

MONUMENTA SAECULARIA.

HERAUSGEBEN

VON DER

KÖNIGLICH BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

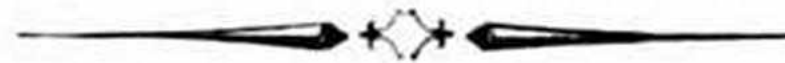
ZUR

FEIER IHRES HUNDERTJÄHRIGEN BESTEHENS

AM 28. MÄRZ 1859.

II. CLASSE.

L. SEIDEL: UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE LICHTSTÄRKE DER PLANETEN
VENUS, MARS, JUPITER UND SATURN.



MÜNCHEN.

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

UNTERSUCHUNGEN
ÜBER DIE
LICHTSTÄRKE DER PLANETEN
VENUS, MARS, JUPITER UND SATURN,
VERGLICHEN MIT STERNEN,
UND ÜBER
DIE RELATIVE WEISSE IHRER OBERFLÄCHEN.

NEBST EINEM ANHANGE,
ENTHALTEND
DIE THEORIE DER LICHTERSCHEINUNG DES SATURN.

VON
LUDWIG SEIDEL.

MÜNCHEN 1859.
IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

In dem Anhang der in den Denkschriften des Jahres 1852 abgedruckten „Untersuchungen über die gegenseitigen Helligkeiten der Sterne erster Grösse etc.“ habe ich einige Vergleichen der Planeten Mars und Jupiter mit Fixsternen besprochen, welche mittelst des Steinheil'schen Objectiv-Photometers erlangt worden waren. Die Beobachtung der Helligkeiten der Planeten ist aus dem Grunde besonders anziehend, weil man (was bei den Fixsternen nicht der Fall ist) ihre Ergebnisse mit einer Theorie vergleichen kann, und somit ein Material für weitere Schlüsse erhält, welches um so werthvoller ist, da es zu einiger Erweiterung unserer geringen Kenntnisse von der physikalischen Beschaffenheit der Körper des Sonnensystemes beiträgt: diese Rücksicht einerseits, und neben ihr auch die geringe Lichtstärke des von uns benützten Instrumentes, welche uns zunächst auf die Beobachtung heller Objecte hinwies, hat meinen Mitarbeiter, Herrn Prof. Leonhard, und mich veranlasst, nach der Wiederaufnahme unserer Messungen im Jahre 1852, und namentlich in diesem Jahre selbst, einen nicht geringen Theil unserer Aufmerksamkeit auf die Verfolgung der Lichtverhältnisse der hellen Planeten zu verwenden. Im Jahre 1853 habe ich (in den Gelehrten Anzeigen vom 5. und 7. September) das Wesentlichste von den uns damals vorliegenden Resultaten, betreffend die Planeten Venus, Mars und Jupiter, in Kürze mitgetheilt. In dem gegenwärtigen Aufsätze beabsichtige ich, das umfassendere Material, welches bis heute erlangt worden ist, und welches sich auch auf Beobachtungen des Saturn erstreckt, in einer vorläufig mit demselben abschliessenden Bearbeitung darzulegen.

1.

Das Princip, auf welchem die Messung mit dem Steinheil'schen Photometer (Objectiv-, oder Prismen-Photometer von dem Erfinder genannt) beruht, setze ich als bekannt voraus aus der durch eine Abbildung erläuterten Beschreibung Steinheil's in seinen „Elementen der Helligkeitsmessungen am Sternhimmel,“ Beilage II (Denkschriften der Akademie mathem.-phys. Classe, Bd. II. 1836) oder auch aus §. 1. meiner Eingangs citirten Abhandlung. Ich habe daher nur zu bemerken, dass unsere Vergleichen der Planeten mit Sternen oder unter einander ganz und gar auf dieselbe Weise gemacht sind, wie die der Sterne unter sich. Bei den geringen Dimensionen des Instrumentes (von nur 158 pariser Linien Brennweite) bilden sich nämlich die Planeten als so kleine Scheiben ab, dass bei einer nur einigermaßen beträchtlichen Verschiebung des Objectives gegen das Ocular ihr Licht sich wesentlich nach demselben Gesetze ausbreitet wie das eines Sternes, und dass man also mittelst derselben Rechnungsvorschrift, wie bei Sternen, aus den gemachten Ablesungen des Instrumentes das Helligkeits-Verhältniss findet. Ein gewisser Unterschied zwischen dem planetarischen und dem Sternlichte existirt allerdings für das Auge bei der Betrachtung im Photometer: nämlich abgesehen von dem Umstande, dass das letztere sehr selten die Ruhe des ersteren besitzt, so zeigt auch das von dem Stern herrührende Lichtphantom eine gewisse Durchsichtigkeit, einen metallähnlichen Glanz, welche dem Planetenlichte abgehen, und in der That die Vergleichung erschweren. Die Ursache dieses Unterschiedes ist leicht zu erkennen: weil nämlich bei der Betrachtung des Sternphantoms jeder Punkt der Retina von einem einzigen Strahl getroffen wird, so projeciren sich alle kleinen Staubkörnchen auf den Gläsern etc., welche den Strahl interceptiren, durch ihre Schattenbilder auf die Netzhaut, und geben so der Erscheinung eine leichte Zeichnung und jene geringe Ungleichmässigkeit des Lichtes, welche die Oberfläche eines glänzenden Körpers zeigt; wenn hingegen das Auge Licht eines Körpers von noch sensiblen scheinbaren Durchmesser empfängt, so wird jede Stelle der Retina gleichzeitig von Strahlen getroffen, die,

aus etwas verschiedener Richtung ursprünglich kommend, an verschiedenen Stellen durch die optischen Medien des Apparates gegangen sind; dadurch werden kleine Ungleichmässigkeiten der Reinheit dieser Medien verwischt, indem nur die gröberen kenntlich bleiben, und das Lichtphantom erhält ein Ansehen, welches im Vergleiche mit dem des Sternes massiv und wie von einer aufgetragenen Deckfarbe herrührend erscheint. *) Dieser Unterschied der Erscheinung, obgleich einigermassen störend, bildet indessen keine Quelle bedeutender Unsicherheit in den Einstellungen.

2.

Wenn man durch solche Vergleichen eines Planeten mit einem nicht variablen Fixsterne (oder mit mehreren unter sich verglichenen Sternen) Zahlen abgeleitet hat, welche für verschiedene Epochen die von Tag zu Tag veränderliche Helligkeit des ersteren darstellen, und welche natürlich von dem Einflusse der Extinction des Lichtes durch die Atmosphäre befreit worden sein müssen, so kann man die gefundenen Schwankungen des Lichtes vergleichen mit denjenigen, welche von der Theorie indicirt werden. Lambert hat in der „Photometria“ den Ausdruck für die scheinbare Helligkeit einer nicht spiegelnden Kugel gegeben, welche aus einer im Verhältnisse zu ihren Dimensionen sehr grossen Entfernung beleuchtet, und aus einer ähnlichen Entfernung beobachtet wird. Die Grundlage für die Construction der Formel kann gefasst werden in folgende von ihm durch Experimente und Analyse erwiesene Sätze: Es sei die Einheit der Quantität des Lichtes so gewählt, dass die Erleuchtung, welche, von der als gleich stark nach allen Seiten strahlend angenommenen Lichtquelle aus, einem in der Entfernung 1 von ihr befindlichen, den Strahlen senkrecht dargebotenen Flächenelemente von der Grösse m zu Theil wird, selber m heisst; alsdann wird ein Flächenelement μ in der Entfernung Δ von der Lichtquelle, wenn seine Normale mit der

*) Bei den Vergleichen der Planeten selbst mit dem Monde (über welche ich an anderem Orte sprechen werde) ergibt sich ein ähnlicher Unterschied in viel auffallenderem Grade.

Richtung der auffallenden Strahlen den Winkel p bildet, empfangen die Lichtmenge $l = \frac{\mu \cos p}{AA}$. Wenn ferner dieses Element μ , ohne zu spiegeln, von dem empfangenen Lichte in Allem einen Theil zurückwirft, welcher, abhängig von der eigenthümlichen Weisse der reflectirenden Oberfläche, sich zu dem Ganzen verhält wie $A : 1$, und wenn seine Normale mit der Richtung nach dem Elemente m den Winkel q bildet, und A' die Entfernung beider Elemente von einander ist, so wird m , den von μ herkommenden Strahlen senkrecht ausgesetzt, von da her die Erleuchtung erhalten $\frac{A}{\pi} l \frac{m \cos q}{A'A'} = \frac{A}{\pi} \frac{\cos p \cos q}{AA'A'A'} \mu m$. Die Lichtstärke des Elementes μ , von m aus betrachtet, wird sich also zu derjenigen der Sonne, aus der Entfernung 1 betrachtet, verhalten wie $\frac{A}{\pi} \frac{\cos p \cos q}{(A'A')^2} \mu$ zu 1. Dabei heisst der constante Factor A die Albedo des Elementes μ : derselbe ist nothwendig ein echter Bruch, welcher nur bei absoluter Weisse der reflectirenden Oberfläche den Grenzwert 1 annehmen könnte, so wie er bei vollkommener Schwärze derselben zu Null werden würde. Um nach diesen Prämissen die theoretische Helligkeit einer Planetenkugel zu erhalten, verglichen mit der mittleren Helligkeit der Sonne, muss man die Oberfläche der ersteren in unendlich kleine Elemente μ zerschnitten denken, und für alle diejenigen unter diesen Elementen, welche zugleich der Sonne und der Erde zugewendet sind, die Summe der ihnen entsprechenden Lichtmengen nehmen, d. h. man muss den Ausdruck $\frac{A}{\pi} \frac{\cos p \cos q}{(A'A')^2} \mu$ integrieren über den beleuchteten und der Erde sichtbaren Kugeltheil. Das Produkt AA' kann dabei als constant betrachtet werden, sowie auch für die Ableitung der Werthe $\cos p$, $\cos q$ alle die von den verschiedenen Elementen der Planeten-Oberfläche nach der Sonne oder resp. nach der Erde führenden Geraden als unter sich parallel anzusehen sind. Zur wirklichen Ausführung der Integration denkt man sich am bequemsten durch die Mittelpunkte von Sonne, Erde, Planet eine Ebene gelegt und senkrecht auf dieser durch den Mittelpunkt des Planeten eine Axe,

zu welcher Meridiane und Parallelkreise construirt werden; wenn die in der Ebene der drei Körper von einem beliebigen ersten Meridian aus gemessenen Längen mit l , die zugehörigen Polardistanzen mit b bezeichnet werden, und wenn $\odot$, $\oplus$ in diesem Coordinaten-Systeme die (planetocentrischen) Längen der Sonne und der Erde, r den Radius der Planetenkugel,*) vorstellen, so wird man haben $\mu = rr \sin b \, dl \, db$; $\cos p = \cos (l - \odot) \sin b$; $\cos q = \cos (l - \oplus) \sin b$; so dass das Verhältniss Π der Lichtmenge, welche das Auge vom Planeten erhält, zu derjenigen, welche es von der Sonne in mittlerer Entfernung von der Erde erhalten würde, sich darstellt durch die Formel

$$\text{I.} \quad \Pi = \frac{A}{\pi} \left(\frac{r}{AA'} \right)^2 \int \int db \, dl \sin b^3 \cos (l - \odot) \cos (l - \oplus),$$

genommen zwischen den gehörigen Grenzen, nämlich nach b von 0 bis π , und nach l , wenn $\oplus - \odot$ positiv ist, von $\oplus - \frac{\pi}{2}$ bis $\odot + \frac{\pi}{2}$, dagegen wenn $\oplus - \odot$ negativ ist von $\odot - \frac{\pi}{2}$ bis $\oplus + \frac{\pi}{2}$. Wenn man nach Lambert mit v den Winkel $\pi \pm (\oplus - \odot)$ bezeichnet, welcher zwischen 0 und π liegt (den äusseren Winkel, am Planeten, im Dreieck Sonne, Planet, Erde), so wird das Resultat der Integration für beide Fälle

$$\text{II.} \quad \Pi = A \left(\frac{r}{AA'} \right)^2 \cdot \frac{2}{3\pi} (\sin v - v \cos v).$$

Man erhält auf diese Art, vorbehaltlich des unbekannten und jedem Planeten eigenthümlichen Factors A , den theoretischen Werth für die Lichtmenge zu jeder Epoche. Wenn man die Voraussetzung annimmt, dass in dem Zeitraume zwischen zwei Daten weder die Helligkeit der Sonne, gesehen aus mittlerer Entfernung (welche die Einheit von Π bildet) noch auch die Albedo des Planeten sensiblen Veränderungen unterworfen war, so kann man den Ausdruck benützen, um gemachte Beobachtungen von dem Einen Datum auf das andere zu reduciren. Ist zum Beispiel zu irgend einer Zeit t der Planet mit einem Fixsterne

*) r natürlich ebenso wie A und A' in Theilen der bereits zur Einheit der Längen gewählten mittleren Entfernung $\odot$ von $\oplus$.

verglichen worden, berechnet man sich aus der obigen Gleichung den Werth $\frac{H}{Ar^2}$ für diese Zeit, und dann auch den Werth $\frac{H_0}{Ar^2}$ welcher zu einer beliebigen anderen Zeit t_0 gehört, so muss offenbar sein

$$\text{III.} \quad \log \frac{\text{Helligk. d. Planeten f. d. Zeit } t_0}{\text{Helligkeit des } \ast} = \log \frac{\text{Helligk. d. Planeten f. d. Zeit } t}{\text{Helligkeit des } \ast} + \log \frac{H_0}{H}$$

wobei $\text{IV.} \quad \log \frac{H_0}{H} = \log \frac{H_0}{Ar^2} - \log \frac{H}{Ar^2}$

aus den Ephemeriden vollständig in Zahlen berechnet werden kann.

Wenn man auf diese Art Beobachtungen, welche zu verschiedenen Zeiten gemacht sind, auf Einen Normalort (Zeit t_0) reducirt, so muss man, bis auf Abweichungen, welche der Unsicherheit der einzelnen Beobachtungsergebnisse entsprechen, immer dieselbe Zahl erhalten. Wenn Unterschiede von bedeutend grösserem Betrage übrig blieben, so würde man daraus erkennen, dass die Voraussetzungen, auf welche die mathematische Theorie der Lichterscheinungen des Planeten gegründet ist, nicht alle in der Wirklichkeit realisirt sind. Wir werden diejenigen Folgerungen über die physischen Verhältnisse, zu welchen unsere Beobachtungen in der That Veranlassung geben, unten (§. 7) genauer zu besprechen haben; es ist daher unnöthig, schon hier auf diesen Punct specieller einzugehen.

Bei den oberen Planeten ist es am natürlichsten, als Normalort, auf welchen sämmtliche Beobachtungen reducirt werden, die Stellung in mittlerer Opposition anzusehen, d. h. diejenige Constellation, nach welcher die Erde sich in der geraden Linie von der Sonne nach dem Planeten zwischen beiden und in ihrer mittleren Entfernung von der Sonne ($= 1$) befindet, während zugleich auch die Entfernung des Planeten von der Sonne ihren Mittelwerth hat, als welchen ich für Mars die Zahl 1.52369, für Jupiter 5.20277 und für Saturn 9.54219 angenommen habe. Zur Reduction der Beobachtungen des Saturn ist übrigens die Entwicklung besonderer Formeln erforderlich; denn da der Ring dieses

Planeten einen Theil der Strahlen abschneidet, welche ohne seinen Zwischentritt von der Sonne nach der Kugel, oder von dieser nach der Erde gelangen würden, so darf hier das oben aufgestellte Integral der Lichtmenge nicht über das ganze Stück der Kugeloberfläche erstreckt werden, welches gleichzeitig der der Sonne zugewendeten und der der Erde zugekehrten Halbkugel angehört, — sondern nur über denjenigen Theil dieses Stückes, der weder im Ringschatten liegt noch für den Beobachter vom Ringe verdeckt wird. Dagegen muss auch noch die Quantität desjenigen Sonnenlichtes in Rechnung gebracht werden, welches vom Ringe aus nach der Erde reflectirt wird. Die Theorie, durch welche auf diese complicirteren Phänomene Rücksicht genommen wird, und nach welcher ich (für den Augenblick unter der Annahme gleicher Albedo für Ring und Kugel) die betreffenden Beobachtungen auf „mittlere Opposition ohne Ring“ reducirt habe, werde ich im Anhange entwickeln.

Für Mars und Jupiter ist die Reduction auf mittlere Opposition einfach. Da im Augenblicke derselben $v = \pi$ ist, so findet man mit den obigen Zahlen aus Gleich. II:

$$\text{für Mars} \quad \log \frac{H_0}{Ar^2} = 0.0200$$

$$\text{und für Jupiter} \quad \log \frac{H_0}{Ar^2} = 7.1444$$

man erhält daher aus Gleichung III verbunden mit IV und II:

$$\begin{aligned} \text{V.} \quad \text{Reduction auf mittlere Opposition} &= \log \frac{H_0}{H} \\ &= \text{Const.} - \log \frac{\Phi}{(AA')^2} \end{aligned}$$

wobei die Constante für Mars = 0.0200, für Jupiter = 7.1444, und wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist, für den Augenblick der Beobachtung

$$\text{VI.} \quad \Phi = \frac{2}{3\pi} (\sin v - v \cos v).$$

Zur bequemeren Berechnung dieser Grösse habe ich die am Ende beigefügte Tafel gebildet, welche für gegebene Werthe von v , von Grad

zu Grad fortschreitend, den $\log \Phi$ sogleich entnehmen lässt. Den Werth von v habe ich in der Regel aus den nach den Angaben des Berliner Jahrbuches interpolirten drei Distanzen Sonne — Erde, Sonne — Planet $= A$, Erde — Planet $= A'$ berechnet, welche die 3 Seiten eines Dreieckes bilden, in welchem $\pi - v$ der der erstgenannten Seite gegenüberliegende Winkel ist. Strenge genommen muss man dabei den Ort der Erde, welcher der Beobachtungszeit entspricht, verbinden mit demjenigen des Planeten, welchen er einnahm zu der Zeit als das gemessene Licht von ihm ausging.

