BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1970

MÜNCHEN 1971

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eine Charakterisierung der Dimension Steinscher Mannigfaltigkeiten

Von Karl Josef Ramspott in München

Die Dimension eines metrisierbaren Raumes X mit abzählbarer Topologie läßt sich bekanntlich wie folgt charakterisieren: $\dim X \leq n$ gilt genau dann, wenn sich jede stetige Abbildung einer beliebigen abgeschlossenen Teilmenge von X in die n-Sphäre S_n zu einer stetigen Abbildung von X in S_n fortsetzen läßt (siehe [5], Theorem VI, 4). Dabei ist es gleichgültig, ob man den Dimensionsbegriff von Menger oder Lebesgue zugrunde legt ([5], Chapter I bzw. V).

In dieser Note soll in entsprechender Weise die komplexe Dimension einer Steinschen Mannigfaltigkeit durch eine Fortsetzungseigenschaft gewisser holomorpher Abbildungen charakterisiert werden.

I

Steinsche Mannigfaltigkeiten sind spezielle komplexe Mannigfaltigkeiten. Sie sind holomorph-separabel, holomorph-konvex und jeder ihrer Punkte besitzt lokale Koordinaten durch globale holomorphe Funktionen (siehe etwa [4]). Wichtige Beispiele sind die komplex-analytischen Untermannigfaltigkeiten der Zahlenräume $\mathbf{C}^N$. Eine später benutzte topologische Eigenschaft Steinscher Mannigfaltigkeiten ist das Verschwinden der höheren Cohomologiegruppen [1]: Hat eine solche Mannigfaltigkeit X die komplexe Dimension n (also die reelle Dimension $2n$) und ist G eine beliebige abelsche Gruppe, so gilt $H^q(X, G) = 0$ für alle $q > n$.

Wir betrachten holomorphe Abbildungen in die komplexe Quadrik

$$Q_{m-1} := \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbf{C}^m : z_1^2 + \ldots + z_m^2 = 1\}, \; m \geq 1.$$

Das ist eine $(m-1)$-dimensionale analytische Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{C}^m$. Unter der Dimension einer komplexen Mannigfaltigkeit X wird stets die komplexe Dimension verstanden; wir bezeichnen sie mit $\dim X$.

Satz. *Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt $\dim X \leq n$ genau dann, wenn es zu jeder analytischen Untermannigfaltigkeit Y von X und jeder holomorphen Abbildung $f: Y \to Q_n$ eine holomorphe Abbildung von X in Q_n gibt, deren Beschränkung auf Y mit f übereinstimmt.*

II

Dem eigentlichen Beweis des Satzes schicken wir zwei mehr oder weniger bekannte Aussagen voraus, deren Beweis der Vollständigkeit halber angegeben wird. $M(m, \mathbf{C})$ sei der Raum der m-reihigen Matrizen mit komplexen Koeffizienten und

$$O(m, \mathbf{C}) := \{A \in M(m, \mathbf{C}) : {}^tAA = I\}$$

die komplex-orthogonale Gruppe. Dabei ist ${}^tA$ die zu A transponierte Matrix und I die m-reihige Einheitsmatrix. $O(m, \mathbf{C})$ ist eine komplexe Liesche Gruppe der Dimension $m(m-1)/2$. Für $A \in O(m, \mathbf{C})$ und einen komplexen Spaltenvektor z mit m Komponenten sei Az das gewöhnliche Matrizenprodukt. Der folgende Hilfssatz wird gebraucht, um beim Beweis des Satzes auf das Okasche Prinzip zurückgreifen zu können.

Hilfssatz 1. *Die komplex-orthogonale Gruppe $O(m, \mathbf{C})$ wirkt vermöge der Abbildung*

$$O(m, \mathbf{C}) \times Q_{m-1} \to Q_{m-1}, \quad (A, z) \mapsto Az,$$

holomorph und transitiv auf Q_{m-1}.

