Nachtrag zu den Mitteilungen II und III

über die

Ergebnisse

aus

Beobachtungen der terrestrischen Refraktion

von

Carl Max von Bauernfeind.

Nachtrag zu den Mitteilungen II und III
über die
Ergebnisse
aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion
von
Carl Max von Bauernfeind.

Nach meinen in den Astronomischen Nachrichten der Jahre 1864 (Nr. 1478—1480) und 1866 (Nr. 1587—1590) veröffentlichten Abhandlungen über „die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physikalische Konstitution der Atmosphäre“ wächst der Krümmungshalbmesser der Lichtkurve stetig von unten nach oben, und er wird an der oberen Atmosphäregrenze oder da, wo das Lichtbrechungsvermögen des Dunstkreises aufhört, unendlich gross, was anzeigt, dass von dort ab die Lichtkurve in eine Gerade übergeht, die sich bis zu den Sternen erstreckt. Hieraus folgt nicht blos eine Abnahme des Strahlenbrechungskoeffizienten mit der Höhe, sondern auch eine Verschiedenheit der Teilrefraktionen Δz und $\Delta z'$ an den Enden eines die Atmosphäre ganz oder teilweise durchdringenden Lichtstrahls, wobei, wenn Δz die Refraktion für den unteren und $\Delta z'$ jene für den oberen Endpunkt bezeichnet, stets $\Delta z > \Delta z'$ ist.

Die Richtigkeit dieses letzteren theoretischen Ergebnisses an der Hand der Erfahrung nachzuweisen, nachdem das erstere durch die trigonometrischen Höhenbestimmungen der Russischen Vermessungskammer im Kaukasus längst bestätigt war (vergl. Astron. Nachr. Bd. 67, Nr. 1590, Seite 87 und 88), bildete die wesentlichste Aufgabe der Refraktionsbeobachtungen, welche ich zwischen den Jahren 1877 und 1885 auf Kosten der Baye-

rischen Kommission für die Europäische Gradmessung (nunmehrige „Internationale Erdmessung“) zuerst im Fichtelgebirge zwischen den Punkten Döbra und Kapellenberg und dann in den Vorbergen der Bayerischen Alpen auf den Punkten Höhensteig (*H*) bei Rosenheim, Irschenberg (*I*) bei Miesbach und Kampenwand (*K*) bei Hohenaschau mit Hilfe tüchtiger Assistenten, die vorher meine Schüler waren, durchführte und worüber ich in den Jahren 1880, 1883, 1888 in drei den Denkschriften der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften einverleibten und auch durch Sonderabdrücke verbreiteten Abhandlungen, „Mitteilungen“ benannt, berichtete.

Bei einer so ausgedehnten Unternehmung, die nicht weniger als neun wissenschaftlich gebildete Mitarbeiter und drei praktisch geschulte Gehilfen forderte, ist es trotz aller Geschicklichkeit und Gewissenhaftigkeit derselben nicht ausgeschlossen, dass hie und da Messungsfehler gemacht werden, die der Leiter des Unternehmens bei genauester Prüfung der Beobachtungshefte nicht entdecken kann, wie z. B. wenn bei der nivellistischen Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Stationen einmal Rück- und Vorblick verkehrt aufgeschrieben oder auch, ohne dass der aufschreibende Gehilfe es bemerkte, in umgekehrter Reihenfolge abgelesen worden, oder wenn die Zahl der ganzen Meter um eine Einheit falsch bestimmt wird u. s. w. Einige solche Fehler kamen leider bei dem im Jahre 1881 von zwei tüchtigen Assistenten ausgeführten Präzisionsnivelement zwischen Höhensteig und Kampenwand (*H—K*) vor, wie sich im Jahre 1889 durch die von dem gegenwärtigen Assistenten unserer Erdmessungskommission vorgenommene dritte Bestimmung des bezeichneten Höhenunterschiedes zuverlässig herausstellte. Nach dem Berichte des Assistenten Oertel war von Höhensteig bis zum Fixpunkte Nr. 1629 bei Hohenaschau Alles in Ordnung; von da ab, wo auf dem Reitwege zur Kampenhöhe nivelliert worden war, stellten sich alsbald einige erhebliche Abweichungen ein. Zunächst war nämlich im Jahre 1881 der Höhenunterschied zwischen den Punkten Nr. 1629 und Nr. 1634 infolge unrichtiger Aufschreibung eines eben neu aufgenommenen Schreibgehilfen um etwa 2,7 m zu klein und der Unterschied zwischen den Punkten Nr. 1634 und Nr. 1635 um ebensoviel zu gross gefunden worden, wodurch sich also die Kote des Punktes Nr. 1635 als richtig darstellte. In der nächsten Abteilung steckte nach dem auf ihr zuerst