Für die Venus, welche nicht in Opposition kommt, habe ich zum Normalort, auf welchen reducirt wird, die Epoche ihres mittleren grössten Glanzes gewählt. Es ist leicht zu untersuchen, für welchen Werth von v der Ausdruck $\frac{H}{Ar^2}$ den grössten Werth erlangt dessen er fähig ist, wenn $A =$ der mittleren Entfernung der Venus von der Sonne (von mir $= 0.723332$ angenommen) ist, und wenn zugleich die Erde ihre mittlere Entfernung 1 von der Sonne hat. Zwischen A' und v muss also dann die Gleichung erfüllt sein $1 = (0.723332)^2 + A'^2 + 1.446664 A' \cos v$, mittelst welcher man zur Berechnung des gesuchten Werthes von v durch Differentiation der Formel II. die transcendente Gleichung ableitet

$$v \sqrt{1 - (0.723332)^2 \sin^2 v} = 2 (0.723332) (\sin v - v \cos v)$$

Man findet aus derselben $v = 76^\circ 13'.5$ und hiezu $A' = 0.53944$. Damit ergibt sich für den Moment des mittleren grössten Glanzes

$$\text{für Venus } \log \frac{H_0}{Ar^2} = 9.9601$$

und der Ausdruck in V. gibt die Reduction einer jeden Venus-Beobachtung auf diesen Moment, wenn man für die Constante die Zahl 9.9601 setzt.

Da die Form der grossen Planeten, Jupiter und Saturn, von der Kugelgestalt merklich abweicht, und in Folge dessen für jeden von ihnen eine Zunahme der scheinbaren Grösse, und also auch der Helligkeit, sich ergeben muss, wenn die Erde, ohne ihre Entfernung vom Centrum des Planeten zu ändern, sich über die Ebene seines Aequators nach Norden

oder nach Süden erhebt, so wird für jeden von ihnen selbst im Augenblicke der mittleren Opposition die theoretische Helligkeit nur dann eine bestimmte sein, wenn die Höhe der Erde über dem Planetenäquator eine fixirte ist. Ist zur Zeit der Beobachtung die Stellung eine andere gewesen, so wird noch eine Reduction nöthig, deren Einfluss zwar klein ist, aber doch nicht als verschwindend gegen die Beobachtungsfehler angesehen werden kann. In dem die Theorie der Saturnsbeobachtungen enthaltenden Anhang gebe ich auch die Vorschrift, nach welcher die Messungen auf die Stellung der Erde in der Ebene des Planetenäquators reducirt worden sind;*) bei unseren Jupitersbeobachtungen alterirt diese Correction den Logarithmus des Helligkeitsverhältnisses höchstens um 0.0001 in Folge des zufälligen Umstandes, dass zur Zeit dieser Beobachtungen der Winkel zwischen der Verbindungslinie Erde — Jupiter und dem Planetenäquator $3^{\circ} 20'$ nie überstieg. Für die Messungen an Saturn steigt dagegen die logarithmische Correction nahe bis 0.01.

3.

Jedes einzelne Zahlenresultat, welches in der hernach mitzutheilenden Zusammenstellung den Logarithmus des gemessenen Helligkeitsverhältnisses zweier Himmelskörper darstellt, beruht in der Regel auf acht Einstellungen der von beiden herrührenden Lichtphantome auf gleiche Helligkeit. Die eine Hälfte derselben ist „über dem Bilde“ gemacht, d. h., indem die beiden Objectivhälften aus derjenigen Stellung, in welcher sie die Sterne wie Punkte zeigen, gegen das Ocular hin verschoben sind, die andere Hälfte „unter dem Bilde“, d. h. mit einem Abstände zwischen Ocular und Objectivhälften, welcher grösser ist als beim deutlichen Sehen der Sterne. Zugleich wechselten die beiden Beobachter in den Einstellungen regelmässig ab, soferne nicht besonders angemerkt ist, dass die Messung von dem Einen allein herrührt. Wenn die einzelnen Ablesungen etwas auffallendere Unterschiede zeigten, wurde ihre Zahl auf 12 oder 16 vermehrt; der Fall, dass weniger als 8 von ihnen eine Beobachtung ausmachten, kommt nur ein paarmal vor. Alle einzelnen

*) Ich nenne dieselbe die „Reduction wegen elliptischer Gestalt.“

Einstellungen in extenso mitzutheilen, halte ich aber um so mehr für unnöthig, da die durchschnittliche Uebereinstimmung derselben beurtheilt werden mag nach dem vollständigen Abdruck unserer älteren photometrischen Messungen, welcher in der Beilage meiner Eingangs citirten Abhandlung gegeben worden ist. In der That treffen im Allgemeinen, wahrscheinlich in Folge der grösseren Uebung unserer Augen in der Beurtheilung der Helligkeiten, unsere neueren Einstellungen noch näher zusammen als die älteren; doch wird nicht gerade zu erwarten sein, dass aus diesem Grunde der mittlere Fehler des einer vollständigen Beobachtung entsprechenden Resultates erheblich kleiner geworden wäre, da derselbe auch schon in den früher erhaltenen Zahlen gewiss viel weniger von der übrig bleibenden Unsicherheit der Messung als von Unregelmässigkeiten in der Durchsichtigkeit der Luft abhängig war. — Um nur an Einem Beispiele die Entstehung der in die Zusammenstellung aufgenommenen Zahlen mit allen Details nachzuweisen, setze ich die Beobachtung No. 147 vollständig hierher.

No. 147. 1852 März 22

„Luft heute sehr gut.“

Sirius in Prisma *A*,

Venus in Prisma *B*.

Uhrzeit	Ablesung von Objectiv-Hälfte <i>A</i> .	Stellung von Objectiv-Hälfte <i>B</i> .
	Ueber dem Bilde.*)	
7 ^h 31'.5	42.1 < S	Grenze der Verschiebbarkeit, d. h. 15.98
	41.9 L	
	44.4 S	
	42.5 L gut	
	43.3 S	
	44.1 L	
	„Sirius flammt.“	

*) Die Ablesung des Bildes selbst, d. h. derjenigen Objectiv-Stellung, in welcher der Beobachter den Stern möglichst scharf als Punct sieht, war für Seidel .. Objectiv-Hälfte *A* ... 61.20, Obj.-Hälfte *B* ... 60.89; für Leonhard Obj.-Hälfte *A* ... 62.20, Obj.-Hälfte *B* ... 61.64; man braucht aber diese Ablesungen nicht zu kennen, da auf

Unter dem Bilde.

	81.5 S	Grenze der Verschieb- barkeit, d. h. 109.23
	85.0 L	
	80.4 S	
	81.6 L	
	80.1 S	
7 ^h 48'	81.5 L	

Distanz abgelesen 68⁰,2.

Das Mittel aller Ablesungen für Sirius über dem Bilde ist 43.05, unterm Bilde 81.68, also die ganze Verschiebung von der einen Seite nach der andern 38,63 par. Linien, dagegen für Venus 93.25; das beobachtete Helligkeitsverhältniss ist daher*) $\frac{\text{♀}}{\text{Sirius}} = \left(\frac{93.25}{38.63}\right)^2$, oder es wird $\log (\text{♀} : \text{Sirius}) = 0.7655$. Diese Zahl ist aber zu gross, weil die Gläser *B*, durch welche Venus gesehen wurde, durchsichtiger sind, als die Gläser *A*, welche auf Sirius gerichtet waren; die nöthige Correction (für das „Prismenverhältniss“) ergibt sich aus der Vergleichung eines Sternes mit sich selbst. Für die Nacht des 22. März 1852 enthält das Journal hierüber folgende Beobachtung:

Capella in beiden Prismen.

Ablesung von Objectiv- Hälfte <i>A</i> .	Ablesung von Objectiv- Hälfte <i>B</i> .
---	---

Ueber dem Bilde.

22.2 S	22.05
24.0 L	
22.6 S	
23.7 L	
22.4 S .	
24.6 L	
24.8 L	

beiden Seiten beobachtet ist. — Das Zeichen < bedeutet, dass nach dem Gefühl des Beobachters die Einstellung eher auf eine grössere als auf eine kleinere Zahl hätte gemacht werden dürfen, als die abgelesene ist. Die jeder Ablesung beigefügten Buchstaben S oder L bezeichnen den Namen des Einstellenden.

*) S. meine wiederholt citirte Abhandlung, §. 2. III.

Unter dem Bilde.

105.6 L	105.4
103.4 S	
105.9 L	
103.0 S >	
106.3 L	
105.7 S	

Mittel für $A...$ 23.47 und 104.98; also Verschiebung 81.51; für $B...$ 83.35. Der Stern, durch B gesehen, erschien also heller als durch A gesehen im Verhältniss $\left(\frac{83.35}{81.51}\right)^2$ dessen Logarithmus ist 0.0194. Diese Zahl hätte man von der vorhin gefundenen 0.7655 abziehen, um den Fehler, welcher aus der verschiedenen Klarheit der beiden Prismen entspringt, zu beseitigen. Bei der wirklichen Reduction ist die Correction, anstatt 0.0194, angenommen worden zu 0.0238, wie sie sich im Mittel aus den unter sich gut harmonirenden Bestimmungen von 20 Nächten, von 1852 Febr. 25 bis Mai 16 ergeben hat; man findet daher in der Zusammenstellung der Beobachtungen, Columne 4, unter der Ueberschrift „log. Beob.“ als Resultat der Messung No. 147 angesetzt 0.7655 — 0.0238 = 0.7417 = dem Logarithmus des beobachteten Verhältnisses der Venus zu Sirius. Dasselbe ist als giltig anzusehen für die Uhrzeit 7^h 39'.8, welcher die mittlere Münchener Zeit entspricht 7^h 50'.7. Für diese Zeit war die AR ♀ = 2^h 37' 36'', die Decl. = + 16° 33', womit sich die Zenitdistanz des Planeten findet = 70° 17', während die des Fixsternes war = 66° 43'. Venus wird also, weil sie tiefer stand, und ihr Licht eine stärkere Absorption zu erleiden hatte, gegen Sirius zu schwach beobachtet worden sein, und es ist nöthig, die Berichtigung anzubringen, durch welche das Resultat auf gleiche Höhe beider Himmelskörper reducirt wird. Die Untersuchung des mittleren Einflusses, welchen für jede Zenitdistanz die Extinction des Lichtes auf die Messung der Helligkeit ausübt, war eine der hauptsächlichsten Aufgaben, welche ich mir in der älteren Abhandlung gesetzt hatte: die Tafel, welche sich in §. 3 derselben für die logarithmische Reduction auf die Zenitalhellig-

keit mitgetheilt findet, ist seither sehr vielfach an neuen Beobachtungen erprobt worden, und es hat sich durchaus bestätigt, dass man bei einer nur einigermaßen vorsichtigen Auswahl der Nächte dieselbe immer mit dem Vertrauen benützen kann, dass der wahrscheinliche Fehler eines einzelnen hiernach corrigirten Beobachtungsergebnisses, alle Ursachen welche dasselbe entstellen können zusammengenommen, nicht grösser sein wird als ± 0.036 im Logarithmus des gemessenen Verhältnisses.*) Aus jener Tafel ergibt sich, dass ein Stern in $66^{\circ} 43'$ Zenitdistanz, verglichen mit einem gleich hellen im Zenit, bei mittlerer atmosphärischer Durchsichtigkeit hier in München zu schwach erscheint in einem Verhältnisse, dessen Logarithmus ist $\varphi(66^{\circ} 43') = 0.157$; für $70^{\circ} 17'$ ergibt sich die ähnliche Correction 0.194; in unserem Falle wird also der Logarithmus des beobachteten Helligkeits-Verhältnisses der Venus zu Sirius zu klein sein um nahe $0.194 - 0.157 = 0.037$. Diese Zahl findet man bei der betreffenden Beobachtung eingetragen unter Columnne 5, mit dem algebraischen Zeichen $+$, mit welchem man sie zu dem Logarithmus des beobachteten Verhältnisses $\varphi : *$ hinzulegen muss, um den Logarithmus des vom Einflusse der Extinction befreiten Verhältnisses**) zu erhalten, in unserem Falle die Zahl $0.7417 + 0.037 = 0.779$, welche unter Columnne 6 eingetragen ist unter der Ueberschrift „log. $\varphi : *$ “.

Die Reduction auf mittleren grössten Glanz des Planeten (oder auf

*) Er war so gefunden aus 62 a. a. O. mitgetheilten Vergleichen von Sternen erster Grösse unter sich; aus 132 solchen Messungen, die mir jetzt vorliegen, finde ich ihn $= 0.034$. Eine andere kleine Zusammenstellung hierüber s. in den Gel. Anz. vom 7. Sept. 1853, p. 244. Das Ergebniss sämmtlicher Planetenbeobachtungen in dieser Beziehung wird man unten finden.

**) Da die Tabelle, aus welcher die Extinctionsgrössen entnommen werden, der Natur der Sache nach nur für einen mittleren Durchsichtigkeitszustand der Luft gelten kann, so versteht es sich von selbst, dass für einzelne Beobachtungen die Reduction bald etwas zu gross, bald etwas zu klein erhalten wird. Die Abweichungen, welche zwischen den Resultaten verschiedener Beobachtungen nach der Reduction noch übrig bleiben, stammen im Allgemeinen wohl ihrem bedeutendsten Theile nach aus dieser Quelle. Nur wenn das Licht eines Sternes sehr unruhig und flammend ist, wie das von Sirius gewöhnlich, so ist anzunehmen, dass die Ungewissheit des Auges bei der Messung selbst einen nachtheiligen Einfluss von ähnlichem Betrage ausüben kann.

mittlere Opposition bei den oberen), deren Zahlenwerth ferner für jede Beobachtung in dem Tableau angesetzt steht, habe ich in der Mehrzahl der Fälle nicht für den Zeitpunkt der Beobachtung direct berechnet, sondern es bequemer gefunden, nach den Formeln des vorigen §. aus den Daten des astronomischen Jahrbuches eine Helligkeits-Ephemeride für denjenigen Theil des Jahres, während dessen der Planet verfolgt worden war, zu bilden, also den Zahlenwerth der in Gl. V. vorkommenden Grösse $\log \frac{\Phi}{(\Delta\Delta')^2}$ für eine Reihe gleichweit von einander entfernter Momente zu berechnen, und ihn aus dieser Tabelle für jede Beobachtung zu interpoliren. Die beiden unserer Messung No. 147 zunächst liegenden Data, für welche direct gerechnet worden ist, sind der mittlere Berliner Mittag des 19. und des 27. März 1852; für diese beiden ergab sich

	$\log \Delta$	$\log \Delta'$	v	$\log \Phi$
März 19.	9.85677	0.04781	118° 40'.7	9.59890
März 27.	9.85650	0.02594	115 2.8	9.57128.

Hiernach wird für März 19... $\log \frac{\Phi}{(\Delta\Delta')^2} = 9.7898$, und für März 27 $= 9.8064$, oder die Reduction auf mittleren grössten Glanz, welche nach den Ausdrücken des vorigen §. $= 9.9601 - \log \frac{\Phi}{(\Delta\Delta')^2}$ ist, findet sich $= + 0.1703$ und respective $+ 0.1537$. Für das Datum unserer Beobachtung selbst, März 22 8^h Berl. Zeit, würde sie durch einfache Einschaltung zwischen diese beiden Zahlen sich ergeben $= + 0.1634$; bei Berücksichtigung der höheren Differenzen habe ich denselben Werth erhalten, welchen man desshalb in Columne 7 der Zusammenstellung eingetragen findet. Das positive Vorzeichen der Reduction zeigt an, dass Venus zur Zeit der Beobachtung, der Theorie nach, weniger hell war als im mittleren grössten Glanz; legt man sie zu der oben gefundenen Zahl 0.779, welche den Logarithmus des Helligkeits-Verhältnisses ♀ : Sirius, beide auf gleiche Zenitdistanz gebracht, darstellt, so ergibt sich nach allen Reductionen, dass zufolge der Beob. No. 147 der Logarithmus der

Helligkeit des Planeten in mittlerem grössten Glanze denjenigen der Helligkeit von Sirius um 0.942 übertreffen würde. Diese Zahl, das Hauptresultat der Beobachtung, ist angesetzt in Columnne 8 der Zusammenstellung. Auf ähnliche Art sind alle einzelnen Messungen berechnet worden.

4.

Nach diesem Detail wird die Bedeutung der verschiedenen Zahlen, welche das nachfolgende Tableau unserer Planetenbeobachtungen enthält, hinlänglich verständlich sein. Nur ist noch zu bemerken, dass bei den Vergleichen zwischen Venus und Jupiter, und ebenso bei denjenigen zwischen Venus und Mars, unter der Rubrik der Reduction auf mittlere Opposition des oberen Planeten die dekadische Ergänzung des nach Gleichung V. berechneten Logarithmus angesetzt ist, damit man diese Reduction, ebenso wie die in der unmittelbar vorhergehenden Columnne eingetragene auf grössten Glanz der Venus, additiv an dem gefundenen $\log \varphi : \mathcal{Q}$ [oder resp. $\log \varphi : \mathcal{O}$] anbringen kann, um den (in der darauf folgenden Spalte angesetzten) $\log$. des Verhältnisses beider Planeten in ihrer grössten Helligkeit, Venus im Zähler des Bruches gedacht, daraus abzuleiten.

Die mit S bezeichneten Zahlen beruhen auf Messung von Seidel allein; alle übrigen auf abwechselnden Einstellungen beider Beobachter.

