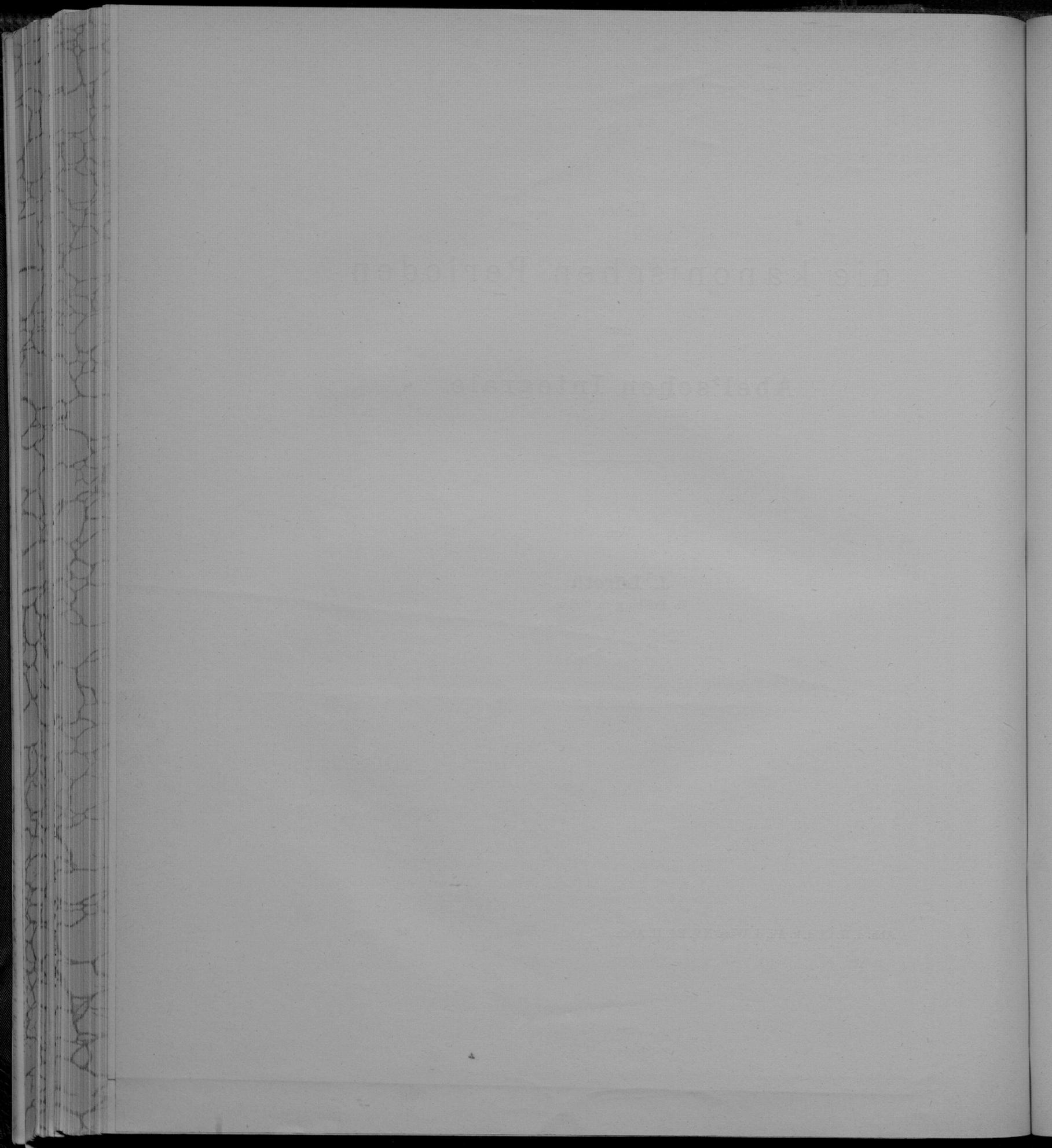


Ueber  
die kanonischen Perioden  
der  
**Abel'schen Integrale.**

---

Von  
**J. Lüroth**  
in Freiburg in Baden.

---



## Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale.

Riemann hat in seiner Theorie der Abel'schen Functionen die Lehre von den Perioden auf die Theorie des Zusammenhanges der Flächen gegründet. Wenn auch bei Flächen von leicht zu übersehender Gestalt es einfach ist sich vom Verlauf der Querschnitte eine Vorstellung zu machen, so ist dies doch für ein so complicirtes Gebilde, wie eine Riemann'sche Fläche es ist, ziemlich schwer. Jedenfalls aber bieten sich Schwierigkeiten dar, wenn man darauf ausgeht, ein System von Querschnitten zu legen, wie es Riemann in § 19 ff. seiner Abhandlung<sup>1)</sup> benutzt. Riemann's Interpreten Roch, Prym, Durège, C. Neumann in ihren Bearbeitungen und Erweiterungen der ganzen Theorie oder einzelner Specialfälle geben allgemeine Regeln zur Construction eines kanonischen Querschnittsystemes nicht an.

Clebsch und Gordan in ihrer Bearbeitung der Theorie der Abel'schen Functionen (1866) verliessen ganz den Riemann'schen Weg und es gelang ihnen in der That bei einfachen Verzweigungspunkten ohne Zuhilfenahme der Riemann'schen Fläche, nur mit Benutzung der Schleifen, rein rechnerisch die kanonischen Perioden aus den über die Schleifen genommenen Integralen zusammensetzen<sup>2)</sup>. Schläfli gab später (1873)<sup>3)</sup> eine etwas andere Darstellung einzelner Theile der Clebsch-Gordan'schen Theorie mit Benützung der Riemann'schen Fläche ohne die Herstellung der Fundamentalperioden zu vereinfachen. Schon vorher (1871) hatte ich versucht, eine Regel zu

1) Riemann's Werke. S. 122.

2) Clebsch und Gordan. Theorie der Abel'schen Functionen. 1866. Vierter Abschnitt. S. 80 ff.

3) Borchardt's Journal. Band 76 S. 149.

deren Herleitung zu finden und es war mir gelungen, zunächst eine besonders einfache Gestalt der Fläche herzustellen, in welcher es nicht schwierig war nach Analogie einer zweiblätterigen Fläche die kanonischen Querschnitte zu ziehen<sup>1)</sup>. Mein Aufsatz, der leider etwas kurz gehalten war, gab Clebsch Veranlassung, sich weiter mit der Frage zu beschäftigen und an eine neue Darstellung der Möglichkeit, eine typische Gestalt der Riemann'schen Fläche herzustellen, noch einige Erweiterungen anzuknüpfen<sup>2)</sup>. Praktische Anwendungen davon machten Kasten<sup>3)</sup> auf eine dreiblätterige Fläche und Graf<sup>4)</sup> auf eine sechsblätterige Fläche mit 20 Verzweigungspunkten. Der letztere stellt auch die kanonischen Perioden auf.

Endlich hat Clifford<sup>5)</sup> eine Darstellung der von Clebsch und mir vorgetragenen Sätze gegeben, die im Wesentlichen nichts Neues lehrt.

Die Herstellung der erwähnten typischen Gestalt der Riemann'schen Fläche ist nicht mühelos und zudem nur bei einfachen Verzweigungspunkten ausführbar. Mehrfache Verzweigungspunkte kann man freilich in einfache auseinanderziehen und nach der Herstellung der gewünschten Verzweigung wieder zusammenschieben, wobei man die gezogenen Querschnitte in bestimmter Weise über die Enden der Verzweigungsschnitte hinüberwerfen muss.

Klein ging bei mehreren Abhandlungen, die in dieses Gebiet einschlagen, von der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche ab und legte eine andere zu Grunde, indem er die complexe Variable  $x$  in anderer Weise deutete<sup>6)</sup>; insbesondere betrachtete er auch als Ort von  $x$  eine geschlossene Fläche mit henkelartigen Ansätzen<sup>7)</sup>. Die Oberfläche einer solchen kann man ohne Schwierigkeiten in eine einfach zusammenhängende zerlegen und zwar bieten sich kanonische Querschnitte fast am directesten dazu dar. Doch ist wohl bei dieser Darstellung von  $x$  einmal der Zu-

1) Math. Annalen Bd. 4 Seite 181.

2) " " " 6 " 216.

3) Zur Theorie der dreiblättrigen Riemann'schen Fläche. Göttingen. Dissertation 1876.

4) Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche. Bern. Dissertation 1878.

5) Proceed. London math. Soc. Band 8 S. 292.

6) Zuerst in Math. Ann. Band 7 S. 558; und in einigen späteren Abhandlungen in den Math. Annalen.

7) Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Leipzig 1882. Abschnitt 2. S. 24 u. ff.

sammenhang des Ortes auf der Fläche mit dem Werthe von  $x$  ein complicirter, andererseits ist es nicht leicht eine gegebene Riemann'sche Fläche in der richtigen Weise auf eine Fläche mit der gehörigen Anzahl von Henkeln zu beziehen. Ich hielt es daher nicht für unnöthig die Frage, wie man bei einer beliebigen Riemann'schen Fläche die kanonischen Perioden finden könne, auch ferner im Auge zu behalten. Es gelang mir schliesslich eine Methode zur Beantwortung jener Frage zu finden, indem ich von der Darstellung der Riemann'schen Fläche Gebrauch machte, welche Klein in seinen Arbeiten über höhere Gleichungen häufig benutzt hat<sup>1)</sup> und die schon von Riemann angegeben worden sein soll. Bei ihr werden die Blätter in der Ebene neben einander gelegt, nachdem sie vorher so deformirt sind, dass sie sich zu einem Polygon zusammenschliessen. Auch hier ist der Zusammenhang zwischen dem Flächenpunkt und dem Werthe der Variablen  $x$  ein nicht einfacher und daher zog ich es vor bei meiner ersten Publication über diese Methode<sup>2)</sup> mich der alten Riemann'schen Fläche zu bedienen und an die Lehre vom Zusammenhang anzuknüpfen.

In der vorliegenden Arbeit habe ich dagegen die letztere Theorie ganz vermieden und versucht die Zahl der kanonischen Perioden durch andere Betrachtungen zu bestimmen, die, wie ich hoffe, hinlänglich einfach und streng sind. Einige Beispiele zeigen, dass die dargelegte Methode die kanonischen Periodenwege zu finden eine überaus einfache ist und sich ohne Schwierigkeit anwenden lässt.

### § 1.

Den gesammten Werthvorrath, den eine  $n$ -werthige, algebraische Function  $y$  der complexen Veränderlichen  $x$  darbietet, kann man, nach Riemann's Vorgang mit Hilfe von Verzweigungsschnitten in  $n$  einwerthige stetige Zweige zerlegen.

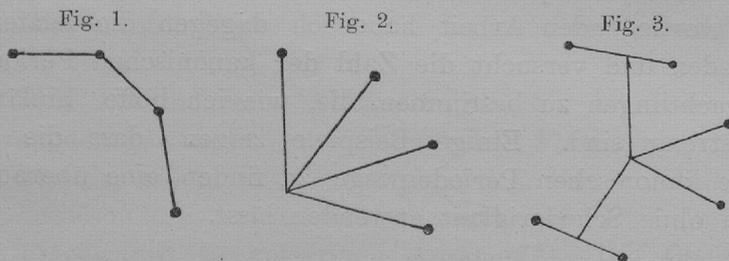
Um dies zu erreichen bestimmt man die Verzweigungspunkte — deren Zahl  $q$  sei —  $w_1, w_2, \dots, w_q$  der Function  $y$  und verzeichnet dieselben in der Ebene  $E$ , welche nach Argand-Gauss zur Darstellung der

1) Math. Ann. Bände 10—20; besonders 14 Seite 134.

2) Sitzungsberichte der physik.-medic. Societät zu Erlangen. Sitzung vom 12. Febr. 1883.

complexen Grösse  $x$  dient. Man verbindet dann die Punkte  $w_1, w_2 \dots w_q$  durch ein Liniensystem  $L'$  so, dass die Linien des Systems keinen Theil der Ebene  $E$  inselförmig einschliessen, dass aber das Umlaufen eines einzelnen Verzweigungspunktes oder einer Gruppe derselben — die nicht aus allen besteht — unmöglich ist, wenn man nicht die Linien des Systems überschreiten will.

Man kann das System  $L'$  in verschiedenen Weisen anordnen. Man kann z. B. die Punkte  $w$  zu Ecken eines offenen Polygons machen (Fig. 1), oder man kann einen Punkt wählen, der selbst kein Verzweigungspunkt ist und diesen mit den Punkten  $w$  durch Linien verbinden (Fig. 2); oder endlich man kann zu den  $q$  Verzweigungspunkten noch  $k$  andere Punkte, Knotenpunkte, hinzunehmen und diese  $q + k$  Punkte durch Linien in Verbindung setzen, welche die Bedingung erfüllen, dass weder sie alle noch ein Theil von ihnen ein geschlossenes Polygon bilden (Fig. 3, wo, wie in Fig. 1 und 2, die Verzweigungspunkte durch fette Punkte bezeichnet sind). Die  $q + k$  Punkte sollen Ecken, die sie verbindenden Linien Seiten von  $L'$  heissen.



