BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1984

MÜNCHEN 1985

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Waring's Problem für analytische Funktionen

Von **Walter Hayman** in London

Sitzung vom 13. Januar 1984

Einführung. Das Waringsche Problem für natürliche Zahlen ist bekanntlich folgendes: Es sei x eine große natürliche Zahl. Wieweit ist es möglich, x als Summe von $n = G(k)$ k-ten Potenzen auszudrücken:

$$x = \sum_{j=1}^{n} y_j^k, \tag{1.1}$$

wo die y_j auch natürliche Zahlen sind? Die erste Lösung stammt von Hilbert [7]. Spätere und schärfere Resultate wurden von Hardy und Littlewood [5] und Vinogradov [12] erzielt. Es ist klar, daß auf alle Fälle $G(k) \geqq k + 1$ sein muß, denn dies folgt aus der Dichte der Potenzsummen in der Klasse der natürlichen Zahlen. Andererseits ist $G(k) \leq (2 + \varepsilon)\, k \log k$ für große k bekannt [12].

Ganz analog kann man die Fragen auch für andere Ringe stellen. Speziell Heilbronn [6, Problem 2.26, S. 16] warf das Problem auf, wenn x und die y_j ganze Funktionen sind. Ich betrachte allgemeiner die Klassen P der Polynome, E der ganzen Funktionen, R der rationalen Funktionen und M der meromorphen Funktionen in der Ebene. Es sei C eine von diesen Klassen. Dann sei $g_C(k)$ die kleinste natürliche Zahl n, so daß für jedes $x \in C$ die Gleichung (1.1) durch Funktionen $y_j \in C$ lösbar ist. Dies Problem ist von einer Reihe von Autoren zu verschiedenen Zeiten behandelt worden, die oft nicht von einander wußten. Deshalb scheint es mir nützlich, einmal das Bekannte zusammenzustellen in der Hoffnung, daß weitere Forscher sich für dies anziehende Problem interessieren werden.

2. *Positive Resultate.* Wir bemerken, daß für alle die obigen Klassen es genügt, unser Problem für die Funktion z zu lösen. Denn sei

$$z = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)^k, \tag{2.1}$$

wo $f_j(z)$ einer der drei Klassen, P, E und R angehört. Es sei ferner $f(z)$ eine Funktion aus derselben Klasse. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j\{f(z)\}^k.$$

Gehören nun f_j und f einer der Klassen P, E oder R an, so gilt dasselbe für die Funktion $f_j\{f(z)\}$, und somit ist unser Problem gelöst.

Im Falle M muß man dies Argument etwas abändern. Es seien die $f_j(z)$ in (2.1) meromorphe Funktionen und $f(z)$ eine weitere meromorphe Funktion. Dann können wir

$$f(z) = g(z)/h(z)^k$$

schreiben, wo $g(z)$ und $h(z)$ ganz sind. Es gilt dann

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n} \{f_j(g(z))\}^k, \qquad f(z) = \sum_{j=1}^{n} \{f_j(g(z))/h(z)\}^k.$$

Da die Funktionen $f_j(g)/h$ in der Ebene meromorph sind, ist unser Problem auch für M gelöst. Hieraus folgt sofort

Satz 1. $g_M(k) \leqq g_R(k) \leqq g_P(k)$ *und* $g_M(k) \leqq g_E(k) \leqq g_P(k)$.

Denn für jede Klasse C genügt es (2.1) zu lösen, und wenn (2.1) in einer Unterklasse gelöst ist, dann auch in der ganzen Klasse. Es ist nicht klar im allgemeinen, ob $g_E(k)$ oder $g_R(k)$ größer ist.

Die folgenden unteren Schranken sind von einer Reihe verschiedener Autoren zu verschiedenen Zeiten formuliert worden. Sie folgen alle aus einer älteren Arbeit von H. Cartan [2]. Hierzu muß gesagt werden, daß damals das Waringsche Problem in obiger Form noch nicht formuliert war, so daß Cartan nicht explizit auf seine Lösung hinweisen konnte. Andererseits war die Arbeit von Cartan vielen späteren Autoren unbekannt. Ich bin Herrn Schiffman äußerst dankbar, daß er mich auf sie hingewiesen hat.

