

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1970

MÜNCHEN 1971

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über eine Verallgemeinerung der Hodographenabbildung

Von Robert Sauer in München

Herrn Oskar Perron zum 90. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

In der Aerodynamik stationärer ebener Strömungen benützt man neben der *Strömungsebene*, d. h. der Ebene, in der die Strömung verläuft (x_1, x_2 -Ebene), die *Hodographenebene*, in der die Vektoren $w = (u, v)$ der Strömungsgeschwindigkeit vom Nullpunkt aus aufgetragen werden (u, v)-Ebene. Bei Strömungen mit einem Geschwindigkeitspotential $\varphi(x_1, x_2)$ ist

$$(1.1) \quad w = \text{grad } \varphi, \text{ also } u = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.$$

Dies gilt nicht nur für inkompressible Medien (*Hydrodynamik*), bei denen φ einer linearen Differentialgleichung genügt, sondern auch für kompressible Medien (*Gasdynamik*) mit einer nicht-linearen Differentialgleichung für φ .

In der vorliegenden Note wird die Hodographenabbildung

$$(1.2) \quad u = u(x_1, x_2), \quad v = v(x_1, x_2)$$

dadurch verallgemeinert, daß fortan $\varphi(x_1, x_2)$ nicht mehr Lösung einer bestimmten Differentialgleichung zu sein braucht, sondern eine beliebige Funktion mit stetigen zweiten Ableitungen sein darf. Vorausgesetzt wird aber, daß in dem in Frage kommenden Bereich die Abbildung umkehrbar eindeutig ist, daß also die Gln. (1.2) die Auflösung

$$(1.3) \quad x_1 = x_1(u, v), \quad x_2 = x_2(u, v)$$

zulassen.

Die so definierte *verallgemeinerte Hodographenabbildung*, im Folgenden kurz *H-Abbildung* genannt, hat bemerkenswerte Eigenschaften. Sie werden besonders deutlich, wenn wir die u, v -

Ebene um $\frac{\pi}{2}$ im Gegensinn des Uhrzeigers drehen, so daß die u -Achse gleichläufig parallel zur x_2 -Achse und die v -Achse gegenläufig parallel zur x_1 -Achse wird (Fig. 1).

Wir setzen demgemäß

$$(1.4) \quad y_1 = -v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad y_2 = u = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

und benützen weiterhin statt der u, v -Ebene die y_1, y_2 -Ebene.

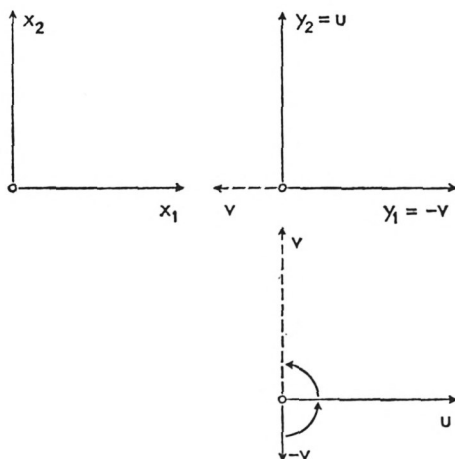


Fig. 1: Strömungsebene und Hodographenebene

Weil die Abbildung (1.2) umkehrbar eindeutig sein soll, wird

$$(1.5) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \geq 0$$

verlangt. Das heißt:

$$(1.6) \quad \text{Die auf der } x_1, x_2\text{-Ebene errichtete Fläche } x_3 = \varphi(x_1, x_2) \text{ soll positives oder negatives Krümmungsmaß haben.}$$

2. Abbildungsgleichungen der H-Abbildung

Wir führen die Vektoren $\mathfrak{x} = (x_1, x_2)$ und $\mathfrak{y} = (y_1, y_2)$ ein und stellen Abbildungen der x_1, x_2 -Ebene auf die y_1, y_2 -Ebene mit Hilfe der Parameter ξ, η durch

$$(2.1) \quad x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

dar. x und y sollen stetige Ableitungen haben. Dann ist

$$(2.2) \quad \begin{aligned} y_\xi &= \mu_1 x_\xi + \lambda x_\eta, \\ -y_\eta &= \nu x_\xi + \mu_2 x_\eta, \end{aligned}$$

wobei wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit

$$(2.3) \quad \lambda \nu - \mu_1 \mu_2 \neq 0$$

gilt. Die H -Abbildungen lassen sich dann folgendermaßen kennzeichnen:

$$(2.4) \quad \text{Eine Abbildung (2.1) ist dann und nur dann eine } H\text{-Abbildung, wenn in den Gln. (2.2) } \mu_1 = \mu_2 \text{ ist.}$$