vorgenommenen Flugnivellement ein Fehler von nahezu 1,5 m. Nachdem eine Wiederholung des Flugnivellements an diesem Ergebnisse nichts änderte und auch der Höhenunterschied der folgenden Abteilung in Ordnung war, wurde ein genaues Nivellement der Strecke von Nr. 1635 bis Nr. 1636 ausgeführt, welches in der That den Höhenunterschied ihrer Endpunkte um 1,4344 m grösser ergab, als im Jahre 1881. Die Weiterführung des Flugnivellements ergab die Richtigkeit aller Koten bis auf die des letzten, mit Nr. 1642 bezeichneten Zwischenpunktes.

Dieser war an Einem Felsblock zweimal durch horizontale, regelmässig behauene und durch Quadrate begrenzte Flächen bezeichnet, welche letzteren aber mehr als zwei Dezimeter vertikalen Abstand hatten. Bezeichnen wir den unteren dieser zwei Punkte, welcher im Jahre 1881 bestimmt worden ist, mit Nr. 1642 und den oberen, im Jahre 1882 von einem anderen Assistenten bei der Einmessung der Oberfläche des auf der Kampenhöhe stehenden Pfeilers benützten Fixpunkt mit Nr. 1642^a, so entstand bei Bestimmung der Kote des Beobachtungspunktes auf der Kampenwand, welcher die Nr. 1643 führt, durch Verwechslung der Punkte 1642 und 1642^a ein neuer Fehler von + 0,2020 m, so dass nunmehr die Gesamtänderung des im Jahre 1881 bestimmten Höhenunterschiedes *HK* betrug:

$$\Delta H = 1,4344 + 0,2020 = 1,6364 \text{ m}$$

wofür man auch 1,636 m schreiben kann, wenn man die Koten nur auf drei Dezimalstellen angeben will, wie ich dieses kürzlich bei Besprechung des vorliegenden Falles in der 7. Auflage meiner „Elemente der Vermessungskunde“ (Band II, Seite 454) gethan habe.

Dieser Fehler, der selbstverständlich für die von *K* abwärts gezählten Vertikalabstände (Tiefen) mit dem negativen Vorzeichen versehen, also

$$\Delta H = -1,4344 - 0,2020 = -1,6364 \text{ m}$$

geschrieben werden muss, hätte allerdings von vorneherein durch zwei ganz von einander unabhängige Nivellements vermieden werden können; dass es nicht geschah, lag lediglich in finanziellen Erwägungen, die ich jetzt um so mehr zu bedauern habe, als sich schliesslich die Bayerische Erdmessungskommission doch entschliessen musste, für das dritte Nivellement so viel aufzuwenden, dass die Gesamtkosten der dreifachen

Nivellierung denen zweier ganz gesonderten Präzisionsnivelements gleich kamen.

Auf Grund der nun einmal bestehenden Thatsache muss ich hier leider über einige Verbesserungen der in meinen Mitteilungen II und III enthaltenen Messungs-Ergebnisse und der aus ihnen gezogenen Schlussfolgerungen berichten. So schwer mir dieses der geehrten Leser dieses Nachtrages wegen fällt, so gereicht es mir doch andererseits zu grosser Befriedigung, dass durch die notwendig gewordene Aenderung einiger früherer Angaben die Uebereinstimmung zwischen meiner Theorie der terrestrischen Strahlenbrechung und den faktischen Refraktionswerten sich wesentlich erhöht, und zwar in dem Sinne, wie ich dieses schon in der dritten Mitteilung vom Jahre 1888 auf Seite 21 (Abhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. XVI, Seite 537) bei Besprechung des hypothetischen Falles, dass der Höhenunterschied HK um 2 m grösser wäre, als er 1881 gefunden wurde, im Voraus angedeutet habe. Hätte ich doch damals die Vollendung meiner Abhandlung bis nach der Ausführung des dritten Nivelements verschoben!

