder noch so kleinen Drehung aus der Anfangslage heraus der Strahl einen (und damit unendlich viele) Gitterpunkte mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ überschreitet. (Siehe das folgende 1. Beispiel.) Wir sagen dann, es sei keine Drehung möglich.

Liegt dieser Fall nicht vor, so gibt es positive Winkel, um welche der Strahl gedreht werden kann, ohne auf einen Gitterpunkt mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ zu treffen. Die obere Grenze dieser Winkel sei mit $\alpha_1$ bezeichnet; es ist $\alpha_1 < \pi$, da es Größen $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ mit




Figur 4.

$\sigma > 0$ gibt. Wird der Strahl um diesen Winkel $\alpha_1$ gedreht[11], so überschreitet er keinen Gitterpunkt mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$; für seine Endlage bestehen nun drei Möglichkeiten:

Entweder enthält sie außer $Q_0$ keinen Gitterpunkt mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ (s. das folgende 2. Beispiel) oder sie enthält unendlich viele solche Gitterpunkte (s. das folgende 3. Beispiel) oder sie enthält außer $Q_0$ noch mindestens einen, aber höchstens endlich viele solche Gitterpunkte.

[11] Sollte bei dieser Drehung der Strahl Gitterpunkte mit $a_{\varrho\sigma} = 0$ überschritten haben, so sollen wie oben die betreffenden Glieder bereits in der Gleichung (A) weggelassen werden. Eine entsprechende Verabredung gelte für alle weiteren Drehungen; dies wird von jetzt an nicht mehr erwähnt werden.

In allen diesen Fällen außer bei der dritten soeben erwähnten Möglichkeit, an welche nachher angeknüpft werden wird, ist, wie schon erwähnt, sicher keine linke Stützgerade und damit keine Lösung der Gleichung (A) vorhanden.

$$1.\ \text{Beispiel:} \quad \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_\sigma x^{-\sigma^2} y^\sigma = 0 \qquad (\text{alle } b_\sigma \neq 0).$$

Das Gitterpunktsgebiet besteht aus allen Gitterpunkten der Halbparabel $\rho = -\sigma^2$ $(\sigma \geqq 0)$. $Q_0$ ist der Punkt (0, 0). Hier ist keine Drehung möglich; es gibt keine Lösung.

$$2.\ \text{Beispiel:} \quad \sum_{\varrho=0}^{\infty} b_\varrho x^\varrho y^{\varrho^2} = 0 \qquad (\text{alle } b_\varrho \neq 0).$$

Das Gitterpunktsgebiet besteht aus allen Gitterpunkten der Halbparabel $\sigma = \rho^2$ $(\rho \geqq 0)$. $Q_0$ ist der Punkt (0, 0). Hier kann der Strahl in die vertikale Lage gedreht werden, aber dann nicht weiter, aus demselben Grund wie beim 1. Beispiel. Es gibt keine Lösung.

$$3.\ \text{Beispiel:} \quad \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_\sigma x^{-\sigma} y^\sigma = 0 \qquad (\text{alle } b_\sigma \neq 0).$$

Das Gitterpunktsgebiet besteht aus allen Gitterpunkten der Halbgeraden $\rho = -\sigma$ $(\sigma \geqq 0)$. $Q_0$ ist der Punkt (0, 0). Hier trifft der Strahl nach Drehung um $45^0$ zuerst auf Gitterpunkte des Gebietes, aber gleichzeitig auf unendlich viele. Es gibt keine Lösung.

Wir kehren nun zu der vorhin übriggebliebenen dritten Möglichkeit zurück und nehmen an, der Strahl treffe nach Drehung um einen Winkel $\alpha_1$ $(0 < \alpha_1 < \pi)$ zuerst auf einen Gitterpunkt mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ oder gleichzeitig auf mehrere solche, jedoch endlich viele. Der von $Q_0$ aus gerechnet letzte werde mit $Q_1$ bezeichnet[12].

Die durch $Q_0$ und $Q_1$ gehende Gerade ist nun jedenfalls linke Stützgerade und $Q_0 Q_1$ die zugehörige Stützstrecke.

[12] Ev. liegen noch auf dem Strahl außerhalb der Strecke $Q_0 Q_1$ Gitterpunkte des Gebietes mit $a_{\varrho\sigma} = 0$. Wiederum sollen bereits in der Gleichung (A) die betreffenden Glieder weggelassen werden. Ebenso in späteren analogen Situationen.