Für die H -Abbildungen und nur für diese spezialisieren sich also die Gln. (2.2) und (2.3) zu

$$(2.5) \quad \begin{aligned} y_\xi &= \mu x_\xi + \lambda x_\eta, \\ -y_\eta &= \nu x_\xi + \mu x_\eta \end{aligned} \quad \text{mit } D = \lambda \nu - \mu^2 \neq 0.$$

Den Beweis des Satzes (2.4) zerlegen wir in folgende Schritte:

a) *Invarianz der Gln. (2.5) gegen Transformation der Parameter ξ, η*

Wir betrachten eine Parametertransformation

$$(2.6) \quad \xi' = \xi'(\xi, \eta), \quad \eta' = \eta'(\xi, \eta),$$

bei der ξ' und η' Funktionen mit stetigen Ableitungen sind, die der Ungleichung

$$(2.7) \quad \Delta = \frac{\partial(\xi', \eta')}{\partial(\xi, \eta)} = \xi'_\xi \eta'_\eta - \xi'_\eta \eta'_\xi \neq 0$$

genügen. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Gln. (2.5) übergehen in Gleichungen derselben Art, nämlich

$$(2.8) \quad \begin{aligned} y_{\xi'} &= \mu' y_{\xi'} + \lambda' y_{\eta'}, \\ -y_{\eta'} &= \nu' y_{\xi'} + \mu' y_{\eta'} \end{aligned} \quad \text{mit } D' = \lambda' \nu' - \mu'^2 = D = \lambda \nu - \mu^2.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
 \Delta \cdot \lambda' &= \lambda \eta_\xi'^2 + 2\mu \eta'_\xi \eta'_\eta + v \eta_\xi'^2, \\
 (2.9) \quad \Delta \cdot v' &= \lambda \xi_\eta'^2 + 2\mu \xi'_\eta \xi'_\xi + v \xi_\eta'^2, \\
 \Delta \cdot \mu' &= \lambda \xi'_\eta \eta'_\eta + \mu (\xi'_\eta \eta'_\eta + \xi'_\xi \eta'_\xi) + v \xi'_\eta \eta'_\xi.
 \end{aligned}$$

b) *Einführung der speziellen Parameter* $\xi' = x_1, \quad \eta' = x_2$

Wegen der in Abschnitt a) bewiesenen Parameterinvarianz können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit spezielle Parameter einführen, und zwar

$$(2.10) \quad \xi' = x_1, \quad \eta' = x_2.$$

Dann liefern die Gln. (2.5)

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} &= \mu, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \lambda, \\
 -\frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= v, \quad -\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \mu
 \end{aligned}
 \quad \text{mit } D = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \lambda v - \mu^2 \neq 0.$$

c) *Jede H-Abbildung erfüllt die Bedingungen (2.5)*

Aus den eine H-Abbildung definierenden Beziehungen

$$y_1 = -v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad y_2 = u = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1},$$

in denen φ eine Funktion mit stetigen zweiten Ableitungen ist, folgt sofort

$$\mu = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \mu.$$

Die Gln. (2.11) sind also erfüllt.

d) *Jede Abbildung, welche die Bedingungen (2.5) erfüllt, ist eine H-Abbildung*

Wir benützen wieder anstelle der Bedingungen (2.5) die speziellen Bedingungen (2.11). Aus diesen folgt wegen $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial y_2}{\partial x_2}$ sofort die Existenz eines vollständigen Differentials

$$(2.12) \quad d\varphi = y_2 dx_1 - y_1 dx_2.$$

Es existiert also eine bis auf eine additive Konstante festgelegte Funktion φ , aus der sich

$$y_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad y_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

ergibt.

