

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1969

MÜNCHEN 1970

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eine projektive Kennzeichnung der höheren Hyperbeln und Parabeln

Von Josef Lense in München

Vorgelegt am 18. April 1969

Mit 8 Abbildungen

Wir betrachten eine ebene algebraische Kurve mit einem m -fachen und einem n -fachen Punkt. Die m Tangenten des m -fachen Punktes sollen zusammenfallen und ebenso die n Tangenten des n -fachen Punktes. Die Ordnung der Kurve sei $m + n$. Ferner wollen wir verlangen, daß sämtliche $m + n$ Schnittpunkte der Kurve mit ihrer Tangente im m -fachen Punkt in diesem vereinigt sein sollen. Das gleiche gelte für den n -fachen Punkt.

Wir wollen nun die Gestalt der Kurvengleichung in homogenen projektiven Punktkoordinaten aufstellen. Wir legen die beiden Eckpunkte O_1 und O_2 des Koordinatendreieckes in den n -fachen bzw. m -fachen Punkt, die beiden Seiten $O_1 O_3$ und $O_2 O_3$ in die betreffenden Tangenten. Wenn wir das homogene Gleichungspolynom nach fallenden Potenzen von x_1 ordnen, so beginnt es (vgl. z. B. [1], S. 193) mit x_1^m ; als Faktor tritt x_2^n hinzu, entsprechend den n in der Geraden $x_2 = 0$ zusammenfallenden Tangenten. Dieselbe Überlegung bezüglich O_2 ausgeführt, liefert ebenfalls das Glied $x_1^m x_2^n$.

Wenn wir jetzt nach steigenden Potenzen von x_3 ordnen, so sehen wir, daß keine Glieder mit der ersten Potenz von x_3 auftreten können. Denn nach dem Vorhergehenden sind höhere Potenzen von x_1 und x_2 als die m -te bzw. n -te unmöglich und x_1^m kann nur mit x_2^n multipliziert sein. Berücksichtigen wir ferner, daß die Tangenten $x_2 = 0$ bzw. $x_1 = 0$ je $m + n$ Schnittpunkte in O_1 bzw. O_2 haben, also $x_3^{m+n} = 0$ liefern müssen, so folgt, daß keine Glieder mit x_3^{m+n-1} auftreten können, wohl aber das Glied x_3^{m+n} vorhanden sein muß. Die übrigen Potenzen von x_3 , also von der zweiten bis zur $(m + n - 2)$ -ten, sind

derart mit Potenzen von x_1 und x_2 multipliziert, daß jedes Glied die Dimension $m + n$ hat, aber die Potenzen von x_1 bzw. x_2 die $(m - 1)$ -te bzw. $(n - 1)$ -te nicht übersteigen und gemäß den eben gemachten Erörterungen über x_3 in jedem Glied sowohl eine Potenz von x_1 als auch x_2 vorkommt. Man erhält demnach, wenn z. B. $m \geq n$ ist, ein Glied mit x_3^2 , nämlich $x_1^{m-1} x_2^{n-1} x_3^2$, zwei Glieder mit x_3^3 , nämlich $x_1^{m-1} x_2^{n-2} x_3^3$ und $x_1^{m-2} x_2^{n-1} x_3^3$, drei mit x_3^4 u. s. f., $n - 1$ Glieder mit x_3^n , dann eben so viele mit x_3^{n+1} bis x_3^m , ferner $n - 2$ mit x_3^{n+1} , $n - 3$ mit x_3^{n+2} usw., schließlich das Glied $x_1 x_2 x_3^{m+n-2}$, im ganzen daher $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + (m - n) (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 1 = \frac{1}{2} n(n - 1) + (m - n) (n - 1) + \frac{1}{2} (n - 1) (n - 2) = (m - 1) (n - 1)$ Glieder.

Wir wollen nun insbesondere die Kurve näher untersuchen, bei der die eben genannten Glieder fehlen. Wir können ihre Gleichung in der Gestalt $x_3^{m+n} = c x_1^m x_2^n$ voraussetzen. d sei der größte gemeinsame Teiler von m und n , $m = d m'$, $n = d n'$. Ist $c > 0$, so führen wir durch passende Wahl des Einheitspunktes $c^{\frac{1}{n}} x_2$ als neue Veränderliche ein und erheben beide Seiten der Gleichung in die Potenz $\frac{1}{d}$. Wenn wir uns auf reelle Kurvenpunkte beschränken, erhalten wir $x_3^{m'+n'} = \pm x_1^{m'} x_2^{n'}$ für gerades d , während für ungerades d das negative Zeichen wegfällt. Ist $c < 0$, so besteht die Kurve bei geradem d nur aus den beiden mehrfachen Punkten. Bei ungeradem d muß eine der beiden Zahlen m und n , also z. B. n ungerade sein. Dann ergibt sich nach derselben Überlegung wie vorher wieder die letzte Form der Gleichung mit dem positiven Vorzeichen.

