BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1971

MÜNCHEN 1972

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkungen zu Sätzen von Herrn S. B. Jackson über ebene Bogen von der zyklischen Ordnung Drei

Von Otto Haupt und Hermann Künneth in Erlangen

Einleitung

I. In einer kürzlich erschienenen Note (Jackson [1])* bezeichnet Herr S. B. Jackson als Nesting-Eigenschaft der Schmiegkreise (general osculating circles) eines ebenen Bogens A die folgende: Es seien q_i, $i = 1, 2, 3$, beliebige (verschiedene) Punkte von A, die so numeriert seien, daß q_2 auf A zwischen q_1 und q_3 liegt; ferner sei C_i ein beliebiger Schmiegkreis in q_i an A. Dann liegen C_1 und C_3 auf verschiedenen Seiten von C_2 (sind also insbesondere fremd sowohl untereinander als zu C_2). Weiter wird (vgl. Jackson [1], S. 3) der Bogen A als von der lokalen zyklischen Ordnung Drei bezeichnet, wenn jeder Punkt von A eine Umgebung auf A besitzt, welche von der zyklischen Ordnung Drei ist (d. h. welche von jedem Kreis in höchstens drei Punkten getroffen wird). – Herr Jackson zeigt nun ([1], Theorem 1, S. 3 und Theorem 3, S. 10):

Es besitzt A die lokale zyklische Ordnung Drei genau dann, wenn die Schmiegkreise an A die Nesting-Eigenschaften besitzen.

Außerdem zeigt Herr Jackson ([1], Theorem 2, S. 8):

Es besitzt A die lokale zyklische Ordnung Drei, wenn Erstens A in jedem inneren Punkt x von A von jedem Schmiegkreis an A in x geschnitten wird und wenn Zweitens für keinen der Endpunkte e von A das System der Schmiegkreise an A in e die ganze Ebene überdeckt.

II. Zweck der folgenden Zeilen ist der Hinweis auf eine verwandte Kennzeichnung (vgl. weiter unten Ziff. III., sowie im Text Nr. 2.2. und Nr. 2.3.) der Bogen von der lokalen Ordnung

---

* Ziffern in eckiger Klammer im Text, weisen auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Note hin.

k bezüglich der Systeme $\mathfrak{k}$ (in einem ebenen Grundbereich) von sogenannten Ordnungscharakteristiken (OCh) mit einer beliebigen Grundzahl $k = k(\mathfrak{k}) \geq 2$ (vgl. z. B. H.-K. [1], Nr. 1.1.1. und Nr. 1.1.3.). Für den Fall $k = 3$ existieren derartige Systeme $\mathfrak{k}$, die vom System der Kreise verschieden sind (vgl. z. B. Ewald [1] und die dort zitierte Literatur; weiteres Beispiel: Das System der Graphen der Polynome höchstens zweiten Grades bezüglich eines kartesischen x, y-Systems). Für $k = 2$ liefern Beispiele die topologisch affinen Ebenen $\mathfrak{A}$ (vgl. z. B. H.-K. [1], Kap. 3), für $k = 5$ das System der nicht entarteten Kegelschnitte in $\mathfrak{A}$, für beliebiges $k > 5$ das System der Graphen der Polynome von höchstens dem Grade $k - 1$ (vgl. auch H.-K. [2]). – Auch ein anderer Satz von Herrn Jackson ([2], Lemme 4, S. 6) gilt (allgemeiner) für gewisse, vom System der Kreise verschiedene, Systeme $\mathfrak{k}$ mit der Grundzahl $k(\mathfrak{k}) = 3$ (vgl. dazu im Text Nr. 2.4.).

III. Unsere, in Ziff. II. erwähnte, Kennzeichnung lautet wie folgt:

(I) Für ungerade Grundzahlen $k(\mathfrak{k}) = k \geq 3$.

Nachstehende drei Aussagen sind gleichwertig:

(1) Es besitzt A die lokale Ordnung k bezüglich des Systems $\mathfrak{k}$ von Ordnungscharakteristiken;

(2) Es ist A lokal normal* zu $\mathfrak{k}$ und die Schmieg-Ordnungscharakteristiken (die sogenannten $\mathfrak{k}$-Paratingenten) besitzen die Nesting-Eigenschaft;

(3) Es ist A lokal normal zu $\mathfrak{k}$ und es wird A in jedem inneren seiner Punkte von jeder Schmieg-Ordnungscharakteristik geschnitten.