Satz 2. [Cartan]. *Es gelten die folgenden unteren Schranken.*

(2.2) $g_P(k) > 1/2 + \sqrt{(k + 1/4)}, \quad k \geqq 3$

(2.3) $g_E(k) \geqq 1/2 + \sqrt{(k + 1/4)}, \quad k \geq 2$

(2.4) $g_R(k) > \sqrt{(k + 1)}, \quad k \geqq 2$

(2.5) $g_M(k) \geqq \sqrt{(k + 1)}, \quad k \geqq 2.$

Die Schranken in (2.2) bis (2.5) unterscheiden sich durch weniger als 1/2. Also erhält man für etwa die Hälfte aller k genau dasselbe Resultat aus ihnen.

Wir werden später sehen, daß jedenfalls für $k = 2, 3$ die Grenzen (2.3) bis (2.5) alle scharf sind. Für $k = 2$ ist (2.2) falsch. Denn

$$z = \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \left(i\frac{z-1}{2}\right)^2,$$

also ist $g_P(z) = 2$. Es ist nicht anzunehmen, daß (2.2) bis (2.5) auch für große k scharf bleiben. Wie wir später sehen werden, haben alle oberen Schranken die Größenordnung k. Bis jetzt widerspricht nichts der Vermutung $g_P(k) = k$. Jedenfalls wäre eine Verschärfung des Satzes 2 selbst in irgendeinem Spezialfall sehr zu begrüßen. Eine explizite Formulierung von (2.2) findet sich bei Newman und Slater [10], (2.3) ist auch eine direkte Folge von einer Ungleichung von Nevanlinna [9, Ss. 113–121] und (2.4) findet sich explizit in Green [3]. Für den Hinweis auf die Arbeit von Newman und Slater bin ich Richard Hall verpflichtet. Herr Schiffman machte mich auch auf die Arbeiten von Green und Cartan und insbesondere auf die Folgerung (2.5) aus Cartan's Arbeit aufmerksam.

3. *Cartan's Satz und Beweis von Satz 2.* Wir beschreiben jetzt den allgemeinen Satz von Cartan, der Satz 2 zur Folge hat.

Satz 3. Cartan [2]. *Es sei* $p \geqq 2$ *und es seien* $F_1(z)$ *bis* $F_p(z)$ *ganze Funktionen, die über den komplexen Konstanten linear unabhängig sind. Ferner sei*

$$F_{p+1}(z) = \sum_{\nu=1}^{p} F_\nu(z). \tag{3.1}$$

Wir nehmen an, daß $F_1(z)$ *bis* $F_p(z)$ *für keinen Wert* z *alle gleichzeitig verschwinden und setzen*

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{1\leqq\nu\leqq p} \log|F_\nu(re^{i\theta})|d\theta - \sup_{1\leqq\nu\leqq p} \log|F_\nu(o)|. \tag{3.2}$$

Es sei $n_\nu(r)$ *die Anzahl der Nullstellen von* $F_\nu(z)$ *in der Kreisscheibe* $|z|\leqq r$ *wobei eine Nullstelle der Ordnung* d *genau* $\min(d, p-1)$ *mal gezählt wird. Wir schreiben*

$$N_v(r) = \int_0^r \frac{n_v(t) - n_v(o)}{t}\,dt + n_v(o)\log r. \tag{3.3}$$

Dann gilt

$$T(r) \leqq \sum_{v=1}^{p+1} N_v(r) + S(r), \tag{3.4}$$

mit

$$S(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\Delta(re^{i\theta})|d\theta + O(1). \tag{3.5}$$

Hier ist $F_1 \cdot F_2 \ldots F_p \cdot \Delta$ *die Wronski-Determinante der Funktionen* F_1 *bis* F_p, *also*

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, 1 \\ F_1'/F_1, & F_2'/F_2, & \ldots, F_p'/F_p \\ F_1^{(p-1)}/F_1, & F_2^{(p-1)}/F_2, & \ldots, F_p^{(p-1)}/F_p \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

Folgerung 1. *Ist mindestens eine der Funktionen* F_v *transzendent, so gilt*

$$S(r) = O\{\log T(r) + \log r\},$$

wenn r außerhalb einer Menge von endlichem Maß gegen unendlich strebt.