Man erkennt leicht (etwa durch den Schluss von  $n$  auf  $n + 1$ ), dass die Anzahl der Seiten von  $L' = q + k - 1$  ist. Jede Seite hat zwei Ufer und man kann, wie ebenfalls unschwer zu erkennen, das ganze System  $L'$  so umlaufen, indem man stets an den Seiten entlang geht und die Ecken in Bogen umgeht, dass jedes Ufer jeder Seite durchmessen wird, aber nur einmal, und dass der ganze Weg in sich zurückläuft.

In einem Punkte  $x_0$ , der weder Verzweigungspunkt noch Knotenpunkt ist, kann man nun  $n$  Potenzreihen  $P_1(x - x_0), P_2(x - x_0) \dots P_n(x - x_0)$ , die nach ganzen positiven Potenzen fortschreiten, aufstellen, die für  $y$  gesetzt die zwischen  $x$  und  $y$  bestehende Gleichung  $f(x, y) = 0$  erfüllen. Setzt man eine dieser Reihen in der ganzen Ebene  $E$  fort ohne

die Seiten von  $L'$  zu überschreiten, so erhält man eine eindeutige Function von  $x$ , die der Gleichung  $f(x, y) = 0$  genügt und also einen eindeutigen stetigen Zweig von  $y$  vorstellt. Macht man dies mit allen  $n$  Potenzreihen, so ist der ganze durch die Gleichung  $f(x, y) = 0$  gegebene Werthvorrath in  $n$  Zweige zerlegt und jeder Werth von  $y$  findet sich in einem und nur einem Zweige vor. Um die  $n$  Zweige zu trennen, benützt Riemann bekanntlich für jeden derselben zur Repräsentation von  $x$  ein besonderes Blatt und die Gesammtheit der  $n$  Blätter bildet die Riemann'sche Fläche  $T$ . In jedem Blatte hat man das Liniensystem  $L'$  zu zeichnen, die verschiedenen Copien desselben im 1<sup>ten</sup>, 2<sup>ten</sup> . . .  $n$ <sup>ten</sup> Blatte seien bez.  $L_1, L_2, \dots, L_n$  und ihre Gesammtheit bilde das Liniensystem  $L$  mit  $n(q + k)$  Ecken und  $n(q + k - 1)$  Seiten. Zwei Punkte in verschiedenen Blättern der Fläche  $T$ , oder in einem Blatte und der Ebene  $E$  sollen entsprechend heissen, wenn für sie  $x$  den nämlichen Werth hat. Aehnliche Aussage soll von Figuren gelten.

Betrachtet man die beiden Ufer einer Seite von  $L$ , so finden sich entweder auf beiden Ufern dieselben Functionswerthe, oder aber verschiedene Werthe. Im letzteren Falle ergibt sich bekanntlich, dass diejenigen Werthe, welche im  $i$ <sup>ten</sup> Blatte auf dem einen Ufer einer Seite stehen, im  $k$ <sup>ten</sup> nicht auf dem entsprechenden, sondern dem gegenüberliegenden Ufer sich vorfinden, so dass ein stetiger Uebergang von dem einen Ufer im  $i$ <sup>ten</sup> Blatte zum gegenüberliegenden im  $k$ <sup>ten</sup> Blatte führt, während die Functionswerthe auf den beiden Ufern im  $i$ <sup>ten</sup> bez.  $k$ <sup>ten</sup> Blatte Unstetigkeit zeigen. Zwei gegenüberliegende Ufer, die stetig miteinander zusammenhängen, sollen mit demselben Buchstaben oder der gleichen Zahl bezeichnet werden. Jeder Buchstabe bezeichnet dann einen Uebergang, nämlich den stetigen Uebergang der von einem Ufer zu dem gleichbezeichneten Ufer führt. Die Zahl der Uebergänge ist gleich der Seitenzahl von  $L$ , d. h.  $= n(q + k - 1)$ <sup>1)</sup>.

Wir nehmen an  $f(x, y)$  sei irreducibel. Dann ist es stets möglich  $n-1$  Uebergänge zu finden, durch deren alleinige Benutzung man von jedem Blatte in jedes andere gelangen kann<sup>2)</sup>. Diese sollen fundamentale heissen. Wenn eine Gruppe von

1) Beispiele siehe im § 10.

2) Clebsch und Gordan. Abel'sche Functionen. Seite 82.

Blättern bestehend aus dem  $\alpha^{\text{ten}}$ ,  $\beta^{\text{ten}}$  . . .  $z^{\text{ten}}$  existirte, aus der kein Uebergang in ein anderes Blatt führte, so seien  $y_\alpha y_\beta \dots y_z$  die Werthe von  $y$ , welche einem  $x$  in den genannten Blättern entsprechen. Dann wäre

$$(\eta - y_\alpha) (\eta - y_\beta) \dots (\eta - y_z) = F(x, \eta)$$

eine einwerthige Function von  $x$ , weil jeder Weg nur die  $y_\alpha y_\beta \dots y_z$  unter sich umtauschen würde, und folglich wäre  $f(x, \eta)$  reducibel, gegen unsere Annahme. Es muss also ein Uebergang aus dem 1<sup>ten</sup> Blatte ins  $\lambda^{\text{te}}$  führen, aus einem der beiden ein weiterer Uebergang in das  $\mu^{\text{te}}$  Blatt u. s. w., womit unsere Behauptung bewiesen ist. Offenbar kann man aber nicht mit weniger als  $n - 1$  Uebergängen das Resultat erreichen.

## § 2.

Ist  $\varphi(x, y)$  eine rationale Function von  $x$  und  $y$ , so ist das Integral

$$\int_{P_0}^P \varphi(x, y) dx$$

von einem Punkte  $P_0$  der Fläche  $T$  nach einem andern Punkte  $P$  genommen nicht unabhängig vom Wege, über welchen integrirt wird. Ist aber  $\varphi(x, y)$  ein Integrand erster oder zweiter Gattung, wie bis auf Weiteres angenommen werden soll, so kann man zeigen, dass obiges Integral eine einwerthige Function von  $P$  ist, wenn man sich vornimmt den Integrationsweg nur durch fundamentale Uebergänge zu führen.

Zum Beweise braucht man, wie bekannt, nur darzuthun, dass das fragliche Integral über eine geschlossene Curve erstreckt, die nur fundamentale Uebergänge überschreitet, den Werth Null hat. Hiezu dient der folgende Satz I.

Es sei  $s$  ein Uebergang, der von einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden Curve  $C$  in zwei Punkten vom  $\alpha^{\text{ten}}$  ins  $\beta^{\text{te}}$  Blatt oder umgekehrt überschritten werde. Seien  $PQ$  zwei Punkte auf  $C$  hart an einem Ufer von  $s$ ,  $RS$  die gegenüberliegenden am andern Ufer.

Wenn man nun, beim Durchlaufen von  $C$ , von  $P$  nach  $R$  und von  $Q$  nach  $S$  gelangt, indem man stets in derselben Richtung weiter geht (Fig. 4)<sup>1)</sup>,

1) Die Figuren sind hier, wie im folgenden, nur schematische. Die unmittelbar oberhalb  $s$  liegenden Theile gehören in's  $\alpha^{\text{te}}$ , die unterhalb liegenden in's  $\beta^{\text{te}}$  Blatt.

so kann man aus  $C$  die neue Curve  $C'$  ableiten dadurch, dass man, statt  $s$  zu überschreiten, auf dem einen Ufer von  $P$  nach  $Q$  und auf dem andern von  $S$  nach  $R$  geht. Dann hat man in  $PQURSV$  die Curve  $C'$ , die geschlossen ist und dem Integral  $\int \varphi(x, y) dx$  denselben Werth verleiht wie  $C$ , weil die Werthe von  $\varphi(x, y)$  längs  $PQ$  mit denjenigen längs  $RS$  übereinstimmen und die Richtung der Integration bei beiden Ufern die entgegengesetzte ist.

Fig. 4.

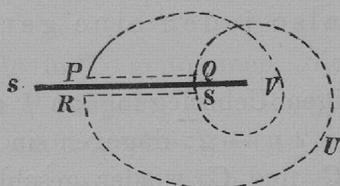
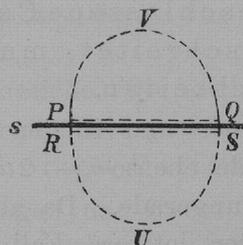


Fig. 5.



Wenn man aber, wie in Fig. 5, von  $P$  nach  $R$  und von  $S$  nach  $Q$  kommt, so werden die beiden Wege  $RUS$  und  $PVQ$  keinen Punkt gemein haben und die Curve  $C$  liefert also jetzt zwei getrennte Curven  $C_1 = RUSR$  und  $C_2 = PQVP$  und man erkennt, dass das Integral über  $C$  gleich dem über  $C_1 + C_2$  ist.

Wenn  $C$  den Uebergang  $s$  mehr als zweimal passirt, so ist der Satz dennoch anwendbar, wenn man unter  $PR$  einerseits und  $QS$  andererseits zwei zunächst benachbarte Schnittpunkte versteht. Die Curve  $C'$  im ersten Fall, oder die  $C_1 + C_2$  im letzten Falle, schneidet aber  $s$  in zwei Punkten weniger als  $C$  dies thut. Ferner erkennt man, dass die Curve  $C'$  im ersten, bez.  $C_1 + C_2$  im zweiten Fall, jeden andern Uebergang genau ebenso oft schneidet als  $C$ .

Nun nehmen wir an  $s$  sei ein fundamentaler Uebergang und  $C$  überquere nur fundamentale Uebergänge. Dann muss die Anzahl  $\lambda$  von Schnittpunkten mit  $s$  gerade sein. Wäre sie ungerade, so könnte man aus  $C$  nach dem Satz I entweder eine nicht zerfallende Curve oder eine zerfallende Curve ableiten, die  $s$  in zwei Punkten weniger schneidet. Im ersten Falle würde  $C'$  in  $\lambda - 2$  Punkten  $s$  schneiden; im zweiten würde entweder  $C_1$  in  $\lambda - 2\mu$  Punkten schneiden und  $C_2$  in  $2\mu - 2$  oder  $C_1$  in  $\lambda - 2\mu - 1$  und  $C_2$  in  $2\mu - 1$ . Es ist aber, weil  $\lambda$  ungerade, auch

$\lambda - 2$ ,  $\lambda - 2\mu$ , sowie  $2\mu - 1$  ungerade; und man käme somit sicher auf eine Curve die mit  $s$  weniger Schnittpunkte als  $\lambda$ , aber wieder eine ungerade Zahl gemein hat. Und so weiter gehend würde man schliesslich eine geschlossene Curve  $K$  finden, die  $s$  nur in einem Punkte trafe und sonst nur fundamentale Uebergänge passirte. Auf dieser Curve  $K$  könnte man dann ohne  $s$  zu passiren durch fundamentale Uebergänge vom  $\alpha^{\text{ten}}$  Blatt in's  $\beta^{\text{te}}$  kommen und der fundamentale Uebergang  $s$  wäre unnöthig, so dass man mit  $n - 2$  solchen ausreichte, was nicht möglich ist.

Eine geschlossene Curve, die nur fundamentale Uebergänge überschreitet, muss also jeden eine gerade Anzahl Male überschreiten.

Nehmen wir nun in der vorigen Ueberlegung an  $\lambda$  sei gerade, so ist  $\lambda - 2$  gerade, ebenso  $\lambda - 2\mu$  und  $2\mu - 2$ ; dagegen sind  $\lambda - 2\mu - 1$  und  $2\mu - 1$  ungerade. Da aber  $C_1$  und  $C_2$  wieder geschlossene Curven sind, so ist der letztere Fall nicht möglich und folglich erhält man Curven mit wenigen Schnittpunkten, die dem Integral denselben Werth ertheilen wie  $C$ , so dass entweder

$$\int_C = \int_{C'} \quad \text{oder} \quad \int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

ist. Indem man auf  $C'$  oder  $C_1$  und  $C_2$  dasselbe Verfahren anwendet, kann man die Zahl der Schnittpunkte mit  $s$  noch weiter herabsetzen bis man schliesslich zu einem System geschlossener Curven kommt, welche einzeln  $s$  gar nicht mehr schneiden. Mit den andern Uebergängen verfährt man ebenso und findet endlich, dass das über  $C$  erstreckte Integral denselben Werth hat wie eine Summe von Integralen, von welchen jedes einzelne über eine geschlossene Curve genommen ist, die gar keinen Uebergang mehr passirt und folglich ganz in einem Blatte verläuft. Da aber in einem Blatte  $y$  und folglich auch  $\varphi(x, y)$  eine einwerthige Function von  $x$  ist, so ist ein solches Integral  $= 0$  und somit ist auch das vorgegebene, über  $C$  erstreckte Integral  $= 0$ , womit der am Anfang des § angekündigte Satz bewiesen ist. Die Riemann'sche Fläche  $T$ , wenn sie durch die Bedingung beschränkt ist, dass man nur fundamentale Uebergänge überschreiten darf, soll als Fläche  $T'$  bezeichnet werden.