Zusatz. *Betr. Aussage* (2). Im Falle $k(\mathfrak{k}) = 3$ folgt die lokale Normalität aus der Nesting-Eigenschaft jedenfalls für Bogen, bei denen durch beliebige 3 ihrer Punkte eine OCh geht, also erst recht für Systeme $\mathfrak{k}$, für die beliebige 3 Punkte des Grundgebietes auf einer OCh liegen. (Für den Bew. von (I) und die Beziehung zu den Sätzen von Herrn Jackson vgl. im Text weiter unten Nr. 2.2.

(II) Für gerade Grundzahl $k(\mathfrak{k}) = k \geq 2$.

---

* Definition der lokalen Normalität im Text Nr. 1. 5.

Nachstehende zwei Aussagen sind gleichwertig:

(1) Es besitzt A die lokale Ordnung k bezüglich $\mathfrak{k}$;

(2) Es ist A lokal normal zu $\mathfrak{k}$ und es wird A in jedem inneren Punkt von jeder Schmieg-Ordnungscharakteristik gestützt.

Zusatz. *Betr. Aussage* (2). Im Falle $k(\mathfrak{k}) = 2$ folgt die lokale Normalität von A zu $\mathfrak{k}$ schon daraus, daß A in jedem inneren Punkt von jeder zugehörigen Schmieg-Ordnungscharakteristik gestützt wird. Vorausgesetzt ist dabei, daß durch beliebige zwei Punkte des Grundgebietes eine OCh geht. (Für den Bew. von (II) vgl. im Text Nr. 2.3.).

§ 1. Bezeichnungen. Definitionen

Zur Erleichterung für den Leser seien die wichtigsten in § 2 gebrauchten Bezeichnungen und Definitionen zusammengestellt.

1.1. Als Grundbereich $G = \bar{G}$, in welchem sich alle Betrachtungen abspielen, diene etwa eine ebene abgeschlossene Kreisscheibe (oder ein topologisches Bild von ihr), ev. auch eine topologisch affine Ebene (für $k = 2$) u. a. Es sei B ein Bogen (in G); sind a und b die Endpunkte von B, so kann dies durch die Schreibweise $B(a \mid b)$ statt B hervorgehoben werden. Der größte offene Teilbogen von $B = B(a \mid b)$ wird mit $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B}(a \mid b) := B(a \mid b) \setminus \{a\} \setminus \{b\}$ bezeichnet; für Kurven C sei $\underset{\sim}{C} := C$ (Unter Bogen bzw. Kurven werden topologische Strecken- bzw. Kreisbilder verstanden). Ein $x_1, \ldots, x_t$ enthaltender Bogen $B = B(a \mid b)$ wird auch mit $B(a \mid x_1 \mid \ldots \mid x_t \mid b)$ bezeichnet.

1.2. Betrachtet wird ein System $\mathfrak{k}$ von Bogen oder (und) Kurven K in G, den sogenannten Ordnungscharakteristiken, kurz: OCh, welche (also sämtlich mehrpunktig sind und) den folgenden Axiomem genügen:

I. Axiom. Ist $K \in \mathfrak{k}$ ein Bogen $K(a \mid b)$, so gilt $\underset{\sim}{K} \in \underset{\sim}{G}$ und $a, b \in \bar{G} \setminus \underset{\sim}{G}$; ist K eine Kurve, so ist $(\bar{G} \setminus \underset{\sim}{G}) \cap K$ höchstens einpunktig. – Dem System $\mathfrak{k}$ ist eine natürliche Zahl $k = k(\mathfrak{k}) \geq 2$ zugeordnet, bezeichnet als Grundzahl (von $\mathfrak{k}$). Jede OCh K ist durch beliebige k ihrer Punkte eindeutig bestimmt und stetig von ihnen abhängig im folgenden Sinne: Sind $x_1, \ldots, x_k \in K$

verschiedene Punkte, durch die also K eindeutig bestimmt ist, in Zeichen $K = K(x_1, \ldots, x_k)$, so gibt es zu jedem $x_\varkappa$ Umgebungen $U_\varkappa \subset G$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, mit $\bar{U}_\varkappa \cap \bar{U}_\tau = \emptyset$ für $\varkappa \neq \tau (x_\varkappa \in U_\varkappa)$ von folgender Eigenschaft: Ist $x'_\varkappa \in U_\varkappa$ beliebig, so existiert $K(x'_1, \ldots, x'_k) \in \mathfrak{k}$, ferner ist $K(x'_1, \ldots, x'_k)$ beliebig benachbart zu $K(x_1, \ldots, x_k)$ für hinreichend kleine $U_\varkappa$ („Nachbarschaft" bezogen auf den nach Hausdorff metrisierten kompakten Raum der Kompakta im Kompaktum G). (Zu vorstehenden Definitionen vgl. auch H.-K. [1], Nr. 1.1.–1.1.3.). – Jeder echte Teilbogen einer OCh wird als $\mathfrak{k}$-Strecke bezeichnet.