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Gleichung der Kurve in der Gestalt $x_3^{m+n} \pm x_1^m x_2^n = 0$ voraussetzen, wobei jetzt m und n teilerfremd sind und nur die beiden Fälle: m gerade, n ungerade oder beide ungerade zu unterscheiden sind. Je nach Bedarf wählen wir das positive oder negative Vorzeichen, indem wir den Faktor -1 in x_2 hineinziehen, was wegen des negativen n reell möglich ist. Die Vorzeichenänderung bedeutet, daß jeder Kurvenpunkt in den von ihm durch O_2 und die Gerade $O_1 O_3$ harmonisch getrennten Punkt übergeht.

Um das Verhalten der Kurve bei O_1 festzustellen, wählen wir das negative Zeichen und fassen durch eine entsprechende projektive Transformation $O_1 O_3$ als x -Achse, $O_1 O_2$ als y -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und $O_2 O_3$ als uneigentliche Gerade der Ebene auf, identifizieren also x_1 mit 1, x_2 mit y , x_3 mit x , wodurch sich $y = x^{\frac{m+n}{n}}$ ergibt. Die Kurve durchsetzt sonach im ersten Fall im Punkt O_1 beide Achsen, verhält sich also ähnlich wie bei einem Wendepunkt, im zweiten nur die y -Achse, demnach hier ähnlich einem Flachpunkt. Um das Verhalten bei O_2 zu untersuchen, haben wir nur die Rollen von x_1 und x_2 zu vertauschen, d. h. $O_2 O_3$ als x -Achse und $O_1 O_3$ als uneigentliche Gerade aufzufassen, somit die Gleichung $y^m = x^{m+n}$ zu betrachten. Jetzt erhält man im ersten Falle $y = \pm x^{\frac{m+n}{m}}$ (nur $x \geq 0$), also die Gestalt einer Spitze, im zweiten $y = x^{\frac{m+n}{m}}$, demnach nur ein Durchsetzen der y -Achse ähnlich einem Flachpunkt. Es entstehen somit folgende beiden Typen: Fall 1: Bild 1, Fall 2: Bild 2.

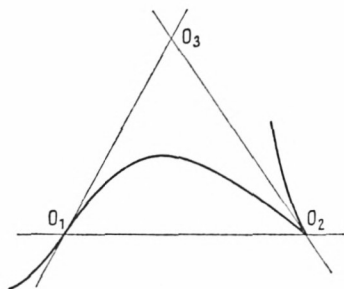


Bild 1

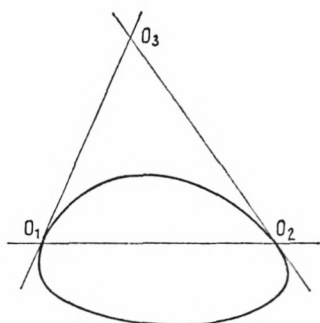


Bild 2

Um die Kurvenbilder vollends zu rechtfertigen, haben wir noch zu zeigen, daß die Kurve außer den beiden mehrfachen Punkten keine weiteren mehrfachen Punkte und auch keine einfachen Wende- und Flachpunkte besitzt. Nach der Polarentheorie der ebenen algebraischen Kurven werden die Wende-, Flach- und mehrfachen Punkte aus der Kurve durch ihre Hessesche Kurve ausgeschnitten (vgl. z. B. [1], S. 183–188). Die Gleichung dieser Kurve erhält man, indem man die aus den partiellen zweiten Ableitungen des Gleichungspolynoms der gegebenen Kurve

gebildete Hessesche Determinante gleich null setzt. Es ergibt sich als Hessesche Kurve $x_1^{2m-2} x_2^{2n-2} x_3^{m+n-2} = 0$. Sie zerfällt also in die entsprechend oft gezählten Seiten des Koordinatendreieckes, schneidet demnach die gegebene Kurve nur in den beiden mehrfachen Punkten, womit die Behauptung bewiesen ist. Weil die Gleichung der gegebenen Kurve durch $x_1 : x_2 : x_3 = \lambda^{m+n} : \mu^{m+n} : \lambda^m \mu^n$ befriedigt wird, die Kurve somit eine rationale Parameterdarstellung besitzt, ist ihr Geschlecht $p = 0$. Sie wird in *einem* reellen Zug durchlaufen (vgl. z. B. [1], S. 199–200).