Also ist  $\int_{P_0}^P \varphi(x, y) dx$  in  $T'$  eine einwerthige Function des Ortes  $P$ .

Sie ist aber bekanntlich keine stetige Function, sondern erleidet an den Seiten von  $L$  Unstetigkeiten, auch dann, wenn man zwei Punkte als obere Grenzen nimmt, die auf verschiedenen mit demselben Buchstaben bezeichneten Ufern sich gegenüberliegen. Sind  $P'$  und  $P''$  zwei solche Punkte auf den beiden mit  $s$  bezeichneten Ufern, so ist die Differenz

$$\int_{P_0}^{P'} \varphi(x, y) dx - \int_{P_0}^{P''} \varphi(x, y) dx,$$

beide Integrale in  $T'$  genommen, die nämliche, wo auch die unendlich nahen Punkte  $P'$  und  $P''$  längs des Ueberganges  $s$  gewählt sein mögen<sup>1)</sup>. Sie ist die zum Uebergange  $s$  gehörige Periode.

Da bei den fundamentalen Uebergängen das Integral stetig ist, so ist die Zahl der Perioden, weil einzelne  $= 0$  werden können, höchstens gleich der Zahl der nicht-fundamentalen Uebergänge, also

$$= n(q + k) - 2n + 1 = \sigma.$$

### § 3.

Zwischen den Perioden bestehen eine Reihe von Gleichungen. Es sei  $\xi$  irgend ein besonderer Werth von  $x$  und  $P(x - \xi)$  eine der nach ganzen oder gebrochenen Potenzen fortschreitenden Reihen, welche für  $y$  gesetzt der Gleichung  $f(x, y) = 0$  genügen. Beschreibt nun  $x$  in  $E$  um  $\xi$  einen kleinen Kreis, so wird der entsprechende Punkt  $X$  der Riemann'schen Fläche eine geschlossene Curve beschreiben, wenn  $P(x - \xi)$  nach ganzen Potenzen fortschreitet, dagegen eine offene, wenn die Reihe

nach Potenzen von  $(x - \xi)^{\frac{1}{\mu}}$  geordnet ist. Im letzten Falle muss  $x$  den Kreis der Ebene  $E$   $\mu$ -mal durchlaufen, bis  $X$  eine geschlossene Curve in  $T$  beschreibt. Jedem Punkte  $\xi$  in  $E$  entsprechen so viele geschlossene

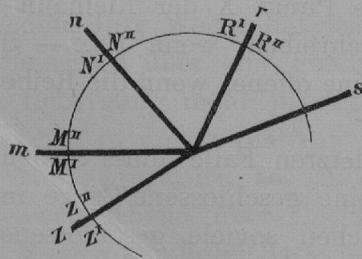
1) Siehe hiefür z. B. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2. Auflage. Leipzig 1884. Seite 192.

Curven in  $T$  als zu ihm Reihen  $P(x - \xi)$  gehören, indem jede Reihe eine Curve liefert. Zu einem gewöhnlichen Punkte gehören also  $n$  Curven, zu einem Verzweigungspunkte weniger als  $n$ , etwa zum Punkte  $w_i$  nur  $c_i$  Curven. Jede dieser Curven besteht entweder aus einem einzigen Kreise oder aus mehreren, in verschiedenen Blättern liegenden Stücken von Kreisen, welche die dem  $\xi$  entsprechenden Punkte von  $T$  umgeben und sich zu Vollkreisen zusammenschliessen. Diejenigen der beschriebenen Curven, welche zu den Verzweigungspunkten und Knotenpunkten gehören, seien als die Curven  $U$  bezeichnet; ihre Zahl ist  $= nk + \sum_{\lambda=1}^q c_{\lambda} = \nu$ , und sie seien in irgend einer Folge als  $U_1, U_2, \dots, U_{\nu}$  unterschieden.

Da wir unter  $\varphi(x, y)$  einen Integranden erster oder zweiter Gattung verstehen, so enthält  $\varphi[x, P(x - \xi)]$  für keinen Punkt  $\xi$  und keine der zu ihm gehörenden Entwicklungen ein Glied mit  $\frac{1}{x - \xi}$  und folglich ist das Integral gleich Null, welches über die von  $P(x - \xi)$  gelieferte Curve genommen ist. Daher liefern die  $\nu$  Curven  $U$  alle für das Integral den Werth Null. Nun möge eine von ihnen in dem  $\alpha^{\text{ten}}, \beta^{\text{ten}}, \dots, z^{\text{ten}}$  Blatte verlaufen und die Uebergänge  $m, n, r, s, \dots, z$  bez. von  $M'$  zu  $M''$ ,  $N'$  zu  $N''$ ,  $\dots, Z'$  zu  $Z''$  passiren (Fig. 6)<sup>1)</sup>. Dann hat man

$$0 = \int_{M''}^{N'} \varphi(x, y) dx + \int_{N''}^{R'} \varphi(x, y) dx + \dots + \int_{Z''}^{M'} \varphi(x, y) dx$$

Fig. 6.



wo bei den einzelnen Integralen als Wege die einzelnen Kreisbogen dienen, welche  $U$  zusammensetzen.

Zieht man nun in  $T'$  von  $P_0$  nach den Punkten  $M' M'' N' N'' \dots Z''$  Curven, dann ist der Weg

$M' P_0 M'' N' P_0 N'' \dots Z' P_0 Z'' M'$   
in  $T'$  geschlossen und liefert für das Integral

1) Der Raumersparniss wegen sind die einzelnen Blätter neben einanderliegend gezeichnet.

den Werth Null. Bezeichnet man mit  $(P_0 P)$  das Integral  $\int_{P_0}^P \varphi(xy) dx$ , wenn sein Weg in  $T'$  verläuft, so entsteht durch Combination der beiden Resultate

$$0 = (P_0 M'') - (P_0 M') + (P_0 N'') - (P_0 N') + \dots + (P_0 Z'') - (P_0 Z').$$

Die Differenzen  $(P_0 M'') - (P_0 M')$  u. s. w. sind aber die den Uebergängen  $m, n, \dots$  zugehörigen Perioden oder, je nach Definition, vielleicht auch das Negative derselben.

Nennt man die Perioden bez.  $(m), (n) \dots (z)$ , so ist demnach  $(P_0 M'') - (P_0 M') = \pm(m)$ , je nachdem  $(m)$  definirt war, u. s. w. und somit hat man die Gleichung

$$\pm(m) \pm(n) \dots \pm(z) = 0.$$

Da  $\nu$  Curven  $U$  existiren, so gibt es auch  $\nu$  solcher Gleichungen. Deren linke Seiten sind aber nicht unabhängig. Ueberschreiten nämlich die beiden Curven  $U_i$  und  $U_k$  denselben Uebergang  $w$  (Fig. 7), die eine von  $W'$  zu  $W''$ , die andere von  $W_1'$  zu  $W_1''$  und integrirt man beidemale im Uhrzeigersinne, so tritt in der linken Seite der Gleichung, die von  $U_i$  herrührt,

$$(P_0 W'') - (P_0 W') = \pm(w)$$

dagegen in der andern Gleichung, die  $U_k$  entspricht,

$$(P_0 W_1'') - (P_0 W_1') = \mp(w)$$

auf, zwei Differenzen die entgegengesetzt gleich sind. Kommt also in der einen Gleichung die Periode  $+(w)$  vor, so tritt in der zweiten  $-(w)$  auf. Jeder Uebergang gehört aber auch nur zu zweien der Curven  $U$ , von welchen er, an seinen beiden Enden, überschritten wird. Addirt man also die sämtlichen Gleichungen so entsteht  $0 = 0$ , so dass von den  $\nu$  Gleichungen mindestens eine eine Folge der übrigen ist. Besteht nur eine Beziehung zwischen den Gleichungen — wie dies nachher bewiesen werden soll — so kann man demnach  $\nu - 1$  der Perioden linear und ganzzahlig durch die übrigen ausdrücken, deren Zahl  $= \sigma - (\nu - 1)$

$$= nq - \sum_{\lambda=1}^q c_\lambda - 2(n-1)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^q (n - c_\lambda) - 2(n-1) = 2q$$

ist.

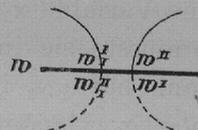


Fig. 7.

## § 4.

Es soll nun bewiesen werden, dass in der That zwischen den  $\nu$  aufgestellten Gleichungen nur eine Beziehung besteht. Schreiben wir die von der Curve  $U_i$  herrührende Gleichung  $G_i = 0$ . Wenn man in allen den Ausdrücken  $G_1 \dots G_\nu$  die  $\sigma$  Perioden durch Variable  $x_1 x_2 \dots x_\sigma$  ersetzt und die entstehenden Functionen mit  $g_1 g_2 \dots g_\nu$  bezeichnet, so fragt es sich, ob eine Gleichung von der Form

$$\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \dots + \gamma_\nu g_\nu \equiv 0;$$

die wir kurz  $I \equiv 0$  schreiben wollen, noch in anderer Weise möglich ist als durch die Annahme  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_\nu$ . Da jede Periode nur in zweien der Ausdrücken  $G_i$  auftritt, so kommt jede Variable  $x_i$  nur in zweien der Functionen  $g_i$  vor und zwar einmal mit dem Coefficienten  $+1$ , das andere Mal mit dem  $-1$  versehen.

Gesetzt  $x_1$  käme in  $g_1$  und  $g_2$  vor, so hätte es in  $I$  den Coefficienten  $\gamma_1 - \gamma_2$  und  $I \equiv 0$  würde  $\gamma_1 = \gamma_2$  verlangen. Enthielten  $g_1$  und  $g_2$  noch eine Variable  $x_2$  die in ihnen zusammen genommen nur einmal vorkäme, so müsste sie in einer andern Function etwa  $g_3$  nochmals vorhanden sein. Dann hätte  $x_2$  in  $I$  den Coefficienten  $\gamma_1 - \gamma_3$  und es müsste  $\gamma_3 = \gamma_1$  sein. In  $g_1 g_2 g_3$  möge nun ferner eine Variable  $x_3$  auftreten, die nur einmal in diesen drei Functionen und also noch in einer vierten  $g_4$  sich findet. Dann ergibt sich  $\gamma_4 = \gamma_1$ . Auf diesem Wege weitergehend kann man offenbar die Gleichheit aller  $\gamma_i$  nachweisen, wenn nur die eben wiederholt benützte Bedingung erfüllt ist, dass es immer in einer Gruppe von Functionen  $g$  eine Variable gibt, die nur einmal in jener Gruppe auftritt. Es soll jetzt gezeigt werden, dass dies stets der Fall ist, ausser wenn die Gruppe die sämtlichen Functionen  $g$  umfasst.

Wenn in einer Gruppe  $g_1, g_2 \dots g_h$  von  $h (< \nu)$  Functionen jede vorkommende Variable zweimal vorkommt, so heisst dies, weil ja die Variablen an die Stelle der Perioden getreten sind: in den Ausdrücken  $G_1, G_2, \dots G_h$  kommt jede Periode zweimal vor; und dies sagt wieder aus, dass jeder nicht-fundamentale Uebergang, der von einer der Curven  $U_1, U_2, \dots U_h$  überschritten wird, auch noch von einer zweiten passirt wird.

Man kann nun in einem einzigen zusammenhängenden Zug die Ufer aller nicht fundamentalen Uebergänge durchlaufen, so dass jedes

Ufer nur einmal dabei betreten wird. Um dies zu zeigen bemerken wir zunächst, dass der Satz I des vorigen § sich auch umkehren lässt. Wenn nämlich zwei geschlossene Curven (Fig. 5 auf Seite 337) RUSR und PVQP beide dem Uebergang  $s$  in einem Theile ihres Verlaufes zur Seite liegen, die eine in einem, die andere im zweiten der beiden durch  $s$  verbundenen Blätter, so kann man aus beiden die neue geschlossene Curve PVQSURP ableiten, welche mit zweimaligem Ueberschreiten von  $s$  geschlossen ist. Nun kann man, wie schon in § 1 erwähnt, das im ersten Blatte befindliche Liniensystem  $L_1$  in einem Zuge umlaufen. Führt ein fundamentaler Uebergang  $a$  vom ersten Blatte in's  $\alpha^{\text{te}}$  Blatt, so kann man den Weg um  $L_\alpha$ , der auch geschlossen ist, mit dem um  $L_1$  zu einem einzigen geschlossenen Weg vereinigen, der  $a$  zweimal passirt, wobei die beiden Wegstrecken, die im ersten und  $\alpha^{\text{ten}}$  Blatte auf den Ufern von  $a$  lagen, wegfallen. Führt nun der fundamentale Uebergang  $b$  von einem der beiden eben benutzten Blätter in's  $\beta^{\text{te}}$  Blatt, so kann man den eben hergestellten Weg, indem man  $b$  zweimal überquert, mit dem um  $L_\beta$  wieder zu einem einzigen zusammenhängenden Weg zusammen schmelzen. So kann man weiter gehen und wird nach  $n - 1$  Operationen zu einem Wege  $W_0$  gelangen, der jeden fundamentalen Uebergang zweimal überschreitet und den Ufern jedes nicht-fundamentalen Ueberganges entlang führt. Wir können dabei den Weg  $W_0$  so einrichten, dass er in der Nähe der Ecken des Liniensystems  $L$  soweit es möglich ist die im vorigen § beschriebenen Curven  $U$  benutzt, so dass also in jedem Blatte diese Ecken in Kreisstücken umgangen werden<sup>1)</sup>. Es gehören aber von jeder Curve  $U$  Stücke zum Weg  $W_0$ . Denn wenn man die Entstehung von  $W_0$  betrachtet, so sieht man, dass der Weg um  $L_1$  von Curven  $U$  alle die Stücke benutzt, die im ersten Blatte liegen, der um  $L_\alpha$  dagegen alle im  $\alpha^{\text{ten}}$  Blatte liegenden Stücke; durch die Verschmelzung beider fällt keines dieser Kreisstücke weg — sondern nur Verbindungsstrecken zweier Kreisstücke — vielmehr schliessen sich nur zweimal je zwei vorher getrennte Kreisstücke an einander (Fig. 8<sup>a</sup> und 8<sup>b</sup>; <sup>2)</sup> 8<sup>a</sup> zeigt die beiden Wege ABCE...FGHK... im 1<sup>ten</sup> und LMNP...QRST... im  $\alpha^{\text{ten}}$

1) Beispiele für die Gestaltung von  $W_0$  finden sich in § 10.