1.2.1. Die beiden Komponenten von $G \setminus K$ werden als die beiden Seiten $\sigma(K)$, genauer $K(+)$ und $K(-)$, der OCh K bezeichnet.

1.3. Es sei $A = A(a \mid b) \in G$ ein im folgenden festgehaltener Bogen (also $A = \bar{A}$), der sogenannte Grundbogen. Man sagt, es besitze $A \cap K$ den Punktordnungswert $POW(A \cap K) = t$, wenn kard $(A \cap K) = t$. Ist $\bigwedge_{K \in \mathfrak{k}} POW(A \cap K) < +\infty$ bzw. $\leq m < +\infty$, so sagt man, der Punktordnungswert $POW(A\,;\mathfrak{k})$ *von A bezüglich* $\mathfrak{k}$ sei endlich bzw. beschränkt. Im Falle eines beschränkten $POW(A\,;\mathfrak{k})$ setzt man $POW(A\,;\mathfrak{k}) = \max\{POW(A \cap K) \colon K \in \mathfrak{k}\}$.

Ist $POW(A\,;\mathfrak{k}) = k$, so heißt A ordnungsminimal. Ferner heißt A lokal ordnungsminimal, wenn jeder Punkt $x \in A$ eine ordnungsminimale Umgebung U von x auf A besitzt. Man sagt dafür auch, jeder Punkt $x \in A$ besitze den $POW(x; B; \mathfrak{k}) = k$.

Eine OCh heiße Sekante von A, wenn $A \cap K$ endlich ist und nur Schnittpunkte enthält (so daß insbesondere $A \cap K = \underset{\circ}{A} \cap K$).

1.4. Unter einem $\mathfrak{k}$-Schmieggebilde oder einer $\mathfrak{k}$-Paratingente an A in $x \in A$ wird verstanden jeder Limes $P(x) := P(x; A) := P(x\colon A\,;\mathfrak{k})$ von OCh durch je k auf A gegen x konvergierende Punkte von A. Dabei wird im allgemeinen $P(x)$ keine OCh sein; z. B. wenn $P(x)$ einpunktig sein sollte. Für den Fall der Kreise sind die $\mathfrak{k}$-Paratingenten, falls mehrpunktig, identisch mit den general osculating circles von Herrn Jackson ([1], S. 1/2).

Weiter wird im Falle eines orientierten *ordnungsminimalen* Bogens A unter einer k, 2-Paratingente verstanden jeder Limes einer Folge von *OCh* K_n, $n = 1, 2, \ldots$, der folgenden Art: Es sei $A \cap K_n = \bigcup_{\varkappa=1}^{k} \{x_\varkappa\}$, wobei x_μ auf A vor $x_{\mu+1}$ liegt, $\mu = 1, \ldots, k-1$; unter den $x_\varkappa$ seien x_r, x_{r+1}, x_{r+3} sowie weitere $k-4$, von x_{r+2} verschiedene fest, d. h. von n unabhängig, während x_{r+2} von n abhängt und mit $n \to \infty$ gegen x_{r+1} konvergiert.

Wir werden nun im weiteren Verlauf der Betrachtung nachstehende Forderung lokaler Natur stellen:

Jedes $x \in A$ besitze eine Umgebung $U(x)$ auf A der folgenden Art:

II. Axiom. Jede $\mathfrak{k}$-Parantingente an den Grundbogen A in $x \in A$ sowie jede k, 2-Paratingente an $U(x)$, $x \in A$, ist eine Ordnungscharakteristik.

III. Axiom. Ist $x_\varkappa, x_{\varkappa n} \in U(x)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$; $n = 1, 2, \ldots$, mit $x_\varkappa \neq x_\tau$, $\varkappa \neq \tau$, und $x_\varkappa = \lim{}_n x_{\varkappa n}$ und existiert $K_n := K(x_{1n}, \ldots, x_{kn}) \in \mathfrak{k}$, dann existiert $L = \lim_n K_n$ und es ist $L = K(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{k}$ (vgl. H.-K. [1]. Nr. 2.4.1., S. 43).