Beweis. Wir betrachten die symmetrische Bilinearform

$$\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}, \quad (z, w) \mapsto {}^tzw.$$

Ein Punkt $z \in \mathbf{C}^m$ liegt also genau dann in Q_{m-1}, wenn ${}^tzz = 1$. Es ist klar, daß für $A \in O(m, \mathbf{C})$ dann auch Az in Q_{m-1} liegt. Die obige Abbildung ist also wohldefiniert. Sie ist offenbar holomorph und eine Wirkungsabbildung. Daß die Wirkung transitiv ist, kann man entweder dem Satz von Witt entnehmen oder sich wie folgt direkt überlegen. Seien a und b zwei Punkte von Q_{m-1}. Die Vektoren $a - b$ und $a + b$ können bezüglich der angegebenen Bilinearform nicht beide isotrop sein. Sonst würde nämlich aus $a = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)$ und ${}^t(a-b)(a+b) = 0$ (dies wegen ${}^t aa = {}^t bb = 1$) folgen, daß ${}^t aa = 0$. Je nachdem, ob nun $a - b$ isotrop ist oder nicht, betrachte man die Spiegelung des $\mathbf{C}^m$ an dem von $a + b$ erzeugten Untervektorraum bzw. an der zu $a - b$ orthogonalen Hyperebene. Beide Abbildungen sind Isomorphismen des $\mathbf{C}^m$ und lassen die benutzte Bilinearform invariant. Bezeichnet φ die eine oder andere Abbildung, so gilt

$$\varphi(a-b) = -a + b \quad \text{und} \quad \varphi(a+b) = a + b,$$

woraus $\varphi(a) = b$ und damit die Behauptung folgt.

Hilfssatz 2. *Die in Q_{m-1} enthaltene $(m-1)$-Sphäre*

$S_{m-1} := \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbf{C}^m : x_1^2 + \ldots + x_m^2 = 1, y_1 = \ldots = y_m = 0\}$ (wobei $z_j = x_j + iy_j$ für $j = 1, \ldots, m$) ist Deformationsretrakt von Q_{m-1}.

Beweis. Q_{m-1} wird in reellen Koordinaten durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1^2 + \ldots + x_m^2 &= 1 + y_1^2 + \ldots + y_m^2, \\ x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben. Sei $[0,1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall der reellen Achse. Wir betrachten die durch

$$x'_j := \sqrt{\frac{1 + (1-t)^2 \sum y_k^2}{1 + \sum y_k^2}}\, x_j,$$

$$y'_j := (1-t) y_j, \quad t \in [0, 1]; \quad j = 1, \ldots, m,$$

definierte Abbildung

$$Q_{m-1} \times [0, 1] \to Q_{m-1}.$$

In der Tat genügen die Koordinaten x'_j und y'_j für jeden Parameter $t \in [0, 1]$ den obigen Gleichungen für Q_{m-1}, falls die x_j

und y_j es tun. Die Abbildung ist stetig. Für $t = 0$ liefert sie die identische Abbildung von Q_{m-1}, und für $t = 1$ gilt

$$x_1'^2 + \ldots + x_m'^2 = 1, \quad y_1' = \ldots = y_m' = 0.$$

d. h. für $t = 1$ wird Q_{m-1} in S_{m-1} abgebildet. Die Punkte von S_{m-1} bleiben für jedes $t \in [0, 1]$ fest. Damit ist alles gezeigt.

III

Der Beweis des Satzes zerfällt in zwei Teile. Zuerst wird gezeigt, daß aus dim $X \leq n$ die holomorphe Fortsetzungseigenschaft folgt. Sei also Y eine analytische Untermannigfaltigkeit von X und $f: Y \to Q_n$ eine holomorphe Abbildung. Da Q_n eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, auf der nach Hilfssatz 1 eine komplexe Liesche Gruppe holomorph und transitiv wirkt, besitzt f bereits dann eine holomorphe Fortsetzung auf ganz X, falls es nur eine stetige Fortsetzung gibt [7]. X läßt sich so triangulieren, daß Y ein Unterkomplex ist ([3], Satz 4). Nach bekannten Sätzen der Hindernistheorie (z. B. [2], Exp. 3, Théorème 1) ist die Abbildung f sicher dann stetig nach X fortsetzbar, wenn die relativen Cohomologiegruppen $H^{q+1}(X, Y; \pi_q(Q_n))$ für alle $q \geqslant 0$ verschwinden. Da Q_n und S_n nach Hilfssatz 2 homotopieäquivalent sind, haben sie isomorphe Homotopiegruppen, also gilt

$$\pi_q(Q_n) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq q \leq n - 1.$$