Wir wollen nun die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten aufstellen. Zu diesem Zweck ist es praktischer, die Gleichung in Punktkoordinaten in der Gestalt $x_3^{m+n} + x_1^m x_2^n = 0$ zu schreiben. Durch Polarisierung der Kurvengleichung erhält man $m x_1^{m-1} y_1 + n x_2^{n-1} y_2 + (m+n) x_3^{m+n-1} y_3 = 0$. Dies ist die Gleichung der Kurventangente im Kurvenpunkt mit den Punktkoordinaten x_v ($v = 1, 2, 3$), geschrieben in den laufenden Koordinaten y_v . Die Koeffizienten der y_v sind die Linienkoordinaten u_v der Tangente. Drückt man damit die x_v durch die u_v aus und setzt die Ergebnisse in die Kurvengleichung ein, so erhält man

$$\left(\frac{u_3}{m+n}\right)^{m+n} + \left(\frac{u_1}{m}\right)^m \left(\frac{u_2}{n}\right)^n = 0$$

als Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten. Die Klasse der Kurve ist also gleich ihrer Ordnung $m+n$.

Wir wollen jetzt die Seiten des Koordinatendreieckes als x - und y -Achse eines rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinatensystems und die dritte Seite als uneigentliche Gerade der Ebene auffassen, d. h. wir verteilen $x, y, 1$ auf x_1, x_2, x_3 , und zwar auf alle möglichen Arten. Es gibt sechs Möglichkeiten, wir können uns aber auf drei beschränken, weil die Vertauschung von x mit y nur Achsenvertauschung bedeutet. Aus der Kurvengleichung $x_1^m x_2^n = x_3^{m+n}$ erhält man so die drei Gleichungen $y^n = x^{m+n}$, $y^m = x^{m+n}$, $x^m y^n = 1$. Bei der ersten liegt der Nullpunkt des Koordinatensystems im n -fachen Punkt der Kurve, der uneigentliche Punkt der y -Achse im m -fachen Punkt, also, der eine mehrfache Punkt im Endlichen, der andere im Unendlichen, bei der zweiten sind die beiden Punkte miteinander vertauscht, die entsprechenden Kurven sind die sogenannten höheren

Parabeln (vgl. z. B. [2], S. 305 u. 317). Bei der dritten Gleichung schließlich liegen beide mehrfachen Punkte in Unendlichen, nämlich in den uneigentlichen Punkten der Koordinatenachsen, die Kurven sind die höheren Hyperbeln.

Wir haben jetzt noch die beiden Fälle m gerade, n ungerade oder beide ungerade zu berücksichtigen, womit sich dann sechs Möglichkeiten ergeben, und wollen folgende Benennungen einführen: Wenn die Kurve im Schnittpunkt zweier Koordinatenachsen (auch die uneigentliche Gerade der Ebene soll als „Achse“ gelten) die eine berührt und beide durchsetzt, heiße der Punkt, auch wenn er ein mehrfacher ist, Wendepunkt; wenn sie nur eine durchsetzt, aber die berührte nicht, Flachpunkt, und wenn sie schließlich auf beiden Seiten der berührten liegt, aber die andere nicht durchsetzt, Spitze. Damit erhält man folgende fünf Typen:

- 1) Wendepunkt im Endlichen, Spitze im Unendlichen (Bild 3),
- 2) Spitze im Endlichen, Wendepunkt im Unendlichen (Bild 4),
- 3) Flachpunkt im Endlichen und Unendlichen (Bild 5),
- 4) Wendepunkt und Spitze im Unendlichen (Bild 6),
- 5) Flachpunkte im Unendlichen (Bild 7).