Folgerung 2. *Sind alle die* $F_v(z)$ *Polynome, so folgt*

$$S(r) < -\tfrac{1}{2}p(p-1)\log r + O(1)$$

wenn $r \to \infty$.

Satz 3 mit Folgerung 1 stehen bei Cartan [2] explizit, und wir weisen den Leser auf den dort gegebenen Beweis hin. Die Folgerung 2 steht zwar nicht explizit bei Cartan, folgt aber sofort daraus, daß in der Determinante (3.6) jedes Element der k-ten Reihe eine Nullstelle der Ordnung mindestens $k-1$ im Punkte Unendlich hat. Somit hat $\Delta(z)$ im Punkte Unendlich eine Nullstelle der Ordnung mindestens

$$\sum_{k=1}^{p}(k-1) = \tfrac{1}{2}p(p-1).$$

Wir schreiten nun zum Beweis von (2.2). Es seien f_1 bis f_n Polynome, die die Gleichung (2.1) erfüllen mit $k \geqq 3$. Wir nehmen an, daß n so klein wie möglich ist und setzen $p = n$,

$$F_v(z) = f_v(z)^k,\ v = 1 \text{ bis } p,\ F_{p+1} = z$$

Dann sind F_1 bis F_p linear unabhängig, da wir sonst eine von diesen Funktionen durch eine Linearkombination der anderen ersetzen und somit n verkleinern könnten. Auch haben F_1 bis F_p keine gemeinsame Nullstelle z_0, denn sonst hätte z eine Nullstelle der Ordnung mindestens k bei z_0. Somit können wir den Satz 3 anwenden. Offenbar haben alle Nullstellen von $F_\nu(z)$, $1 \leqq \nu \leqq p$, die Ordnung mindestens gleich k. Hieraus und aus der Jensenschen Formel folgt

$$N_\nu(r) \leqq \frac{p-1}{k} T(r) + O(1), \qquad 1 \leqq \nu \leqq p. \tag{3.7}$$

$$N_{p+1}(r) \leqq \log r + O(1). \tag{3.8}$$

Also gilt

$$\sum_{\nu=1}^{p+1} N_\nu(r) + S(r) \leqq \frac{p(p-1)}{k} T(r) + \left(1 - \frac{p(p-1)}{2}\right) \log r + O(1).$$

Also

$$\left(1 - \frac{p(p-1)}{k}\right) T(r) \leqq \left(1 - \frac{p(p-1)}{2}\right) \log r + O(1). \tag{3.9}$$

Ist $p(p-1) = k \geqq 3$, so ist die linke Seite Null und die rechte negativ für große Werte von r und wir erhalten einen Widerspruch. (Wir bemerken, daß für $k = p = 2$ kein Widerspruch besteht.) Ist $p(p-1) < k$, so bemerken wir, daß aus (3.2)

$$T(r) > k \log r + O(1)$$

folgt. So ist die linke Seite in (3.9) mindestens gleich $\log r + O(1)$ und daher größer als die rechte Seite. Dieser Widerspruch beweist (2.2). Wir sehen ferner, daß wir in dieser Beweisformulierung die Funktion z auf der linken Seite von (2.1) durch ein beliebiges Polynom des Grades $d < k - \frac{1}{2}n(n-1)$ ersetzen dürfen. So erhalten wir einen Satz von Newman und Slater [10, S. 481].