Wir brauchen uns also nur noch um den Fall $q \geqslant n$ zu kümmern. Y ist als analytische Untermannigfaltigkeit einer Steinschen Mannigfaltigkeit wieder Steinsch. Wir können dim $Y \leq n - 1$ voraussetzen. In der exakten Cohomologiesequenz

$$\to H^q(Y, \pi_q(Q_n)) \to H^{q+1}(X, Y; \pi_q(Q_n)) \to H^{q+1}(X, \pi_q(Q_n)) \to$$

verschwinden wegen der eingangs erwähnten Eigenschaft der Cohomologie Steinscher Mannigfaltigkeiten die beiden äußeren Gruppen für $q \geq n$. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Zum Beweis des zweiten Teils nehmen wir dim $X > n$ an und konstruieren eine analytische Untermannigfaltigkeit Y von X

und eine holomorphe Abbildung $f: Y \to Q_n$, die sich nicht holomorph nach X fortsetzen läßt.

Sei zunächst $\dim X = n + 1$ und a ein Punkt von X. Dann gibt es $n + 1$ globale holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_{n+1}$ auf X, die a in den Nullpunkt des $\mathbf{C}^{n+1}$ und eine Umgebung U von a biholomorph auf eine Umgebung V von 0 abbilden. Wir können annehmen, daß V die Kugel

$$B_{n+1} := \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 \leq 1,\\ y_1 = \ldots = y_{n+1} = 0\}$$

enthält ($z_j = x_j + iy_j$ für $j = 1, \ldots, n + 1$).
Außerdem dürfen wir annehmen, daß die Menge

$$Y := \{x \in X : f_1^2(x) + \ldots + f_{n+1}^2(x) = 1\}$$

eine analytische Untermannigfaltigkeit von X ist. Nach dem Satz von Sard (siehe etwa [6]) hat nämlich die Menge derjenigen komplexen Zahlen λ, für die

$$\{x \in X : f_1^2(x) + \ldots + f_{n+1}^2(x) = \lambda\}$$

keine Untermannigfaltigkeit von X ist, das Maß 0 in $\mathbf{C}$. Man braucht also eventuell nur die Funktion f_j durch μf_j zu ersetzen, wobei μ eine geeignete komplexe Zahl in der Nähe von 1 ist.

Sei $F : X \to \mathbf{C}^{n+1}$ die durch die Funktionen $f_1, \ldots, f_{n+1}$ definierte Abbildung. Sie bildet Y in Q_n ab. Wir behaupten, daß sich die dadurch definierte Abbildung $f: Y \to Q_n$ nicht zu einer stetigen Abbildung $X \to Q_n$ fortsetzen läßt.

Nehmen wir an, $\Phi : X \to Q_n$ sei eine stetige Abbildung mit $\Phi \mid Y = f$. Sei wieder

$$S_n := \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1,\\ y_1 = \ldots = y_{n+1} = 0\}.$$

Die Mengen

$$B := F^{-1}(B_{n+1}) \cap U \text{ und } S := F^{-1}(S_n) \cap U$$

werden durch F homöomorph auf B_{n+1} bzw. S_n abgebildet. $F^{-1}(S_n)$ liegt in Y, also wird S auch durch Φ topologisch auf S_n abgebildet. Sei $\Psi : S_n \to S$ die Umkehrung der Beschränkung von Φ und $r: Q_n \to S_n$ die Retraktion von Hilfssatz 2 (dort $t = 1$). Die Abbildung $r \circ \Phi: X \to S_n$ stimmt auf S mit Φ überein. $\Psi \circ r \circ \Phi$ bildet die „Kugel" B stetig auf ihren „Rand" S ab und läßt die Punkte von S fest. Das geht aber nicht, da die n-Sphäre bekanntlich kein Retrakt der von ihr berandeten $(n + 1)$-dimensionalen Vollkugel ist.

Den Fall $\dim X > n + 1$ kann man auf den Fall $\dim X = n + 1$ zurückführen, wenn man nur weiß, daß X eine $(n + 1)$-dimensionale analytische Untermannigfaltigkeit besitzt. Solche Untermannigfaltigkeiten gibt es aber, wie man aus der Existenz globaler holomorpher Funktionen auf X unter Benutzung des Satzes von Sard schließen kann.