2) Die im ersten Blatte verlaufenden Curvenstrecken sind ausgezogen, die im  $\alpha^{\text{ten}}$  Blatte gestrichelt;  $a$  führt vom 1<sup>ten</sup> Blatte oben zum  $\alpha^{\text{ten}}$  unten.

Blatte vor der Verschmelzung; 8<sup>b</sup> dagegen den Weg AB, durch  $\alpha$  nach C, dann weiter D...EFGH.....KL durch  $\alpha$  nach M...NPQR.. und zurück längs L<sub>1</sub> nach A).

Fig. 8a.

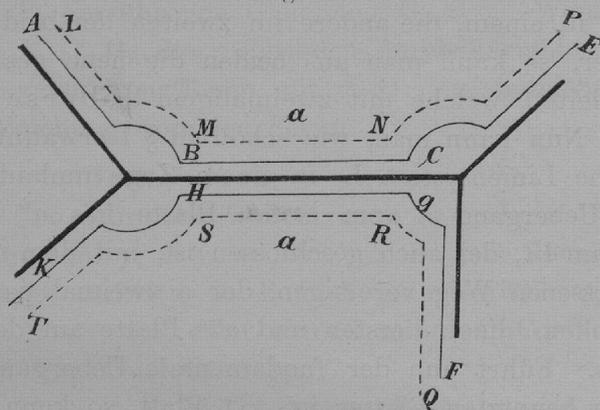
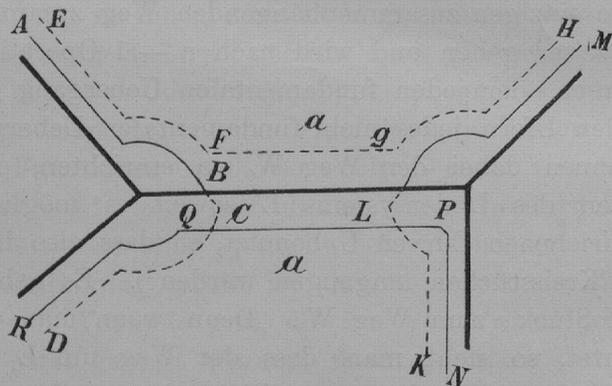


Fig. 8b.



Man stelle nun in einer Hilfsebene jede Curve  $U_i$  durch einen beliebig gewählten Punkt  $P_i$  dar und verbinde zwei Punkte  $P_i$  und  $P_k$  durch eine gerade oder krumme Linie, wenn die beiden Curven  $U_i$  und  $U_k$  denselben nicht fundamentalen Uebergang überschreiten. Dabei werde die Verbindungslinie mit demselben Buchstaben bezeichnet wie der Uebergang. In einem Punkte  $P_i$  sollen die verschiedenen von ihm ausgehenden Verbindungslinien, wenn man ihn im Uhrzeigersinn umläuft, in derselben Ordnung aufeinanderfolgen, in der die gleichbezeichneten Ueber-

gänge von  $U_i$  überschritten werden, wenn man diese Curve im Uhrzeigersinn durchwandert.

Es wird manchmal nicht möglich sein dabei Ueberschneidungen zweier Verbindungslinien zu vermeiden, wenn man sie nicht mit einer kleinen Ausbiegung über einander wegführen will. Die so entstehende Figur soll, mit Benutzung eines Listing'schen Ausdrucks,<sup>1)</sup> das Diagramm des Weges  $W_0$  heissen, da es ähnlichen Zwecken dient wie Listing's Diagramm. (Wir bemerken dabei, dass die Betrachtungen die im Folgenden auf das Diagramm gegründet werden, auch ohne Bezug auf ein räumliches Bild sich durchführen liessen.) Wenn z. B. 8 Curven  $U$  vorhanden sind, welche (wie im ersten Beispiel des § 10) die folgenden nicht-fundamentalen Uebergänge in der beigesetzten Ordnung überschreiten,

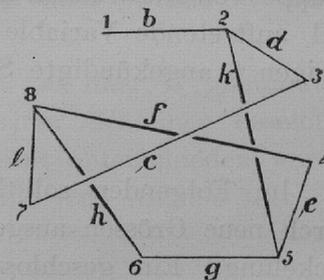
$U_1$	b	$U_5$	gke
$U_2$	kbd	$U_6$	gh
$U_3$	cd	$U_7$	cl
$U_4$	ef	$U_8$	hlf

so hat das Diagramm die in Fig. 9 gegebene Gestalt. Das Diagramm

des Weges  $W_0$  kann nicht in getrennte Theile zerfallen. Zum Beweise bemerken wir zuerst, dass eine Curve  $U$  nicht nur fundamentale Uebergänge passiren kann. Denn  $U$  ist eine geschlossene Curve, würde sie nur fundamentale Uebergänge passiren, so müsste sie jeden eine gerade Anzahl Male überschreiten (§ 2), während sie doch jeden von ihr überschrittenen Uebergang nur einmal überquert.

Für das Diagramm heisst dies: von jedem Punkte  $P_i$  geht mindestens eine Verbindungslinie aus. Man kann aber auch weiter zeigen, dass zwischen irgend zwei Punkten  $P_i$  und  $P_k$  Verbindung ist. Denn  $U_i$  trifft mindestens einen nicht-fundamentalen Uebergang  $p$ ; beginnt man  $W_0$  auf dem einen Ufer von  $p$ , bei der Curve  $U_i$  und geht  $p$  entlang, so kommt man zu einer Curve  $U_\alpha$ . Wenn  $\alpha$  nicht =  $k$  ist, so muss

Fig. 9.



1) Censur räumlicher Complexe. Abhandl. d. math. Classe d. kgl. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen. 10. Band. 1861/62. Seite 115.

Abh. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. XV. Bd. II. Abth.

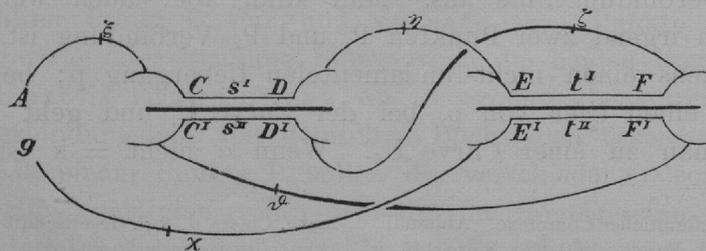
man, weil  $W_0$  sicher ein Stück von  $U_k$  enthält, von  $U_\alpha$  auf  $W_0$  längs eines nicht-fundamentalen Ueberganges  $q$  weiter gehen können und gelangt zu  $U_\beta$ , von dem wieder ein nicht-fundamentaler Uebergang nach  $U_\gamma \dots$  führt u. s. w., bis man längs  $w$  gehend schliesslich von  $U_x$  zu  $U_k$  gelangt. Im Diagramm kommt man also von  $P_i$  über die Verbindungslinien  $p q \dots w$  und die Punkte  $P_\alpha P_\beta \dots P_x$  nach  $P_k$ . Damit ist der oben angeführte Satz bewiesen.

Kehren wir nun wieder zur früheren Untersuchung zurück, die uns zu dem zu widerlegenden Resultate geführt hatte, dass jeder nicht-fundamentale Uebergang der von einer der  $h$  Curven  $U_1 U_2 \dots U_h$  durchsetzt wird, auch noch von einer zweiten durchsetzt wird. Wäre dies richtig, so müsste ein Theil unseres Diagramms bestehend aus den  $h$  Punkten  $P_1, P_2, \dots, P_h$  vom Rest isolirt sein. Denn wenn von einem der Punkte  $P_l$ , wo  $l \leq h$ , eine Verbindungslinie  $z$  nach einem Punkte  $P_m$  mit  $m > h$  ginge, so würde der Uebergang  $z$  von  $U_1$  und von  $U_m$  überschritten, während doch noch eine zweite der Curven  $U_1 U_2 \dots U_h$  ihn überschreiten sollte. Unsere Annahme kann also nur dann richtig sein, wenn die  $h$  Punkte  $P_1 \dots P_h$  mit den  $\nu$  Punkten  $P_1 \dots P_\nu$  identisch sind. Folglich wird jede Gruppe von Ausdrücken  $g_1 g_2 \dots g_h$  bei der  $h < \nu$  ist, sicher eine nur einmal auftretende Variable enthalten; und damit ist der am Ende des vorigen § angekündigte Satz bewiesen.

## §. 5.

Im Folgenden soll  $W_0$  abgeändert und dabei sollen die Perioden durch neue Grössen ausgedrückt werden. Dazu dient die folgende Entwicklung. Ein geschlossener oder ungeschlossener Weg  $W$ , der in  $A$  beginnt und in  $G$  endigt, (Fig. 10) führe unendlich dicht an den beiden

Fig. 10.

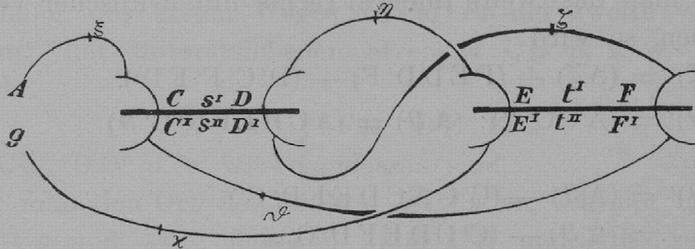


Ufern  $s'$   $s''$  bez.  $t'$   $t''$  von zwei Uebergängen  $s$  und  $t$  entlang und zwar so dass man, in der Richtung von  $A$  nach  $G$  gehend, dieselben in der Reihenfolge  $s' t' s'' t''$  durchläuft.

Man wähle nun auf  $s'$  und  $s''$  zwei Paare von gegenüberliegenden Punkten  $CC'$  resp.  $DD'$  und auf  $t'$  und  $t''$  zwei Paare  $EE'$  und  $FF'$  aus und ersetze  $W$  durch den neuen Weg (Fig. 10<sup>a</sup>)

ACC'F'FD'DEE'G

Fig. 10a.



der in den Punkten  $CC'$ ,  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$  die Uebergänge  $s$  und  $t$  überschreitet. Die Curvenstücke  $AC$ ,  $DE$ ,  $FD'$ ,  $C'F'$ ,  $E'G$  sind beiden Wegen gemeinsam; auf ihnen seien bezüglich die Punkte  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\vartheta$ ,  $z$  angenommen um dann die Integrale  $\int q(xy) dx$  von  $A$  aus über  $W$  und  $W'$  bis zu jenen Endpunkten erstreckt zu vergleichen.

Das Integral über  $W'$  genommen soll, wie das über  $W$  genommene, durch Zusammenstellung der Endpunkte in einer Klammer bezeichnet und das erstere vom letzteren durch einen Accent unterschieden werden. Wenn der Weg unzweideutig bezeichnet ist, fällt jene Angabe fort.

So ist dann

$$1) (A \xi)' = (A \xi),$$

weil von  $A$  nach  $\xi$  nur ein Weg führt.