Wir beweisen jetzt (2.3) und nehmen an, daß mindestens eine der Funktionen $f_j(z)$ transzendent ist, da sonst das Resultat aus (2.2) folgt. Dann gilt Folgerung 1 und wir erhalten aus (3.4), (3.7) und (3.8)

$$\left(1 - \frac{p(p-1)}{k}\right) T(r) = o\{T(r)\},$$

wenn r außerhalb einer Menge von endlichem Maß gegen unendlich strebt. Also folgt $p\,(p-1) \geqq k$, und dies gibt (2.3).

Wie schon oben bemerkt wurde, hätte man (2.2) und (2.3) auch schon aus Nevanlinna's Ungleichungen ableiten können. Bei (2.4) und (2.5) scheint das schwieriger und die Cartansche Methode zeigt ihre volle Kraft. Es seien die Funktionen $f_j(z)$ in (2.1) meromorph. Sie können wieder keine gemeinsamen Nullstellen haben. Wir schreiben sie deshalb in der Form

$$f_j(z) = \frac{g_j(z)}{g(z)}$$

wo $g_j(z)$, $g(z)$ ganze Funktionen sind und g_1 bis g_n keine gemeinsamen Nullstellen haben. Dann erhält die Gleichung (2.1) die Form

$$z\,g(z)^k = \sum_{j=1}^{n} g_j(z)^k. \tag{3.10}$$

Wir setzen nun wieder $n = p$

$$F_j(z) = g_j(z)^k,\ j = 1 \text{ bis } p,\ F_{p+1}(z) = z\,g(z)^k. \tag{3.11}$$

Es seien erst alle f_j rational und so alle F_j Polynome. Dann erhalten wir

$$N_\nu(r) \leqq \frac{p-1}{k}\,T(r) + O(1),\ 1 \leqq \nu \leqq p, \tag{3.12}$$

$$N_{p+1}(r) \leqq \frac{p-1}{k}\,T(r) + \left(1 - \frac{p-1}{k}\right)\log r, \tag{3.13}$$

da alle Nullstellen der Funktion F_j, außer der Nullstelle von F_{p+1} bei $z = 0$, die Ordnung mindestens k haben. Also gilt nach (3.4) und Folgerung 2

$$T(r) \leqq \frac{(p+1)(p-1)}{k}\,T(r) + \left\{1 - \frac{p-1}{k} - \frac{1}{2}\,p(p-1)\right\}\log r + O(1).$$

Ist $(p+1)(p-1) = k \geqq 2$, so ist

$$1 - \frac{p-1}{k} - \frac{1}{2}\,p(p-1) < 0,$$

und wir erhalten einen Widerspruch. Ist $(p+1)(p-1) < k$, so hat $T(r)$ mindestens die Größenordnung $k \log r$, und wir erhalten einen Widerspruch aus

$$\{k-(p+1)(p-1)\}\frac{T(r)}{k} \leqq \left\{1-\frac{p-1}{k}-\frac{1}{2}p(p-1)\right\}\log r + O(1).$$

So gilt in allen Fällen $p^2-1 > k$, mit $p = g_R(k)$ und hieraus folgt (2.4). Auch in diesem Fall sehen wir, daß wir in (2.1) z durch ein Polynom P vom Grade d mit

$$1 \leqq d < k\,(k+1-\tfrac{1}{2}n\,(n+1))/(k+1-n)$$

ersetzen dürfen oder durch eine rationale Funktion der Form P/Q^k. Denn in diesem Fall ersetzen wir (3.13) durch

$$N_{p+1}(r) \leqq \frac{p-1}{k}\,T(r) + d\left(1-\frac{p-1}{k}\right)\log r.$$

Zuletzt beweisen wir (2.5). Wir dürfen annehmen, daß mindestens eine der Funktionen $f_j(z)$ transzendent ist und benutzen Folgerung 1. Wir benutzen wieder (3.10) bis (3.13) und erhalten außerhalb einer Menge von endlichem Maß

$$(1-\frac{p^2-1}{k}+o(1))\;T(r) \leqq 0,$$

und dies ergibt (2.5).