Mit : sind solche Beobachtungsergebnisse markirt, welchen ich, verglichen mit den übrigen, halbes Gewicht beigelegt habe. Diess ist erstens geschehen bei allen Beobachtungen, in welchen Eine der beiden Zenitdistanzen den Werth $70^{\circ}.7$, oder Eine der beiden Extinctionsgrössen $\varphi(z)$ den Werth 0.200 überstieg, weil bei diesen die Reduction nothwendig ziemlich unsicher wird.*) Ferner auch bei solchen Resultaten, die schon nach den unmittelbar notirten Umständen der Beobachtung für minder zuverlässig zu halten waren, entweder wegen atmosphärischer Ver-

*) Vergl. jedoch wegen der hieher gehörigen Beobachtungen No. 153, 156, 162 die besondere Bemerkung in §. 5.

hältnisse oder irgend einer besondern Schwierigkeit der Einstellung. Dagegen ist es nicht geschehen bei solchen Messungen, die a priori für gut gehalten waren, und nur nachträglich in schlechterer Uebereinstimmung befunden wurden. Man findet in der letzten Rubrik die Notizen, welche sich auf den Zustand der Luft etc. am Abende der Beobachtung beziehen, nach den Aufzeichnungen des Journales angemerkt. Wenn etwa gegen Abend der Himmel ein wenig streifig war, aber dem Anscheine nach sich um Sonnenuntergang völlig aufklärte (ein Fall, der hier öfters vorkommt), so befanden wir uns in der übeln Lage, entweder eine lockende Gelegenheit zur Beobachtung unbenützt vorbeigehen zu lassen, oder Messungen zu machen unter nicht völlig befriedigenden Umständen; wir haben es uns in solchem Falle nicht immer versagen können, das Instrument in Thätigkeit zu bringen, und die Bemerkung „Luft etwas verdächtig“ oder ähnliche Notizen hat gewöhnlich Bezug auf solche Umstände. Ein paarmal mussten wir dabei die Erfahrung machen, dass eine wahrnehmbare Wolkenbildung die Unzuverlässigkeit der meteorologischen Verhältnisse verrieth; auch haben wir zu bemerken geglaubt, dass ein besonders starkes Funkeln der Sterne ziemlich oft auf eine späte Auflösung von Streifwolken folgt. Für die besten Nächte zur Beobachtung sind nicht diejenigen zu halten, in welchen die Sterne, bis zu den kleinsten herab, auf tiefschwarzem Grunde besonders prächtig erglänzen; eine solche ungewöhnliche Klarheit zeigt der Himmel nur bei feuchter Luft, welche von dem mittleren Zustande, für welchen die Extinctionstafel gilt, abweicht. Wir glauben, nach einer jetzt länger geübten Erfahrung, dasjenige normale Ansehen des Himmels ziemlich wohl zu kennen, welches hier die zuverlässigsten Messungen verspricht; es versteht sich aber von selbst, dass man, so lange Wenige sich mit photometrischen Beobachtungen beschäftigen, sich nicht auf die Benützung der allergünstigsten Verhältnisse beschränken kann.

Das Licht der Venus konnten wir, seiner grossen Helligkeit wegen, in dem Instrumente direct und mit einiger Zuverlässigkeit nur mit dem des Sirius oder des Jupiter vergleichen. Man findet zwar in der folgenden

Zusammenstellung auch eine Vergleichung mit Capella, und zwei mit Mars, welcher zur Zeit dieser Beobachtungen nur etwa so hell war, als Procyon; indessen haben diese Messungen wegen der grossen Schwierigkeit der Einstellung wenig Werth; sie sind nur zu einiger Controle der andern Beobachtungen gemacht. Man wird jedoch finden, dass ihre Ergebnisse viel befriedigender ausgefallen sind, als man in Anbetracht der Umstände wohl erwarten mochte. Auch haben sie bei der Berechnung das halbe Gewicht erhalten. Noch andere Gradationen in den Gewichten einzuführen, als die von 2 zu 1, schien mir nicht rathsam; auch wurde keine Beobachtung verworfen.

Am seltensten unter den vier Planeten ist Saturn von uns beobachtet worden. Weil nämlich die Reduction der an ihm gemachten Messungen, des Ringes wegen, umständlich und zeitraubend ist, so haben wir ihn 1857 und 1858 nur observirt, wenn wir glaubten, ein wirklich gutes Resultat erwarten zu dürfen. Die vier Beobachtungen des Jahres 1852 sind unter weniger günstigen Umständen gemacht, indem bei den 3 ersten der Stand des Planeten ziemlich tief war, die letzte aber (No. 210) nach sechs Einstellungen abgebrochen werden musste wegen rasch sich ausbreitender Nebelbildung. Uebrigens hat sich ergeben, dass auch diese älteren Beobachtungen ein ganz brauchbares Resultat liefern. Noch eine nur aus zwei Einstellungen bestehende Vergleichung des Saturn mit Venus, No. 214, vom Jahre 1855 enthält unser Journal; diese habe ich bis jetzt nicht reducirt, und führe sie nicht auf, weil sie schon wegen tiefen Standes beider Himmelskörper und wegen des grossen Unterschiedes ihrer Helligkeit von sehr zweifelhaftem Werthe ist.

I. Tableau der Vergleichen zwischen Venus und Fixsternen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
No. d. Beob.	Datum. M. M. Z.	Vergl. *	log. Beob.	Extinct.	log. *	Red. auf $\frac{1}{2}$ grösste mittl. Helligk.	$\frac{1}{2}$ grs. H. *	z $\odot$	z *	Bemerkungen. *)
109	1852 März 6 8 ^h 25'.5	Sirius	0,3538**)	+0,390	0,744	0,1947	0,939:	82°51'	65°50'	Dist. 81°.5. Beide in sehr dunstiger Luft.
110	März 7 7 19.0	Sirius	0,7572	+0,071	0,828	0,1930	1,021:	71 22	64 46	Dist. 81.0 Stellung unbequem. Dunstig in S. u. SW.
111	März 7 7 51.8	Capella	1,1519	+0,302	1,454	0,1928	1,647:	76 49	18 32	Dist. 59. Schwierige Mssg. Zuletzt $\frac{1}{2}$ dem Dunst nah.
117	März 8 7 6.9	Sirius	0,7391	+0,040	0,779	0,1912	S.0,970	68 55	64 54	Dist. 79.8. Reiner als gestern.
121	März 9 7 4.1	Sirius	0,8160	+0,031	0,847	0,1892	S.1,036	68 0	64 53	Dist. 79. S. flammt etwas.
125	März 12 7 48.3	Sirius	0,7860	+0,108	0,894	0,1834	S.1,077:	73 55	65 3	Dist. 76.9. Nachher Himmel rasch bedeckt.
127	März 14 7 40.0	Sirius	0,6661	+0,074	0,740	0,1795	0,920:	71 43	65 2	Dist. 75.
131	März 18 7 9.0	Sirius	0,8746	+0,002	0,877	0,1717	S.1,049	64 59	64 45	Dist. 71.7. Luft gut.
138	März 19 7 26.0	Sirius	0,8019	+0,022	0,824	0,1697	0,994:	67 23	65 11	Dist. 70.9. Um $\odot$ Unterg. Bldg. u. Wiederauf. v. Wolken.
142	März 20 7 52.9	Sirius	0,7267	+0,056	0,783	0,1676	0,951:	71 27	66 25	Vorzügliche Nacht. Sirius flammt etwas.
147	März 22 7 50.7	Sirius	0,7417	+0,037	0,779	0,1634	0,942	70 17	66 43	Dist. 68.2. Luft gut. Sirius flammt.
152	März 27 8 27.6	Sirius	0,7021	+0,046	0,748	0,1528	0,901:	74 24	71 31	Sirius flammt stark. Luft gut.
153	April 13 7 44.8	Sirius	1,0019	-0,129	0,873	0,1149	0,988	61 32	73 16	Helle Dämmerung. Sirius flammt stark.
156	April 16 8 3.6	Sirius	1,0444	-0,175	0,869	0,1078	0,977	63 47	76 42	Dist. 51.3. Sirius flammt stark.
162	April 17 7 40.7	Sirius	1,0583	-0,164	0,894	0,1054	S.0,999:	59 43	74 31	Sirius flammt. Beugungslinien störend.
169	April 21 7 47.2	Sirius	1,2073	-0,215	0,992	0,0961	S.1,088:	59 49	77 6	Sirius dem Dunst nahe.
174	April 22 7 47.7	Sirius	1,1443	-0,229	0,915	0,0938	S.1,009:	59 40	77 38	
181	April 23 7 44.9	Sirius	1,1161	-0,238	0,878	0,0915	0,970:	58 58	77 47	Dist. 48.1. Helle Dämmerung. S. wallt stark.
211	1855 April 19 7 41.0	Sirius	0,8233	-0,056	0,767	0,2486	1,016:	71 43	75 6	Dist. 56.4. S. wallt stark. Beugungslinien störend.
219	1857 Febr. 15 7 51.5	Sirius	0,7874	+0,087	0,875	0,0515	0,927:	73 26	66 15	Dist. 91.6. Sirius funkelt stark.
223	Febr. 19 7 47.0	Sirius	0,8314	+0,060	0,892	0,0414	0,933:	71 19	65 44	Dist. 86.8. Sirius flammt etwas.
227	Febr. 20 7 19.1	Sirius	0,9036	-0,005	0,899	0,0389	0,938	66 24	66 55	Dist. 86.1.
236	März 17 7 55.8	Sirius	0,8804	+0,004	0,884	9,9956	0,880:	66 23	65 57	Dist. 71.1. Luft etwas verdächtig.
237	April 20. 7 53.0	Sirius	1,0105	-0,079	0,931	0,3645	1,295:	73 9	77 12	Dist. 60.8. Starkes Wallen von S.: schwer einzustellen. Prismen-Verh. etw. unsicher. Grösse d. Phase $\frac{1}{4}$.

*) Die in der letzten Rubrik angesetzten Distanzen sind an dem kleinen Kreise des Instrumentes (der nur auf Grade getheilt ist) abgelesen. Da der Nullpunct desselben nicht immer ganz berichtigt war, auch die * * vor der Ablesung nicht immer genau in die Mitte des Gesichtsfeldes gebracht wurden, so sind sie nur rohe Approximationen. Sie wurden aufgezeichnet, um bei späteren Beobachtungen die Einstellung des Instrumentes zu erleichtern, und werden hier nur mitgetheilt, weil sie doch dienen können, das Bild von den Umständen der Beobachtung zu vervollständigen.

**) In dem Tableau der Beobachtungen, welches meinem Aufsatze in den Gel. Anz. 1853. Sept. 7 beigelegt ist, sind in Folge eines Versehens, welches bei Fertigung der Abschrift begangen wurde, die Zahlen für log. Beob. zu den 6 Sirius-Vergl. No. 109 bis 127 incl. sämmtlich um 0.018 zu gross angesetzt. Die Resultate a. a. O. sind durch diese Irrung nicht entstellt. In der Berechnung der Beob. No. 117 war ausserdem damals ein Fehler dadurch entstanden, dass die Correction wegen Durchsichtigkeit der Prismen mit falschem Zeichen angebracht worden war.

II. Tableau der Vergleichen zwischen Venus und Jupiter.

1 No. d. Beob.	2			3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Datum.	M.	M. Z.	log. Beob.	Extinct.	log $\frac{Q}{J}$	Red. auf $\frac{Q}{J}$ mittl. grösste Helligk.	Red. auf $\frac{Q}{J}$ mittl. $\frac{Q}{J}$	log $\frac{Q_{\text{grösst. Helligk.}}}{J_{\text{mittl. } \frac{Q}{J}}}$	z $\frac{Q}{J}$	z $\frac{Q}{J}$	Bemerkungen.
184	1852 Mai 10	9 ^h 44'.7		0,5399	+0,097	0,637	0,0536	9,9297	S.0,620:	75°57'	69°52'	Dist. 126°.2. Himmel etwas verdächtig. Dist. 106 2. Dessgleichen. Grösse d. Phase $\frac{1}{2}$ ungefähr.
191	Mai 16	8 37.6		0,8072	-0,101	0,706	0,0426	9,9281	0,677:	65 20	73 43	
192	Mai 16	9 21.1		0,6648	+0,039	0,704	0,0426	9,9281	0,675:	72 19	69 25	
197	Mai 23	9 51.3		0,6170	+0,182	0,799	0,0334	9,9240	S.0,756:	77 36	65 7	
199	Juni 7	8 36.8		0,6989	+0,044	0,743	0,0454	9,9061	S.0,694:	69 32	65 10	
217	1857 Febr. 15	6 10.0		0,8855	-0,030	0,855	0,0517	9,7837	0,691	57 39	61 51	Dist. 4.7. Gute Umstände.
220	Febr. 16	6 9.7		0,9126	-0,036	0,876	0,0492	9,7821	S.0,707	57 13	62 13	Dist. 5.1. Luft nicht ganz so gut. *)
221	Febr. 19	6 32.2		0,8917	-0,065	0,827	0,0415	9,7776	0,646	59 24	66 46	Dist. 7.4. Gute Luft.
225	Febr. 20	6 10.4		0,8555	-0,058	0,797	0,0391	9,7761	S.0,613	55 47	63 53	Dist. 8.7. Dessgleichen.
229	Febr. 23	6 24.6		0,9246	-0,087	0,838	0,0317	9,7720	S.0,642	56 50	67 16	Dist. 10.5. Dessgleichen.

*) Wegen der geringen Distanz gebe ich der Beobachtung dennoch volles Gewicht.

III. Tableau der Vergleichen zwischen Venus und Mars.

1 No. d. Beob.	2			3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Datum.	M.	M. Z.	log. Beob.	Extinct.	log $\frac{Q}{M}$	Red. auf $\frac{Q}{M}$ mittl. grösste Helligk.	Red. auf $\frac{Q}{M}$ mittl. $\frac{Q}{M}$	log $\frac{Q_{\text{grösst. Helligk.}}}{M_{\text{mittl. } \frac{Q}{M}}}$	z $\frac{Q}{M}$	z $\frac{Q}{M}$	Bemerkungen.
123	1852 März 9	7 ^h 58.1		1,1618	+0,303	1,465	0,1942	9,4223	1,081:	76°58'	24°51'	Sehr unsicher und schwierig, wegen Kleinheit des Dreiecks von $\frac{Q}{M}$.
143	März 20	8 22.9		1,2394	+0,293	1,532	0,1676	9,3224	1,022:	76 25	24 30	

IV. Tableau der Vergleichen zwischen Jupiter und Fixsternen.

1	2		3	4	5	6	7	8	9	10	11
No. d. Beob.	Datum.	M. M. Z.	Vergl. *	log. Beob.	Extinct.	log $\frac{J}{\star}$	Red auf $\frac{J}{\star}$ mittl. $\frac{J}{\star}$	$\frac{J}{\star}$ mit $\frac{J}{\star}$ *	z $\frac{J}{\star}$	z *	Bemerkungen.
62	1845 Aug. 25	10 ^h 34'.2	Wega	0,5617	+0,316	0,872	0,0264	0,898:	77°18'	26°37'	Dist. 103°.5.
67	Sept. 1	11 24.3	Wega	0,7920	+0,116	0,908	0,0070	0,915	64 21	39 34	
72	Novb. 4	8 45.8	Wega	0,9809	—0,027	0,954	9,9158	0,870	48 2	54 39	Dist. 101.4.
76	Novb. 5	9 53.3	Wega	0,9700	—0,127	0,843	9,9158	0,759:	39 57	65 22	
85	1846 Febr. 26	8 45.6	Sirius	0,1614	+0,040	0,201	0,1943	0,395	68 58	65 3	Dist. 70.9. Vorzüglich klare Nacht.
116	1852 März 7	15 1.5	Regulus	1,1008	+0,061	1,162	0,1776	1,340	67 55	61 30	Dist. 85.3.
161	April 16	12 26.4	Arctur	0,8905	+0,151	0,951	0,0875	1,039	66 41	28 11	Dist. 40 1. Ruhiges Licht, und sehr ähnliche Farbe.
166	April 17	12 27.1	Wega	0,7168	+0,121	0,838	0,0860	0,924:	66 25	46 43	Dist. 72.1. Höchst unbequeme Stellung.
167	April 17	12 45.3	Arctur	0,7594	+0,140	0,899	0,0360	0,985	65 40	28 31	Dist. 40 3. Himmel sehr rein.
172	April 21	11 36.6	Arctur	0,7212	+0,165	0,886	0,0809	0,967	68 15	28 54	
180	April 22	12 23.8	Wega	0,6547	+0,119	0,774	0,0797	0,854	65 31	44 3	Dist. 72.7. Unbequeme Stellung.
185	Mai 10	9 57.2	Arctur	0,8163	+0,171	0,987	0,0703	1,057	68 49	30 24	Farbe sehr gleich. Schwarzer Himmel (feucht).
189	Mai 15	12 57.1	Arctur	0,8215	+0,144	0,965	0,0715	1,037	67 10	40 18	Dist. 38 2. Tief schwarze Nacht.
193	Mai 18	11 22.3	Wega	0,7252	+0,115	0,840	0,0728	0,913:	63 56	37 17	Dist. 73.8. W. flammt stark. Wetterleuchten. Zuletzt Wolkenbildung.
195	Mai 21	11 23.2	Wega	0,7949	+0,118	0,913	0,0746	0,988:	64 1	35 9	Dist. 74.1. Um ☉ Untergang Umstände verdächtig.
200	Juni 7	9 29.3	Wega	0,6671	+0,103	0,770	0,0939	0,864:	63 31	43 0	Dist. 74.8. Umstände etwas verdächtig.
202	Aug. 17	8 19.2	Arctur	0,5930	+0,238	0,831	0,2612	1,092:	76 42	54 41	Vorzüglich reine Luft. — A. flammt.
226	1857 Febr. 20	6 59.3	Sirius	0,1172	+0,038	0,155	0,2239	0,379	71 26	68 12	Dist. 92.0. S. flammt mässig. Reine Luft.