2) Dagegen ist

$$(A \eta)' = (ACC'F'FD'D \eta)$$

$$(A \eta) = (ACD \eta)$$

daher

$$(A \eta)' = (A \eta) + (DCACC'F'FD'D).$$

$(CAC)$  ist = 0, weil es  $(AC) + (CA)$  gleicht;  $(DC) = (DD') + (D'C)$  +  $(C'C)$ ; somit folgt

$$(A \eta)' = (A \eta) + (DD'C'F'FD'D) = (A \eta) + (D'C'F'FD').$$

$$3) \quad (A \zeta)' = (A C C' F' F \zeta) \\ (A \zeta) = (A C D E F \zeta).$$

Also

$$(A \zeta)' = (A \zeta) + (F E D C C' F' F).$$

Ersetzt man wie oben (DC), so wird

$$(A \zeta)' = (A \zeta) + (F E D D' C' F' F)$$

und wenn man  $(D' F) + (F D') = 0$  zufügt

$$(A \zeta)' = (A \zeta) + (F E D D' F) + (F D' C' F' F).$$

Schreibt man das zweite Integral rechts mit cyklischer Vertauschung der Buchstaben, so wird

$$(A \zeta)' = (A \zeta) + (F E D D' F) + (D' C' F' F D').$$

$$4) \quad (A \vartheta)' = (A C C' \vartheta); \quad (A \vartheta) = (A C D E F D' C' \vartheta)$$

daher ist

$$(A \vartheta)' = (A \vartheta) - (C' C A C D E F D' C') \\ = (A \vartheta) - (C' C D E F D' C').$$

Ersetzt man hier (CD) durch  $(C C' D' D)$ , so wird das zweite Integral  $= (C' D' D E F D' C') = (D' D E F D') = - (F E D D' F)$  und folglich

$$(A \vartheta)' = (A \vartheta) + (F E D D' F).$$

$$5) \quad (A z)' = (A C C' F' F D' D E E' z)$$

$$(A z) = (A C D E F D' C' F' E' z).$$

Wenn man die Integrale, die sich gegenseitig zerstören, fortlässt, so wird

$$(A z)' = (A z) + (E' F' F E E') + (C' D' D C C')$$

oder, weil die beiden rechts Null sind

$$(A z)' = (A z).$$

Bezeichnet man die Integrale

$$(D E F D' D) \text{ mit } \sigma$$

$$(C' F' F D' C') \text{ mit } \tau,$$

so sind  $\sigma$  und  $\tau$  über geschlossene Curven genommen und man hat die Gleichungen

$$(A \xi)' = (A \xi)$$

$$(A \eta)' = (A \eta) + \tau$$

$$I \quad (A \zeta)' = (A \zeta) + \tau - \sigma$$

$$(A \vartheta)' = (A \vartheta) - \sigma$$

$$(A z)' = (A z).$$

Ferner folgen durch Subtraction die Beziehungen

$$\begin{aligned}(\xi\eta)' &= (\xi\eta) + \tau; & (\xi\zeta)' &= (\xi\zeta) + \tau - \sigma; & (\xi\vartheta)' &= (\xi\vartheta) - \sigma; & (\xi z)' &= (\xi z) \\(\eta\zeta)' &= (\eta\zeta) - \sigma; & (\eta\vartheta)' &= (\eta\vartheta) - \tau - \sigma; & (\eta z)' &= (\eta z) - \tau \\(\zeta\vartheta)' &= (\zeta\vartheta) - \tau; & (\zeta z)' &= (\zeta z) - \tau + \sigma \\(\vartheta z)' &= (\vartheta z) + \sigma.\end{aligned}$$

Schreibt man

$$AC \cdot \underline{CD} \cdot DE \cdot EF \cdot \underline{FD'} \cdot \underline{D'C'} \cdot C'F' \cdot \underline{F'E'} \cdot E'G$$

als Bezeichnung des ersten Weges  $W$ , so ist der zweite  $W'$ , der durch „Elimination“ der unterstrichenen Strecken  $CD$  u. s. w. entsteht, gegeben durch

$$AC \cdot C'F' \cdot \underline{FD'} \cdot DE \cdot E'G$$

wobei die  $CC'$ ,  $DD'$  u. s. w. weggelassen sind.

Deutet man den Ort der Punkte  $\xi\eta\zeta\vartheta z$  an, schreibt unter  $EF$  und  $D'C'$  bez.  $-\sigma$  und  $-\tau$ ; dagegen unter  $CD$  und  $F'E'$  resp.  $\tau$  und  $\sigma$ , so ist der erste Weg

$$A \xi C \cdot \underline{CD} \cdot D \eta E \cdot \underline{EF} \cdot F \zeta D' \cdot \underline{D'C'} \cdot C' \vartheta F' \cdot \underline{F'E'} \cdot E' z G$$

$\tau \qquad -\sigma \qquad -\tau \qquad \sigma$

und man erkennt die einfache Regel, dass das Integral zwischen irgend zweien der Punkte  $\xi\eta\zeta\vartheta z$  auf dem Weg  $W'$  genommen, gleich dem zwischen denselben Punkten längs  $W$  genommenen Integrale ist plus der Summe derjenigen der vier Grössen  $\tau$ ,  $-\sigma$ ,  $-\tau$ ,  $\sigma$ , welche oben zwischen den betreffenden beiden Buchstaben stehen.

Es sei jetzt  $\psi(xy)$  eine zweite rationale Function von  $x$  und  $y$ ; indem man nur die Punkte eines bestimmten Weges —  $W$  oder  $W'$  — betrachtet sei sie mit  $u(x)$  bezeichnet, wobei  $x$  einen Punkt dieses Weges darstellt.

Wir bilden nun

$$J' = \int_A^G u(x) (Ax)' dx$$

über  $W'$  genommen, wo  $(Ax)'$  das von  $A$  bis  $x$  über  $W'$  genommene  $\int \varphi(xy) dx$  bezeichnet. Zerlegt man  $J'$  in 5 Theile und bezeichnet den einzelnen Theilen entsprechend  $x$  durch  $\xi\eta\zeta\vartheta$  oder  $z$ , so wird, wenn man von den Gleichungen I Gebrauch macht

$$\begin{aligned}
J' &= \int_A^C u(\xi) (A \xi) d\xi + \int_{C'}^{F'} u(\vartheta) [(A \vartheta) - \sigma] d\vartheta \\
&+ \int_F^{D'} u(\zeta) [(A \zeta) + \tau - \sigma] d\zeta + \int_D^E u(\eta) [(A \eta) + \tau] d\eta \\
&\quad + \int_{E'}^G u(z) (A z) dz.
\end{aligned}$$

Vergleicht man mit dem über  $W$  genommenen Integrale

$$J = \int_A^G u(x) (A x) dx$$

indem man auch dies in die einzelnen Theile zerlegt, so sieht man, dass  $J$  von  $J'$  diejenigen Theile enthält, welche weder  $\sigma$  noch  $\tau$  enthalten, dass aber noch hinzukommt die Integralsumme

$$\begin{aligned}
&\int_C^D u(\lambda) (A \lambda) d\lambda + \int_E^F u(\pi) (A \pi) d\pi + \int_{D'}^{C'} u(u) (A u) du \\
&\quad + \int_{F'}^{E'} u(o) (A o) do
\end{aligned}$$

wo mit  $\lambda \mu o \pi$  vier Punkte auf  $CD$ ,  $C'D'$ ,  $E'F'$  und  $EF$  bezeichnet sind. Nimmt man  $\lambda$  und  $\mu$  einerseits,  $o$  und  $\pi$  andererseits sich gegenüberliegend an, so ist

$$\begin{aligned}
d\lambda &= d\mu, \quad do = d\pi, \quad u(\lambda) = u(\mu), \quad u(\pi) = u(o) \\
(A \mu) &= (A \lambda) + (\lambda D) + (DE F D') + (D' \mu) = (A \lambda) + \sigma \\
(A o) &= (A \pi) + (\pi F) + (FD' C' F') + (F' o) = (A \pi) + \tau;
\end{aligned}$$

daher die obige Summe

$$= \sigma \int_{D'}^{C'} u(u) du - \tau \int_E^F u(\pi) d\pi$$

wird. Alles zusammengefasst wird nun

$$\begin{aligned}
J' &= J - \sigma \left\{ \int_{D'}^{C'} u(u) du + \int_F^{D'} u(\zeta) d\zeta + \int_{C'}^{F'} u(\vartheta) d\vartheta \right\} \\
&\quad + \tau \left\{ \int_E^F u(\pi) d\pi + \int_F^{D'} u(\zeta) d\zeta + \int_D^E u(\eta) d\eta \right\}.
\end{aligned}$$

Der Coefficient von  $(-\sigma)$  ist das Integral  $\int \psi(xy) dx$  über den-

selben Weg genommen, auf den  $\tau$  sich bezieht; es sei mit  $T$  bezeichnet. Der Coefficient von  $\tau$  dagegen ist obiges Integral über den Weg von  $\sigma$  erstreckt. Nennt man seinen Werth  $\Sigma$ , so folgt also:

$$J' = J + \tau \Sigma - \sigma T \quad \text{II}$$

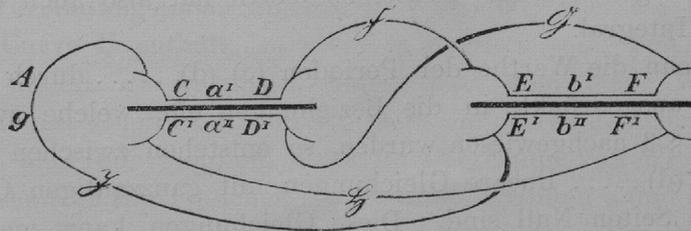
### § 6.

Um die Anwendung auf die Perioden von  $\int \varphi(x, y) dx$  zu machen, denkt man sich in  $T'$  den oben (Seite 343) beschriebenen Weg  $W_0$  durchlaufen und die Buchstaben nebeneinandergestellt, welche die Ufer der Uebergänge bezeichnen, in der Reihenfolge, wie sie beim Durchwandern von  $W_0$  getroffen werden. In dieser Reihe  $R_0$ , die man sich wie den Weg  $W_0$  cyklisch geschlossen denken muss, ist es nun möglich, dass niemals zwei gleiche Buchstaben durch zwei andere ebenfalls gleiche Buchstaben getrennt werden. Dann ist die beabsichtigte Umänderung nicht möglich und, wie später gezeigt wird, auch nicht nöthig. Wenn aber „Trennungen“ gleicher Buchstaben durch andere gleiche auftreten, so seien etwa die beiden  $a$  durch die beiden  $b$  getrennt. Indem wir die dazwischenliegenden Buchstabengruppen durch besondere Zeichen bezeichnen und die beiden durch  $a$  bez. durch  $b$  bezeichneten Ufer noch durch  $a'$  und  $a''$ ,  $b'$  und  $b''$  unterscheiden, können wir  $R_0$  schreiben

$$R_0 = a' \wp b' \wp a'' \wp b'' \wp$$

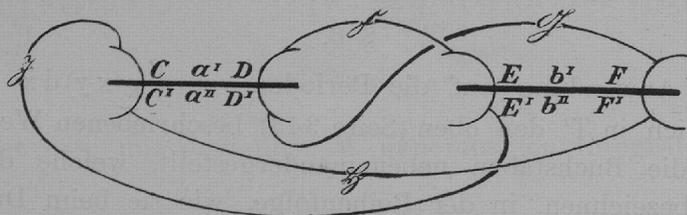
Mit Anwendung der im vorigen § entwickelten Methode kann man nun aus  $W_0$  einen neuen Weg  $W_1$  ableiten. Nimmt man  $a' a'' b' b''$  für die vorhin mit  $s' s'' t' t''$  bezeichneten Ufer und setzt die Buchstaben CDEF wie in Fig. 11 an die Enden der Kreisstücke, welche im Wege  $W_0$  die vier in Frage kommenden Ecken von  $L$  umgehen, so ist der Weg  $W_1$  gegeben durch die Reihe  $\wp \wp \wp \wp = R_1$ ,

Fig. 11.



wobei zwischen  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{F}$  und zwischen  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{H}$  ein Durchgang durch  $a$ , zwischen  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{G}$ , sowie zwischen  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{Z}$  einer durch  $b$  stattfindet. (Fig. 12).

Fig. 12.



Die Perioden des Integrals sind die Werthe von  $\int \varphi(xy) dx$  in  $T'$  auf einer Curve von einem Punkte auf dem ersten Ufer eines Ueberganges nach dem gegenüberliegenden Punkte des zweiten Ufers genommen. Als solche Curve, deren Gestalt gleichgültig ist, kann man  $W_0$  wählen. Dann ist die Periode (a) für den Uebergang  $a$  gleich dem Integral über den Weg  $\mathfrak{F}b'\mathfrak{G}$  genommen, die (b), welche zu dem Uebergang  $b$  gehört, ist der Werth des Integrales über den Weg  $\mathfrak{G}a''\mathfrak{H}$  genommen. Für irgend einen andern Uebergang  $s$  von denjenigen  $c, d, e, f, \dots$ , welche ausser  $a$  und  $b$  noch in  $R_0$  auftreten, kann man die Periode (s), statt durch ein über  $W_0$  genommenes Integral, ausdrücken durch ein über  $W_1$  zwischen denselben, an beiden Ufern von  $s$  sich gegenüberliegenden, Punkten genommenes. Bezeichnet man den letzteren Werth mit  $(s)_1$ , so ist nach dem vorigen §

$$(s) = (s)_1 + \delta(a) + \varepsilon(b),$$

wo  $\delta$  und  $\varepsilon$  Zahlen bezeichnen, die entweder 0, 1 oder  $-1$  sind und sich nach früherer Regel leicht bestimmen. Weil  $\int \varphi(xy) dx$  in  $T'$  einwerthig ist, so ist das um  $W_0$ , als um eine geschlossene Curve, genommene Integral gleich Null. Denselben Werth hat also auch das über  $W_1$  genommene Integral.