4. *Darstellung von 1.* Ein verwandtes Problem, mit dem sich auch Nevanlinna und Cartan beschäftigten, behandelt die Darstellung

$$1 = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)^k, \tag{4.1}$$

wo die $f_j(z)$ einer Klasse C angehören und nicht konstant sind. Wenn $G_C(k)$ den kleinsten Wert von n bedeutet, so kann man den Formalismus von Cartan genau so benutzen wie im Falle von $g_C(k)$. Hier kann man sogar $C = P$ und $k = 2$ dazufügen. Daraus folgt

Satz 4. Es gelten für $k \geqq 2$

$$G_P(k) > 1/2 + \sqrt{(k+1/4)}, \tag{4.2}$$

$$G_E(k) \geqq 1/2 + \sqrt{(k+1/4)}, \tag{4.3}$$

$$G_R(k) > \sqrt{(k+1)}, \tag{4.4}$$

$$G_M(k) \geqq \sqrt{(k+1)}. \tag{4.5}$$

Das Analogon von Satz 1 bleibt offenbar auch noch richtig.

Ferner erhalten wir

Satz 5. Es gelten für $C = E$, M oder R und $k \geqq 2$, $G_C(k) \leqq g_C(k)$.

Es gelte (2.1) mit $n = g_C(k)$. Wir schreiben dies in der Form

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \{z^{-1/k} f_j(z)\}^k.$$

Ist $C = E$, so setzen wir $z = e^{-\xi}$ und erhalten eine Darstellung der Form (4.1). Ist $C = M$ oder R, so setzen wir $z = \xi^k$ und erhalten wieder eine Darstellung der gewünschten Form. Für $C = P$ ist der Satz 5 nicht mehr richtig.

Satz 6. $g_P(2) = 2$, $G_P(2) = 3$, und für $C = E$, R oder M ist $G_C(2) = g_C(2) = 2$.

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{1+z}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1-z}{\sqrt{2}}\right)^2 + (iz)^2 = 1$$

folgt $G_P(2) \leqq 3$. Offenbar ist $G_P(2) > 1$. Es sei $G_P(2) = 2$. Dann existieren Polynome f_1, f_2 von positivem Grad, so daß

$$f_1^2 + f_2^2 = (f_1 + if_2)(f_1 - if_2) = 1.$$

Hieraus folgt, daß $f_1 \mp if_2$ konstant, also auch f_1, f_2 konstant sind. Aus diesem Widerspruch folgt $G_P(2) = 3$.

Andererseits gilt $g_P(2) > 1$ und aus

$$z = \left(\frac{1+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-z}{2i}\right)^2$$

folgt $g_P(2) \leqq 2$. Nun folgen aus den Sätzen 1 und 5 für $C = E$, R oder M $g_C(2) = G_C(2) = 2$. Somit ist Satz 6 bewiesen.

5. *Obere Grenzen für G.* Wie Newman und Slater [10] bemerken, gibt Satz 4 die richtige Größenordnung für die $G_C(k)$. Dies folgt aus

Satz 7. Molluzzo [8]. $G_P(k) \leqq (4k+1)^{1/2}$.

Also liegen alle die Quantitäten $G_C(k)$ zwischen $(k+1)^{1/2}$ und $(4k+1)^{1/2}$. Wir zitieren das Beispiel von Molluzzo. Es sei d die

natürliche Zahl, für die $n = d + [k/d]$ minimal ist. Hier ist wie üblich $[x]$ der ganze Teil von x. Wie Newman und Slater [10] bemerken, ist $n = [(4k + 1)^{1/2}]$.

Wir schreiben nun $\omega_j = \exp(2\pi ij/d)$ und erhalten

$$(5.1)\quad \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}(1 + \omega_j x^k)^k = 1 + a_1 x^{dk} + a_2 x^{2dk} + \ldots + a_{[k/d]}\, x^{dk[k/d]},$$

wo die a_ν natürliche Zahlen sind. Diese Identität drückt also 1 als die Summe von $d + [k/d] = n$ k-ten Potenzen von Polynomen aus, und Satz 7 ist bewiesen.