Anmerkung: Aus der Forderung betr. die $\mathfrak{k}$, 2-Paratingenten im II. Axiom folgt die lokale Normalität der ordnungsminimalen Bogen (vgl. H.-K. [1], Nr. 4.2.4.2., Satz 1.) – Für den Fall auch nicht-ordnungsminimaler Bogen vgl. Künneth [1].

1.5. Es sei A orientiert, ferner $K \in \mathfrak{k}$ Sekante von A und $A \cap K = \{s_1\} \cup \ldots \cup \{s_t\}$ mit $3 \leq t$. Gibt es dann eine Orientierung von K derart, daß die $s_1, \ldots, s_t$ in dieser Reihenfolge auf K aufeinanderfolgen, wenn dies auf A für die Orientierung von A der Fall ist, so heißen A und K normal (zu einander). Ist A normal zu jeder Sekante (aus $\mathfrak{k}$) von A so heißen A *und* $\mathfrak{k}$ normal (zu einander). Mit A ist auch jeder Teilbogen A von A normal zu $\mathfrak{k}$. – Besitzt jedes $x \in A$ eine Umgebung U auf A derart, daß U und $\mathfrak{k}$ normal sind, so heißt A lokal normal zu $\mathfrak{k}$.

1.5.1. Ist $K \in \mathfrak{k}$ Sekante von A, ist A orientiert und folgen die $x_1, \ldots, x_t \in A \cap K$ in dieser Anordnung $x_1, \ldots, x_t$ auf A (entsprechend der Orientierung von A) „unmittelbar" aufeinander (d. h. liegen zwischen diesen x_τ keine anderen $x' \in A \cap K$), so gilt: Eine hinreichend kleine vordere Umgebung $V(x_1)$ von x_1 auf $A \setminus \{x_1\}$ liegt auf der gleichen oder auf der entgegengesetzten Seite von K wie eine hinreichend kleine hintere Umgebung $H(x_t)$ von x_t auf $A \setminus \{x_t\}$ je nachdem t gerade oder ungerade ist.

§ 2. Kennzeichnung der ordnungsminimalen Bogen

2.1. Folgende Bemerkungen werden vorausgeschickt:

1. Hilfssatz. Vor. (1) *Das System* $\mathfrak{k}$ *der Ordnungscharakteristiken und der Grundbogen* A *genüge den Axiomen* I.–III. (vgl. Nr. 1.2., 1.4.). *Ferner sei* $POW(A;\mathfrak{k})$ endlich. – (2) Es sei A lokal normal *zu* $\mathfrak{k}$. – (3) *Es werde* $\underset{\sim}{A}$ *in jedem seiner Punkte* x *von jeder* $\mathfrak{k}$-*Parantigente* $P(x;A)$ *an* A gestützt *bzw.* geschnitten, *je nachdem die Grundzahl* $k(\mathfrak{k}) = k \geq 2$ *gerade oder ungerade ist.*

Beh. *Es ist* $\underset{\sim}{A}$ *lokal ordnungsminimal* (d. h. $\bigwedge_{x \in \underset{\sim}{A}} POW(x;A;\mathfrak{k}) = k(\mathfrak{k})$).

Bew. *Indirekt.* Es sei $\underset{\sim}{A}$ nicht lokal ordnungsminimal.

(I) Es gibt ein $y \in \underset{\sim}{A}$ mit einer Umgebung $\underset{\sim}{U}$ von y auf $\underset{\sim}{A}$, die normal zu $\mathfrak{k}$ ist (Vor. (2)), zu der aber eine Sekante $K_0 \in \mathfrak{k}$ existiert mit $POW(\underset{\sim}{U} \frown K_0) \geq k + 1$. Legen wir eine Orientierung von A fest, so gibt es also (Schnittpunkte) $x_1, \ldots, x_{k+1} \in \underset{\sim}{U} \frown K_0$ derart, daß die Reihenfolge $x_1, \ldots, x_{k+1}$ auf A der Orientierung von A entspricht und ebenso auf K_0 einer Orientierung von K_0, ferner daß zwischen diesen $x_1, \ldots, x_{k+1}$ keine weiteren Punkte von $\underset{\sim}{U} \frown K_0$ liegen. Da $POW(A;\mathfrak{k})$ endlich sein soll (Vor. (1)), gibt es einen Teilbogen $T := A(a' \mid x_1 \mid \ldots \mid x_{k+1} \mid b')$ von U derart, daß $T \frown K_0 = \{x_1\} \smile \ldots . \smile \{x_{k+1}\} = \underset{\sim}{T} \frown K_0$. Wegen der Normalität von $\underset{\sim}{U}$ und $\mathfrak{k}$, also auch von $\underset{\sim}{T}$ und $\mathfrak{k}$, ist auf $\underset{\sim}{T}$ und K_0 der „verschärfte Kontraktionssatz" anwendbar (vgl. H.-K. [1], Nr. 2.4.4.1., S. 49). Diesem Satz zufolge existiert ein $z \in \underset{\sim}{A}(x_1 \mid \ldots . \mid x_{k+1})$ und eine Folge von $K_n \in \mathfrak{k}$, $n = 1, 2, \ldots$, welche beliebig kleine Umgebungen von z in mindestens $(k+1)$ Punkten treffen und für die $L = \lim_n K_n \in \mathfrak{k}$ existiert. Es ist also L eine $\mathfrak{k}$-Paratingente $P(z;A)$ in z an A. In Ziff. (II) des Beweises werden wir zeigen, daß A in z von diesem $P(z{:}\,A)$ gestützt bzw. geschnitten wird, je nachdem $k + 1$ gerade oder ungerade ist. Da dies der Vor. (3) widerspricht, ist die Beh. des Hilfssatzes bewiesen.