Trägt man die Werthe der Perioden (c) (d),  $\dots$  durch die Grössen  $(c)_1, (d)_1, \dots$  ausgedrückt, in die Beziehungen ein, welche zwischen den Perioden im § 3 nachgewiesen wurden, so entstehen zwischen den Grössen (a), (b),  $(c)_1, (d)_1, \dots$  lineare Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, deren rechte Seiten Null sind. Diese Gleichungen kann man aber ein-

facher durch directe Betrachtung erhalten. Der Weg  $W_1$  verfolgt wie der  $W_0$  in der Nähe der Ecken von  $L$  Stücke der Curven  $U$ . Möge nun, wie oben im § 3, eine dieser Curven die von ihr überschrittenen Uebergänge in den Punkten  $M' M'' \dots$  treffen. Dann ist (siehe Seite 340)

$$(M'' N') + (N'' R') + (R'' S') + \dots + (Z'' M') = 0.$$

Man gehe nun von einem Punkte  $A$  in  $W_1$  aus und integrirte immer in derselben Richtung längs  $W_1$ , dann ist

$$(M'' N') = (A N')' - (A M'')'$$

$$(N'' R') = (A R')' - (A N'')'$$

$$(Z'' M') = (A M')' - (A Z'')$$

wo die Klammern rechts den Accent tragen, um die Integration längs  $W_1$  anzudeuten. Damit wird die obige Gleichung

$$(A M')' - (A M'')' + (A N')' - (A N'')' + \dots = 0.$$

Es ist aber  $(A M') - (A M'')$ , beide Integrale längs  $W_0$  genommen, die zum Uebergang  $m$  gehörige Periode  $\pm(m)$ . Entsprechend ist  $(A M')' - (A M'')$  die zu demselben Uebergang gehörige neue Grösse  $\pm(m)_1$ . Aehnlich verhalten sich die übrigen Differenzen und somit erhält man statt der Gleichung

$$\pm(m) \pm(n) + \dots \pm(z) = 0$$

jetzt die Gleichung

$$\pm(m)_1 \pm(n)_1 + \dots \pm(z)_1 = 0.$$

Dabei fallen nicht nur die den fundamentalen Uebergängen entsprechenden Grössen weg, sondern auch die, welche mit  $(a)_1$  und  $(b)_1$  zu bezeichnen wären, weil ja  $W_1$  die Uebergänge  $a$  und  $b$  überschreitet.

Zum Wege  $W_1$  kann man auch ein Diagramm construiren, das man aber aus dem für  $W_0$  offenbar erhält, wenn man die mit  $a$  und  $b$  bezeichneten Verbindungslinien fortnimmt. Da  $W_1$ , wie  $W_0$ , noch Theile von jeder Curve  $U$  enthält, so muss es möglich sein, von jeder Curve  $U$  zu jeder andern zu gelangen, indem man dem Wege  $W_1$  folgt und folglich kann das Diagramm von  $W_1$  nicht in getrennte Theile zerfallen.

Dies ist aber nur möglich, wenn im Diagramm von  $W_0$  geschlossene Polygone vorhanden sind, welchen die Verbindungslinien  $a$  und  $b$  angehören.

Mit dem Wege  $W_1$  bzw. mit der ihn darstellenden Reihe  $R_1$

=  $\mathfrak{H} \mathfrak{G} \mathfrak{F} \mathfrak{S}$  kann man nun ganz ähnliche Betrachtungen anstellen. Enthält er keine Trennungen eines Paares gleicher Buchstaben durch ein anderes Paar gleicher mehr, so ist die Umformung beendet. Kommen aber solche Trennungen noch vor und schreibt man, eine heraushebend,

$$R_1 = c \mathfrak{F}_1 d \mathfrak{G}_1 c \mathfrak{H}_1 d \mathfrak{S}_1,$$

so kann man aus  $W_1$  den geschlossenen Weg  $W_2$  ableiten, der durch die Uebergänge  $c$  und  $d$  hindurchführt und mit der Buchstabenreihe

$$R_2 = \mathfrak{H}_1 \mathfrak{G}_1 \mathfrak{F}_1 \mathfrak{S}_1$$

bezeichnet werden kann. Ist  $s$  irgend einer der ausser  $c, d$  in  $W_1$  noch vorhandenen, nicht überschrittenen Uebergänge  $e, f \dots$  so ist, nach dem früheren, das Integral von einem Punkte von  $s$  nach dem gegenüberliegenden, genommen

$$\text{über } W_1 \text{ gleich } (s)_1$$

$$\text{über } W_2 \text{ „ } (s)_2$$

und

$$(s)_1 = (s)_2 + \delta_1(c)_1 + \varepsilon_1(d)_1.$$

Dabei sind  $\delta_1$  und  $\varepsilon_1$  Factoren, die einen der Werthe  $0, 1$ , oder  $-1$  haben. Hiemit wird nun

$$(s) = (s)_2 + \delta(a) + \varepsilon(b) + \delta_1(c)_1 + \varepsilon_1(d)_1,$$

so dass alle Perioden sich durch  $(a), (b), (c)_1, (d)_1$  und die über  $W_2$  genommenen Integrale  $(e)_2, (f)_2 \dots$  linear und ganzzahlig ausdrücken. Umgekehrt sind aber auch  $(c)_1$  und  $(d)_1$  lineare und ganzzahlige Functionen von  $(c), (d)$ , so dass sich auch  $(s)_2$  linear und ganzzahlig durch  $(s), (a), (b), (c)$ , und  $(d)$  darstellen lässt. Die oben gefundenen Gleichungen zwischen den Perioden, von welchen

$$\pm (m)_1 \pm (n)_1 + \dots = 0$$

eine war, gehen dann in Gleichungen über, wie die:

$$\pm (m)_2 \pm (n)_2 + \dots = 0.$$

Das zu  $W_2$  gehörige Diagramm entsteht aus dem für  $W_1$  durch Fortlassen der  $c$  und  $d$  genannten Verbindungslinien, und es muss wie das letztere zusammenhängend sein. Auf  $W_2$  und die Reihe  $R_2$  kann man dieselben Operationen anwenden und so fortfahren, bis man zu einem Wege  $W_p$  und einer Reihe  $R_p$  kommt, in welcher Paare gleicher Buchstaben durch andere Paare gleicher Buchstaben nicht mehr getrennt sind.

Die Anzahl der in  $R_p$  noch übrigen verschiedenen Buchstaben sei  $q'$ . Da nun beim Uebergange von  $R_{i-1}$  zu  $R_i$  zwei Buchstaben wegfallen und  $R_0$  deren  $\sigma$  enthielt, so ist

$$\sigma = 2p + q'.$$

Die Perioden (a) (b), ... drücken sich nach den bewiesenen Sätzen linear und ganzzahlig aus durch die auf die weggefallenen Buchstaben a, b, c, d, ... m, n bezüglichen Integrale (a), (b), (c)<sub>1</sub>, (d)<sub>1</sub>, (e)<sub>2</sub> ... (m)<sub>p-1</sub> (n)<sub>p-1</sub> und durch diejenigen  $q'$  Werthe (r)<sub>p</sub>, (s)<sub>p</sub>, (t)<sub>p</sub> ... welche auf dem Wege  $W_p$  erlangt werden, wenn man von einem Ufer zum andern der in  $R_p$  noch übrigen Uebergänge r, s, t ... integrirt. Auch das Umgekehrte ist richtig.

Die von den Curven  $U_1, \dots, U_\nu$  gelieferten linearen und homogenen Gleichungen zwischen den Perioden bestehen hier zwischen den  $q'$  Grössen (r)<sub>p</sub>, (s)<sub>p</sub>, (t)<sub>p</sub> ... Es wird nachher gezeigt werden, dass diese Werthe alle gleich Null sind. Daher sind die in Rede stehenden Gleichungen nichtssagend. Zwischen den Grössen (a), (b), (c)<sub>1</sub>, (d)<sub>1</sub>, ... (m)<sub>p-1</sub>, (n)<sub>p-1</sub> ergeben also die Curven  $U$  keine Gleichung, ebenso wie auch zwischen den  $2\varrho$  Perioden, durch welche sich die übrigen ausdrücken lassen, keine von den  $U$  herrührende Gleichung besteht. Da nun, weil die (r)<sub>p</sub>, (s)<sub>p</sub>, (t)<sub>p</sub> ... alle Null sind, sich die  $2\varrho$  Perioden durch die  $2p$  Grössen (a) (b) ... (n)<sub>p-1</sub> linear und ganzzahlig ausdrücken lassen und auch das Umgekehrte richtig ist, so muss  $2p = 2\varrho$  sein. Damit folgt  $q' = \nu - 1$  und

$$p = \varrho = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^q (n - c_\lambda) - (n - 1).$$

Da  $p$  ganz ist, muss folglich auch  $\varrho$  ganz sein.

Auch zu  $W_p$  gehört ein Diagramm, das, wie alle früheren, nicht zerfallen darf. Weil nun jedes neue Diagramm zwei Verbindungslinien weniger hat als das vorhergehende, so hat dies letzte  $\sigma - 2p = q'$  Verbindungslinien zwischen den  $\nu$  Punkten  $P_1 P_2 \dots P_\nu$ . Um so viele Punkte zu verbinden, braucht man aber mindestens  $\nu - 1$  Linien; daher muss  $q' \geq \nu - 1$  sein.

## § 7.

Die im vorigen § gegebene Begründung der Gleichung  $2p = 2\varrho$  würde ganz stichhaltig sein, wenn man wüsste, dass es andere Beziehungen zwischen den in Frage kommenden Grössen, als die oben betrachteten nicht gäbe. Man kann aber noch in anderer Weise zeigen, dass  $p = \varrho$  sein muss. Zunächst ist am Ende des vorigen § direct bewiesen, dass  $q' \geq \nu - 1$  ist, woraus  $2p \leq \sigma - 2(\nu - 1) \leq 2\varrho$  sich ergibt.

Der Weg  $W_0$  läuft zum Theil längs der Ufer gewisser Uebergänge entlang, die er nicht überschreitet, zum Theil folgt er — und zwar in der Nähe der Ecken von  $L$  — kleineren oder grösseren Kreisstücken, die Theile der verschiedenen Curven  $U$  bilden. Aus der Art, wie der Weg  $W_0$  gebildet wurde, (§ 4, Seite 343) erkennt man, dass alle diejenigen Kreisstücke von  $W_0$ , welche auf der Curve  $U_i$  gelegen sind, diese Curve vollständig erfüllen, wenn man von den beliebig klein zu machenden Stücken unmittelbar auf beiden Ufern eines Ueberganges absieht, der nicht überquert wird. (Die kleinen Kreisstücke von  $Q, P, F, G$  in Fig. 8<sup>b</sup> bis zum Uebergang sind solche Stücke). Da beim Herstellen von  $W_1, W_2 \dots$  aus  $W_0$  nur Uebergänge überschritten werden die vorher verboten waren, so wird bei jedem dieser Wege, und also auch bei  $W_p$ , die Eigenschaft bestehen, dass alle zu  $W_p$  gehörigen Stücke von  $U_i$  diese Curve vollständig erfüllen, ja sogar werden weniger der unendlich kleinen Stücke fehlen als früher, weil jetzt Uebergänge überschritten werden, die vorher gesperrt waren.

Von den Uebergängen, welche von  $U_i$  ausgehen d. h. von  $U_i$  überschritten werden, mögen nun beim Wege  $W_p$  immer noch die  $u, v, w \dots z$  verboten sein und diese Reihe möge zugleich angeben, wie sie sich folgen, wenn man, etwa im Uhrzeigersinn,  $U_i$  durchläuft, so dass man nach Ueberschreitung von  $z$  wieder zu  $u$  zurück kömmt.