IV

Wir wollen noch für gewisse n die Quadrik Q_n durch andere komplexe Mannigfaltigkeiten ersetzen. Für $n = 2$ betrachten wir holomorphe Abbildungen in die Riemannsche Zahlensphäre S_2, d. h. meromorphe Funktionen ohne Unbestimmtheitsstellen, und für ungerade n also $n = 2k + 1$, holomorphe Abbildungen in $\mathbb{C}^*_{k+1} := \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$, also $k + 1$ holomorphe Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen. S_2 und $\mathbb{C}^*_{k+1}$ sind komplexe Mannigfaltigkeiten, auf denen eine komplexe Liesche Gruppe holomorph und transitiv wirkt.

Folgerung 1. *Für eine Steinsche Mannigfaltigkeit X gilt genau dann $\dim X \leq 2$, wenn jede auf einer analytischen Untermannigfaltigkeit von X definierte meromorphe Funktion ohne Unbestimmtheitsstellen zu einer auf X meromorphen Funktion ohne Unbestimmtheitsstellen fortgesetzt werden kann.*

Beweis. Daß unter der Voraussetzung $\dim X \leq 2$ die Fortsetzung möglich ist, folgt wie im Beweis des Satzes. Ist $\dim X > 2$, so gibt es eine analytische Untermannigfaltigkeit Y von X und eine holomorphe Abbildung $f: Y \to Q_2$, die sich nicht auf X fortsetzen läßt. Da S_2 Deformationsretrakt von Q_2 ist, läßt sich f in eine stetige Abbildung $Y \to S_2$ deformieren, die dann ebenfalls nicht fortsetzbar ist. Zu dieser stetigen Abbildung gibt es nach [7] eine homotope holomorphe Abbildung $Y \to S_2$, die damit auch nicht nach X fortgesetzt werden kann.

Folgerung 2. *Für eine Steinsche Mannigfaltigkeit X gilt genau dann $\dim X \leq 2k + 1$, wenn man stets $k + 1$ holomorphe Funktionen, die auf einer analytischen Untermannigfaltigkeit von X definiert sind und dort keine gemeinsamen Nullstellen haben, zu $k + 1$ holomorphen Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen auf X fortsetzen kann.*

Beweis. Die eine Richtung beweist man wieder wie den ersten Teil des Satzes. Man beachte dabei, daß $\pi_q(\mathbf{C}^*_{k+1}) = 0$ für $0 \leq q \leq 2k$. Ist aber $\dim X > 2k + 1$, so gibt es eine analytische Untermannigfaltigkeit Y von X und eine holomorphe Abbildung $f\colon Y \to Q_{2k+1}$, die sich nicht auf X fortsetzen läßt. Man deformiere wieder f zu einer stetigen Abbildung $Y \to S_{2k+1}$, die dann ebenfalls nicht fortsetzbar ist, auch nicht, wenn man sie als Abbildung $Y \to \mathbf{C}^*_{k+1}$ auffaßt. Nach [7] gibt es zu ihr eine homotope holomorphe Abbildung $Y \to \mathbf{C}^*_{k+1}$, die damit auch nicht nach X fortgesetzt werden kann.

Literatur

[1] A. Andreotti and R. Narasimhan: A topological property of Runge pairs. Ann. of Math. 76, 499–509 (1962).

[2] H. Cartan: Séminaire E. N. S. 1949/50 (hektographiert).

[3] B. Giesecke: Simpliziale Zerlegung abzählbarer analytischer Räume. Math. Z. 83, 177–213 (1964).

[4] R. C. Gunning and H. Rossi: Analytic functions of several complex variables. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice – Hall 1965.

[5] W. Hurewicz and H. Wallman: Dimension theory. Princeton: University Press 1948.

[6] R. Narasimhan: Analysis on real and complex manifolds. Amsterdam: North – Holland Publishing Company 1968.

[7] K. J. Ramspott: Stetige und holomorphe Schnitte in Bündeln mit homogener Faser. Math. Z. 89, 234–246 (1965).