V. Tableau der Vergleichen zwischen Mars und Fixsternen.

1	2		3	4	5	6	7	8	9	10	11
No. d. Beob.	Datum.	M. M. Z.	Vergl. *	log. Beob.	Extinct.	log ♂ : *	Red. auf ♂ mittl. ♂	log ♂ mittl. ♂ *	z ♂	z *	Bemerkungen.
55	1845 Aug. 23	10 ^h 19'.8	Wega	0,7044	+0,196	0,9004	9,6281	0,528	70°41'	22°56'	Dist. 76.0. Beugungslinien störend. Luft sehr rein.
63	Aug. 25	11 27. 5	Wega	0,6474	+0,168	0,8154	9,6335	0,449	68 4	35 30	Noch reinere Luft.
68	Sept. 1	12 16. 2	Wega	0,6639	+0,157	0,8209	9,6650	0,486	70 18	48 6	Ausserordentlich reine Nacht.
77	Novb. 5	10 38. 8	Wega	0,0276	+0,026	0,0536	0,3060	0,360	73 24	71 38	Dist. 74.8. Unsicher wegen unruhigen Lichts des *
113	1852 März 7	8 31. 0	Capella	0,0030	—0,001	0,0020	0,5594	0,561	23 37	25 5	Dist. 39 ungef.
130	März 14	8 43. 5	Capella	9,9526	—0,005	9,9476	0,6240	0,572	24 10	31 39	Dist. 39.9. Schönes Licht.
136	März 18	8 57. 5	Capella	9,9256	—0,008	9,9176	0,6601	0,578	25 57	36 26	Normale Umstände.
144	März 20	8 41. 9	Capella	9,8944	—0,007	9,8874	0,6778	0,565	25 26	35 11	Dist. 40.7. „Wundervoll klare Nacht.“
149	März 22	8 26. 2	Capella	9,9040	—0,006	9,8980	0,6951	0,593	25 3	33 56	Dist. 41.1. Luft sehr gut.
158	April 16	8 47. 7	Capella	9,5974	—0,042	9,5554	0,8895	0,445	35 57	52 23	Dist. 49.8. C. flammt.
160	April 16	12 3. 2	Arctur	9,5469	+0,095	9,6419	0,8904	0,532	60 43	28 37	Dist. 78.9. Licht ganz ruhig. Stellung unbequem.
164	April 17	8 39. 6	Capella	9,6818	—0,040	9,6418	0,8963	0,538	35 18	51 47	Dist. 47.8. Himmel sehr schön.
171	April 21	8 41. 1	Capella	9,6766	—0,049	9,6276	0,9226	0,550	37 9	54 16	Dist. 49.3. C. bläulich neben ♂.
179	April 22	9 22. 8	Capella	9,7143	—0,076	9,6383	0,9291	0,567	43 39	60 34	Dist. 49.4. Zuletzt Auge ermüdet.
183	Mai 10	9 28. 2	Arctur	9,4904	+0,045	9,5354	1,0318	0,567	52 37	33 2	Schwarzer Himmel. Um ☉ Untergang etwas verdächtig.
186	Mai 15	11 42. 6	Arctur	9,1637	+0,304	9,4677	1,0567	0,524	77 8,5	31 25	Dist. 68.6. Tiefschwarze Nacht. ♂ schon sichtlich geschwächt, und wallt.
390	1858 Mai 21	11 55. 4	Arctur	0,5662	+0,157	0,7232	9,9861	0,709	67 54	35 5	Etwas verdächtige Umstände.
392	Juni 5	10 18. 3	Spica	0,7651	+0,047	0,8126	0,0135	0,826	68 45	63 59	Dist. 26.7. Sp. flammt sehr stark. Sonst ziemlich gute Umstände.
418	Juni 13	9 41. 7	Wega	0,2599	+0,145	0,4049	0,0545	0,459	66 52	37 20	Farbe stört etwas. Nacht nicht ganz unverdächtig.

VI. Tableau der Vergleichen zwischen Saturn und Fixsternen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
No. der Beob.	Datum. M. M. Z.	Verglich. *	log. Beob.	Extinct.	log. $\bar{h}$: *	Red. auf $\bar{h}$ m. $\odot$ ohne Ring.	$\log \frac{\bar{h} \text{ m. } \odot \text{ o. Rg.}}{*}$	log. ($\Phi - J$)	log M Sin H Sin H'	log $\Delta\Delta'$	log Sin H Sin H'	z $\bar{h}$	z *	Distanz.	Bemerkungen.
118	1852 März 8 7h39.8	Capella	9,5594	+ 0,194	9,7534	0,0052	9,759 :	9,7647	9,3906	1,9608	70°20'	17°13'	54°		$\bar{h}$ nahe dem Horiz. Dunst
132	März 18 7 29.0	Capella	9,5170	+ 0,247	9,7640	0,0140	9,778 :	9,7647	9,3906	1,9651	75 5	21 57	52,3		Himmel besonders klar.
141	März 20 7 37.9	Capella	9,3989	+ 0,297	9,6959	0,0156	9,711 :	9,7647	9,3906	1,9659	76 42	24 45	52,1		Unterbrochen durch Nebelbildung.
210	Novbr. 4 9 32.2	Wega	0,0054	- 0,082	9,9234	9,7755	9,7755 :	9,7750	9,5385	1,8739	9,1070	45 15	61 53	107,3	Ruhiges Licht. Gut.
218	1857 Febr. 15 7 9.0	Capella	0,0464	+ 0,005	0,0554	9,7013	9,757 :	9,7945	9,7073	1,8769	32 25	3 20	30,5		Normale Umstände.
222	Febr. 19 6 59.1	Capella	0,0431	+ 0,005	0,0521	9,7067	9,759 :	9,7920	9,6964	1,8796	31 38	2 43	30,3		C. flammt etwas.
228	April 20 8 29.1	Capella	9,9574	- 0,003	9,9544	9,8066	9,761 :	9,7920	9,6964	1,9265	51 0	51 47	29,8		C. flammt stark.
240	Mai 14 9 10.7	Capella	9,8825	+ 0,032	9,9155	9,8423	9,758 :	9,7913	9,6864	1,9419	72 7	63 38	31,1		
272	1858 März 20 9 27.2	Capella	9,9952	- 0,016	9,9852	9,7981	9,783 :	9,7746	9,5890	1,8946	9,1619	33 45	42 1	38,1	

5.

In den Vergleichen der Venus mit Sirius hat sich zwischen den Einstellungen der beiden Beobachter, S. und L., ein deutlich ausgesprochener constanter Unterschied ergeben, in dem Sinne, dass der Fixstern im Vergleich mit dem Planeten durchaus heller für L. als für S. erschienen ist. Wiewohl die einzelnen Einstellungen in unser Tableau nicht aufgenommen sind, so erkennt man den Unterschied doch auch in den hier wiedergegebenen Zahlen darin, dass nach allen Reductionen die sieben auf den Messungen von S. allein beruhenden Werthe von $\log \varphi : \text{Sirius}$ (Tabl. I. Spalte 8) besonders gross sind (etwa mit Ausnahme des ersten, zu No. 117 gehörigen). Noch deutlicher tritt er aber bei der Vergleichung der einzelnen Ablesungen hervor; die oben ausführlich mitgetheilte Messung No. 147 kann dafür als Beispiel dienen. Wenn man bei derselben die von den beiden Beobachtern gemachten Einstellungen trennt, so ergibt sich, dass S. die Objectivhälfte *A*, welche den Fixstern zeigte, sowohl über als unter dem Bilde, näher an derjenigen Stellung (ungefähr 61) gehalten hat, welche den Stern als Punct zeigt, als L.: die Differenzen überschreiten zwar nicht sehr viel die Grenzen der Unsicherheit des Urtheiles, aber sie sind doch deutlich ausgesprochen; man hat im Mittel

	Ables. üb. d. B.	Ables. u. d. B.
S.	43.27	80.67
L.	42.83	82.70.

Die ganze Verschiebung der Objectivhälfte *A*, von der einen Seite nach der andern, war also für S.. 37.40, dagegen für L.. 39.87, während diejenige der Objectivhälfte *B* (in welcher Venus stand) für beide Beobachter gleich, und = 93.25 war; das Helligkeitsverhältniss beider Himmelskörper ($\varphi : *$) ist also von S. gemessen.. $\left(\frac{93.25}{37.40}\right)^2$ und von L.. $\left(\frac{93.25}{39.87}\right)^2$, d. h. von dem letzteren kleiner in einem Verhältnisse dessen Logarithmus ist $2 (\log 37.40 - \log 39.87) = 2 \cdot 9.9722$. Ein

Unterschied in demselben Sinne, bald etwas grösser bald etwas kleiner, ergibt sich ohne Ausnahme bei allen Vergleichen der Venus mit Sirius, welche von beiden Beobachtern gemeinschaftlich gemacht sind; an Stelle unserer Zahl 9.9722 erhält man auf diese Weise folgende Reihe von Zahlen: *)

(1852)	No. 110	9.9237
	127	604
	138	737
	142	801
	147	722
	152	575
	153	932
	156	765
	181	430
(1855)	211	730
(1857)	219	478
	223	626
	227	540
	236	594
	237	446
Mittel		9.9614

Sirius ist also, verglichen mit Venus, im Durchschnitte der 15 Beobachtungen von S. niedriger beurtheilt worden als von L. in einem Verhältnisse, dessen Logarithmus ist 9.9228, d. h. nahe im Verhältnisse $\frac{5}{6}$. In den Vergleichen zwischen Venus und Jupiter ergibt sich keine ähnliche Differenz, dergleichen auch nicht in 6 von beiden Beobachtern gemeinschaftlich gemachten Vergleichen zwischen Sirius und Capella, und auch dann nicht, wenn man das mittlere Resultat aus diesen 6 Beobachtungen vergleicht mit demjenigen aus 10 andern, von S. allein gemachten Messungen des Verhältnisses derselben Sterne.

*) Beobachtung No. 109 wird hier nicht mit aufgeführt, weil bei ihr nicht auf beiden Seiten des Bildes eingestellt worden ist.

Die Wahrnehmung des constanten Unterschiedes setzte uns zuerst in nicht geringe Verlegenheit. Die Vergleichen heller Fixsterne mit viel schwächeren, und die, obwohl nach einem anderen[•] Principe angestellten, von Venus und Jupiter mit dem Monde beruhigten uns jedoch in Betreff der Anfangs gehegten Besorgniss, dass aus irgend welchen unbekannten Gründen bei der Messung des Verhältnisses zweier an Helligkeit weit auseinander liegender Himmelskörper die Subjectivität des Beobachters einen störenden Einfluss ausüben könnte; es hat sich seitdem, unzweifelhaft wie wir glauben, herausgestellt, dass die Abweichung unserer beiderseitigen Messungen auf Rechnung des Flammens von Sirius zu setzen ist. Bei Vergleichen zwischen Sternen mehr ruhigen Lichtes und solchen welche stark funkelten, ergaben sich nämlich ganz analoge Unterschiede, welche andeuten, dass im Allgemeinen der funkelnde Stern von L. heller als von S., im Verhältnisse zu dem andern, taxirt wird. Man ist genöthigt, bei solchen Vergleichen mit dem Auge eine Art von Mittel zu suchen, indem in auf einander folgenden Augenblicken das eine Licht-Phantom im Photometer bald hell aufglänzt und bald erbleicht. In der Schätzung des mittleren Zustandes bleibt eine Unsicherheit, welche dem subjectiven Urtheile grösseren Spielraum gibt. Allerdings ist bei ähnlichen Messungen an andern Sternen der Unterschied unserer beiderseitigen Einstellungen nicht ganz so constant auf Eine Seite gefallen, wie bei der Vergleichung zwischen Venus und Sirius. Da aber die letztere auch schon durch die im §. 1 erwähnte Verschiedenartigkeit des Ansehens der zwei Lichtscheiben, und überdiess durch die Verschiedenartigkeit der Farbe, weiter erschwert wird, so scheint es ziemlich begreiflich, dass gerade bei ihr die subjective Verschiedenheit sich am meisten geltend machen konnte. Dass die Vergleichen zwischen Sirius und Capella nicht auch eine deutliche Differenz in dem Sinne verrathen, dass der erstere Stern von L. heller als von S. geschätzt wurde, wird namentlich noch daher rühren, dass diese Messungen im Allgemeinen gemacht worden sind, wenn α Canis weniger funkelte, während wir zum Zwecke der Venusbeobachtung, wenn Jupiter nicht am Himmel war, uns gezwungen

fanden, Sirius zur Vergleichung zu wählen, so unruhig auch sein Licht sein mochte.

Bei dem vorhandenen Unterschiede muss natürlich vorläufig das Mittel der Schätzung beider Beobachter angenommen werden, und es schien mir angemessen, auch die sieben von mir allein gemachten Vergleichungen der zwei genannten Himmelskörper auf dieses Mittel zu reduciren. Im Durchschnitte ist oben der Logarithmus des Verhältnisses, in welchem L. den Planeten gegen Sirius schwächer schätzte als S., gefunden worden $= 2 \times 9.9614$; um ein von S. allein beobachtetes Verhältniss φ : Sirius auf das Mittel der Schätzung beider Beobachter zu reduciren, wird man also zu seinem Logarithmus hinzufügen müssen (Einmal) 9.9614.

Zu den Vergleichungen No. 153, 156, 162 (sämmtlich zwischen Venus und Sirius) gehören drei unmittelbar nach denselben angestellte Vergleichungen zwischen Sirius und Capella, No. 154, 157, 163, welche in der Absicht gemacht worden sind, den Einfluss der Fehler zu verringern, welche aus der Unsicherheit über den genauen Betrag der Extinction des Lichtes des ersteren Fixsternes bei seinem tiefen Stande (in respective $73^{\circ} 16' : 76^{\circ} 42'$; $74^{\circ} 31'$ Zenitdistanz) hervorgehen würde. Die Vergleichungen No. 154, 157, 163 haben, mittelst der Extinctionstafel reducirt, den Logarithmus des Verhältnisses Sirius : Capella der Reihe nach ergeben $= 0.704; 0.725; 0.744$; nimmt man den wahrscheinlichsten Werth dieses Logarithmus, zufolge aller uns gegenwärtig vorliegender Beobachtungen, an $= 0.7145$, so ergibt sich also, dass zur Zeit der Beobachtungen $15\frac{3}{4}$ von dem Lichte des Sirius ein etwas grösserer Theil absorbirt war, als bei derselben Zenitdistanz unter mittleren Umständen; es wird also auch bei No. 153 der Logar. des Verhältnisses φ : Sirius, mit der Tafel reducirt, zu gross gefunden worden sein um $0.7145 - 0.704 = 0.011$; dagegen bei No. 156 und 162 zu klein um respective 0.010 und 0.029. Diese Correctionen habe ich an den betreffenden Zahlen angebracht,*) und nach solcher Berichtigung den Beobachtungen 153 und

*) Also an den Zahlen in Tabl. I, Col. 8, welche selbst noch uncorrectirt sind.

156, ungeachtet der grossen Zenitdistanz des Sirius, volles Gewicht eingeräumt; No. 162 behält halbes Gewicht, weil noch sonst störende Umstände notirt sind.

Wenn man jetzt, um die Mittel der verschiedenen Beobachtungen abzuleiten, aus den Tableaux diejenigen Resultate zusammennimmt, welche für das Helligkeitsverhältniss ein und desselben Paares von Himmelskörpern gefunden sind, so ergibt sich folgender Conspect:

Zusammenstellung der reducirten Beobachtungs-Resultate.

(Die angesetzten Zahlen sind immer die Logarithmen des Helligkeits-Verhältnisses des zuerst genannten Himmelskörpers zu dem zuletzt genannten.)

1) Venus gegen Sirius.	227	0.938
No. 109	236	0.880:
110	237	1.295:
117 S	Mittel: 4 gemeinschaftl. Beob. von	
121 S	vollem Gewichte geben	
125 S	0.9610 Gew. $\frac{8}{2}$,	
127	12 gemeinschaftliche Beob. von	
131 S	halbem Gewichte geben	
138	0.9789 Gew. $\frac{12}{2}$;	
142	also zusammen die gemeinschaft-	
147	lichen Beob.	
152	0.9717 Gewicht $\frac{20}{2}$.	
153	3 Beob. von S. allein, von vol-	
156	lem Gewichte, geben	
162 S	1.0183 Gew. $\frac{6}{2}$,	
169 S	4 ähnliche Beob. von halbem Ge-	
174 S	wichte geben	
181	1.0505 Gew. $\frac{4}{2}$;	
211	also zusammen die Beobachtungen	
219	von S. allein	
223	1.0312 Gewicht $\frac{10}{2}$	

oder, reducirt auf S. und L. (mit-
telst der Zahl 9.9614 s. ob.)

0.9926 Gewicht $^{10}/_2$.

Daher wird das Hauptmittel für
beide Beobachter

0.9787 Gewicht $^{30}/_2$.

2) Venus gegen Capella.

No. 111 . . . 1.647: Gew. $^1/_2$.

3) Venus gegen Jupiter.

No. 184 S 0.620:

191 0.677:

192 0.675:

197 S 0.756:

199 S 0.694:

217 0.691

220 S 0.707

221 0.646

225 S 0.613

229 S 0.642

Ein persönlicher Unterschied findet
hier nicht statt. 5 Beobb. von vol-
lem Gewichte geben

0.6598 Gew. $^{10}/_2$,

ebensoviele von halbem Gewichte

0.6844 Gew. $^5/_2$;

Hauptmittel **0.6680** Gew. $^{15}/_2$.

4) Venus gegen Mars.

No. 123 1.0815:

143 1.022 :

Mittel . . . 1.0518 Gew. $^2/_2$.

5) Jupiter gegen Wega.

No. 62 0.898:

67 0.915

72 0.870

76 0.759:

166 0.924:

180 0.854

193 0.913:

195 0.988:

200 0.864:

3 Beobb. von vollem Gewichte geben

0.8797 Gew. $^6/_2$,

6 Beobb. von halbem Gewichte geben

0.8911 Gew. $^6/_2$;

Hauptmittel **0.8854** Gewicht $^{12}/_2$.

6) Jupiter gegen Arcturus.

No. 161 1.039

167 0.985

172 0.967

185 1.057

189 1.037

202 1.092:

5 Beobb. von vollem Gewichte

1.0170 Gew. $^{10}/_2$,

Eine von halbem Gewichte

1.092 Gew. $^1/_2$;

Hauptmittel **1.0238** Gewicht $^{11}/_2$.

7) Jupiter gegen Regulus.

No. 116 . . . 1.340 Gew. $^2/_2$.

8) Jupiter gegen Sirius.

No. 85 0.395

226 0.379

Mittel 0.3870 Gewicht $\frac{1}{2}$.

9) Mars gegen Wega.

No. 55 0.5285

63 0.449

68 0.486

77 0.360:

418 0.459

4 Beobb. von vollem Gewichte

0.4807 Gew. $\frac{8}{2}$,

Eine von halbem Gewichte

0.360 Gew. $\frac{1}{2}$;Hauptmittel **0.4673** Gewicht $\frac{9}{2}$.

10) Mars gegen Capella.

No. 113 0.561

130 0.572

136 0.578

144 0.565

149 0.593

158 0.445

164 0.538

171 0.550

179 0.567

Mittel 0.5521 Gewicht $\frac{18}{2}$.

11) Mars gegen Arcturus.

No. 160 0.532

183 0.567

186 0.524

390 0.709:

3 Beobb. von vollem Gewichte geben

0.5410 Gew. $\frac{6}{2}$,

Eine von halbem Gewichte

0.709 Gew. $\frac{1}{2}$;Hauptmittel **0.5650** Gewicht $\frac{7}{2}$.

12) Mars gegen Spica.