Wenn man nun den Weg  $W_p$  verfolgt, so führt er (Fig. 13) von  $U''$  längs  $U_i$  zu  $V'$ , also von  $u$  nach  $v$ ; später dann von  $V''$  nach  $W'$  d. h. vom einen Ufer von  $v$  nach dem von  $w$  u. s. w., schliesslich von  $Z''$  nach  $U'$ , also von  $z$  nach  $u$ . In  $R_p$  müssen also die Buchstabenpaare vorkommen  $uv, vw, wx, \dots zu$ . Was ihre Reihenfolge angeht, so kann man  $R_p$  schreiben  $u v \Pi v w \mathfrak{B}'$ , wo mit  $\Pi, \mathfrak{B}'$  Buchstabengruppen be-

zeichnet sind. Das Paar  $wx$  kann nun nicht in  $\mathfrak{U}$  stehen, weil sonst  $vv$  durch  $ww$  getrennt wäre; also muss es in  $\mathfrak{B}'$  sich befinden, das man schreiben kann  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}wx\mathfrak{B}'$ . Das Paar  $xy$  kann weder in  $\mathfrak{U}$  noch in  $\mathfrak{B}$  stecken, ebenfalls weil sonst die Trennungen  $v.x.v.x$  bez.  $w.x.w.x$  auftreten würden, und muss also sich in  $\mathfrak{B}'$  finden; Schreibt man  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}xy\mathfrak{B}'$ , so wird jetzt

$$R_p = uv\mathfrak{U}vw\mathfrak{B}wx\mathfrak{B}xy\mathfrak{B}'$$

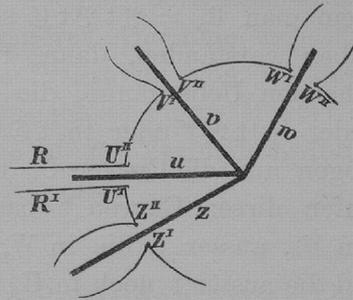
und so kann man fortschliessen und erkennt, dass in  $R_p$  die Paare  $uv$ ,  $vw$ ,  $wx\dots zu$  in dieser Reihenfolge auftreten müssen, damit Trennungen nicht da sind. Somit kann man schreiben

$$R_p = uv\mathfrak{U}vw\mathfrak{B}wx\dots zu\mathfrak{B}.$$

Bezeichnet nun  $t$  einen andern Uebergang, der nicht von  $U_i$  getroffen wird, so müssen in  $R_p$  die beiden  $t$  in einer der mit  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{B}'\dots\mathfrak{B}$  bezeichneten Buchstabengruppe stehen, weil sonst Trennungen vorkämen. Wenn man also annimmt sie seien in  $\mathfrak{B}$  enthalten, und dann  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'t\mathfrak{B}''t\mathfrak{B}'''$  schreibt, so gelangt man von einem Punkte  $R$  auf dem einen Ufer von  $t$  zum gegenüberliegenden Punkte  $R'$  entweder auf dem durch  $\mathfrak{B}''$  repräsentirten Weg, wobei man  $U_i$  gar nicht trifft, oder auf dem Weg  $\mathfrak{B}''uv\mathfrak{U}vw\mathfrak{B}\dots zu\mathfrak{B}'$ , wobei man die ganze Curve  $U_i$  (mit Ausnahme der öfter genannten unendlich kleinen Stücke) durchläuft. Was von  $U_i$  gilt, gilt von jeder Curve, die auf dem von  $R$  zu  $R'$  führenden Wege liegt.

Das über  $W_p$  genommene Integral von  $R$  nach  $R'$  kann man nun zerlegen in die Theile, die längs der Ufer der Uebergänge erstreckt sind und die Summe der Theile, die sich auf die Curven  $U_i$  beziehen. Da jede Curve  $U_i$ , die überhaupt auf dem Wege liegt, ganz umlaufen wird, so ist das über sie genommene Integral  $= 0$ . Wenn aber in  $R_p$  zwischen den beiden  $t$  ein Buchstaben  $s$  steht, so steht er da zweimal; der Weg  $W_p$  führt also zwischen  $R$  und  $R'$  an beiden Ufern von  $s$  und zwar in entgegengesetzten Richtungen entlang und die beiden Integraltheile, die sich auf  $s$  beziehen, heben sich auf. Somit ergibt sich  $(t)_p = 0$ , womit für jeden der Uebergänge  $r, s, t\dots$  die gegen Ende des § 6 benutzte Eigenschaft bewiesen ist.

Fig. 13.



Die oben durchgeführte Betrachtung hat, wie erwähnt, gezeigt, dass, wenn man  $R_p = \mathfrak{A}t\mathfrak{B}t\mathfrak{C}$  schreibt, unter  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  Gruppen von Buchstaben verstanden, dann die sämtlichen von einer Curve  $U$  ausgehenden Uebergänge, die in  $W_p$  nicht überschritten werden, sich entweder in  $t\mathfrak{B}t$  oder in  $t\mathfrak{C}\mathfrak{A}t$  vorfinden. Zu den beiden Enden von  $t$  mögen nun die Curven  $U_\alpha$  und  $U_\beta$  gehören, so dass man also beim Durchlaufen dieser Curven  $t$  passirt. Dann müssen alle andern Uebergänge von  $U_\alpha$ , ausser  $t$ , die in  $W_p$  noch nicht überschritten werden, sich in  $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$  und die ausser  $t$  noch in  $U_\beta$  vorhandenen verbotenen Uebergänge in  $\mathfrak{B}$  vorfinden. Von einer der beiden Curven braucht kein weiterer Uebergang derart als  $t$  auszugehen; wenn von beiden kein weiterer solcher Uebergang ausginge, so wären in dem Diagramm des Weges  $W_p$  die beiden Punkte  $P_\alpha$  und  $P_\beta$  zwar unter sich durch  $t$  verbunden, aber vom übrigen isolirt. Dies ist nicht möglich, wenn nicht das ganze Diagramm nur aus diesen beiden Punkten besteht. In diesem Falle setzt sich aber der Weg  $W_p$  aus dem Umlaufen von  $U_\alpha$ , dem einen Ufer von  $t$ , der Curve  $U_\beta$  und dem andern Ufer von  $t$  zusammen, so dass  $R_p$  einfach  $tt$  ist. Dann ist  $\nu = 2$ ,  $q' = 1$ , daher  $q' = \nu - 1$ .

Ist aber  $\nu > 2$ , so müssen mindestens von einem der beiden Punkte, von  $P_\alpha$  z. B. weitere, von  $t$  verschiedene Linien ausgehen. Würden dann von  $P_\beta$  keine Verbindungslinien ausser  $t$  ausgehen, so würde durch Weglassen von  $t$  der Punkt  $P_\beta$  vom Rest des Diagramms isolirt werden und das ganze Diagramm also zerfallen. Man kann aber zeigen, dass das Diagramm auch dann durch Fortlassen von  $t$  sich in getrennte Theile spaltet, wenn von  $P_\alpha$  und von  $P_\beta$  mehr als die eine Verbindungslinie  $t$  ausgeht.

Denn würde sich das Diagramm nicht spalten, so könnte man von  $P_\alpha$  auf einer Linie  $a$  zu einem Punkte  $P_\gamma$ , von da längs  $b$  zu  $P_\delta$ , von da längs  $c$  nach  $P_\epsilon$  u. s. w. und schliesslich längs  $m$  von  $P_\lambda$  zu  $P_\beta$  gelangen. Es würden sich dann der Buchstabe  $a$  sicher in der Gruppe  $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ , und der  $m$  in  $\mathfrak{B}$  vorfinden. Da nun die Namen der von  $P_\gamma$  ausgehenden Verbindungslinien dieselben sind, wie die der von  $U_\gamma$  überschrittenen, noch in  $W_p$  verschlossenen, Uebergänge und diese alle entweder der Gruppe  $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$  oder der  $\mathfrak{B}$  angehören, so wird, weil  $a$  zu  $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$  gehört, auch  $b$  in dieser Gruppe sich finden; dieselbe Ueberlegung zeigt dann dass,

weil  $b$  zu  $\mathcal{C}\mathcal{M}$  gehört, auch  $c$  in dieser Gruppe stehen muss. So weiter gehend könnte man schliesslich zeigen, dass auch  $m$  derselben Gruppe angehören müsste, während es doch nach unserer Annahme sich in  $\mathcal{B}$  vorfindet. Damit ist also bewiesen, dass das Diagramm von  $W_p$  durch Weglassen irgend einer Seite zerfällt. Für eine solche Figur ist aber die Anzahl  $\nu$  der Punkte um Eins grösser, als die  $q'$  der Verbindungslinien, also hat man  $\nu = q' + 1$ ;  $q' = \nu - 1$ , womit weiter

$$p = q$$

sich ergibt.

Somit ist endgiltig dargethan, dass alle Perioden eines Integrals erster oder zweiter Gattung sich aus höchstens

$$2p = 2q = \sum_{\lambda=1}^q (n - c_\lambda) - 2(n - 1)$$

Grössen linear und ganzzahlig zusammensetzen lassen.

### § 8.

Die am Ende des vorigen § genannten  $2p$  Grössen sind diejenigen, welche oben in § 6 mit (a), (b), (c)<sub>1</sub>, (d)<sub>1</sub>, ... (m)<sub>p-1</sub>, (n)<sub>p-1</sub> bezeichnet waren. Diese Perioden sind aber kanonische oder Fundamentalperioden. Um dies zu zeigen nimmt man an, die beiden in § 5 gebrauchten Functionen  $\varphi(x, y)$  und  $\psi(x, y)$  seien Integranden erster Gattung. Ist dann der mit  $W$  bezeichnete Weg unser  $W_0$ , so ist das Integral  $J = 0$ , weil  $\int \varphi(x, y) dx$  bei gegebener unterer Grenze eine in  $T'$  einwerthige und endliche Function ist und folglich von  $\psi(x, y) \int \varphi(x, y) dx$  das gleiche gilt und weil ferner  $W_0$  in  $T'$  geschlossen ist. In der Gleichung II des § 5 ist dann  $J'$  über  $W_1$  genommen und sei mit  $J_1$  bezeichnet. Nennt man nun (A) und (B) diejenigen Grössen, die zu  $\psi(x, y)$  in derselben Beziehung stehen wie (a) und (b) zu  $\varphi(x, y)$ , so liefert die Gleichung II

$$J_1 = (a)(B) - (b)(A).$$

Auf  $J_1$  wendet man dasselbe Verfahren an und erhält ein über  $W_2$  genommenes Integral  $J_2$

$$J_2 = J_1 + (c)_1(D)_1 - (d)_1(C)_1$$

wo wieder (C)<sub>1</sub> und (D)<sub>1</sub> sich in derselben Weise zu  $\psi$  verhalten, wie (c)<sub>1</sub> und (d)<sub>1</sub> zu  $\varphi$ . Indem man so fort geht entsteht schliesslich die Gleichung

$$J_p = (a) (B) - (b) (A) + (c)_1 (\nu)_1 - (d)_1 (C)_1 + (e)_2 (F)_2 \dots \dots$$

$$+ (m)_{p-1} (N)_{p-1} - (n)_{p-1} (M)_{p-1}.$$

Die linke Seite ist aber = 0. Denn das Integral  $\int \varphi(xy) dx$  hat in zwei gegenüberliegenden Punkten eines der in  $R_p$  noch auftretenden Uebergänge denselben Werth (§ 7) und da das ganze Integral

$$\int \psi(x y) dx \quad \int \varphi(x y) dx$$

an den beiden Ufern entlang in entgegengesetztem Sinne erstreckt ist, so entsteht Null. Weil ferner jede Curve  $U_i$  ganz umlaufen wird und der Integrand in seiner Entwicklung ein Glied mit  $\frac{1}{x - \xi_i}$  nicht enthält, so hat auch der auf  $U_i$  bezügliche Integraltheil den Werth Null. Somit hat man die Gleichung

$$0 = (a) (B) - (b) (A) + (c)_1 (D)_1 - (d)_1 (C)_1 + \dots$$

$$+ (m)_{p-1} (N)_{p-1} - (n)_{p-1} (M)_{p-1},$$

welche die zwischen den fundamentalen Perioden der beiden Integrale

$$\int \varphi(x y) dx \quad \text{und} \quad \int \psi(x y) dx$$

bestehende bilineare Gleichung in der von Riemann gegebenen Form darstellt.