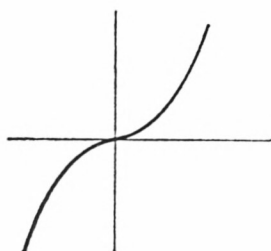


Bild 3

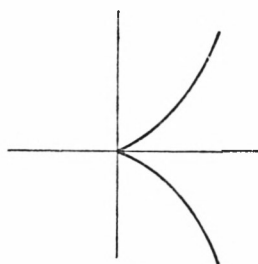


Bild 4

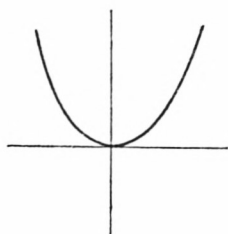


Bild 5

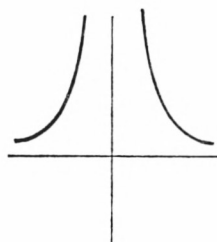


Bild 6

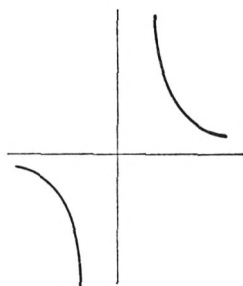


Bild 7

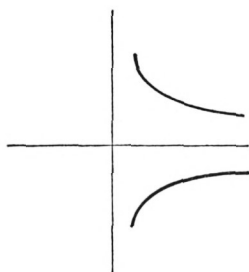


Bild 8

Die Bilder 3, 4, 6 entsprechen dem Bild 1, je nachdem welche der drei Eckpunkte des Dreieckes im Unendlichen liegen, ebenso die Bilder 5 und 7 dem Bild 2. Daß hier nur zwei statt drei, also im ganzen nur fünf statt sechs Typen auftreten, rührt daher, daß zwischen den beiden Flachpunkten im Sinne der eben definierten Gestaltsbenennung kein Unterschied besteht.

Die drei Gestalten der höheren Parabeln kann man mit positiven ganzen teilerfremden Zahlen p und q in der Gleichung $y^q = x^p$ zusammenfassen mit

- 1) p und q ungerade,
- 2) p ungerade, q gerade,
- 3) p gerade, q ungerade,

die zwei der höheren Hyperbeln in der Gleichung $x^p y^q = 1$ mit

- 4) p gerade, q ungerade,
- 5) p und q ungerade.

Im sechsten Typus: p ungerade, q gerade (Bild 8) wäre nur die x -Achse mit der y -Achse vertauscht.

Weil gemäß diesen Überlegungen die höheren Parabeln und Hyperbeln mit den betrachteten Kurven der Gleichung $x_3^{m+n} - x_1^m x_2^n = 0$ bei passender Wahl des Koordinatensystems identisch sind, genügen die am Anfang gestellten Bedingungen für eine Kurve mit zwei mehrfachen Punkten nicht, um diese Parabeln und Hyperbeln projektiv zu kennzeichnen, da die $(m-1)(n-1)$ Glieder, die Potenzen von allen drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 enthalten, bei diesen Bedingungen nur weg-

fallen, wenn m oder $n = 1$ ist. Wenn aber das der Fall, also z. B. $n = 1$ ist, dann setzen wir $m = n - 1$, damit n die Ordnung der Kurve sei, und erhalten folgenden Satz 1:

Eine ebene algebraische Kurve von der Ordnung n mit einem $(n - 1)$ -fachen Punkt, dessen $n - 1$ Tangenten zusammenfallen, und einem einfachen Wende- bzw. Flachpunkt, in dem die n Schnittpunkte seiner Tangente mit der Kurve vereinigt sind, ist eine höhere Parabel oder Hyperbel bei passender Wahl des Koordinatensystems.

Allerdings treten in diesem Satz, wenn wir von den betreffenden Umkehrungsfunktionen absehen, nur die höheren Hyperbeln und Parabeln mit ganzzahligen Exponenten auf, bei letzteren auch jene mit solchen gebrochenen Exponenten, in denen sich Zähler und Nenner nur um 1 unterscheiden.

Wir suchen nun auch für die allgemeinen höheren Hyperbeln und Parabeln eine projektive Kennzeichnung zu erhalten und beachten zu diesem Zweck ihre Hessesche Kurve. Sie zerfällt in die entsprechend oft gezählten Tangenten der beiden mehrfachen Punkte und deren Verbindungsgerade. Diese Eigenschaften sind projektiv invariant, die Hessesche Kurve selbst ist projektiv kovariant mit der gegebenen Kurve als Ort derjenigen Punkte, für welche der Polarkegelschnitt der gegebenen Kurve zerfällt.

Wir fordern also zu den projektiven Eigenschaften der beiden mehrfachen Punkte vom Anfang unserer Betrachtungen noch, daß die Hessesche Kurve in die Tangenten der beiden mehrfachen Punkte und deren Verbindungsline zerfallen soll, wobei die Tangente im m -fachen $(2m - 2)$ -mal gezählt werden soll, die im n -fachen $(2n - 2)$ -mal und die Verbindungsline $(m + n - 2)$ -mal. Die Summe dieser Zahlen $3(m + n - 2)$ stimmt mit dem Grad der Hesseschen Kurve überein.