(II) Beweis, daß A in z von $P(z{:}\,A)$ gestützt bzw. geschnitten wird, je nachdem $k + 1$ gerade oder ungerade ist.

(II 1) Wie aus dem Beweis des verschärften Kontraktionssatzes hervorgeht, lassen sich die K_n, $n = 1, 2, \ldots$, folgendermaßen wählen: Jedes $K_n \in \mathfrak{k}$ ist Sekante von T. Es existieren Teilbogen

$T_n = T(a'_n \mid b'_n)$ von T derart, daß gilt: (II 1) $T_{n+1} \subset \underset{-}{T}_n$ und $\{z\} = \bigcap_n \underset{-}{T}_n = \lim_n T_n$ sowie $\underset{-}{T}_n \cap K_n = \{x_{1n}\} \cup \ldots \cup \cup \{x_{k+1,n}\}$, wobei die Reihenfolge $x_{1n}, \ldots, x_{k+1,n}$, für jedes n der Orientierung von A entspricht. – (II 2) es ist $POW(T_m \cap K_t) \equiv \equiv k + 1 \pmod 2$ für alle m, t mit $m \leq t$.

(II 2) Nun ist z isolierter Punkt von $A \cap P(z: A)$ (auf A); denn $P: = P(z; A)$ ist OCh und $POW(A; \mathfrak{k})$ soll endlich sein (Vor. (1)). Daher existiert eine Umgebung W von z auf A mit $\overline{W} \cap P = \{z\}$. Und wegen $P = \lim_n K_n$ sowie wegen (II 1) gibt es zu beliebig kleiner, in W enthaltener Umgebung $\underset{-}{T}_n$ von z auf A, also zu beliebig großem n, ein $m_0 = m_0(n) \geq n$ derart, daß $\overline{W} \cap K_t = \underset{-}{T}_n \cap K_t$ für alle t mit $t \geq m_0$. Da n beliebig groß gewählt werden kann, folgt in Rücksicht auf (II 2) und Nr. 1.5.1. die am Anfang dieser Ziff. (II) aufgestellte Behauptung (und damit gemäß Ziff. (I)) die Beh. des 1. Hilfssatzes.

2. Hilfssatz. Vor. (1) *Wie Vor.* (1) *im Hilfssatz* 1.–(2) *Die Grundzahl von* $\mathfrak{k}$ *sei* $k = k(\mathfrak{k}) = 2$. *Durch beliebige zwei Punkte des Grundgebietes gehe eine OCh.* – (3) *Es sei der Grundbogen A von endlichem POW bezüglich* $\mathfrak{k}$ *und werde in jedem inneren Punkt* $x' \in \underset{-}{A}$ *von jeder* $\mathfrak{k}$*-Paratingente* $P(x'; A; \mathfrak{k})$ *in* x' *an* A gestützt.

Beh. *Es ist* A *in* x' *lokal normal bezüglich* $\mathfrak{k}$ *(d. h. es existiert eine zu* $\mathfrak{k}$ *normale Umgebung von* x' *auf* A*).*

Bew. (I) Unter einem ($\mathfrak{k}$-)Sektor $S: = S(y)$ im Grundgebiet mit dem Scheitel y, kurz y-Sektor, wird verstanden ein (nicht leeres) Gebiet (in G), dessen Begrenzung Vereinigung ist aus zwei $\mathfrak{k}$-Strecken, die y als gemeinsamen Anfangspunkt sowie je einen Endpunkt e' bzw. e'' in $\bar{G} \setminus G$ besitzen, und aus einem, e' mit e'' verbindenden Teilbogen von $\bar{G} \setminus G$.