### § 9.

Die Betrachtungen der früheren §§ setzen ein Integral erster oder zweiter Gattung voraus. Wenn dagegen ein Integral vorliegt, das für gewisse Entwicklungen logarithmisch unendlich wird, so ist die Fläche  $T'$  nicht mehr zu einer eindeutigen Darstellung geeignet, wenn nicht etwa die fraglichen Reihen zu einem Verzweigungs- oder Knotenpunkte von  $L$  gehören. Sind die Punkte der Fläche  $T'$ , für welche das Integral logarithmisch unendlich wird und die weder Verzweigungspunkte noch Knotenpunkte sind, die  $Q_1, Q_2 \dots Q_l$ , so wird man am einfachsten jeden dieser Punkte durch eine Curve, die in dem Blatt verläuft in dem er liegt, mit einem Eckpunkt des Liniensystems  $L$  in Verbindung setzen und zwar so, dass diese Curven keine Seiten von  $L$  treffen. Die  $l$  Curven seien  $a_1, a_2 \dots a_l$ . Setzt man nun fest, dass sie nicht überschritten werden dürfen, so entsteht aus  $T'$  die neue Fläche  $T''$ , in der das Integral eine ein-

werthige Function der oberen Grenze ist. Das neue Liniensystem, das entsteht, wenn man zu den Linien von  $L$  noch die  $l$  Curven  $a_1 \dots a_l$  hinzunimmt, kann in einem einzigen zusammenhängenden Zug umlaufen werden. Denn ist (Fig. 14), die Linie  $a_i$  zwischen die Uebergänge  $r$  und  $s$  eingeschaltet, so würde der Weg  $W_0$  von  $R$  über  $U$  und  $V$  nach  $S$  führen; geht man statt dessen über  $R$  nach  $U$ , umkreist dann  $a_i$  von  $U$  nach  $V$  und geht dann nach  $S$  weiter, so sind die beiden Ufer des Ueberganges  $a_i$ , die selbst  $a_i$  genannt seien, in  $W_0$  aufgenommen und der Kreis um den Punkt  $Q_i$  ist dann zu den Curven  $U_i$  hinzugekommen. Wenn man mit allen Curven  $a_i$  so verfährt, so entstehe aus  $W_0$  der neue geschlossene Weg  $W_0$ . Da, wie die angestellte Ueberlegung zeigt, die beiden Ufer von  $a_i$  hintereinander durchlaufen werden, so wird, wenn man sich die zu  $W_0$  gehörige Buchstabenreihe  $R_0$  bildet, diese genau dieselben Trennungen von Buchstabenpaaren darbieten, wie  $R_0$ . Man kann also aus  $R_0$  die Reihen  $R_1, R_2 \dots R_p$  ableiten und entsprechend aus  $W_0$  die Wege  $W_1, W_2 \dots W_p$ , ohne dass dabei die nebeneinanderstehenden Buchstaben  $a_1 a_1, a_2 a_2, \dots a_l a_l$  getrennt werden. Es wird also dann

$$R_p = \mathfrak{A}_1 a_\alpha a_\alpha \mathfrak{A}_2 a_\beta a_\beta \mathfrak{A}_3 a_\gamma a_\gamma \dots a_\lambda a_\lambda \mathfrak{A}_{l+1},$$

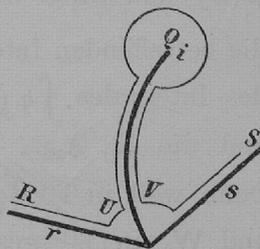
wobei die Zahlen  $\alpha \beta \gamma \dots \lambda$  eine Permutation von  $1, 2 \dots l$  sind und die Reihe

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_{l+1}$$

mit der  $R_p$  identisch ist.

Wie oben in § 6 drücken sich hier die Perioden des Integrals dritter Gattung durch  $2p$  Grössen aus, die den dort mit  $(a), (b) \dots (m)_{p-1}$   $(n)_{p-1}$  bezeichneten entsprechen und durch die  $\nu - 1 + 1$  Integrale, die längs  $W_p$  genommen sind, von einem Punkte eines in  $R_p$  noch auftretenden Ueberganges zum gegenüberliegenden am andern Ufer. Diejenigen Theile dieser Integrale, welche sich längs der Uebergänge erstrecken, zerstören sich gegenseitig und es bleiben nur die Theile, welche sich auf die im Wege liegenden Curven  $U_i$  beziehen, zu welchen aber jetzt auch die Kreise um die Punkte  $Q$  gehören. Wenn zu einer Curve  $U_i$  eine

Fig. 14.



Entwicklung von  $\varphi(x, y)$  gehört, in welcher  $\frac{1}{x - \xi}$  fehlt, so ist das fragliche Integral = 0, sonst hat es einen von Null verschiedenen Werth. Ist also die Anzahl aller Curven  $U_i$ , deren zugehörige Entwicklungen in  $\varphi(x, y)$  ein Glied mit  $\frac{1}{x - \xi}$  erzeugen, gleich  $m$  und sind  $A_1, A_2, \dots, A_m$  die betreffenden Integralwerthe, so drücken sich die sämtlichen Perioden des Integrales  $\int \varphi(x, y) dx$  durch die  $2p$  Grössen  $(a), (b), \dots, (m)_{p-1}, (n)_{p-1}$  und die  $A_1, A_2, \dots, A_m$  aus. Die letzteren sind aber nicht unabhängig. Denn weil in  $T'' \int \varphi(x, y) dx$  eine einwerthige Function der oberen Grenze und  $W_0$  in  $T''$  geschlossen ist, wird das um  $W_0$  genommene Integral gleich Null. Bei dieser Integration zerstören sich wieder die über die Ufer der Uebergänge genommenen Theile; diejenigen, die sich auf eine und dieselbe Curve  $U_i$  beziehen, schliessen sich zu einem um diese Curve genommenen Integral zusammen und ergeben 0 oder eine der Zahlen  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Also ist

$$\sum_{i=1}^m A_i = 0$$

womit ein bekanntes Resultat wieder gefunden ist.<sup>1)</sup> Es lassen sich also die Perioden des Integrals dritter Gattung mit  $m$  logarithmischen Unstetigkeiten durch höchstens  $2p + m - 1$  Grössen darstellen.

Ein weiteres Eingehen auf die, wie in § 8 abzuleitenden Beziehungen, wobei Integrale zweiter und dritter Gattung in Frage kommen, würde zu sehr von meinem nächsten Zweck abführen; ich kann es daher umsomehr unterlassen, als es keiner Schwierigkeit unterliegt, z. B. den Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter mit den gegebenen Hilfsmitteln abzuleiten.

1) Siehe z. B. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie u. s. w. 2. Auflage. Seite 204 Gl. (19<sup>a</sup>).

## § 10.

Zum Schlusse noch einige Beispiele.

I. Zweiblättrige Fläche mit 4 Verzweigungspunkten, zu welchen wir noch zwei Knotenpunkte hinzunehmen, (Fig. 15 in der die Verzweigungs-

Fig. 15. (Erstes Blatt)

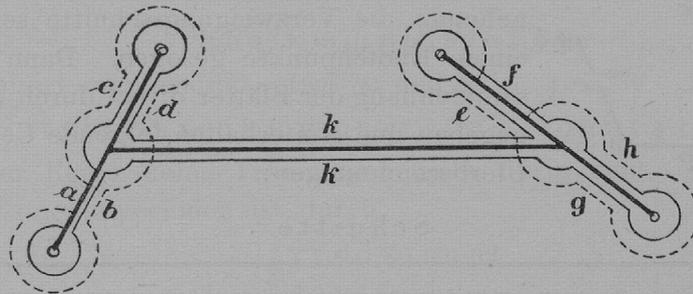
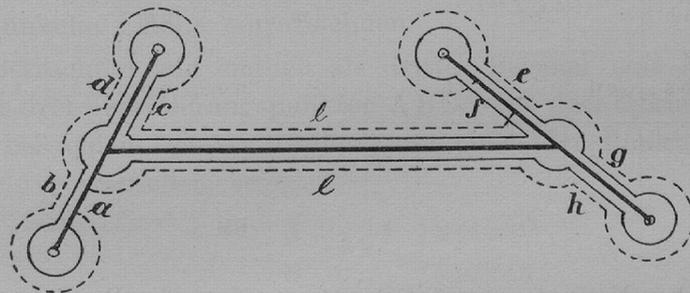


Fig. 15. (Zweites Blatt)



punkte mit kleinen Kreisen bezeichnet sind). Die nähere Untersuchung ergibt die in der Figur angegebene Art des Zusammenhangs. Nimmt man  $a$  zum fundamentalen Uebergang, so ist die Reihe

$$R_0 = \underline{c} \underline{d} \underline{k} \underline{e} \underline{f} \underline{h} \underline{g} \underline{k} \underline{b} \underline{b} \underline{d} \underline{c} \underline{l} \underline{f} \underline{e} \underline{g} \underline{h} \underline{l}^1)$$

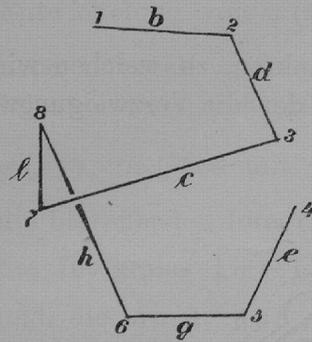
der entsprechende Weg  $W_0$  ist in Fig. 15 eingezeichnet (die ausgezogene Linie), und sein Diagramm ist oben in Fig. 9 Seite 345 gegeben. Eliminirt man  $k$  und  $f$ , so entsteht

$$R_1 = \underline{c} \underline{d} \underline{b} \underline{b} \underline{d} \underline{c} \underline{l} \underline{h} \underline{g} \underline{e} \underline{e} \underline{g} \underline{h} \underline{l}$$

in der Trennungen gleicher Buchstabenpaare durch andere Paare nicht mehr vorkommen. Der Weg  $W_1$  ist der in der Figur punktirt gezeichnete; das Diagramm zeigt Fig. 16.

1) Die zu eliminirenden Buchstaben sind hier und bei den folgenden Beispielen unterstrichen.

Fig. 16.



Die fundamentalen Perioden sind die Integrale über die Uferfolgen

$$efhg \text{ und } hgkbbdcl.$$

II. Als zweites Beispiel nehmen wir das von Clebsch und Gordan gegebene, indem wir annehmen, die Verzweigungsschnitte seien alle aus einem Knotenpunkte gezogen. Dann ist der Zusammenhang der Blätter direct durch die Schleifen gegeben und wir erhalten folgende Uebersicht der Uferbezeichnungen:

## Schnitte

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Blätter	1	<u>a</u> b		<u>e</u> f			lm		pq				
	2	<u>b</u> a	<u>c</u> d		gh			no	qp	rs	tu		
	3		<u>d</u> c			ik	ml			sr		vw	xy
	4			<u>f</u> e	hg	ki		on			ut	wv	yx

Unter der Nummer eines Schnittes stehen die Bezeichnung der Ufer und jeweils links und rechts der Namen des Ufers, welches vom Knotenpunkte gesehen links bez. rechts ist. Viele Ufer sind nicht bezeichnet. Würde man für sie Zeichen einführen, so würden dieselben durchweg nebeneinander auftreten und auf alle Werthe ohne Einfluss sein. Indem wir die Uebergänge  $ac$  und  $e$  zu fundamentalen wählen wird

$$R_0 = f \underline{l} m p q i k m \underline{l} s r v w x y d d g h n o q p r s t u b b h g k i o n u t w v y x f.$$

Eliminirt man  $l$  und  $q$ , so wird

$$R_1 = f s r v w x y d d g h n o i k m m p p r s t u b b h g k i o n u t w v y x f$$

und das erste Paar von fundamentalen Periodenwegen ist gegeben durch die Buchstabenreihen

$$\begin{aligned} & m p q i k m \\ & i k m l s r v w x y d d g h n o. \end{aligned}$$

Eliminirt man weiter  $s$  und  $g$ , so entsteht

$$R_2 = ftubbbhhnoikmmpprrvwxyddkionutwvyxf$$

und das zweite Paar von Periodenwegen ist gegeben durch

$$rvwxyddghnoikmmppr$$

und

$$hnoikmmpprstubbh.$$

Eliminirt man endlich etwa  $w$  und  $y$ , so kommt

$$R_3 = ftubbbhhnoikmmpprrvddkionutxxf,$$

in welcher Reihe keine Trennungen mehr übrig sind. Das dritte Paar von Fundamentalperioden ist durch

$$xyddkionut$$

$$ddkionutwv$$

gegeben. Es hätte keine Schwierigkeiten, die entsprechenden Wege in die Riemann'sche Fläche einzuzeichnen.

III. Betrachten wir endlich als drittes Beispiel eine siebenblättrige Fläche mit drei Verzweigungspunkten  $ABC$ . Die drei Cyklen, die angeben, wie sich bei einem ganzen Umlauf um einen der Punkte  $A$ ,  $B$  oder  $C$  die Wurzeln vertauschen, seien

$$\text{für } A \dots 1234567$$

$$B \dots 1357246$$

$$C \dots 1526374.$$

Legen wir die Linien  $AB$  und  $BC$  als Verzweigungsschnitte, so ergibt sich der folgende Zusammenhang

Blätter		1	2	3	4	5	6	7
AB	l	a	b	c	d	e	f	g
	r	g	a	b	c	d	e	f
BC	l	p	k	m	o	h	l	n
	r	h	l	n	p	k	m	o

\*

wo in der mit l bezeichneten Zeile die Namen der linken, in der mit r bezeichneten die der rechten Ufer stehen; links und rechts angenommen wie sie erscheinen, wenn man von A über B nach C geht.

Nehmen wir abcdef zu fundamentalen Uebergängen, so ist

$$R_0 = gg \underline{n} o l m h k o p m n k l p h.$$

Durch Elimination von n und h kommt

$$R_1 = gg \underline{k} l p \underline{k} o p m o l m$$

mit dem ersten Periodenpaar

$$o l m h k o p m$$

$$k o p m n k l p.$$

Wird aus  $R_1$  k und p eliminirt, so entsteht

$$R_2 = gg o l m o l m$$

und für das zweite Periodenpaar ergibt sich

$$l p \text{ und } k o.$$

Wenn man endlich aus  $R_2$  o und l fortschafft, so folgt

$$R_3 = gg m m$$

und das dritte Periodenpaar hat die Wege

$$l m \text{ und } m o.$$

Freiburg in Baden. Im November 1884.