Hieraus folgt insbesondere

Satz 8. $G_P(3) = G_R(3) = G_E(3) = 3$ *aber* $G_M(3) = 2$.

Aus Satz 4 folgt, für $C = P$, E oder R, $G_C(3) > 2$. Andererseits folgt aus Satz 7 $G_C(3) \leqq G_P(3) \leqq \sqrt{13} < 4$, also $G_C(3) = 3$. Baker [1] studierte die Gleichung

$$(5.2)\qquad f_1(z)^3 + f_2(z)^3 = 1$$

und zeigte, daß sie tatsächlich meromorphe Lösungen hat. Ferner fand Baker alle solchen Lösungen. Das einfachste Beispiel ist eine elliptische Funktion $\phi = f_1^3$, für welche die Gleichungen $\phi = 0, 1, \infty$ alle nur dreifache Wurzeln besitzen. Dann sind $f_1 = \phi^{1/3}$ und $f_2 = (1 - \phi)^{1/3}$ auch meromorph. Hieraus folgt $G_M(3) \leqq 2$, also $G_M(3) = 2$, und Satz 8 ist bewiesen.

Die Frage des Fermatschen Satzes, also die Möglichkeit

$$(5.3)\qquad f^k + g^k = h^k$$

zu lösen, wurde von Newman und Slater [10] aufgeworfen. Dieses Problem war aber bereits von Baker [1] gelöst worden. Setzen wir $f_1 = f/h$, $f_2 = g/h$ in (5.2), wo f, g, h ganze Funktionen sind, so erhalten wir eine Lösung von (5.3) in ganzen Funktionen im Falle $k = 3$. Nach Satz 4 ist eine Lösung von (5.3) unmöglich für $k > 3$ wenn f/h und g/h meromorph sind und für $k > 2$, wenn f/h und g/h rational sind. Die Gleichung

$$(1 - z^2)^2 + (2z)^2 = (1 + z^2)^2$$

zeigt, daß für $k = 2$ (5.3) polynomial gelöst werden kann.

Wie Newman und Slater [10] bemerken, können wir für die meisten k die Grenze von Molluzzo's Satz 7 noch um eins vermindern, wenn wir P durch die Klassen E, R oder M ersetzen.

Satz 9. Es gilt für $C = E$, R oder M

$$G_C(k) \leqq (4k + 5)^{1/2} - 1. \tag{5.4}$$

Insbesondere ist $G_C(4) = 3$, $G_C(6) = 3$ oder 4. Ferner ist $G_P(4) = 3$ oder 4, $G_P(6) = 4$ oder 5, und für $C = P$, E, R oder M ist $G_C(5) = 3$ oder 4.

Wir benutzen die Identität [10]

$$\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\omega_j(1+\omega_j x^k)^k}{x^{(d-1)k}} = b_1 + b_2 x^{dk} + \ldots + b_{[(k+1)/d]-1}x^{dk([(k+1)/d]-1)} \tag{5.5}$$

Aus ihr folgt wie bei dem Beweis von Satz 7

$$1 + G_C(k) \leqq \inf_d \{d + [(k+1)/d]\} = [(4(k+1)+1)^{1/2}],$$

und dies ist (5.4) für $C = R$ oder M. Für $G_E(k)$ erhalten wir dieselbe obere Grenze, indem wir in (5.5) $x = e^{\xi}$ setzen. Für $k = 4$, 6 erhalten wir die oberen Grenzen 3, 4 statt bzw. 4, 5 aus Satz 7. Aus Satz 4 folgt $G_M(k) \geqq 3$, für $k = 4$, 5 6 und $G_P(6) \geqq 4$, und dies ergibt die Schranken in Satz 9.