Nun lassen wir von dem Strahl das Stück $Q_0 Q_1$ weg und drehen den bei $Q_1$ beginnenden Strahl um $Q_1$ weiter. Es bestehen jetzt analoge Möglichkeiten wie vorhin:

Es kann zunächst vorkommen, daß keine Weiterdrehung ohne Überschreitung eines (und damit unendlich vieler) Gitterpunkte mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ möglich ist. Dann kann die bezüglich $Q_0 Q_1$ als Anfangsparalleler für eine Lösung erforderliche Abzählbarkeit sowohl bestehen als nicht bestehen, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen.

$$4.\ \text{Beispiel:} \quad y + \sum_{\varrho=0}^{\infty} b_\varrho x^\varrho y^{\varrho^2} = 0 \quad (\text{alle } b_\varrho \neq 0).$$

Zu dem Gitterpunktsgebiet des 2. Beispiels kommt hier noch der Punkt (0, 1) hinzu. $Q_0$ ist der Punkt (0,0), $\alpha_1 = 90^0$, $Q_1$ der Punkt (0, 1). Die Abzählbarkeit nach Vertikalen besteht. Es gibt (da die vertikale Stützstrecke die Länge 1 hat) genau eine Lösung.

$$5.\ \text{Beispiel:} \quad 1 + y + x \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_\sigma y^\sigma = 0 \quad (\text{alle } b_\sigma \neq 0).$$

$Q_0$, $\alpha_1$ und $Q_1$ wie beim 4. Beispiel. Das Gitterpunktsgebiet ist nicht nach Vertikalen abzählbar, da die Vertikale $\rho = 1$ unendlich viele Gitterpunkte des Gebietes enthält. Es gibt keine Lösung.

Liegt der Fall der Unmöglichkeit einer Weiterdrehung nicht vor, so ist sicher das Gitterpunktsgebiet mit $Q_0 Q_1$ als Anfangsparalleler von links her nach Parallelen abzählbar; um dies einzusehen, braucht man nur um einen hinreichend kleinen Winkel $\beta$ weiterzudrehen; jede rechte Parallele zu $Q_0 Q_1$ wird dann den Strahl (in der durch $\alpha_1 + \beta$ bestimmten Endlage) schneiden und daher nur endlich viele Gitterpunkte enthalten. Es gibt nun Lösungen; ihre Anzahl ist gleich der vertikalen Komponente der Stützstrecke $Q_0 Q_1$.

Bei der Weiterdrehung des Strahles um $Q_1$ können sich nun analoge Situationen wie vorher ergeben. Nach Drehung um einen Winkel $\alpha_2$ wird der Strahl in seiner Endlage entweder außer $Q_1$ keinen Gitterpunkt mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ oder unendlich viele solche enthalten oder mindestens einen, aber endlich viele. In den beiden ersten Fällen ist die Endlage sicher keine linke Stützgerade; es gibt außer den durch $Q_0 Q_1$ gelieferten Lösungen keine weitere. Im letzten Fall bezeichne $Q_2$ den von $Q_1$ aus gerechnet letzten der erwähnten Gitterpunkte. Die durch $Q_1$ und $Q_2$ gehende Gerade ist nun jedenfalls linke Stützgerade und $Q_1 Q_2$ die zugehörige Stützstrecke. Nun werde, nach Weglassung des Stückes $Q_1 Q_2$, der Strahl um $Q_2$ weitergedreht. Ist dies nicht möglich, so kann, analog wie früher, das Gitterpunktsgebiet mit $Q_1 Q_2$ als Anfangsparalleler von links her nach Parallelen abzählbar sein oder nicht; ist die Weiterdrehung möglich, so besteht sicher diese Abzählbarkeit, und es gibt Lösungen in der Anzahl gleich der vertikalen Komponente der Stützstrecke $Q_1 Q_2$.

Es ist nun klar, wie sich das Verfahren fortsetzt, und daß, solange es nicht abbricht, schrittweise ein auf der $\rho$-Achse beginnender von links her gesehen konvexer Streckenzug entsteht.