No. 392 0.8261 Gew. $\frac{2}{2}$.

13) Saturn gegen Wega.

No. 210 9.6989: Gew. $\frac{1}{2}$.

14) Saturn gegen Capella.

No. 118 9.759:*)

132 9.778:

141 9.711:

218 9.757

222 9.759

238 9.761

240 9.758

372 9.783

5 Beobb. von vollem Gewichte geben

9.7636 Gew. $\frac{10}{2}$,

3 Beobb. von halbem Gewichte geben

9.7493 Gew. $\frac{3}{2}$;Hauptmittel **9.7603** Gewicht $\frac{13}{2}$.

*) Ich habe auch der Beobachtung No. 118 nur das Gewicht $\frac{1}{2}$ gegeben, obgleich in ihr die Extinctionsgrößen den Werth 0.200 nicht völlig erreichen, sondern nur den Werth 0.195, — weil sie doch in Beziehung auf alle Umstände viel eher in die Kategorie der No. 132, 141, 210 als in diejenige der Beobachtungen von 1857/8 (No. 218 ff.) zu setzen ist.

Um die verschiedenen Mittel unter sich verbinden zu können, muss man wissen, welches die Helligkeitsverhältnisse der verschiedenen Fixsterne sind, welche zur Vergleichung mit den Planeten gedient haben. In §. 3 meiner älteren am Eingange citirten Abhandlung findet man die Werthe zusammengestellt, welche sich aus den 1851 uns vorliegenden Messungen ergaben; diese sind aber jetzt nicht mehr die wahrscheinlichsten von uns anzunehmenden Werthe, nachdem die Zahl der Vergleichen der Fixsterne erster Grösse unter sich inzwischen mehr als verdoppelt worden ist. Die nähere Mittheilung in Betreff der neueren Messungen, welche noch fortgesetzt werden, behalten wir für einen andern Ort vor, und geben hier nur die Resultate, so wie sie im Mai 1858 aus bis dahin 133 Vergleichen als die wahrscheinlichsten berechnet worden sind; bei der Herleitung derselben sind die Vergleichen der Sterne mit Planeten noch nicht benützt, auch nicht die vorhandenen Vergleichen zwischen Sternen erster Grösse und schwächeren. Der Vollständigkeit wegen setze ich auch für diejenigen Sterne erster Grösse, welche nicht in den Planetenbeobachtungen figuriren, die Werthe her, und stelle zur Vergleichung neben diese jetzt zu adoptirenden Logarithmen die älteren Werthe, letztere sämmtlich um 0.0142 verkleinert. *)

*) Da die Beobachtungen nur über die Helligkeitsverhältnisse von Sternpaaren Aufschluss geben, so lassen sie nothwendig eine willkürliche Constante übrig, welche man zu den Logarithmen der Helligkeiten aller einzelnen beobachteten Himmelskörper addiren darf, und welche von selbst bei der Herstellung der Logarithmen der Helligkeitsverhältnisse je zweier Sterne wieder hinausfällt. Die Uebereinstimmung der älteren Zahlen mit den Beobachtungen, aus welchen sie hergeleitet sind, bleibt also vollkommen unverändert, wenn man sämmtliche ältere Logarithmen um 0.0142 verkleinert. Diese Verkleinerung nehme ich für die gegenwärtige Zusammenstellung desshalb vor, weil nach dem jetzt vorliegenden Materiale die Helligkeit Wega's im Vergleiche mit den andern Sternen sich etwas grösser ergibt als nach dem früheren; es würden daher, wenn man $\log. \text{Wega}$ hier wie dort $= 0$ halten wollte, in Folge dieser Willkühr beinahe alle Zahlen der neueren Liste kleiner ausfallen als die der alten, während doch die Unterschiede der meisten unter sich sich sehr wenig geändert haben. Es ist übrigens zu bemerken, dass die Vergrösserung des relativen Werthes für Wega, nach der neuen Bearbeitung, weniger daher rührt, dass die seit 1851 hinzugekommenen Beobachtungen eine grössere Helligkeit des Sternes indicirten als die älteren, als vielmehr daher, dass ich jetzt, im

Sternnamen.	Logarithmen der relat. Helligkeit.	
	Wahrsch ^{ste} . Werthe.	Wahrsch ^{ste} . Werthe.
	1851.	1858.
Sirius (α Can. maj.)	[0.6458]	0.6206
Wega (α Lyrae)	[9.9858]	0.0000
Rigel (β Orion.)	[9.9268]	9.9894
Capella (α Aurig.)	[9.9020]	9.9061
Arcturus (α Boot.)	[9.9153]	9.8948
Procyon (α Can. min.) . . .	[9.8518]	9.8427
Attair (α Aquil.)	[9.6791]	9.6813
Spica (α Virgin.)	[9.6749]	9.6810
Beteigeuze (α Orion.)		9.5867
Fomalhaut (α Pisc. austr.) . .		9.5259
Aldebaran (α Tauri)	[9.5444]	9.5244
Regulus (α Leonis)	[9.4954]	9.5119
Deneb (α Cygni)	[9.4700]	9.4798
Antares (α Scorpil.)	[9.5136]	9.4586
Pollux (β Geminor.)	[9.4395]	9.4578

Man kann nun die Zahlen der letzten Columnne benützen, um die Vergleichen zwischen Planeten und Fixsternen sämmtlich auf unsern Normalstern Wega zu reduciren. Ich habe dabei für passend erachtet, den Planetenbeobachtungen selbst für jetzt keinen Einfluss auf Correction der Fixsternverhältnisse zu gestatten: einestheils, weil nicht im Voraus

Besitze grösseren Materiales, diejenigen älteren Beobachtungen ausgeschlossen habe, in welchen Zenitdistanzen über 80° vorkamen, wodurch nun Capella gegen Wega etwas herabgedrückt worden ist. Die Vermuthung einer wirklichen Veränderung der Helligkeit, und zwar einer Abnahme derselben, wäre am meisten bei Arcturus indicirt, obwohl sie auch für ihn sehr hypothetisch bleibt. (Näheres hierüber an anderem Orte.) Grosse Unterschiede zwischen den alten und neuen Zahlen kommen eigentlich nur vor bei Rigel und Antares; bei dem letzteren Sterne wird die Differenz Niemand in Verwunderung setzen, da derselbe seiner starken südlichen Declination wegen hier nie unter günstigen Umständen beobachtet werden kann; was dagegen Rigel betrifft, so habe ich §. 5. B der älteren Abhandlung erörtert, dass die damals vorliegenden Beobachtungen dieses Sternes sehr schlecht unter sich übereinstimmten.

feststeht, ob in der Helligkeit der Sonne und in der Albedo eines einzelnen Planeten keine Schwankungen vorkommen, welche die Unsicherheit der Beobachtungsergebnisse überschreiten; andernteils damit die Controle der Fixsternmessungen durch die Planetenbeobachtungen desto selbstständiger gehalten werde.

Aus unseren Mitteln 1) bis 14) gehen hiernach folgende Zahlen hervor:

- 1) $\log \varphi$ (mittl. grösster Glanz) : Wega = 1.5993 Gew. $^{30}_{/2}$ [durch Sirius.]
- 2) „ „ „ = 1.553 Gew. $^{1}_{/2}$ [durch Capella.]

Hieraus im Hauptmittel

$$\text{I. } \log \varphi \text{ (mittl. grösster Glanz) : Wega} = 1.5978 \text{ Gew. } ^{31}_{/2}.$$

Ferner aus Mittel 3):

$$\text{II. } \log \varphi \text{ (mittl. grösster Glanz) : } \varpi \text{ (mittl. } \odot) = 0.6680 \text{ Gew. } ^{15}_{/2}.$$

Ebenso aus 4):

$$\text{III. } \log \varphi \text{ (mittl. grösster Glanz) : } \odot \text{ (mittl. } \odot) = 1.0518 \text{ Gew. } ^{2}_{/2}.$$

- 5) . . . $\log \varpi$ (mittl. $\odot$) : Wega = 0.8854 Gew. $^{12}_{/2}$ [direct];
- 6) . . . „ „ „ = 0.9186 Gew. $^{11}_{/2}$ [durch Arctur];
- 7) . . . „ „ „ = 0.8519 Gew. $^{2}_{/2}$ [durch Regulus];
- 8) . . . „ „ „ = 1.0076 Gew. $^{4}_{/2}$ [durch Sirius].

Daher im Mittel

$$\text{IV. } \log \varpi \text{ (mittl. } \odot) : \text{Wega} = 0.9125 \text{ Gew. } ^{29}_{/2}.$$

- 9) . . . $\log \odot$ (mittl. $\odot$) : Wega = 0.4673 Gew. $^{9}_{/2}$ [direct];
- 10) . . . „ „ „ = 0.4582 Gew. $^{15}_{/2}$ [durch Capella];
- 11) . . . „ „ „ = 0.4598 Gew. $^{7}_{/2}$ [durch Arctur];
- 12) . . . „ „ „ = 0.5071 Gew. $^{2}_{/2}$ [durch Spica].

Hieraus

$$\text{V. } \log \odot \text{ (mittl. } \odot) : \text{Wega} = 0.4635 \text{ Gew. } ^{36}_{/2}.$$

Endlich aus 13) und 14):

- 13) $\log h$ (mittl. $\odot$ ohne Ring) : Wega = 9.6989 Gew. $^{1}_{/2}$ [direct];
- 14) „ „ „ = 9.6664 Gew. $^{13}_{/2}$ [durch Capella].

Daher im Mittel

$$\text{VI. } \log h \text{ (mittl. } \odot \text{ ohne Ring) : Wega} = 9.6687 \text{ Gew. } ^{14}_{/2}.$$

Man bemerkt schon hier, dass die verschiedenen Ergebnisse im Allgemeinen sehr gut zusammenstimmen, so dass die Beobachtungen an

den Planeten zugleich eine ganz befriedigende Controle für die angewandten Verhältnisszahlen der Sterne unter sich darbieten. Einigermassen auffallend ist nur die Abweichung der Bestimmung des Jupiter durch Sirius (in 8) von seinen Bestimmungen durch andere Fixsterne. Das Mittel aller Bestimmungen des Jupiter durch Sterne, 0.9125 in IV. harmonirt aber sehr gut mit demjenigen aller Bestimmungen der Venus durch Sterne (d. h. hier wesentlich durch Sirius), 1.5978 [I]; nach beiden würde der Logarithmus des Verhältnisses ♀ grösster Glanz : ♀ mittl. ♂, gefunden = 0.6853, während die directen Vergleichen gegeben haben 0.6680 [s. II.]; eine Uebereinstimmung, welche um so befriedigender ist, wenn man bedenkt, einerseits, dass sie abhängt von dem fünffachen Uebergange — Venus auf Sirius, Sirius auf Capella, *) Capella auf Wega (oder Arctur), Wega (oder Arctur) auf Jupiter, Jupiter auf Venus, — und andererseits, dass die ♀ Beobachtungen in ziemlich grossen Zenitdistanzen gemacht werden mussten. **)

Zur Ableitung der Verhältnisse der drei Planeten Venus, Mars, Jupiter in ihrer mittleren grössten Helligkeit zu Wega haben wir also die fünf Bedingungsgleichungen I. bis V., aus welchen die wahrscheinlichsten Werthe zu ermitteln sind. Wenn man zu dem Ende einen Augenblick setzt

$$\log \text{♀} : \text{Wega} = 1.6 + x$$

$$\log \text{♂} : \text{Wega} = 0.9 + y$$

$$\log \text{♂} : \text{Wega} = 0.45 + z$$

so nehmen die fünf Bedingungsgleichungen die Form an:

$$x + 0.0022 = 0 \quad \text{Gew. } 3\frac{1}{2}$$

$$x - y + 0.0320 = 0 \quad \text{Gew. } 15\frac{1}{2}$$

*) Sirius ist direct mit keinem der Sterne verglichen, mit welchen Jupiter direct verglichen ist, sondern nur mit Capella. Die beiden directen Vergleichen zwischen Sirius und Jupiter selbst fallen wenig in's Gewicht bei der Bildung von Gl. IV.

**) Ungeachtet dieses letzteren Umstandes, welcher die einzelnen Messungsergebnisse bei ♀ von den Zahlen der Extinctionstabelle ziemlich stark abhängig macht, ist übrigens für das Hauptresultat ein constanter Fehler, herrührend von unrichtiger Annahme der Absorption, sehr wenig zu besorgen, weil Venus ungefähr ebenso oft höher wie tiefer stand als der Vergleichstern.

$$\begin{aligned} x - z + 0.0982 &= 0 & \text{Gew. } \frac{2}{2} \\ y - 0.0125 &= 0 & \text{Gew. } \frac{29}{2} \\ z - 0.0135 &= 0 & \text{Gew. } \frac{36}{2}, \end{aligned}$$

und man leitet aus ihnen nach den bekannten Regeln folgende Normalgleichungen ab:

$$\begin{aligned} 48x - 15y - 2z + 0.7446 &= 0 \\ -15x + 44y &- 0.8425 = 0 \\ -2x &+ 38z - 0.6824 = 0 \end{aligned}$$

Die Werthe der drei Unbekannten, welche diesen Gleichungen Genüge leisten, sind:

$$x = -0.00985; \quad y = +0.01579; \quad z = +0.01744,$$

so dass die wahrscheinlichsten Resultate, gezogen aus allen 82 Planetenbeobachtungen, sich folgendermassen darstellen:

$$\text{A. } \left\{ \begin{aligned} \log \text{♀ (mittl. grösster Glanz)} : \text{Wega} &= 1.5902 \\ \log \text{♂ (mittl. Opposition)} : \text{Wega} &= 0.9158 \\ \log \text{♂ (mittl. Opposition)} : \text{Wega} &= 0.4674 \\ \log \text{♂ (mittl. Oppos. ohne Ring)} : \text{Wega} &= 9.6687. [\text{s. Gl. VI.}] \end{aligned} \right.$$

Man wird diese Zahlen benutzen können, um im Voraus für jede andere Epoche die Helligkeit der Planeten, verglichen mit Wega, zu berechnen. Zu dem Ende hat man nur die „Reduction auf mittlere Opposition“ (oder bei ♀, „auf mittleren grössten Glanz“) [s. Gl. V. des §. 2] mit dem entgegengesetzten Zeichen an unseren Zahlen anzubringen; man wird daher für einen beliebigen Moment haben:*)

$$\text{B. } \left\{ \begin{aligned} \log \text{♀} : \text{Wega} &= 1.6301 + \log \frac{\Phi}{(\Delta\Delta')^2} \\ \log \text{♂} : \text{Wega} &= 3.7714 + \log \frac{\Phi}{(\Delta\Delta')^2} \\ \log \text{♂} : \text{Wega} &= 0.4474 + \log \frac{\Phi}{(\Delta\Delta')^2} \end{aligned} \right.$$

wo Δ und Δ' die augenblickliche Entfernung des Planeten von $\odot$ und $\oplus$ vorstellen, ausgedrückt in Theilen der mittleren Entfernung der Erde von

*) Die Rechnungsvorschrift für Saturn ist aus dem Anhang zu entnehmen.

der Sonne, und wobei Φ nach Gl. VI. des §. 2. die Grösse vorstellt $\frac{2}{3\pi} (\sin v - v \cos v)$, deren Logarithmus zu gegebenen Werthen von v (des äusseren Winkels am Planeten im Dreiecke zwischen Sonne, Planet, Erde) aus der am Ende beigefügten Tafel entnommen werden kann. — Will man das Helligkeitsverhältniss des Planeten zu einem andern Sterne erster Grösse als Wega haben, so gestattet die oben (p. 31) gegebene Tafel den Uebergang zu machen; ein Beobachter, dessen Auge in der Beurtheilung der relativen Helligkeit verschiedenfarbiger Sterne von unseren Messungsergebnissen sich entfernt, wird jedenfalls eine grössere Uebereinstimmung seiner Wahrnehmung mit der Rechnung zu erwarten haben, wenn er in der letzteren, mittelst unserer Verhältnisszahlen, auf einen dem Planeten ähnlich gefärbten Stern übergeht, als wenn er bei Wega bleibt, deren bläulich weisse Farbe z. B. von der rothen des Mars sehr weit verschieden ist.

6.

Wenn man mittelst der Sterntabelle von den in A gegebenen Resultaten zunächst wieder übergeht auf die verschiedenen direct mit den Planeten verglichenen Fixsterne, so ergibt sich folgende Vergleichung der definitiven Mittelwerthe mit unseren Beobachtungsmitteln 1 bis 14:

	Rechnung.	Beobachtung.	Gewicht.	R — B.
1) $\log \text{♀} - \log \text{Sirius}$	0.9696	0.9787	$30/2$	— 0.0091
2) $\log \text{♀} - \log \text{Capella}$	1.6840	1.647	$1/2$	+ 0.037
3) $\log \text{♀} - \log \text{♂}$	0.6744	0.6680	$15/2$	+ 0.0064
4) $\log \text{♀} - \log \text{♂}$	1.1227	1.0518	$2/2$	+ 0.0709
5) $\log \text{♂} - \log \text{Wega}$	0.9158	0.8854	$12/2$	+ 0.0304
6) $\log \text{♂} - \log \text{Arctur}$	1.0210	1.0238	$11/2$	— 0.0028
7) $\log \text{♂} - \log \text{Regulus}$	1.4039	1.340	$2/2$	+ 0.064
8) $\log \text{♂} - \log \text{Sirius}$	0.2952	0.3870	$4/2$	— 0.0918
9) $\log \text{♂} - \log \text{Wega}$	0.4674	0.4673	$9/2$	+ 0.0001
10) $\log \text{♂} - \log \text{Capella}$	0.5613	0.5521	$18/2$	+ 0.0092

Rechnung. Beobachtung. Gewicht. R — B.