(II) Es sei $\mathfrak{P}(x') \in \mathfrak{k}$ die Menge aller $\mathfrak{k}$-Paratingenten $P': = = P(x'; A)$ in x' an A; ferner sei $\sigma(P')$ diejenige offene Seite von $P' \in \mathfrak{P}(x')$, in welcher eine Umgebung $U(x')$ von x' auf $A \setminus \{x'\}$ liegt; die Existenz eines solchen $\sigma(P')$ und $U(x')$ folgt daraus, daß A in x' von P' gestützt wird und daß x' isolierter Punkt von $A \cap P'$ auf A ist, letzteres weil $POW(A; \mathfrak{k})$ endlich ist, also A insbesondere keine $\mathfrak{k}$-Strecken enthält. Aus eben diesen Gründen folgt überdies:

Für $D := \bigcap_{P' \in \mathfrak{P}(x')} \sigma(P')$ ist $D \neq \emptyset$, so daß $\bar{D}$ ein x'-Sektor ist, welcher abgeschlossene x'-Sektoren $S = \bar{S}$ mit $S \setminus \{x'\} \subset D$ enthält mit folgender Eigenschaft:

(II*) Für alle OCh K mit $x' \in K$ und $K \frown S \neq \emptyset$ gilt $K \notin \notin \mathfrak{P}(x')$; oder also: *Für jedes* $P' \in \mathfrak{P}(x')$ *ist* $(S \setminus \{x'\}) \frown P' = \emptyset$.

Es folgt (II*) daraus, daß andernfalls $\sigma(P') \frown D$ echte (nicht leere, offene) Teilmenge von D wäre, im Widerspruch zur Definition von D.

(III) Es sei jetzt $z \in S$ beliebig, aber festgehalten, also insbesondere $z \neq x'$. Dann existiert eine Umgebung

$U' = U(x'; A; S; z)$ von x' auf A mit folgender Eigenschaft:

(a) Für jede OCh K' mit $z \in K'$ und $U' \frown K' \neq \emptyset$ ist $U' \frown K'$ einpunktig; also:

(b) Für jede OCh K'' mit (mindestens) zweipunktigem $U' \frown K''$ gilt $z \notin K''$.

In der Tat: Andernfalls gibt es zu x' beliebig benachbarte y', $y'' \in A$ derart, daß die zugehörige OCh $K(y', y'')$ auch z enthält. O. B. d. A. kann aber angenommen werden, daß $L = \lim_{y', y'' \to x'} K(y', y'')$ existiert. Alsdann ist aber $L \in \mathfrak{P}(x')$ und $z \in L$ im Widerspruch zu (II*).

(IV) Aus (III) entnimmt man: Es wird U' aus $z \in S$ schlicht und stetig projiziert auf *jedes* $K^* \in \mathfrak{k}$ mit mindestens zweipunktigem $U' \frown K^* = \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_t\}$, $t \geq 2$. Entspricht daher die Reihenfolge $x_1, \ldots, x_t$ auf U', also auf A, einer Orientierung von A, so auch einer (passenden) Orientierung von K^*, d. h. es ist U' normal zu $\mathfrak{k}$, wie behauptet.

2.2. Eine Kennzeichnung der lokal ordnungsminimalen Bogen bei ungerader Grundzahl $k(\mathfrak{k})$.

Definition. Wir sagen, der (orientierte) Grundbogen A besitze (bezüglich $\mathfrak{k}$) die Nesting-Eigenschaft, wenn für beliebige drei Punkte $y_1, y_2, y_3 \in A$, von denen y_2 zwischen y_1 und y_3 auf A liegt, jede $\mathfrak{k}$-Paratingente $P(y_1)$ in y_1 auf der entgegengesetzten Seite einer jeden $\mathfrak{k}$-Paratingente $P(y_2)$ in y_2 liegt wie jede $\mathfrak{k}$-Paratingente $P(y_3)$ in y_3.

Satz. Vor. (1) *Es genüge das System* $\mathfrak{k}$ *der Ordnungscharakteristiken sowie der Grundbogen* A *den Axiomen* I.–III. (in Nr.

1.2., 1.4.) *Ferner sei* $POW(\underset{\sim}{A}; \mathfrak{k})$ *endlich.* – (2) *Die Grundzahl* $k = k(\mathfrak{k})$ *von* $\mathfrak{k}$ *sei* ungerade.