Angenommen, man sei bis zu einer von einem Punkt $Q_\lambda$ ausgehenden, durch den Winkel $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{\lambda+1}$ bestimmten Endlage des Strahles gelangt, wobei noch $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\lambda < \pi$ sein soll. Dann sind jedenfalls die Strecken $Q_0 Q_1, \ldots, Q_{\lambda-1} Q_\lambda$ Stützstrecken, mit deren jeder als Anfangsparalleler das Gitterpunktsgebiet von links her nach Parallelen abzählbar ist. Die Strecke $Q_{\varkappa-1}\, Q_\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq \lambda)$ bildet mit der negativen $\rho$-Achse den Winkel $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\varkappa$; ihre Steigung $-\frac{k}{\nu_0}$ ist also gleich $\operatorname{tg}(\pi - \alpha_1 - \cdots - \alpha_\varkappa)$; mithin ist der Anfangsexponent $\frac{\nu_0}{k}$ der zugehörigen Lösungen gleich $\cot(\alpha_1 + \cdots + \alpha_\varkappa)$; dies ist der „wahre" Anfangsexponent, d. h. die zugehörigen Anfangskoeffizienten sind von Null verschieden. Die Anzahl dieser Lösungen ist gleich $q_\varkappa - q_{\varkappa-1}$, wenn $q_\varkappa$ die Ordinate des Punktes $Q_\varkappa$ bezeichnet.

Die Anzahl der zum Streckenzug $Q_0 Q_1 \ldots Q_\lambda$ gehörigen Lösungen ist also $= \sum_{\varkappa=1}^{\lambda} (q_\varkappa - q_{\varkappa-1}) = q_\lambda$ (hiebei ist $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\lambda < \pi$ benützt).

Es sollen nun diejenigen Fälle untersucht werden, in welchen mit einem Streckenzug $Q_0 \ldots Q_\lambda$ und der anschließenden Drehung um einen positiven Winkel $\alpha_{\lambda+1}$ das Verfahren abbricht.

Betrachten wir zunächst den Fall, daß $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{\lambda+1} \geqq \pi$ ist. Dann gibt es keine $a_{\rho\sigma} \neq 0$ mit $\sigma > q_\lambda$; die Gleichung (A) ist eine algebraische Gleichung vom Grad $n = q_\lambda$ in $y$. Wir haben dann die bekannte Tatsache, daß genau $n$ Lösungen vorhanden sind, und kennen zu jeder Gruppe von Lösungen den wahren Anfangsexponenten.

Ist $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{\lambda+1} < \pi$, so kann das Abbrechen des Verfahrens daher rühren, daß die Endlage des von $Q_\lambda$ ausgehenden Strahles außer $Q_\lambda$ keinen Gitterpunkt mit $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ enthält oder unendlich viele solche enthält oder, wenn beides nicht der Fall ist, daß es zwar noch einen Punkt $Q_{\lambda+1}$ gibt, ohne daß jedoch um diesen eine weitere Drehung möglich ist und ohne daß die Stützstrecke $Q_\lambda\, Q_{\lambda+1}$ noch Lösungen liefert (vgl. die früheren Beispiele).

Nun bleibt noch die Möglichkeit übrig, daß das Verfahren der aufeinanderfolgenden Drehungen niemals abbricht. Dann erhalten wir einen unendlichen, von links gesehen konvexen, beständig ansteigenden Streckenzug, also mit $q_\lambda \to \infty$ und mit konvergenter $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} \alpha_\lambda \leqq \pi$ (da alle Partialsummen $< \pi$ sind). Die Gleichung (A) hat dann unendlich viele Lösungen der Form (P).

## § 5. Beispiele von Gleichungen mit unendlich vielen Lösungen.

Beispiele von Gleichungen der Form (A) mit unendlich vielen formalen Lösungen sind leicht zu konstruieren. Man braucht nur einen ganz beliebigen Streckenzug $Q_0 Q_1 Q_2 \ldots$ derart zu wählen, daß jede Strecke $Q_\lambda\, Q_{\lambda+1}$ mit der negativen $\varrho$-Achse einen größeren Winkel bildet als $Q_{\lambda-1}\, Q_\lambda$, der jedoch stets $< \pi$ sein muß. Als Gitterpunktsgebiet kann dann jede beliebige Menge von Gitterpunkten gewählt werden, zu denen die Punkte $Q_0$, $Q_1$, $Q_2, \ldots$ gehören und von denen keiner links von dem Streckenzug liegt; mindestens den Punkten $Q_0$, $Q_1$, $Q_2, \ldots$ sind Größen $a_{\varrho\sigma} \neq 0$ zuzuordnen. Zwei sehr einfache Beispiele sollen nun angegeben werden.