3. Besondere Kurvennetze bei H-Abbildungen

Wenn bei der Parametersubstitution (2.6) sich in den Gln. (2.8) entweder $\mu' = 0$ oder $\lambda' = \nu' = 0$ ergibt, wenn sich also die Gln. (2.8) entweder zu

$$(3.1) \quad \eta_{\xi} = \lambda x_{\eta'}, \quad - \eta_{\eta'} = \nu' x_{\xi'} \quad \text{mit } \lambda' \nu' \neq 0$$

oder zu

$$(3.2) \quad \eta_{\xi'} = \mu x_{\xi}, \quad - \eta_{\eta'} = \mu x_{\eta'} \quad \text{mit } \mu' \neq 0$$

spezialisieren, nennen wir die sich entsprechenden Netze der Parameterkurven $\xi' = \text{const}$, $\eta' = \text{const}$ in der x_1, x_2 -Ebene und der y_1, y_2 -Ebene im ersten Fall *reziprok-parallel* und im zweiten Fall *anti-parallel*. Mit

$\xi'_{\xi} d\xi_1 + \xi'_{\eta} d\eta_1 = 0$, also $\xi'_{\xi} : \xi'_{\eta} = -d\eta_1 : d\xi_1$ für $\xi'(\xi, \eta) = \text{const}$ und

$\eta'_{\xi} d\xi_2 + \eta'_{\eta} d\eta_2 = 0$, also $\eta'_{\xi} : \eta'_{\eta} = -d\eta_2 : d\xi_2$ für $\eta'(\xi, \eta) = \text{const}$

erhält man aus den Gln. (2.9) als Differentialgleichung für die beiden Kurvenscharen reziprok-paralleler Netze ($\mu' = 0$)

$$(3.3) \quad \lambda d\xi_1 d\xi_2 + \mu(d\xi_1 d\eta_2 + d\xi_2 d\eta_1) + \nu d\eta_1 d\eta_2 = 0$$

und als Differentialgleichung der Kurvenscharen eines Paares antiparalleler Netze ($\lambda' = \nu' = 0$)

$$(3.4) \quad \lambda d\xi d\xi_i^2 - 2\mu d\xi d\xi_i d\eta d\eta_i + \nu d\eta d\eta_i^2 = 0 \quad \text{mit } i = 1 \text{ und } i = 2.$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

Bei jeder H-Abbildung gibt es unendlich viele Paare reziprok-paralleler Kurvennetze. Die eine Schar der Netzkurven kann beliebig vorgegeben werden, wobei allerdings

die der Gl. (3.4) genügenden Tangentenrichtungen verboten sind. Die andere Kurvenschar ist dann durch die Differentialgleichung (3.3) festgelegt.

Bei H-Abbildungen mit $D = \lambda\nu - \mu^2 < 0$ und nur bei diesen gibt es anti-parallele Kurvennetze, und zwar existiert bei jeder solchen Abbildung genau ein Paar anti-paralleler Kurvennetze. Die Netzkurven sind die Integralkurven der Differentialgleichung (3.4). Nach den Gln.

(1.5) und (2.11) ist $D < 0$ dann und nur dann erfüllt, wenn das Krümmungsmaß der Fläche $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$ negativ ist.

Nach den Gln. (2.11) ist $D < 0$ außerdem kennzeichnend für gegensinnige Abbildungen, d. h. für Abbildungen, bei denen der Umlaufsinn einfach zusammenhängender endlicher Bereiche umgekehrt wird. Infolgedessen ergibt sich aus Satz (3.6):

(3.7) *Bei einer H-Abbildung existiert ein Paar anti-paralleler Kurvennetze dann und nur dann, wenn die Abbildung gegensinnig ist.*

Satz (2.4) ist erfüllt, wenn von einer Abbildung feststeht, daß ein Paar reziprok-paralleler oder ein Paar anti-paralleler Kurvennetze existiert. Man hat also folgenden weiteren Satz:

(3.8) *Eine umkehrbar eindeutige Abbildung der x_1, x_2 -Ebene auf die y_1, y_2 -Ebene mit stetig differenzierbaren Abbildungsfunktionen $y_1(x_1, x_2)$ und $y_2(x_1, x_2)$ ist eine H-Abbildung, wenn ein Paar reziprok-paralleler oder anti-paralleler Kurvennetze existiert.*