11) $\log \text{♂} - \log \text{Arcturus}$	0.5726	0.5650	$\frac{7}{2}$	+	0.0076
12) $\log \text{♂} - \log \text{Spica}$	0.7864	0.8261	$\frac{2}{2}$	—	0.0397
13) $\log \text{♂} - \log \text{Wega}$	9.6687	9.6989	$\frac{1}{2}$	—	0.0302
14) $\log \text{♂} - \log \text{Capella}$	9.7626	9.7603	$\frac{13}{2}$	+	0.0023

Wenn man ferner auch alle einzelnen Beobachtungen mit den Rechnungsergebnissen vergleicht, so ergibt sich folgende Zusammenstellung der Fehler, R — B, in der dieselben angesetzt sind in Einheiten der dritten Stelle nach dem Comma, und nach derselben Reihenfolge, in welcher die Beobachtungen oben (p. 27, 28, 29) vorkommen:*)

No. d. Beob.	R — B.	No. d. Beob.	R — B.
109:	+ 31	219:	+ 43
110:	— 51	223:	+ 37
117:	+ 38	227:	+ 32
121:	— 28	236:	+ 90
125:	— 69	237:	— 325
127:	+ 50	111:	+ 37
131:	— 41	184:	+ 54
138:	— 24	191:	— 3
142:	+ 19	192:	— 1
147:	+ 28	197:	— 82
152:	+ 69	199:	— 20
153:	— 7	217:	— 17
156:	— 17	220:	— 33
162:	— 20	221:	+ 28
169:	— 80	225:	+ 61
174:	— 1	229:	+ 32
181:	0	123:	+ 42
211:	— 46	143:	+ 101

*) Die von S. allein gemachten Vergleichen zwischen Venus und Sirius sind vor Bildung der betreffenden Fehler auf das Mittel der beiden Beobachter reducirt worden. (s. p. 26.)

No. d. Beob.	R — B.	No. d. Beob.	R — B.
62:	+ 18	113	0
67	+ 1	130	— 11
72	+ 46	136	— 17
76:	+ 157	144	— 4
166:	— 8	149	— 32
180	+ 62	158	+ 116
193:	+ 3	164	+ 23
195:	— 72	171	+ 11
200:	+ 52	179	— 6
161	— 18	160	+ 41
167	+ 36	183	+ 6
172	+ 54	186	+ 49
185	— 36	390:	— 136
189	— 16	392	— 40
202:	— 71	210:	— 30
116	+ 64	118:	+ 4
85	— 100	132:	— 15
226	— 84	141:	+ 51
55	— 61	218	+ 6
63	+ 18	222	+ 3
68	— 19	238	+ 2
77:	+ 107	240	+ 5
418	+ 8	372	— 20

Bei der Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers muss die Beobachtung No. 237 ausgeschlossen werden, deren Abweichung von der Rechnung so stark ist, dass ihre Aufnahme allein die Quadratsumme aller Fehler um die Hälfte ihres Werthes vergrössern würde. Denn die Principien, welche aller Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungen zu Grunde liegen, erfordern, dass immer eine einzelne Beobachtung, der grossen Anzahl aller übrigen gegenüber, nur einen sehr

kleinen Einfluss auf das Resultat ausübt. *) Die Summe der Quadrate der 81 übrigen Fehler ist 0.204019; **) wenn man sie dividirt durch 77 (= Zahl der Beobachtungen vermindert um die Zahl der aus denselben berechneten Unbekannten), und die Quadratwurzel auszieht, so findet man den mittleren Fehler = 0.05147; den wahrscheinlichen, durch Multiplication mit dem bekannten Factor = $\pm$ **0.03472**; das heisst, wenn man aus einer einzelnen photometrischen Vergleichung eines Planeten mit einem anderen oder mit einem Fixsterne den Logarithmus des Helligkeitsverhältnisses berechnet, so wird dabei, im allgemeinen Durchschnitte aus Beobachtungen, welche unter anscheinend guten Umständen gemacht sind, und aus solchen, welche schon a priori für etwas minder zuverlässig zu halten waren, und nach allen Reductionen der Fehler des gefundenen Logarithmus die Grösse 0.0347 nahezu eben so oft nicht erreichen, als er sie übersteigen wird. In §. 3. meiner Eingangs erwähnten früheren Abhandlung hatte ich den wahrscheinlichen Fehler für das Resultat einer Vergleichung zweier Fixsterne erster Grösse unter sich fast eben so gefunden (0.03606). Man hätte vielleicht einige Ursache gehabt, bei den Planetenbeobachtungen einen etwas grösseren Fehler zu erwarten, theils in Folge des in §. 1. erwähnten Umstandes, theils auch weil bei Venus und Jupiter die grosse Helligkeit, bei Mars die stark röthliche Farbe die Beobachtung erschwert; wenn das Resultat sich trotzdem ebenso günstig wie früher bei den Fixsternen darstellt, so scheint es, dass unsere inzwischen durch die Erfahrung erlangte genauere Bekanntschaft mit den Umständen, welche ein gutes Resultat hoffen lassen, verbunden mit der grösseren Uebung des Auges in der Beurtheilung der Helligkeiten, jene Nachtheile aufgewogen hat.

*) Von der Vergleichung No. 237 zwischen Venus und Sirius, welche unter besonderen Umständen gemacht ist, werde ich unten noch zu sprechen haben. (S. §. 7.)

**) Dies ist nicht der Zahlenwerth derjenigen Summe, welche durch unsere Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate zum Minimum gemacht wurde; denn bei der letzteren ist der Unterschied zwischen Beobachtungen von ganzem und von halbem Gewichte gemacht, während in der obigen Summe auch die Fehlerquadrate der für minder gut gehaltenen Beobachtungen voll aufgenommen sind.

Nach der Theorie der Probabilitäten ist zu erwarten, dass das arithmetische Mittel der beiden Fehler, welche unter allen 82 Fehlern der absoluten Grösse nach die mittelsten Stellen einnehmen, sehr nahe übereinstimmen wird mit dem wahrscheinlichen Fehler; in der That ist jenes Mittel 0.032. Ferner sollen Fehler zwischen 0 und dem wahrscheinlichen nahezu eben so oft vorkommen, als Fehler ausserhalb des letztern; in Wirklichkeit kommen 44 kleinere und 38 grössere vor. Fehler, die die Hälfte des wahrscheinlichen nicht erreichen, würden a priori zu erwarten sein*) in 82. $0.26407 = 21.65$ Fällen; in Wirklichkeit kommen diese kleinen Fehler 25mal vor. Endlich wären Fehler, die das Doppelte des Wahrscheinlichen übersteigen, zu erwarten in 82. $0.17734 = 14.54$ Fällen; in der That kommen sie 14mal vor. Alles dies zeigt an, dass der wahrscheinliche Fehler sicher nicht grösser ist, als er aus der Quadratsumme, mit Ausschluss der Beobachtung No. 237, sich ergeben hat. Wenn in unserem Falle die kleinen Fehler, den grossen gegenüber, der Zahl nach noch etwas mehr vorwiegen, als die Wahrscheinlichkeitsrechnung erwarten lässt, so ist die Ursache davon wahrscheinlich darin zu suchen, dass die neueren Saturnsmessungen, in Folge der Auswahl besonders günstiger Umstände, sämmtlich auf die Seite der Beobachtungen von mehr als mittlerer Güte fallen. Sie haben in dieser Hinsicht der von ihnen im Voraus gehegten Erwartung völlig entsprochen.

Um die Uebereinstimmung der Beobachtungen mit der Theorie noch anschaulicher hervortreten zu lassen, als sie sich aus der Fehlertabelle ergibt, habe ich auf der beigefügten Figurentafel den Gang der Lichterscheinung der Venus vom 6. März bis 7. Juni 1852 (d. h. so weit er in jenem Jahre photometrisch verfolgt worden ist) graphisch dargestellt. Wenn man das Datum zur Abscisse (horizontal) und den zugehörigen Logarithmus des Helligkeitsverhältnisses ♀ : Wega**) zur Or-

*) S. Encke, Astron. Jahrbuch 1834 p. 271.

**) Reducirt wegen Extinction, und reducirt von Sirius, Capella oder Jupiter auf Wega, aber nicht reducirt auf grössten Glanz der Venus. Die von S. allein gemachten Vergleichen zwischen Venus und Sirius sind corrigirt wie oben.

dinate (vertical) nimmt, so gibt jede Messung einen Punct, welchen man, mit einem kleinen Ring umgeben und von der Nummer der Beobachtung begleitet, in der Figur eingetragen findet. (No. 110 und 111, welche unmittelbar nach einander gemacht wurden, sind zu einem Mittel vereinigt, bei welchem die Vergleichung mit Sirius, derjenigen mit Capella gegenüber, doppeltes Gewicht erhalten hat.) Zwischen diesen Puncten hindurch und in möglichstem Anschlusse an dieselben ist nach dem Augenmaasse die Linie AB gezogen worden, welche sonach die allmähliche Lichtzunahme des Planeten veranschaulicht, wie sie sich aus den Beobachtungen ergibt nach einer rein empirischen Ausgleichung Dessen, was sich in denselben als zufällige Unregelmässigkeit darstellt. Dagegen stellt die Linie CD den Gang der Helligkeit so dar, wie er gemäss der ersten der drei Gleichungen B. des vorigen §. sich berechnet, d. h. wie er nach der Lambert'schen Theorie aus sämtlichen Venusbeobachtungen, nicht nur des Jahres 1852, sondern auch der Jahre 1855 und 1857, für jenes Jahr abgeleitet wird. Man bemerkt, dass beide Linien sehr nahe zusammenreffen; ihre Entfernung von einander wird nur etwas beträchtlich am Anfange und am Ende, d. h. an den Stellen, an welchen die Lage der empirisch gefundenen Linie nothwendig unsicher bestimmt ist. *) An allen übrigen Stellen ist der Ordinatenunterschied an den beiden Curven, wie man sieht, viel kleiner als 0.035, d. h. als die wahrscheinliche Unsicherheit eines beobachteten Ordinatenwerthes; natürlicherweise, — weil die empirische Linie nicht den einzelnen bestimmten Oertern genau nachgeht, sondern schon einen mittleren Zug durch dieselben hin nimmt.

Man findet in der Figur noch eine dritte Linie EF eingetragen, deren Ordinaten, ebenfalls berechnet, gleich sind $\text{Const.} + \log \left(\frac{\sin \frac{1}{2} v}{AA'} \right)^2$. Wenn man nämlich, ohne die ordentliche Integration zu machen, durch einen rohen Ueberschlag sich eine Vorstellung von der jedesmaligen Helligkeit des Planeten machen wollte, könnte man geneigt sein, anzunehmen,

*) Das letztere ist namentlich, wie man aus der Vertheilung der Beobachtungs-Oerter in der Figur sieht, am Ende der Fall.

dass dieselbe ungefähr der Grösse $\frac{(\sin \frac{1}{2} v)^2}{(AA')^2}$ proportional sein möchte. Der Nenner dieses Ausdruckes bedarf keiner Rechtfertigung; der Zähler stellt vermöge der Bedeutung des Winkels v (s. §. 2) Das dar, was man die Grösse der Phase nennen könnte, nämlich das jedesmalige Verhältniss der scheinbaren Grösse desjenigen Abschnittes vom Planeten, welcher Licht nach der Erde sendet, zur scheinbaren Grösse seiner vollen Scheibe, aus gleicher Entfernung gesehen. *) Wenn diese einfache Formel der Natur entspräche, so müsste die Linie EF durch eine blosse Verschiebung im Sinne der Ordinaten (d. h. durch eine passende Bestimmung der Constanten, welche zum Logarithmus addirt ist) mit der beobachteten Curve AB zusammengebracht werden können; es zeigt sich aber, dass dies durchaus nicht der Fall ist, indem EF viel stärker ansteigt als AB. Man sieht, dass die Beobachtungen eine wirkliche Bestätigung für die Lambert'sche Formel geben, und sich keineswegs eben so gut mit irgend einer andern vertragen, die man, ohne auf die photometrischen Gesetze des grossen Geometers einzugehen, vielleicht statt jener aufstellen möchte.

Die Uebereinstimmung der Messungen an Mars, welcher von uns am längsten, von 1845 bis 1858, verfolgt worden ist, und für welchen die verschiedenen Fixsterne besonders gut zusammengehende Resultate geliefert haben (vgl. die geringen Fehler in den Gleich. 9) bis 11) am Anfange dieses §.), verdient vielleicht aus dem Grunde noch besonders hervorgehoben zu werden, weil gerade dieser Planet von uns unter ausserordentlich verschiedenen Umständen beobachtet worden ist. Man ersieht aus dem Tableau V. des §. 4. (Col. 7), dass er der Rechnung nach zur Zeit der ersten Messungen des Jahres 1845, wo er sich in Opposition und in der Erdnähe zugleich befand, 27mal heller sein sollte als Mitte Mai 1852; die Beobachtungen geben 31 : 1 für das Verhältniss der

*) Einen Ausdruck obiger Art hat u. A. Herschel angewendet, um für seine astrometrischen Beobachtungen die Helligkeit seines kleinen Mondbildes zu berechnen, deren Kenntniss übrigens für jenen Zweck nur ein untergeordnetes Interesse hatte.

beiden extremen Helligkeiten, in welchen er gesehen wurde (Mittel von No. 55 und 63 einerseits, und No. 186 andererseits). Die Unterschiede der directen Erscheinung gehen so weit, dass Mars das Einmal 1.7mal so hell war als Sirius, das Anderemal nur etwa so lichtstark wie Castor oder wie ϵ Ursae majoris, Sterne, die man zur zweiten Grösse rechnet; nach der Reduction werden Beobachtungsergebnisse, welche in ihrer Originalform einen so auffallenden Gegensatz darbieten, in der schönsten Uebereinstimmung befunden.

Ebenso möchte ich die Harmonie, welche zwischen den Saturnsbeobachtungen der Epoche 1852 und denjenigen von 18^{57}_{58} stattfindet, geltend machen als eine Controle über die Brauchbarkeit unserer Extinctionstafel. Die älteren Messungsergebnisse mussten, der grossen Zenitdistanzen wegen, logarithmische Correctionen erhalten von 0.194, 0.247, 0.297, 0.082 [s. Tabl. VI. Col. 5], während bei den neueren die Reduction den Betrag 0.033 nur Einmal erreicht. Vermittelt dieser Correctionen, welche ganz auf unseren älteren Untersuchungen vom Jahre 1851 beruhen, wird aber die Uebereinstimmung der zweierlei Beobachtungen so schön, dass die vier des Jahres 1852 (wenn man auch die Vergleichung No. 210 von Wega auf Capella reducirt und demnach als ihr Resultat ansieht $\log h : \text{Capella} = 9.7929$) im Mittel liefern $\log h$ (m. $\odot$ o. R.) $: \star = 9.7602$, während die 5 Messungen von 18^{57}_{58} geben 9.7636.

Es ist vielleicht von einigem Interesse, die Frage aufzuwerfen, in wie ferne die photometrischen Messungen erkennen lassen, dass die Lichtstärke des Saturn sich nach anderen Gesetzen richtet als die Helligkeit der anderen Planeten. Wenn wir von der Existenz des Ringes keine Kenntniss hätten, so müsste die Reduction auf eine Normalepoche der Beobachtung bei h ebenso gemacht werden, wie bei jenen; man müsste also erwarten, auch bei ihm sehr nahe constante Zahlen zu erhalten, wenn man (conform der Gleich. V. in §. 2) zu dem Logarithmus des beobachteten Helligkeitsverhältnisses jedesmal addirt:

$$\text{Const.} - \log \frac{\Phi}{(AA')^2}$$

Die Werthe von $\log \Delta\Delta'$, wie sie zu den verschiedenen Beobachtungen gehören, sind in Tabl. VI. schon aufgeführt; die zugehörigen Werthe von $\log \Phi$ sind folgende: für Beob. No. 118, 132, 141... 9.8230; für No. 210... 9.8239; für No. 218 und 222... 9.8223; für No. 238... 9.8216; für No. 240... 9.8225; für No. 372... 9.8217. Nimmt man die Constante (deren Werth für die gegenwärtige Frage gleichgiltig ist) $= 6.0015$, so ergeben sich nach dieser unvollkommenen Theorie für die einzelnen Beobachtungen die Reductionen, welche in der 3. Columne des nachstehenden kleinen Täfelchens aufgeführt sind; die 2. Columne desselben enthält die Beobachtungsergebnisse, nur corrigirt wegen Extinction, d. h. die Reproduction der Zahlen aus Spalte 6 unseres Tableau VI., bei Beobachtung No. 210 von Wega auf Capella reducirt durch Subtraction des Logarithmus 9.9061:

No.	$\log h : \text{Capella.}$	Unvollk. Red.	Summe.
118	9.753	+ 0.100	9.853
132	9.764	+ 0.109	9.873
141	9.696	+ 0.110	9.806
210	0.017	— 0.075	9.942
218	0.055	— 0.067	9.988
222	0.052	— 0.062	9.990
238	9.954	+ 0.032	9.986
240	9.915	+ 0.063	9.978
372	9.985	— 0.031	9.954

Gibt man, ebenso wie bei der ordentlichen Rechnung, den vier ersten Beobachtungen halbes Gewicht, so ist das Mittel der Zahlen in der letzten Columne, welche constant sein sollten, 9.9476, die einzelnen Abweichungen, $R - B$, sind, in Einheiten der 3. Decimale, der Reihe nach:

$$\begin{array}{r}
 + 94 \\
 + 75 \\
 + 141 \\
 + 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

—	41
—	42
—	38
—	31
—	6

Abgesehen davon, dass hieraus ein erheblich grösserer wahrscheinlicher Fehler sich ergeben würde, als im Durchschnitte aller Messungen überhaupt, (auf welchen Umstand nicht allzuviel Gewicht zu legen wäre, da er aus so wenigen Beobachtungen nicht sehr sicher zu ermitteln ist), so sieht man sogleich, dass starke Fehler hier auffallend oft vorkommen würden; unter 9 Beobachtungen wäre nur 3mal der wahrscheinliche Fehler 0.035 nicht überschritten. Aber noch deutlicher spricht sich das Unge-nügende der versuchten Reduction darin aus, dass sie die Beobachtungsfehler ganz nach den Epochen in zwei Gruppen zerfallen lässt; alle positiven Fehler würden auf die Messungen von 1852, und alle negativen auf die von 18⁵⁷/₅, treffen, zu deutlichem Beweis, dass diese Theorie beide Erscheinungen nicht in Uebereinstimmung bringt. Man würde also, wenn wir gar keine anderweitige Kenntniss von der Existenz des Ringes hätten, doch schon jetzt aus den photometrischen Resultaten allein ziemlich starke Ursache zu der Vermuthung erhalten, dass die Oberfläche des Saturn andere Erscheinungen darbieten müsse, als die der anderen Planeten. Es scheint mir sehr wahrscheinlich, dass wir für die sogenannten Asteroiden wirklich eher von der Photometrie als von einer Verbesserung der Leistungen der practischen Optik die Beantwortung der Frage zu erwarten haben, ob dieselben kugelförmig sind oder nicht.