$$6.\ \text{Beispiel:} \quad \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_\sigma x^{\sigma^2} y^\sigma = 0 \qquad (\text{alle } b_\sigma \neq 0).$$

Das Gitterpunktsgebiet besteht aus allen Gitterpunkten der

Halbparabel $\rho=\sigma^2$ $(\sigma \geqq 0)$[13]. Der Punkt $Q_\lambda$ $(\lambda \geqq 0)$ ist der Punkt $(\lambda^2, \lambda)$. Die Stützstrecke $Q_\lambda\, Q_{\lambda+1}$ hat die Steigung $\frac{1}{(\lambda+1)^2-\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda+1}$; der zugehörige Anfangsexponent ist also $-(2\lambda+1)$. Die vertikale Komponente jeder Stützstrecke ist gleich 1; es gibt also zu jedem Anfangsexponenten $-(2\lambda+1)$ eine einzige Lösung. Nach der Anmerkung S. 356 enthält diese nur ganze Exponenten und ihre Koeffizienten gehören bereits dem Körper $\mathfrak{A}$ der $b_\sigma$ an.

Wir haben also die unendlich vielen Lösungen

$$y=x^{-(2\lambda+1)}(d_{\lambda 0}+d_{\lambda 1}x+d_{\lambda 2}x^2+\cdots) \qquad (\lambda=0,1,2,\ldots;\ d_{\lambda 0}\neq 0)$$

und keine weiteren.

Wir wollen noch die Transformation mittels $y=x^{-(2\lambda+1)}z$ auf eine Gleichung vom Typus (I a) vornehmen. Zunächst erhält man:

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} b_\sigma x^{\sigma^2-(2\lambda+1)\sigma} z^\sigma = 0.$$

Diese Gleichung ist vom Typus (I b) mit $g_\sigma=\sigma^2-(2\lambda+1)\sigma$.

Die kleinsten Exponenten von $x$ treten bei $\sigma=\lambda$ und $\sigma=\lambda+1$ auf, nämlich $-\lambda^2-\lambda$; nun werde die Gleichung mit $x^{\lambda^2+\lambda}$ durchmultipliziert; in $\sum\limits_{\sigma=0}^{\lambda}$ werde $\sigma=\lambda-\tau$, in $\sum\limits_{\sigma=\lambda+1}^{\infty}$ werde $\sigma=\lambda+1+\tau$ gesetzt. Dann erhält man die Gleichung in der nach Potenzen von $x$ geordneten Form:

$$\sum_{\tau=0}^{\lambda} x^{\tau^2+\tau}(b_{\lambda-\tau}z^{\lambda-\tau}+b_{\lambda+1+\tau}z^{\lambda+1+\tau})+\sum_{\tau=\lambda+1}^{\infty} b_{\lambda+1+\tau}x^{\tau^2+\tau}z^{\lambda+1+\tau}=0.$$

Das Anfangspolynom ist also

$$z^\lambda(b_\lambda+b_{\lambda+1}z),$$

woraus nach Satz I und Satz II (samt Zusatz) der vorhergehenden Arbeit die obigen Aussagen über die zum Anfangsexponenten $-(2\lambda+1)$ gehörige einzige Lösung mit $d_{\lambda 0}\neq 0$ nochmals abzulesen sind.

[13] Man könnte noch alle Gitterpunkte mit $\sigma \geqq 0$ unterhalb dieser Halbparabel hinzunehmen.