Verfolgt man nun den Einfluss des in der Gesamthöhe HK bestehenden Fehlers von 1,6364 m schrittweise, so ergeben sich zunächst nachstehende Aenderungen:

1. Die richtigen Meereshöhen der Instrumentenaxen betragen im Jahre 1881:

für Höhensteig (H) unverändert:	484,000 m
„ Irschenberg (I) unverändert:	753,626 „
„ Kampenwand (K) verbessert:	1565,968 „

Die Höhenunterschiede der Instrumentenaxen waren mithin damals:

für HI unverändert:	$x_1 = 269,626$ m; $\log x_1 = 2,4307618$
„ HK verbessert:	$x_2 = 1081,968$ „; $\log x_2 = 3,0342144$
„ IK verbessert:	$x_3 = 812,342$ „; $\log x_3 = 2,9097389$

2. Die wahren Zenitdistanzen in den einzelnen Vertikalschnitten (II, Seite 10) berechneten sich mit Rücksicht auf den Fehler 1,6364 m wie folgt:

In $H - I$ war $Z = 89^{\circ} 10' 52'',69$
$I - H$ 90 58 23 ,93
$H - K$ 87 3 46 ,91
$K - H$ 93 7 13 ,89
$I - K$ 88 47 8 ,74
$K - I$ 91 31 10 ,34

Als Mittelwerte der beobachteten Refraktionen (II, Seite 35 und 36) ergeben sich aus diesen verbesserten Zenitdistanzen nunmehr folgende:

a) zwischen H und K , und zwar

$$\text{in } H: 76'',7 - 16'',7 = 60'',0$$

$$\text{in } K: 35,0 + 16,7 = 51,7$$

$$\text{im Mittel beobachtet: } 55,9$$

b) zwischen I und K , und zwar

$$\text{in } I: 95'',8 - 10'',0 = 85'',8$$

$$\text{in } K: 71,4 + 10,0 = 81,4$$

$$\text{im Mittel beobachtet: } 83,6$$

Ein Blick auf die Ergebnisse in den einzelnen Stationen zeigt sofort, dass nunmehr die Mittel der beobachteten Refraktionen für die obere und untere Station erheblich besser übereinstimmen als früher, und dass, den Anforderungen der Theorie entsprechend, auch jetzt noch die auf den unteren Stationen beobachteten Refraktionen etwas grösser sind, als die auf den oberen.

3. Die aus den Ablesungen an den meteorologischen Instrumenten nach der Formel

$$r = v\varphi \left\{ 1 - 2y + \left(2 + \frac{p}{3}y^2 \right) - \dots \right\}$$

theoretisch berechneten Refraktionen werden durch den Fehler der geometrischen Höhenmessung nicht beeinflusst; es bleibt nach wie vor in Uebereinstimmung mit Mitteilung III (Seite 6, bzw. 522) das Mittel derselben:

a) für $H - K = 55'',8$ und b) für $I - K = 90'',8$

so dass also durch den mehrfach genannten Fehler in der Höhenmessung die bemerkenswert gute Uebereinstimmung zwischen beobachteter und

berechneter Refraktion, besonders für die Seite $H - K$ nicht gestört wird. Da übrigens bei gegenseitigen, zum Zwecke von Refraktionsbestimmungen angestellten Zenitdistanzmessungen, wie leicht ersichtlich, der Einfluss eines nicht zu grossen Fehlers im Höhenunterschied der beiden Beobachtungsorte sich in den beiden Punkten stets in gleicher Grösse, aber im entgegengesetzten Sinne geltend macht, so können die mittleren Ergebnisse gegenseitiger Beobachtungen von solchen Fehlern überhaupt nicht beeinflusst werden.

4. Die eben erwähnte gute Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Refraktionen geht, wie früher, zum Teil wieder verloren, wenn die ersteren wegen der in den drei Stationen stattfindenden Lotabweichungen und Fernrohrbiegungen verbessert werden. Die Beträge der in den sechs Vertikalschnitten dem Normalpunkt der Bayerischen Landesvermessung gegenüber stattfindenden Lotabweichungen sind bereits in der III. Mitteilung (Seite 9, bzw. S. 525) nach der damaligen vorläufigen Reduktion der einschlägigen astronomischen Beobachtungen zusammengestellt. Die inzwischen erfolgte Schlussreduktion dieser Beobachtungen ergab nachstehende endgiltige, gegen früher etwas veränderte Werte:

	für H	in der Richtung	$H - I$	den Wert	$\lambda = + 0",89$
	" "	" "	$H - K$	" "	$\lambda = - 5",08$
	" I	" "	$I - H$	" "	$\lambda = + 5",74$
	" "	" "	$I - K$	" "	$\lambda = + 1",82$
	" K	" "	$K - I$	" "	$\lambda = + 4",27$
	" "	" "	$K - H$	" "	$\lambda = + 8",74$