Wir bemerken, daß die Identität (5.5) mit $k = 4$, $d = 2$ auch von Green [3] angegeben worden ist. Aus den Sätzen 6, 8, 9 folgen die Werte von $G_P(k)$ für $k = 2$, 3 und für $C = E$, R, M die Werte von $G_C(k)$ für $k = 2$, 3, 4. Die anderen Werte von $G_C(k)$ sind bis heute unbekannt.

6. *Obere Grenzen für g.* Die Situation für g ist viel unbefriedigender als für G. Obwohl die unteren Grenzen aus den Sätzen 2 und 4 dieselben sind, ist kein Analogon der Molluzzo-Identität (5.1) bekannt. Wir haben nur [6, S. 16]

Satz 10. $g_P(k) \leqq k$, $k \geqq 2$.

Wir setzen $\alpha = exp(2\pi i/k^2)$ und

$$f_\nu(z) = k^{-2/k}\alpha^{-\nu}(1 + \alpha^{k\nu}z), \quad \nu = 1, 2, \ldots, k.$$

Dann gilt

$$\sum_{\nu=1}^{k} f_\nu(z)^k = z, \tag{6.1}$$

und somit ist Satz 10 bewiesen. Eine andere Lösung von (6.1) mit reellen Polynomen f_ν findet sich auch bei Newman und Slater [10]. Es folgt aus Satz 6, daß für $C = P, E, R$ und M, $g_C(2) = 2$ gilt. Ferner erhalten wir

Satz 11. Es gelten für $C = P$, E oder R, $g_C(3) = 3$, aber $g_M(3) = 2$.
Eine Lösung in M von

$$f_1^3 + f_2^3 = z$$

analog der Bakerschen Lösung von (5.2) ist neulich von Gross und Osgood [4] gegeben worden. Also ist auch $g_M(3) = 2$. Andererseits folgt aus Satz 2, daß für $C = P$, E oder R, $g_C(3) > 2$ gilt. Nach Satz 10 ist für diese Klassen $g_C(3) \leqq g_P(3) \leqq 3$. Also $g_C(3) = 3$. Somit ist Satz 11 bewiesen. Die Werte von $g_C(k)$ für $k > 3$ sind noch unbekannt. Zum Beispiel folgt aus den Sätzen 2 und 10 nur $g_C(4) = 3$ oder 4.

Für M und R können wir die obere Grenze von Satz 10 noch etwas verschärfen wenn $k = 5$ oder $k > 6$.

Satz 12. Es gilt $g_R(k) \leqq \frac{1}{2}k + a$. Hier ist $a = 3/2$, wenn k ungerade ist, $a = 3$ wenn k durch 2 aber nicht durch 4 teilbar ist, und $a = 2$, wenn k durch 4 teilbar ist. Insbesondere folgt

$$g_M(5) = 3 \text{ oder } 4,\ g_R(5) = 3 \text{ oder } 4.$$

Um Satz 12 zu beweisen, brauchen wir eine zu (5.5) analoge Identität. Wir wählen natürliche Zahlen p, q, l und m, die die Bedingungen

$$q < p,\ p + q = k \text{ und } pl - mq = 1 \tag{6.2}$$

erfüllen, und setzen

$$\omega = \exp\{2\pi i/(p+1)\}.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{\nu=0}^{p} \omega^{-q\nu}(z^l + \omega^\nu z^{-m})^k = Az,\ A = (p+1)\binom{k}{p}. \tag{6.3}$$

Tatsächlich folgt aus (6.2), daß auf der linken Seite von (6.3) die Koeffizienten von allen Potenzen $z^{l(k-j)-mj}$ außer dem für $j = q$, also dem Koeffizienten von z, verschwinden. Also erhalten wir durch (6.3) die Darstellung von z als Summe von $p + 1$ k-ten Potenzen von rationalen Funktionen. Daher gilt

$$g_R(k) \leqq p + 1.$$

Es genügt also zu zeigen, daß wir in allen Fällen die Bedingungen (6.2) mit $p = \frac{1}{2}k + a - 1$ erfüllen können.