7. Beispiel: $\sum_{\varrho=0}^{\infty} b_\varrho x^{-\varrho} y^{\varrho^2} = 0 \quad (\text{alle } b_\varrho \neq 0).$

Das Gitterpunktsgebiet besteht aus allen Gitterpunkten der Halbparabel $\sigma = \rho^2$ $(\rho \leqq 0)$[14]. Der Punkt $Q_\lambda$ $(\lambda \geqq 0)$ ist der Punkt $(-\lambda, \lambda^2)$. Die Stützstrecke $Q_\lambda\, Q_{\lambda+1}$ hat die Steigung $-\left((\lambda+1)^2 - \lambda^2\right) = -(2\lambda+1)$. Der zugehörige Anfangsexponent ist also $\frac{1}{2\lambda+1}$. Die vertikale Komponente der Stützstrecke $Q_\lambda\, Q_{\lambda+1}$ ist gleich $2\lambda+1$; es gibt also zu dem genannten Anfangsexponenten genau $2\lambda+1$ Lösungen, für deren jede der zugehörige Anfangskoeffizient von Null verschieden ist.

Da die Stützstrecke außer ihren Endpunkten keine Gitterpunkte enthält, ist das zugehörige Anfangspolynom zweigliedrig, hat also, abgesehen von den nicht in Betracht kommenden Wurzeln Null, einfache Wurzeln. Alle Lösungen sind also von der Vielfachheit Eins und daher verschieden und schreiten nach ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{2\lambda+1}}$ fort. Nur bei der Berechnung des Anfangskoeffizienten jeder Lösung ist eine Erweiterung des Körpers $\mathfrak{A}$ der $b_\varrho$ nötig, nämlich je die Auflösung einer reinen Gleichung vom Grad $2\lambda+1$, deren Wurzeln die Anfangskoeffizienten der zum Anfangsexponenten $\frac{1}{2\lambda+1}$ gehörigen Lösungen sind.

Wir haben also die unendlich vielen Lösungen

$$y = x^{\frac{1}{2\lambda+1}} \left(d_{\lambda\mu 0} + d_{\lambda\mu 1}\, x^{\frac{1}{2\lambda+1}} + d_{\lambda\mu 2}\, x^{\frac{2}{2\lambda+1}} + \cdots\right)$$
$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = 1, \ldots, 2\lambda+1;\ d_{\lambda\mu 0} \neq 0)$$

und keine weiteren.

Wir wollen auch hier noch die Transformation auf den Typus (Ia) vornehmen. Mittels $y = x^{\frac{1}{2\lambda+1}} z$ ergibt sich, wenn noch $x^{\frac{1}{2\lambda+1}} = t$ gesetzt wird:

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} b_\varrho\, t^{\varrho^2 - (2\lambda+1)\varrho}\, z^{\varrho^2} = 0.$$

[14] Man könnte noch alle Gitterpunkte rechts von dieser Halbparabel hinzunehmen.

Diese Gleichung ist sicher vom Typus (I b); die Zahlen $g_\sigma$ des Typus (I b) stehen hier zwar nur für diejenigen $\sigma$ da, welche Quadratzahlen sind:

$$g_\sigma = \sigma - (2\lambda + 1)\sqrt{\sigma} \qquad \text{für } \sigma = \rho^2 \ (\rho \geqq 0);$$

es steht aber doch frei, sich die übrigen Potenzen $z^\sigma$ als Glieder der Form $0 \cdot x^{g_\sigma} z^\sigma$ eingeschaltet zu denken, wo nun die $g_\sigma$ $(\sigma \neq \rho^2)$ beliebig gewählt werden können, also speziell auch so, daß zusammen mit den $g_{\rho^2}$ die Limesbeziehung $\lim\limits_{\sigma \to \infty} g_\sigma = +\infty$ erfüllt ist. (Vgl. Fußnote 5.)

Analog wie beim vorigen Beispiel läßt sich nun die Gleichung in der Form schreiben:

$$\sum_{\tau=0}^{\lambda} t^{\tau^2+\tau}\left(b_{\lambda-\tau} z^{(\tau-\lambda)^2} + b_{\lambda+1+\tau} z^{(\lambda+1+\tau)^2}\right) + \sum_{\tau=\lambda+1}^{\infty} b_{\lambda+1+\tau}\, t^{\tau^2+\tau} z^{(\lambda+1+\tau)^2} = 0.$$

Das Anfangspolynom ist also

$$z^{\lambda^2}(b_\lambda + b_{\lambda+1} z^{2\lambda+1}),$$

woraus nach Satz I und Satz II der vorhergehenden Arbeit die obigen Aussagen über die zum Anfangsexponenten $x^{\frac{1}{2\lambda+1}}$ gehörigen Lösungen nochmals abzulesen sind.