7.

Die Verfolgung der Lichterscheinungen der Planeten ist überhaupt geeignet, einen Beitrag zur Beantwortung einiger Fragen der physischen Astronomie zu liefern, deren Interesse uns hauptsächlich veranlasst hat, den Photometer längere Zeit hindurch vorzugsweise für diese Art der

Beobachtungen zu verwenden. Unsere directe Wahrnehmung sagt uns nichts darüber, ob die Helligkeit der Sonne eine constante oder, wie die so vieler Sterne, variabel ist; geringe Veränderungen wird man wegen der wandelbaren Erscheinung der Flecken jedenfalls statuiren müssen; ob aber bedeutende Schwankungen oder selbst eine langsam fortschreitende Alteration vorhanden sind, ist eine Frage, über welche nur die Messung Aufschluss zu geben vermag. Bei der sehr grossen Schwierigkeit, welche der Vergleichung des directen Sonnenlichtes mit irgend welchem anderen Lichte entgegensteht, ist man von selbst darauf hingewiesen, den Reflex desselben auf den Planeten zum Gegenstande der Beobachtung zu machen, indem es aus allgemein bekannten Thatsachen unzweifelhaft ist, dass diese ihren hellen Glanz wirklich dem Sonnenscheine verdanken. Sollte die Vergleichung ihres Lichtes mit demjenigen von Fixsternen Aenderungen erkennen lassen, welche von der gegenwärtigen Theorie der Erscheinung nicht vorgesehen sind, so wird man ein leichtes Mittel haben, zu entscheiden, ob eine Variabilität in der Helligkeit der Sonne, oder vielmehr eine solche des Reflexionsvermögens der Planetenoberfläche die Ursache davon ist; denn eine Veränderung der ersten Art wird sich dadurch vor der anderen auszeichnen, dass sie gleichzeitig an allen beobachteten Planeten auftreten müsste. Wenn man erst ausreichendes Material besässe, würde man auch untersuchen können, ob wahrgenommene Schwankungen durch die Annahme einer verschiedenen Helligkeit verschiedener Seiten der Sonne zu erklären wären, u. s. w. Die Antwort, welche aus unseren Beobachtungen für diese Fragen geschöpft werden kann, geht dahin, dass Veränderungen der verschiedenen Arten, wenn sie vorhanden sind, jedenfalls während der von unseren Beobachtungen umfassten Epoche (August 1845 bis Juni 1858) in so enge Grenzen eingeschlossen waren, dass sie durch die nothwendige Unsicherheit der einzelnen Beobachtungen verschleiert werden. Denn, wie im vorigen §. erörtert ist, übertrifft die Abweichung der einzelnen Planetenbeobachtungen von der Rechnung um nichts diejenige, welche sich bei Fixsternen ergibt. Man könnte sich

versucht finden, in der Vertheilung der Vorzeichen unserer Fehler, z. B. bei ♀, einige Andeutung einer geringen Variabilität der Albedo zu vermuthen;*) aber eine einigermaßen fundirte Untersuchung über diesen Punct wird, wie wir glauben, erst dann möglich sein, wenn man ein ausgebreiteteres Material zur Disposition hat. Denn wie die Sache für jetzt liegt, könnte in den Beobachtungen der Einfluss vorübergehender Schwankungen solcher Art nicht von demjenigen geschieden werden, welchen eine etwas anhaltende Abweichung in den Durchsichtigkeitsverhältnissen der Luft von dem mittleren Zustande (die sehr möglich ist) ausüben müsste.

Es ist von Interesse, unsere neuen Beobachtungen über die relative Helligkeit von Planeten gegen Fixsterne zu vergleichen mit den Aufzeichnungen, welche wir von Olbers für eine frühere Epoche besitzen. Am 23. Februar 1801, Abends 7 Uhr, fand der berühmte Astronom (s. seine Abhandlung „Mars und Aldebaran“ in Zach's monatl. Correspondenz, October 1803) Mars um sehr wenig heller als α Tauri, der ihm ziemlich nahe und fast in gleicher Höhe stand, dagegen deutlich schwächer als α Orionis. Die beiden Fixsterne sind selbst einander an Helligkeit so nahe, und die röthliche Farbe aller drei Himmelskörper ist für eine Vergleichung so passend, dass die Aufzeichnung den vollen Werth eines Messungsergebnisses verdient, welches wir mit den unserigen zusammenhalten können.

Nach den Angaben von Olbers (a. a. O. p. 300 f.) war zu jener Zeit, in den von uns gebrauchten Zeichen, $r = 141^{\circ} 59'$; $\log \Phi = 9.73584$; $\log A = 0.20597$; $\log A' = 0.11265$. Aus der 3. der Formeln B. des §. 5 wird demnach der Logarithmus der nach unseren Beobachtungen berechneten Helligkeit des Mars, verglichen mit Wega, für jene Zeit $= 9.5460$, während für Aldebaran der Logarithmus ist (s. die Zusammenstellung p. 31) 9.5244 und für α Orionis 9.5867 . Die berechnete Helligkeit des Planeten fällt also ebenso wie die von O. beobachtete

*) Bei Mars wäre nach bekannten Erscheinungen eine Abhängigkeit der Albedo von den Jahreszeiten der eben sichtbaren Seite a priori wahrscheinlich.

zwischen diejenigen der beiden Sterne, doch merklich näher dem schwächeren als dem helleren von beiden. Die Uebereinstimmung könnte nicht vollständiger sein; auch ist sie unabhängig von der Verschiedenheit, welche in der Beurtheilung der relativen Helligkeit rother Sterne gegen weisse zwischen den Beobachtern stattfinden mochte. Man kann aus dieser Uebereinstimmung schliessen, dass sich die Helligkeit der Sonne vom Jahre 1801 bis auf 1858 nicht in messbarem Grade verändert hat. *

Olbers gibt in der angeführten Abhandlung auch eine Vergleichung zwischen Saturn und Procyon vom 25. Januar 1803, zu welcher Zeit der Ring des Planeten „fast verschwunden“ war. Darnach war Saturn damals viel heller als Regulus, der höher, aber offenbar lichtschwächer als Arctur, der tiefer am Himmel stand; sehr gleich schien seine Lichtstärke der des Procyon zu sein, der auch nahe dieselbe Zenitdistanz mit ihm hatte. Φ war $= \frac{2}{3}$ (Opposition); $\log A = 0.93839$, $\log A' = 0.97285$ (a. a. O. p. 306). Unsere Zahl in §. 5. A gilt ebenfalls für den Planeten ohne Ring, und für eine Opposition, bei welcher ist $\log A = 0.97965$, $\log A' = 0.93157$. — Da der Logarithmus des Productes AA' , bei Olbers $= 1.91124$ und für die mittlere Opposition $= 1.91122$, in beiden Fällen auf vier Decimalen denselben Werth hat, so werden also die zwei Werthe von H (§. 2. Gl. II) einander gleich, und unsere Zahl aus §. 5. A. nämlich 9.6687 wird ohne Veränderung den Logarithmus der Lichtmenge des Saturnssphäroids, verglichen mit Wega, darstellen, wie er sich berechnet aus unseren neuen Messungen für die Zeit der Olbers'schen Beobachtung. Wirklich gehört dieser Logarithmus nach der Tabelle p. 31 einem Himmelskörper zu, dessen Lichtstärke „viel grösser ist als die des Regulus“ (9.5119) und „offenbar übertroffen“ wird von der des Arcturus (9.8948); doch würde dieselbe der Rechnung nach die des Procyon (9.8427) nicht erreichen, sondern nur derjenigen der zunächst auf Procyon folgenden Sterne erster Grösse, Attair und Spica (mit 9.6813 und resp. 9.6810) sehr nahe gleich sein. Der Umstand, dass der Ring des Planeten nicht ganz,

sondern nur „fast“ verschwunden war, musste jedoch die Helligkeit desselben erhöhen, auch könnte man auf Olbers' eigene Angabe eine Vermuthung begründen, dass die Lichtstärke des Procyon nicht ganz erreicht war, weil angegeben wird, dass der tiefer stehende Arctur „offenbar“ heller war als der Planet, während doch, unseren Messungen nach, Arctur den Procyon nur ungefähr im Verhältnisse 9 : 8 übertrifft. *) Wenn man Dies zusammennimmt, und damit noch die Bemerkung verbindet, dass Olbers auf seine Beobachtung in Betreff des Saturn offenbar viel weniger Werth legt, als auf die des Mars (dessen Lichtstärke er innerhalb viel engerer Grenzen fixirt hat), und dass auch unsere Messungen hier eine viel kürzere Periode umfassen, so wird man einräumen, dass die Vergleichung seiner Saturnsbeobachtung mit den unserigen, wenn sie auch nicht gerade selbst einen Beweis für die Unveränderlichkeit der Sonnenhelligkeit abgibt, doch in keiner Weise dem Schlusse entgegensteht, welchen man in Betreff derselben aus der Aufzeichnung wegen des Mars ziehen kann. Es ist zu beklagen, dass, soviel wenigstens uns bekannt ist, in dem langen Zeitraume vor Olbers Niemand daran gedacht hat, irgend eine Notiz ähnlicher Art zu hinterlassen.

Vielleicht die interessantesten unter den Folgerungen, die aus photometrischer Beobachtung der Planeten abgeleitet werden können, sind diejenigen, welche sich auf die verschiedene Albedo der Oberflächen unserer Nachbarkörper selber beziehen. Nachdem durch die Reduction aller einzelnen Messungen desselben Planeten auf eine gemeinsame Epoche die relativen Helligkeiten, welche diese verschiedenen Körper in bestimmten normalen Stellungen haben, mit einem gewissen Grade von Sicherheit ermittelt worden sind (s. die Gleichungen A. des §. 5), so erfährt man durch eine leichte Rechnung, ob die Unterschiede des Glanzes der einzelnen aus ihrer verschiedenen Grösse und verschiedenen Entfernung von Sonne und Erde allein sich erklären lassen, oder ob ihren Oberflächen

*) Ich glaube, dass das freie Auge geneigt ist, Procyon für weniger hell zu halten als er ist, in Folge der Nachbarschaft der drei mächtigeren Sterne Sirius, Rigel und Capella.

eine verschiedene Weisse zugeschrieben werden muss, d. h. der des Einen eine stärkere Fähigkeit, das Sonnenlicht zerstreuend zu reflectiren, als derjenigen des andern. Bezeichnet man nämlich, wie in §. 2 mit $\mathbf{H}_0$ das Verhältniss der Lichtmenge, welche der Planet in seiner Normalstellung der Erde zusendet, zu der Lichtmenge, welche die Sonne aus mittlerer Entfernung nach der Erde schickt, so hat man (s. §. 2) für jeden Planeten eine Gleichung:

$$\log \mathbf{H}_0 = \text{Const.} + \log (A r^2),$$

in welcher die Bedeutung von A und r und Const. a. a. O. erläutert ist; dabei ist der Zahlenwerth der jedem Planeten eigenthümlichen Constanten in dieser Gleichung a priori bekannt, und für Mars, Jupiter und Venus schon in §. 2 angegeben; für Saturn (mittlere Opposition ohne Ring) berechnet er sich ebenso wie für Jupiter und Mars, und wird gefunden (s. Anhang):

$$\text{Const. } \mathbf{h} = 6.0015.$$

Wenn man nunmehr von dem durch die Messungen bekannt gewordenen Logarithmus des Helligkeitsverhältnisses eines Planeten (in seiner Normalstellung) zu Wega den $\log \mathbf{H}_0$ abzieht, so wird man nach der Bedeutung der letzteren Grösse erhalten:

$$\begin{aligned} \text{C.} \quad & \log \frac{\text{Helligk. d. } \odot \text{ in mittlerer Entf. von } \oplus}{\text{Helligkeit Wega}} = \\ & \log \frac{\text{Helligk. Planet in Normalstellung}}{\text{Helligkeit Wega}} - \text{Const.} - \log r^2 - \log \text{Albedo.} \end{aligned}$$

Die Grösse auf der linken Seite muss denselben (übrigens unbekannten) Werth annehmen, durch welchen der Planeten auch gerechnet sein mag; da nun auf der rechten Seite nichts unbekannt ist als die Albedo des Planeten, so erhält man durch Subtraction zweier auf verschiedene Planeten bezüglicher Gleichungen C. von einander, den Logarithmus des Verhältnisses der Weisse des Einen zur Weisse des Andern. Allerdings sind die Werthe von r (scheinbarer Radius des Planeten aus der Entfernung 1, in Bogenmaass ausgedrückt) von verschiedenen Beobachtern

aus ihren Mikrometermessungen nicht mit derjenigen Uebereinstimmung abgeleitet worden, die für unseren Zweck wünschenswerth wäre; doch hat man den Vorthail, dass der numerische Einfluss, welchen eine veränderte Annahme dieser Grösse auf das Resultat ausübt, sich auf die einfachste Weise ergibt, so dass unsere Endresultate der Correction jeden Augenblick offen stehen. Ich werde hier für jeden Planeten zwei verschiedene Annahmen verfolgen, wobei zu bemerken ist, dass für die stark abgeplatteten grossen Planeten, nach der Art wie bei unserer Reduction der Beobachtung auf die elliptische Gestalt Rücksicht genommen ist, das geometrische Mittel der Angaben für den Aequatoreal- und Polarradius gebraucht wird. (vergl. Anhang.)

Für Venus werde ich einerseits annehmen, in einem Mittel älterer Angaben, die ich in verschiedenen Werken finde und die unter sich gut übereinstimmen:

scheinbarer Radius aus Entfernung 1 . . . $8''.49$; $\log r = 5.6145$;
 andererseits zufolge Secchi's neuerer Bestimmung (A. N. No. 1089)
 $8''.21$; $\log r = 5.5999$.

Für Mars geben mir die älteren Angaben (auch wieder reproducirt bei Arago, Astr. pop., der selbst Messungen gemacht zu haben scheint)

$4''.45$; $\log r = 5.3337$;

dagegen die neuere von Oudemans aus Bessel's Messungen gezogene, welche inzwischen von Winnecke bestätigt worden ist (A. N. No. 838 und No. 1135) $4''.664$; $\log r = 5.3543$.

Für Jupiter (dessen scheinbare Grösse am sichersten bestimmt zu sein scheint) nehme ich einerseits an . . . $96''.05$; $\log r = 6.6681$
 und andererseits $94''.55$; $\log r = 6.6612$;
 die letzteren Zahlen gemäss der von Kaiser aus Bessel's und seinen eigenen Messungen gezogenen Bestimmung (cf. Peters' Referat in A. N. No. 1135).

Endlich für Saturn lege ich zu Grunde die Annahme

$79''.27$ $\log r = 6.5847$,

welche das Mittel der verschiedenen mir vorliegenden Angaben ist,*) und stelle derselben gegenüber die grösste Zahl, die ich dafür erhalte, nämlich $81''.77 \dots \log r = 6.5982$, welche aus der ersteren dadurch hergeleitet ist, dass dieselbe in demjenigen Verhältnisse vergrössert wurde, in welchem die grösste mir vorliegende Angabe über den Aequatorealradius (bei Arago, Astron. pop. IV, p. 435, nach Struve) abweicht von dem Mittel der verschiedenen von mir benützten Angaben über denselben Radius.

Die Differenz der beiden ersten Glieder rechts in Gleich. C. wird gefunden, wenn man die Zahlen §. V. A. mit den zugehörigen Werthen der Constanten verbindet:

für Venus	1.5902 — 9.9601 = 1.6301
Mars	0.4674 — 0.0200 = 0.4474
Jupiter	0.9158 — 7.1444 = 3.7714
Saturn	9.6687 — 6.0015 = 3.6672;

man erhält daher jetzt für den Logarithmus des Verhältnisses, in welchem der Glanz der Sonne, aus mittlerer Entfernung gesehen, die Helligkeit Wega's übertrifft, folgende Resultate:

D.	durch Venus	{	Hypoth. I.	10.4011 — log Alb.	♀
			„ II.	10.4303 — log Alb.	♀
	durch Mars	{	Hypoth. I.	9.7800 — log Alb.	♂
			„ II.	9.7388 — log Alb.	♂
	durch Jupiter	{	Hypoth. I.	10.4352 — log Alb.	♂
			„ II.	10.4499 — log Alb.	♂
	durch Saturn	{	Hypoth. I.	10.4978 — log Alb.	♂
			„ II.	10.4708 — log Alb.	♂

Da alle diese Zahlen dasselbe darstellen, so erkennt man aus der annähernden Gleichheit der Minuenden für Venus, Jupiter und Saturn sogleich, dass diese drei Planeten eine sehr nahe gleiche Albedo haben müssen; die des Mars muss dagegen beträchtlich

*) S. Anhang.

kleiner sein. Wenn man etwa für Venus, Mars und Jupiter die zweite, für Saturn die erste unserer Aufstellungen über die scheinbare Grösse adoptirt, so erhält man $10.4303 - \log \text{ Alb. } \text{♀} = 9.7388$ — $\log \text{ Alb. } \text{♂} = 10.4490$ — $\log \text{ Alb. } \text{♂} = 10.4978$ — $\log \text{ Alb. } \text{♂}$ und hieraus:

$$\text{E. } \left\{ \begin{array}{l} \log \text{ Alb. } \text{♀} - \log \text{ Alb. } \text{♂} = 9.9813; \text{ Alb. } \text{♀} = 0.958. \text{ Alb. } \text{♂} \\ \log \text{ Alb. } \text{♂} - \log \text{ Alb. } \text{♂} = 0.0488; \text{ Alb. } \text{♂} = 1.119. \text{ Alb. } \text{♂} \\ \log \text{ Alb. } \text{♂} - \log \text{ Alb. } \text{♂} = 9.2898; \text{ Alb. } \text{♂} = 0.195. \text{ Alb. } \text{♂} \end{array} \right.$$

Wenn also gleich grosse Stücke der Oberflächen der vier Planeten gleicher Beleuchtung ausgesetzt, und unter gleichen Umständen betrachtet werden könnten, so würden dieselben bei Venus, Jupiter und Saturn sehr nahe gleich hell erscheinen;*) den Zahlen zufolge Saturn ein wenig weisser als Jupiter, und dieser ein wenig weisser als Venus; Mars dagegen würde um vieles dunkler erscheinen, indem das von ihm zurückgeworfene Licht kaum den fünften Theil der Helligkeit der Jupitersfläche zeigen würde. Adoptirt man für Mars den kleineren, für Jupiter den grösseren Radius, so wird der Unterschied etwas geringer; er bleibt aber, dem unter sich ähnlichen Verhalten der übrigen Planeten gegenüber, immer sehr gross, und wird auch für solche Beobachter bestehen bleiben, deren Augen etwa von der Helligkeit des rothen Lichtes, im Vergleich mit weissem, einen stärkeren Eindruck empfangen als die unserigen. Nach älteren Vermuthungen, die von Lambert und von Olbers erörtert sind (s. des Letzteren oben citirten Aufsatz), könnte man erwarten, dass Mars und Erde ähnliche Albedo hätten; diese beiden würden dann als Körper dunklerer Oberfläche den weisseren, Venus, Jupiter und Saturn gegenüberstehen. Merkur und Uranus werden sich, soviel wir einstweilen vermuthen können, wohl eher den letzteren als den erstgenannten Körpern anreihen;**) vom Monde werde ich an einem anderen Orte sprechen.