Die Biegung des Fernrohrs für die im Jahre 1885 zwischen H und K angestellten Refraktionsbeobachtungen bleibt unverändert und es beträgt somit für diese Beobachtungen die Gesamtverbesserung der beobachteten Refraktionen

$$\text{in } H: + 5",08 - 5",15 = - 0",07$$

$$\text{in } K: - 8",74 - 4",21 = - 12",95$$

In der III. Mitteilung sind zunächst noch die auf Seite 14 (bzw. Seite 530) angegebenen wahren (ellipsoidischen) Zenitdistanzen für die

Refraktionsbeobachtungen vom Jahre 1885 zu berichtigen. Es ist nämlich für:

$$H - K \text{ (Heliotrop)} \quad Z_0 = 87^\circ 3' 46",91 + 12",41 = 87^\circ 3' 59",32$$

$$H - K \text{ (Signaltafel)} \quad Z_0 = 87 \ 3 \ 46 \ ,91 - 7 \ ,26 = 87 \ 3 \ 39 \ ,65$$

$$K - H \text{ (Heliotrop)} \quad Z_0 = 93 \ 7 \ 13 \ ,89 + 9 \ ,28 = 93 \ 7 \ 23 \ ,17$$

Demgemäss müssen auch die Mittel der beobachteten Refraktionen (III, Seite 17, bezw. Seite 533) um $+16",7$ verbessert werden, so dass man als Mittel der beobachteten Refraktionen erhält

$$\text{in } H \text{ (nach } K\text{): } 69",0 - 16",7 = 52",3$$

$$\text{in } K \text{ (nach } H\text{): } 36 \ ,6 + 16 \ ,7 = 53 \ ,3$$

Die Mittel der berechneten Refraktionen mit $55",3$ und bezw. $56",0$ bleiben auch hier unverändert, und es ist auch hier die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung sofort ersichtlich.

5. Nach den vorstehend mitgetheilten Zahlen wird nunmehr die Summe der Verbesserungen der im Jahre 1885 gemessenen Zenitdistanzen wegen Biegung des Fernrohrs und wegen Lotabweichung für $H - K = +0",07$ (früher $+2",92$) und für $K - H = +12",95$ (früher $+11",60$). Die aus diesen Summen entspringenden Verbesserungen der trigonometrisch bestimmten Höhe betragen somit jetzt für $H - K: -0,007$ m und für $K - H: -1,285$ m. Hiezu kommt nunmehr die weitere Verbesserung wegen des Fehlers in der geometrischen Höhenmessung mit $1,636$ m, welche für die Differenzen

nivellierte minus trigonometrisch bestimmte Höhe

das Vorzeichen $+$ erhält für die Messungen in H und $-$ für jene in K .

Berechnet man für die im Jahre 1885 in H und K angestellten Refraktionsbeobachtungen die Mittel der sämtlichen aus denselben erhaltenen Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen gegen die nivellierte (aus Mitteilung III, Tafeln 1 A und 2 A, Seite 46 und 49, bezw. Seite 562 und 565), so folgt für den Vertikalschnitt

$$H - K: \Delta x' = -0,046 \text{ m und für } K - H: \Delta x' = +2,595 \text{ m.}$$

Diese Mittel an den obenstehenden Verbesserungen angebracht, geben nunmehr die verbesserten Mittel

für $H - K$:	für $K - H$:
Mittel aller $\Delta x' = - 0,046$ m	+ 2,595 m
Nivellierfehler = + 1,636 m	- 1,636 m
$(\Delta x) = + 1,590$ m	+ 0,959 m
Korrektion für Lot- ablenkung u. Biegung + 0,007 m	+ 1,285 m
$\Delta x = + 1,597$ m	+ 2,244 m