4. Geometrische Kennzeichnung der reziprok-parallelen und der anti-parallelen Kurvennetze

Aus den Gln. (3.1) ergeben sich für reziprok-parallele Kurvennetze folgende kennzeichnenden Eigenschaften (Fig. 2):

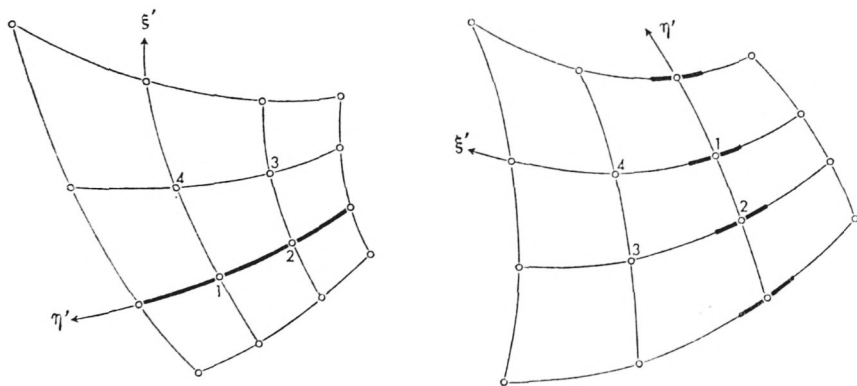


Fig. 2: Reziprok-parallele Kurvennetze

- (4.1) In entsprechenden Punkten der x_1, x_2 -Ebene und der y_1, y_2 -Ebene sind die Tangenten der einen Kurvenschar ($\xi' = \text{const}$ bzw. $\eta' = \text{const}$) parallel zu den Tangenten der jeweils anderen Kurvenschar ($\eta' = \text{const}$ bzw. $\xi' = \text{const}$). Die Tangenten längs einer Netzkurve („Längstangenten“) sind also parallel zu den Tangenten der anderen Kurvenschar längs der entsprechenden Netzkurve („Quertangenten“).

Aus den Gln. (3.2) ergeben sich für anti-parallele Kurvennetze folgende kennzeichnenden Eigenschaften (Fig. 3):

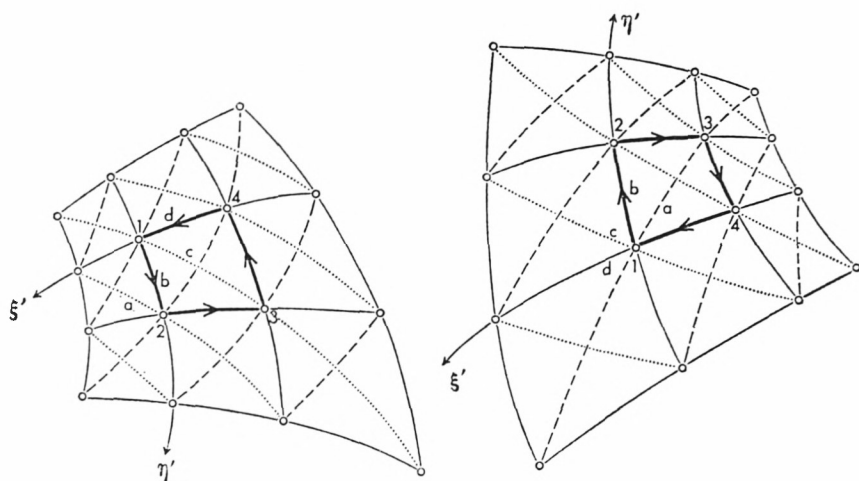


Fig. 3: Anti-parallele Kurvennetze

- (4.2) In entsprechenden Punkten der x_1, x_2 -Ebene und der y_1, y_2 -Ebene sind die Tangenten beider Kurvenscharen ($\xi' = \text{const}$ bzw. $\eta' = \text{const}$) parallel zu den Tangenten der jeweils entsprechenden Kurvenschar ($\xi' = \text{const}$ bzw. $\eta' = \text{const}$). Außerdem sind die Tangenten der Diagonalkurven $U = f(\xi') + g(\eta') = \text{const}$, $V = f(\xi') - g(\eta') = \text{const}$, wobei $f(\xi')$ und $g(\eta')$ willkürliche stetig differenzierbare Funktionen sind, parallel zu den Tangenten der jeweils anderen Diagonalkurvenschar $V = \text{const}$ bzw. $U = \text{const}$. Die Diagonalkurvennetze $U = \text{const}$, $V = \text{const}$ sind daher reziprok-parallele Kurvennetze.