Es sei erst k ungerade. Dann setzen wir

$$p = \tfrac{1}{2}(k+1),\ q = \tfrac{1}{2}(k-1),\ l = \tfrac{1}{2}(k+1),\ m = \tfrac{1}{2}(k+3);$$

also ist $a = 3/2$ in diesem Falle.

Ist k durch 4 teilbar, so wählen wir

$$p = \tfrac{1}{2}k + 1,\ q = \tfrac{1}{2}k - 1,\ l = \tfrac{1}{4}k,\ m = \tfrac{1}{4}k + 1.$$

Also in diesem Fall ist $a = 2$.

Ist k durch 2 aber nicht durch 4 teilbar, so ist diese Wahl von p nicht möglich, denn es wären dann p, q beide gerade. Wir setzen in diesem Fall

$$p = \tfrac{1}{2}k + 2,\ q = \tfrac{1}{2}k - 2,\ k > 2.$$

Dann sind p, q beide ungerade und teilerfremd, und wir können die Gleichung $pl - mq = 1$ lösen. Wenn zum Beispiel $k = 8d + 2$ ist, setzen wir $l = d$, $m = d + 1$. Ist $k = 8d - 2$, setzen wir $l = 3d - 2$, $m = 3d + 1$. Die Bedingungen (6.2) sind erfüllt und $a = 3$ in diesem Fall. Hiermit ist der Satz 12 bewiesen.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß Toda [1] die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z)^{k_i} = 1 \text{ oder } z$$

untersucht hat, wo die k_i natürliche Zahlen sind. Er bewies, daß, wenn eine nicht triviale Lösung für ganze Funktionen $f_i(z)$, von denen mindestens eine transzendent ist, existiert, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \geqq \frac{1}{n-1}. \tag{6.4}$$

Dies folgt auch sofort aus dem Cartanschen Satz 3, wie Cartan [2, S. 19] selber bemerkte. Sind die $f_i(z)$ Polynome, so kann man in (6.4) $\geqq$ durch $>$ ersetzen. Diese Resultate enthalten (2.2) und (2.3) als Spezialfälle.

Erlaubt man meromorphe Funktionen $f_i(z)$, so ist Satz 3 nicht so leicht anwendbar, aber die ursprüngliche Methode von Nevanlinna [9] gibt in diesem Fall immerhin

$$\frac{1}{k_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{k_i} \geqq \frac{1}{n-1},$$

wo k_1 der kleinste der Exponenten k_i ist.

Bibliographie

1. I. N. Baker, On a class of meromorphic functions, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 819–822.
2. H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données.
   Mathematica Cluj. 7 (1933), 5–29.
3. M. L. Green, Some Picard Theorems for holomorphic maps to algebraic varieties. Amer. J. of Math. 97 (1975), 43–75.
4. F. Gross and C. F. Osgood, On the functional equation $f^n + g^n = h^n$ and a new approach to a more general class of functional equations. Indian Math. J. 23 (1981), 17–39.
5. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of "Partitio Numerorum": IV. The singular series in Waring's Problem and the value of the number $G(k)$.
   Math. Zeit. 12 (1922), 161–188.
6. W. K. Hayman, Research problems in function theory, Athlone Press, University of London 1964.
7. D. Hilbert, Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem) Math. Ann. 67 (1909), 281–300.
8. J. Molluzzo, Doctoral Thesis, Yeshiva University 1972.
9. R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, Gauthier-Villars 1929.
10. D. J. Newman and Morton Slater, Waring's problem for the ring of polynomials. J. of Number Theory 11 (1979), 477–487.
11. N. Toda, On the functional equation $\sum_{i=0}^{p} a_i f_i^{n_i} = 1$ or z, Tohoku Math. J. 23 (1971), 289–299.
12. I. M. Vinogradov, On a upper bound for $G(n)$ (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 23 (1959), 637–642.