Beh. *Folgende drei Aussagen sind gleichwertig:*

(I) *Es ist* $\underset{\sim}{A}$ *lokal ordnungsminimal bezüglich* $\mathfrak{k}$

$$(also\ \bigwedge_{x \in \underset{\sim}{A}} POW(x; A; \mathfrak{k}) = k);$$

(II) *Es ist* $\underset{\sim}{A}$ *lokal normal zu* $\mathfrak{k}$ *und besitzt lokal die Nesting-Eigenschaft bezüglich* $\mathfrak{k}$;

(III) *Es ist* $\underset{\sim}{A}$ *lokal normal zu* $\mathfrak{k}$ *und es wird* $\underset{\sim}{A}$ *in jedem Punkt* $x \in \underset{\sim}{A}$ *von jeder* $\mathfrak{k}$*-Paratingente* $P(x; A)$ *in* x *an* A geschnitten.

Zusatz. *Betr. Aussage* (II). Im Falle $k(\mathfrak{k}) = 3$ folgt aus der Nesting-Eigenschaft schon die lokale Normalität von $\underset{\sim}{A}$ (bezüglich $\mathfrak{k}$).

Bew. *Aus* (I) *folgt* (II). Dies ergibt sich aus Sätzen von Haller [1], deren Beweise in H.-K. [1], Kap. 4.2. gegeben werden (vgl. dort Nr. 4.2.4., Satz 2, S. 185, und Nr. 4.2.4.2., Satz 1, S. 189, sowie Nr. 4.2.6.3., Satz 1 und Satz 2, S. 199/200).

Aus (II) *folgt* (III). Indirekt. Gibt es nämlich ein $x \in \underset{\sim}{A}$, in welchem A von einem $P(x)$ gestützt wird, so gibt es zu x benachbarte Punkte y' vor x und y'' hinter x auf A derart, daß y' und y'' auf der gleichen Seite von diesem $P(x)$ liegen, also (wegen der je paarweisen Fremdheit aller $P(y') \in \mathfrak{P}(y')$, $P(x) \in \mathfrak{P}(x)$ und $P(y'') \in \mathfrak{P}(y'')$ auch $P(y')$ und $P(y'')$ auf der gleichen Seite von $P(x)$ liegen, im Widerspruch zur Nesting-Eigenschaft von A bezüglich $\mathfrak{k}$.

Aus (III) *folgt* (I). Gemäß Nr. 2.1., Hilfssatz 1.

Betr. Zusatz. (1) Zunächst beweist man entsprechend wie bei Jackson [1] (vgl. Lemma C für den Fall der Kreise, S. 6) das folgende *Lemma:* Ist $x' \in \underset{\sim}{A}$ und gibt es ein $z \neq x'$ derart, daß z zu allen $\mathfrak{k}$-Paratingenten $P(x'; A)$ an A in x' fremd ist, so gibt es eine Umgebung U von x' auf A, welche normal zu $\mathfrak{k}$ ist. – (2) Gilt die Nesting-Eigenschaft für die $\mathfrak{k}$-Paratingenten an U (vgl. Ziff. (1)), so ist die Voraussetzung des Lemmas in Ziff. (1) erfüllt, also U normal zu $\mathfrak{k}$. Somit folgt aus der Nesting-Eigenschaft die lokale Normalität, wie im Zusatz behauptet. – Daher folgt aus der Nesting-Eigenschaft die Aussage (III) und damit Aussage (I).

Anmerkung. Der oben angegebene Beweis des Zusatzes, demgemäß für jedes OCh-System mit der Grundzahl $k(\mathfrak{k}) = 3$ aus der Nesting-Eigenschaft die lokale Ordnungsminimalität folgt, wird in Jackson [1] für den Fall der Kreise anders (nämlich ohne Zuhilfenahme des Kontraktionssatzes) bewiesen: Aus dem Lemma C (S. 6) zusammen mit zwei anderen Feststellungen (Lemma B, S. 4, und Lemma D, S. 7) wird gewonnen das Theorem 2 (S. 8): Wird A in jedem $x' \in \underset{\sim}{A}$ von jedem Schmiegkreis $P(x'; A)$ geschnitten und wird für keinen der Endpunkte e_i von A, $i = 1, 2$, die ganze Ebene von der Menge der Punkte aller $P(e_i; A)$ überdeckt, so ist A lokal ordnungsminimal. Mit Hilfe von Theorem 2 ergibt sich dann: Aus der Nesting-Eigenschaft folgt die lokale Ordnungsminimalität (Theorem 3, S. 10).