Den letzten Teil des Satzes (4.2) sieht man folgendermaßen ein: Bei der Parametersubstitution $U = f(\xi') + g(\eta')$, $V = f(\xi') - g(\eta')$ transformieren sich die Gln. (3.2) wegen

$$\frac{\partial}{\partial \xi'} = \frac{df}{d\xi'} \left(\frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial V} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta'} = \frac{dg}{d\eta'} \left(\frac{\partial}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial V} \right)$$

in die Gleichungen

$$\eta_U = \mu' r_V, \quad \eta_V = \mu' r_U$$

also einen Spezialfall der Gln. (3.1) mit $\lambda' \Rightarrow \mu'$, $\nu' \Rightarrow -\mu'$.

5. Legendre-Transformation

Mit Rücksicht auf die Gln. (1.4) folgt aus

$$d(x_1 y_2 - x_2 y_1) = y_2 dx_1 - y_1 dx_2 + x_1 dy_2 - x_2 dy_1 = d\varphi(x_1, x_2) - (x_2 dy_1 - x_1 dy_2),$$

daß auch

$$d\chi(y_1, y_2) = x_2 dy_1 - x_1 dy_2$$

ein vollständiges Differential ist. Zwischen der x_1, x_2 -Ebene und der y_1, y_2 -Ebene bestehen sonach die Beziehungen der *Legendre-Transformation*

$$(5.1) \quad d\varphi(x_1, x_2) = y_2 dx_1 - y_1 dx_2, \text{ also } y_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad y_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1},$$

$$d\chi(y_1, y_2) = x_2 dy_1 - x_1 dy_2, \text{ also } x_1 = -\frac{\partial \chi}{\partial y_2}, \quad x_2 = \frac{\partial \chi}{\partial y_1}$$

und

$$(5.2) \quad \varphi(x_1, x_2) - \chi(y_1, y_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

ofern man bei φ und χ über die beliebigen additiven Konstanten passend verfügt.

Man kann diese Beziehungen auch im Rahmen der *infinitesimalen Flächenverbiegung*¹ deuten: Wir gehen von der Ebene in den Raum und setzen

$$(5.3) \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, 0), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, 0), \quad \bar{\mathbf{r}} = (0, 0, -\varphi), \\ \bar{\mathbf{y}} = (0, 0, -\chi).$$

¹ Vgl. z. B. R. Sauer: Projektive Liniengeometrie. Walter de Gruyter, Berlin-Leipzig, 1934, 9. Kapitel.

Dann bestehen die Beziehungen

$$(5.4) \quad d\mathfrak{x}d\bar{\mathfrak{x}} = d\mathfrak{y}d\bar{\mathfrak{y}} = 0,$$

$$(5.5) \quad d\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{y} \times d\mathfrak{x}, \quad d\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x} \times d\mathfrak{y}.$$

Hiernach sind die Deformationen

$$(5.6) \quad \mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + \varepsilon\bar{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{y}^* = \mathfrak{y} + \varepsilon\bar{\mathfrak{y}} \text{ mit } \varepsilon = \text{const}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ *infinitesimale Verbiegungen* der x_1, x_2 -Ebene und der y_1, y_2 -Ebene. Der zugehörige *Drehriß* und *Verschiebungsriß* ist im ersten Fall durch $\mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$ und im zweiten Fall durch $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ gegeben.

Man beachte, daß die durch die Gln. (5.6) definierten infinitesimalen Verbiegungen mit willkürlichen Funktionen $\varphi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ bzw. $\chi(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$ sich nicht aus Verbiegungen der x_1, x_2 -Ebene bzw. der y_1, y_2 -Ebene in abwickelbare Flächen (= Tangentenflächen, Kegel, Zylinder) herleiten lassen.