Wir haben nunmehr die auffallende Erscheinung, dass die verbesserten Höhendifferenzen Δx (welche bekanntlich, wenn der Höhenunterschied von unten nach oben positiv genommen wird, für $H - K$ „nivellierte minus trigonometrisch bestimmte Höhe“, für $K - H$ dagegen umgekehrt „trigonometrisch bestimmte minus nivellierte Höhe“ bedeuten) für die beiden Stationen von gleichem Vorzeichen und nahezu gleicher Grösse sich ergeben. Es ist also der verbesserte Höhenunterschied (h), wie er auf trigonometrischem Wege bestimmt wurde, auf der unteren Station um fast denselben Betrag kleiner, um den er auf der oberen Station grösser ist, als der nivellierte Höhenunterschied (H), d. h. es ist unten $+\Delta x = +H - h$ und oben $+\Delta x = -H - (-h) = +h - H$. Um diese Erscheinung zu erklären, kommt man zunächst auf die Vermutung, dass der nivellierte Höhenunterschied H beider Stationen einer weiteren Verbesserung bedürfe, welche davon herrühren könnte, dass das Geoid in der Richtung $H - K$ sich über das Ellipsoid um einen merkbaren Betrag erhebt (was ja an sich höchst wahrscheinlich ist), um den also der nivellierte Höhenunterschied gegen den der ellipsoidischen Oberfläche entsprechenden trigonometrisch bestimmten falsch erhalten wird. Aber eine hiedurch bedingte Verbesserung des nivellierten Höhenunterschieds H würde ebenso, wie eine aus irgendwelchen anderen Gründen notwendige, die Differenzen Δx nicht gleichzeitig zu Null machen, es würde vielmehr, wie man sich leicht überzeugt, die eine grösser und die andere kleiner werden. Dagegen würde Δx in beiden Fällen gleich Null sein, wenn die auf beiden Stationen gemessenen Zenitdistanzen um etwa 20" kleiner wären. Nachdem aber nunmehr die gemessenen Zenitdistanzen von den Fehlern, welche durch die Lotablenkung und die Fernrohrbiegung hervorgerufen wurden, befreit sind, könnten weitere Fehler dieser Zenitdistanzen, besonders in dem angegebenen Betrag, nur

dadurch veranlasst worden sein, dass während der Dauer der Messungen die Konstitution der Atmosphäre infolge der Bodenstrahlung nicht so beschaffen war, wie sie jede Refraktionstheorie voraussetzen muss, dass nämlich in beiden Fällen die untersten Luftschichten nicht die dichtesten waren. Der Einfluss eines solchen abnormen Luftzustandes ist aber bereits in der II. Mitteilung (Seite 42 ff.) besprochen worden. Auffallend bleibt aber die Uebereinstimmung der Messungsergebnisse von 1885 mit denen von 1881, welche unter diesen Gesichtspunkten nur durch die nicht gerade wahrscheinliche Annahme erklärt werden kann, dass der abnorme Zustand der Luft während der zeitlich so sehr auseinanderliegenden Beobachtungsperioden fast ganz derselbe gewesen sei. Allerdings ist zu bemerken, dass diese Perioden beide Male in die gleiche Jahreszeit fielen, nämlich 1880 in den August, 1885 in *H* in den Juli, in *K* in den August.

6. Schliesslich mag es gestattet sein, zu bemerken, dass sich der Fehler von 1,6364 m auch in den Höhenunterschieden zwischen den Stationen *H, K* und *I, K* geltend macht, welche aus den im Jahre 1881 gleichzeitig mit den Zenitdistanzmessungen auf den Punkten *H, I, K* angestellten Barometerbeobachtungen berechnet worden sind. Obwohl diese Höhenunterschiede nicht in den oben genannten „Mitteilungen“ enthalten sind, sondern in einer gesonderten von mir verfassten und in den Denkschriften unserer Akademie (Band XIV, 3. Abteilung Seite 113 u. ff.) gedruckten Abhandlung „Neue Beobachtungen über die tägliche Periode barometrisch bestimmter Höhen“, so habe ich es doch unterlassen zu dürfen geglaubt, hievon in der Ueberschrift gegenwärtigen Nachtrages etwas zu sagen. Das Mittel der in der eben genannten Schrift aufgeführten 340 Beobachtungen (gleichzeitigen Ablesungen am Barometer, Thermometer und Psychrometer) betrug damals

zwischen *H* und *K*: + 1,85 m und
 „ *K* und *I*: + 3,47 m.

Bringt man an beiden die Verbesserung wegen der Höhenmessungsfehler mit — 1,64 m an, so wird nunmehr das Mittel des barometrisch bestimmten Höhenunterschiedes

zwischen *H* und *K*: + 0,21 m und
 „ *K* und *I*: + 1,83 m.

Es stimmen also auch hier die neuen Mittel besser mit einander überein als früher, und es mag hierin ein weiterer Beweis für die Richtigkeit meiner Aufstellungen und Entwicklungen über die Konstitution der Atmosphäre, die Ursache der täglichen Perioden barometrisch und trigonometrisch bestimmter Höhen, sowie über die Theorie der astronomischen und der terrestrischen Strahlenbrechung gefunden werden.