2.3. Eine Kennzeichnung der lokal ordnungsminimalen Bogen bei gerader Grundzahl $k(\mathfrak{k}) \geq 2$.

Satz. Vor. (1) *Wie Vor.* (1) *im Satz der* Nr. 2.2. – (2) *Die Grundzahl* $k = k(\mathfrak{k})$ *von* $\mathfrak{k}$ *sei* gerade.

Beh. *Folgende zwei Aussagen sind gleichwertig:*

(I) *Es ist* $\underset{\sim}{A}$ *lokal ordnungsminimal bezüglich* $\mathfrak{k}$ (*also*

$$POW(x; A; \mathfrak{k}) = k \text{ für alle } x \in \underset{\sim}{A}).$$

(II) *Es ist* $\underset{\sim}{A}$ *lokal normal zu* $\mathfrak{k}$ *und es wird* $\underset{\sim}{A}$ *in jedem Punkt* $x \in \underset{\sim}{A}$ *von jeder* $\mathfrak{k}$*-Paratingente* $P(x: A)$ *in* x *an* A gestützt.

Zusatz. *Betr. Aussage* (II). Im Falle $k = 2$ kann in der Aussage (II) die Voraussetzung wegbleiben, daß A lokal normal zu $\mathfrak{k}$ ist, weil die lokale Normalität schon aus der Annahme folgt, daß A von jedem $P(x; A)$ für jedes $x \in A$ gestützt wird in x.

Bew. *Aus* (I) *folgt* (II). Ergibt sich aus Haller [1] bzw. aus H.-K. [1], Nr. 4.2.4., Satz 2 (S. 185) und H.-K. [1], Nr. 4.2.4.2., Satz 1 und 2. – *Aus* (II) *folgt* (I). Gemäß Nr. 2.1., Hilfssatz 1. – *Betr. Zusatz.* Unmittelbar aus Nr. 2.1., Hilfssatz 2.

2.4. In Jackson [2], Lemma 4 (S. 6), wird gezeigt: Ist der Bogen $A = A(a \mid b)$ lokal vom Punktordnungswert Drei bezüglich des Systems $\mathfrak{k}$ der Kreise und ist $POW(A; \mathfrak{k}) = t \geq 3$, dann wird $\underset{\sim}{A}$ in genau $t - 3$ Punkten geschnitten von demjenigen Tangentialkreis in a an A, welcher durch b geht. Der a. a. O. gegebene Beweis und damit das Lemma 4, gilt allgemein für Systeme $\mathfrak{k}$ von Ordnungscharakteristiken der Grundzahl Drei, wenn durch beliebige 3 Punkte des Grundgebietes eine OCh geht.

2.5. In Jackson [1], Theorem 4 (S. 10), wird gezeigt: Besitzt A stetige Krümmung, so ist A lokal ordnungsminimal bezüglich des Systems der Kreise genau dann, wenn die Krümmung monoton ist. – Dies folgt auch aus H[1], Nr. 2. 1. Satz (S. 222) sowie aus Nr. 4.1., Lemma, Beh. (2) (S. 233) und Nr. 4..3.2. (S. 235).

Literatur

Ewald, G. [1]: Aus konvexen Körpern bestehende Möbiusebenen. Abh. math. Seminar Univ. Hamburg **30** (179–187 [1967]).

Haller, J. [1]: Über ordnungsminimale Bogen bzw. Kurven in der Ebene und ihre k-Paratingenten. Sitz.-Ber. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturwiss. Kl. 1963, 15–25.

Haupt-Künneth [1]: Geometrische Ordnungen. Berlin-Heidelberg-New York 1967. Zitiert mit H.-K. [1].

Haupt-Künneth [2]: Über sogenannte entartete Mengen bei Juelschen Problemen in der Ebene. Manuscripta mathematica **3** 391–412 (1970) Zitiert mit H.-K. [2].

Haupt [1]: Bemerkungen zum Kneserschen Vierscheitelsatz. Abh. mathem. Seminar Univ. Hamburg **31**, 218–238 (1967). Zitiert mit H [1].

Jackson, S. B. [1]: Arcs of local cyclic order three. (Univ. of Maryland, Department of Math., Technical Report TR 69–89, March 7, 1969).

Jackson, S. B. [2]: Arcs of cyclic order three with prescribed end conditions (Univ. of Maryland, Department of Math., Technical Report TR 69–108, June 6, 1969).

Künneth, H. [1]: Normalität bei $\mathfrak{k}$-ordinären Bogen. Sitz.-Ber. bayer. Akad. d. Wiss. math.-naturwiss. Kl. 1971.