Wir verwenden wieder das am Anfang benützte Koordinatendreieck und ordnen die Gleichung der gegebenen Kurve nach fallenden Potenzen von x_1 . Das Gleichungspolynom beginnt, wie wir wissen, mit $x_1^m x_2^n$, hat demnach gemäß den Ergebnissen am Anfang unserer Betrachtungen die Gestalt

$$c x_1^m x_2^n + x_1^{m-1} \varphi_1(x_2, x_3) + x_1^{m-2} \varphi_2(x_2, x_3) + \dots + x_1 \varphi_{m-1}(x_2, x_3) + x_3^{u+n} = 0.$$

Wir haben nun die Gleichung der Hesseschen Kurve aufzustellen. Wie wir sehen werden, genügt es, die Glieder höchsten Grades in x_1 zu berücksichtigen. Wir schreiben zu diesem Zweck die Kurvengleichung in der Gestalt

$$x_1^m x_2^n + x_1^{m-k} \varphi_k(x_2, x_3) + \dots = 0,$$

wobei wir je nach Bedarf $k = 1, 2, \dots, m-1$ setzen. Damit ergibt sich nach längerer Rechnung für die Hessesche Kurve die Gleichung

$$m n (1 - m - n) x_1^{3m-2-k} x_2^{2n-2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_3^2} + \dots = 0.$$

Da sich aber als Gleichung gemäß den aufgestellten Forderungen $x_1^{2m-2} x_2^{2n-2} x_3^{m+n-2} = 0$ ergeben soll, muß $\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_3^2} = 0$ sein, solange $3m-2-k > 2m-2$, also $k < m$ ist. Somit ist

$$\varphi_k(x_2, x_3) = x_3 \psi_k(x_2) + \chi_k(x_2).$$

Nun setzen wir $k = 1$. Weil nach den Bedingungen über die beiden mehrfachen Punkte x_3 niemals in der ersten Potenz auftritt, ist $\psi_1(x_2) = 0$ und ebenso $\chi_1(x_2) = 0$, da Glieder von der Gestalt $x_1^{m-1} \chi_1(x_2)$ nicht vorkommen können. Dieselbe Überlegung können wir dann für $k = 2$, dann für $k = 3$ usw. bis $k = m-1$ machen. Es sind also sämtliche $\varphi_k(x_2, x_3) = 0$, d. h. die Gleichung der gegebenen Kurve kann nur die Glieder $x_1^m x_2^n$ und x_3^{m+n} enthalten, womit alles erreicht ist. Es ergibt sich folgender Satz 2:

Eine ebene algebraische Kurve besitze zwei mehrfache Punkte mit zusammenfallenden Tangenten, einem m -fachen und einem n -fachen, m und n teilerfremd, die Ordnung der Kurve sei $m+n$. Die $m+n$ Schnittpunkte jeder dieser Tangenten sollen im jeweiligen mehrfachen Punkt vereinigt sein. Ferner soll die Hessesche Kurve der gegebenen Kurve in die $(2m-2)$ -fache gezählte Tangente des m -fachen Punktes, in die $(2n-2)$ -fach gezählte Tangente des n -fachen Punktes und in die $(m+n-2)$ -fach gezählte Verbindungsgerade der beiden mehrfachen Punkte zerfallen. Die so projektiv gekennzeichneten Kurven sind iden-

tisch mit den höheren Hyperbeln und Parabeln bei passender Wahl des Koordinatensystems.

Ist der eine der beiden Punkte ein einfacher, der andere bei der Ordnung n der Kurve somit ein $(n - 1)$ -facher, so kann man die Bedingungen über die Hessesche Kurve weglassen. Diese zerfällt dann von selbst in die $(2n - 4)$ -fach gezählte Tangente des $(n - 1)$ -fachen Punktes und in die $(n - 2)$ -fach gezählte Verbindungsgerade des einfachen und mehrfachen Punktes. Die Exponenten der Hyperbeln und Parabeln sind jetzt bei passender Wahl des Koordinatensystems ganze Zahlen oder Brüche, deren Zähler und Nenner sich nur um 1 unterscheiden.

Literatur

- [1] J. Lense, Analytische projektive Geometrie, R. Oldenbourg, München-Wien 1965.
- [2] G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, 2. Aufl., Bd. 1: Die algebraischen Kurven, deutsche Ausgabe von F. Schütte, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1910.