*) Da nicht anzunehmen ist, dass die Oberflächen der Planeten überall gleich helle Localfarbe haben, so versteht sich von selbst, dass hier nur von einem mittleren Verhältnisse die Rede sein kann.

**) Wegen Uranus s. Olbers a. a. O. p. 307.

Die Ermittlung der annähernd gleichen Albedo von Venus, Jupiter und Saturn scheint mir ein sehr merkwürdiges Resultat zu sein, weil darin eine physikalische Aehnlichkeit der Oberflächen dieser Körper an den Tag tritt, welche vielleicht zwischen Jupiter und Saturn nicht sehr überraschend ist, aber zwischen diesen beiden und Venus (einem Körper von viel dichter Masse) gewiss nicht vermuthet werden konnte. Man könnte das Ergebniss der photometrischen Beobachtung der drei Planeten auf die Art aussprechen, dass man sagen würde: die Messungen vertragen sich mit der Annahme, dass die Oberflächen von allen Dreien ihrem grössten Theile nach mit einer Hülle von ein und derselben Materie bedeckt wären. Wollte man sich ihre gleiche Reflexionsfähigkeit für das Licht in der That durch eine solche Hypothese erklären, so würde darin allerdings ein gewagter Schluss von der Gleichheit der Wirkung auf eine gemeinsame Ursache enthalten sein, — zu dessen Entschuldigung man nur die Unwahrscheinlichkeit eines blos zufälliger Weise sich ergebenden so nahen Zusammentreffens der Zahlen geltend machen könnte. Wer geneigt wäre, einen Augenblick bei einer solchen Vorstellung zu verweilen, könnte etwa noch zu bemerken finden, dass man diese hypothetische Hülle, von welcher vorzugsweise wir das reflectirte Licht der drei Körper empfangen würden; kaum als eine den Planeten umschliessende Atmosphäre würde denken können; denn einerseits könnten wir einer solchen schwerlich eine so grosse Albedo zuschreiben, als wir wohl thun müssten, um den starken Unterschied der Weisse zwischen unseren drei Körpern und Mars zu erklären; andererseits würde auch eine elastische Flüssigkeit auf der Oberfläche des Jupiter unter völlig anderen Verhältnissen sich befinden als auf der Venus, wo die Schwerkraft eine ganz andere ist, so dass man eine völlig verschiedene Dichtigkeit und folglich auch andere Reflexionsverhältnisse erwarten müsste.

Der Unterschied, welcher nach der ersten unserer Gleichungen E. noch immer zwischen der Albedo der Venus und des Jupiter bestehen würde, ist kaum zu verbürgen, zumal da er sich bis in die ganz unsicheren Decimalen zurückzieht, wenn man etwa mit der Hypothese II.

über den scheinbaren Radius der Venus die Hypothese I. über den des Jupiter verbindet. *) Dagegen wird die etwas grössere Weisse des Saturn wahrscheinlich in Wirklichkeit bestehen; ob sie vielleicht davon herrührt, dass der Ring eine stärkere Reflexionsfähigkeit besässe als der Planet selbst (während für jetzt in der Reduction eine gleiche supponirt ist), wird sich erst entscheiden lassen, wenn die Stellung der Erde gegen die Ringebene sich bedeutender als in dem von den Beobachtungen umfassten Zeitraume wird verändert haben.

Die Verschiedenheit der beiden Zahlen in D., auf welche die beiden Hypothesen für Mars führen, zeigt besonders deutlich, dass die Ungewissheit in den endlichen Folgerungen in Betreff der Albedo viel mehr von den abweichenden Mikromettermessungen herrührt, als von Unsicherheit der photometrischen Bestimmung. Diese letztere kann, nach der Uebereinstimmung aller Beobachtungen, das Resultat der Vergleichung zwischen Mars und Sternen (betreffend das Helligkeitsverhältniss wie es für unsere Augen wirklich ist) gewiss nicht auf 0.04 schwanken lassen, wie es die andere wirklich thut. **)

Eine consequente Verfolgung der Lichtverhältnisse der Planeten wird ohne Zweifel noch manche Anhaltspunkte für Schlüsse auf ihre physikalische Beschaffenheit gewähren. Wenn man sich z. B. denkt, dass ein sehr bedeutender Theil der Oberfläche eines der unteren Planeten von

*) Die vorläufige Reduction, deren Ergebniss ich 1853 in den Gel. Anz. mitgetheilt habe, hatte mich, auch mit der Hypothese I. für ♀, auf eine noch näher gleiche Albedo beider Planeten geführt als die gegenwärtige. Der Unterschied der jetzigen Zahlen von den früheren rührt nicht etwa von dem Hinzukommen der Beob. von 1855 und 1857 her, sondern vielmehr von der Reduction der von S. allein gemachten Vergleichungen zwischen Sirius und ♀ auf das Mittel beider Beobachter, welche Reduction früher nicht angebracht worden war.

**) Aus nur vier Marsbeobachtungen, welche mir 1851 vorlagen, hatte ich damals, mit der ersten Hypothese über seinen Radius, in meiner früheren Abhandlung das Resultat gezogen $\odot : \text{Wega} = 5900 \text{ Millionen} : \text{Alb. } \odot$ (a. a. O. Anhang, IV.); also Logarithmus 9.771, während er jetzt geworden ist 9.780 (cf. D.). Für Jupiter hatte sich damals die ähnliche Zahl ergeben 26800 Millionen (s. ebenda, wenn man die vier Vergl. durch Wega mit der durch Sirius zum Mittel verbindet) oder der Logarithmus 10.428, während man jetzt hat (Gl. D. Hypoth. I.) 10.435.

rauen Gebirgen besetzt wäre, so würde zu erwarten sein, dass zu solcher Zeit, wo der Himmelskörper als feine Sichel gesehen wird, seine Helligkeit geringer erfunden würde, als sie für diese Phase nach der Lambert'schen Theorie aus denjenigen Beobachtungen abgeleitet würde, welche bei vollerm Lichte gemacht sind. Es würden nämlich in der Nähe der Conjunction die Schatten der Berge einen nicht unbedeutenden Theil des schmalen Lichtstreifens bedecken, und so die sichtbare Helligkeit geringer machen als sie bei einer regelmässig kugelförmigen Fläche sein würde. Unsere Messungen an der Venus lassen nichts von dieser Art erkennen. Im Gegentheile zeigen die letzten Beobachtungen, welche bei der Abnahme der östlichen Digression des Planeten im Jahre 1852 und 1857 gemacht worden sind,*) (No. 199 und No. 237) beide Abweichungen von dem Mittel in dem Sinne, dass Venus heller gesehen wurde, als die Rechnung sie gibt. (Vergl. Fehlertableau in §. 6.) Zur Zeit der Messung No. 199 (1852 Juni 7.) bildete die Sichel noch etwa den dritten Theil der vollen Scheibe (näher 0.3244 zufolge der Rechnung aus den Ephemeriden); die Abweichung dieser Beobachtung, reducirt nach der Lambert'schen Theorie, vom allgemeinen Mittel ist übrigens ganz unerheblich (0.020). Dagegen war am 20. April 1857, wo Beobachtung No. 237 gemacht worden ist, der Rechnung nach nur noch $\frac{1}{8}$ der Venusscheibe (0.1203) erleuchtet; und damals ergab sich der Logarithmus der beobachteten Helligkeit um 0.325 grösser als die Rechnung ihn liefert, d. h. der Planet wurde etwas mehr als doppelt so hell gefunden als man nach seiner schwachen Phase erwarten musste. Bei der grossen Zenitdistanz des Vergleichungssterns Sirius ($77^{\circ} 12'$), dessen Licht auch zur Zeit der Beobachtung sehr unruhig war, kann man freilich zur Zeit wenig Werth auf diese Messung legen; doch ist zu bemerken, dass ähnliche Zenitdistanzen in anderen Beobachtungen vorkommen (z. B. No. 109, 111, 156, 169, 174, 181, 197), ohne dass sie auch nur

*) Venus als Morgenstern können wir nicht beobachten, da unser Local keine Aussicht nach dem reinen Osten gestattet.

entfernt ähnliche Abweichungen veranlasst hätten. Wenn künftige Messungen, unter analogen Umständen angestellt, ein ähnliches Verhalten zeigen sollten, so könnte man vielleicht darin eine Bestätigung des von Secchi aus anderen Wahrnehmungen gezogenen Schlusses sehen, dass von der Venus, wenn sie der Conjunction nahe ist, etwa in Folge der Refraction an einer sie umgebenden Atmosphäre, ein grösserer Theil wirklich Sonnenlicht erhält, als bei ungebrochenem Fortgange der Strahlen solches erhalten könnte. *) Doch muss man allerdings einräumen, dass auch andere physikalische Umstände eine ähnliche Folge für die photometrische Wahrnehmung bedingen könnten, z. B. die nicht sehr fern liegende Möglichkeit, dass der Planet sehr schief auffallende Strahlen in stärkerem Verhältnisse reflectiren würde, als die mehr senkrecht auffallenden.

In Betreff des Verhältnisses zwischen Sonne und Fixsternen selbst kann man aus unseren Gleichungen D. für jetzt, so lange nämlich die Albedo keines der Planeten bekannt ist, so viel schliessen, dass die mittlere Helligkeit der Sonne diejenige von α Lyrae wenigstens im Verhältnisse von 30000 Millionen zu Eins übertreffen muss; und zwar dies deshalb, weil auch die Albedo des Saturn gewiss nicht grösser als 1 sein kann. Die Vergleichung der Planeten mit dem Monde, die sehr wohl ausführbar ist, wird das Mittel geben, den absoluten Werth für die Albedo eines jeden der ersteren selbst zu bestimmen, wenn man erst

*) S. A. N. No. 1089. — Wenn die grosse Abweichung unserer Beob. No. 237 von den übrigen nicht durch irgend ein besonderes Verhalten der Planetenoberfläche erklärt werden soll, so müsste man voraussetzen, dass sie durch anomale atmosphärische Umstände entsteht ist. In beiden Fällen wäre es wohl eigentlich indicirt, sie bei der Rechnung von den übrigen Beobachtungen ganz abzusondern, und sie nicht, wie es geschehen ist, als eine Messung von halbem Gewichte mitstimmen zu lassen. Das Resultat würde übrigens, in Folge der starken Zahl der Venusbeobachtungen, dadurch wenig verändert. Die Ausschliessung würde den Mittelwerth von $\log \varphi$: Sirius um ein wenig verkleinern, ebenso wie schon die Reduction der von S. allein gemachten Beobachtungen auf das Mittel von S. und L. ihn verkleinert hat; deshalb habe ich sie lieber unterlassen, damit nicht zwei einigermaassen hypothetische Correctionen des directen Mittels dasselbe in gleichem Sinne verändern.

durch eine zuverlässige Vergleichung der Intensität des Vollmondlichtes mit der des Sonnenlichtes die Albedo des Mondes bestimmt haben wird.

Man kann endlich noch aus unseren Beobachtungen an den Planeten den Schluss ziehen, dass eine Extinction des Lichtes bei seiner Fortpflanzung durch den Weltraum, wenn sie vorhanden sein sollte, jedenfalls zu gering ist, um bei einer durchlaufenen Wegstrecke, deren Länge gleich ist der Entfernung der Erde von der Sonne, einen für uns dermalen erkennbaren Verlust an Intensität zu erzeugen. Der ganze Weg, welchen zur Zeit der Beobachtungen vom Mai 1852 das Licht von der Sonne nach Mars und von ihm nach der Erde zurückzulegen hatte, war um 1.36 des Erdbahnhalmessers länger als der ähnliche Weg zur Zeit der Opposition 1845; man hat aber gesehen, dass die Beobachtungen uns keinen Anlass geben, für die Abweichungen der einzelnen unter sich noch eine andere Ursache zu vermuthen als die nothwendige Unsicherheit, der man auch bei Fixsternvergleichen begegnet, und die hauptsächlich von den atmosphärischen Verhältnissen abhängt.

Anhang.

Theorie der Lichtstärke des Saturn.

Die Berechnung der Quantität von Sonnenlicht, welche Saturn nach seiner jedesmaligen Stellung gegen die Erde reflectirt, muss anders geführt werden als bei den übrigen Planeten; einerseits, weil zu dem Lichte, welches von dem Planeten selbst zurückgeworfen wird, noch dasjenige hinzugefügt werden muss, welches der Ring uns sendet; andererseits, weil bei der Summation der apparenten Helligkeit der verschiedenen Flächenelemente des Sphäroids alle diejenigen ausser Ansatz bleiben müssen, welche zwar gleichzeitig der Sonne und auch der Erde zugewendet sind,

aber entweder im Schlagschatten des Ringes liegen, oder für den Beobachter auf der Erde vom Ringe verdeckt werden. In ganz ähnlicher Weise darf auch bei der Berechnung des Lichtes vom Ring die Integration nur über diejenigen Theile seiner Oberfläche erstreckt werden, welche weder in den Schlagschatten des Sphäroids fallen, noch für den Beobachter hinter dasselbe zu liegen kommen. Durch diese Rücksichten werden die Grenzen der verschiedenen Integrale etwas complicirt; es ist nöthig, durch eine besondere Betrachtung die Lage der Curven aufzusuchen, welche auf dem Planeten und auf dem Ringe die wirklich Licht nach der Erde sendenden Theile von denjenigen Partien trennen, für welche die Strahlen interceptirt sind.

Die Theorie, welche ich mittheilen werde, betrachtet den Körper des Planeten als eine Kugel, und den Ring als ein von zwei der Kugel concentrischen Kreisen eingeschlossenes Stück einer undurchsichtigen Ebene ohne Dicke. Man weiss, dass in Wirklichkeit der Polardurchmesser Saturns merklich kürzer ist als sein Aequatoredurchmesser; durch eine besondere Betrachtung, von welcher zuletzt die Rede sein wird, kann man die Wirkung dieser Abplattung ihrem Hauptgliede nach schliesslich leicht in Rechnung nehmen; eine ganz genaue Berücksichtigung ihres Einflusses würde eine Mühe verursachen, welche aus mehr als Einem nahe liegenden Grunde als völlig verloren angesehen werden müsste. Es ist auch bekannt, dass der Meridianschnitt des Ringes einige Dicke und wahrscheinlich eine leichte Krümmung hat; doch ist die erstere jedenfalls so gering, dass mindestens für Beobachtungen, die nicht ganz nahe der Zeit fallen, wo die Ringebene durch Erde oder Sonne geht, unsere Voraussetzung der Wahrheit genügend entspricht. Im Uebrigen schreibt unsere Theorie, ebenso wie die Lambert'sche für die anderen Planeten, allen Theilen der Kugeloberfläche Ein und dieselbe (unbekannte) mittlere Weisse zu, und auch allen Theilen der Ringfläche eine gleiche, die jedoch verschieden von der ersteren sein kann. Ebenso betrachtet sie die Entfernung der Sonne und der Erde vom Planeten als unendlich gross gegen die Dimensionen des Sphäroids

und des Ringes, oder genauer ausgedrückt, sie sieht alle Linien, welche von Puncten des Saturn oder seines Ringes nach der Sonne führen, als unter sich parallel an, und analog auch alle Linien, welche von dort aus nach der Erde gehen.

Unsere Betrachtung muss sich, ihrem Haupttheile nach, damit beschäftigen, den Gang von im Allgemeinen sechs Curven zu verfolgen. Vier derselben (Linien doppelter Krümmung) liegen auf der Kugel, indem zwei unter ihnen (herrührend von der zweifachen Begrenzung des Ringes) den Schlagschatten des Letzteren einfassen, während die beiden Anderen diejenige Zone umschliessen, auf welche für den irdischen Beobachter der Ring sich projicirt. Die beiden Linien des ersten Paares werden offenbar durch eine ganz gleiche Rechnung, nur mit numerisch verschiedenen Constanten, gefunden; denn ganz ebenso wie der Schatten des inneren Ringrandes die Eine von ihnen bildet, bezeichnet der Schatten des äusseren Randes die zweite. Dieselbe Bewandtniss hat es mit den beiden Curven des zweiten Paares; auch sieht man sogleich, dass zwischen den beiden Paaren unter sich nur der Unterschied besteht, dass für die Bestimmung des Einen der Ort der Sonne dieselbe massgebende Rolle spielt, wie für die Bestimmung des Anderen der Ort der Erde. Dieselben Formeln werden also, mit den gehörigen Vertauschungen in den Constanten, für die Berechnung aller vier Linien dienen. Zu diesen kommen dann noch die beiden ebenen Curven, welche auf dem Ringe den Schlagschatten der Kugel und respective die Projection der Kugel*) begrenzen. Diese letzteren Linien (Durchschnitte der Ringebene mit zwei Cylindern) sind natürlich Ellipsen, und es versteht sich, dass auch hier die Berechnung der Einen in völlig analoger Weise zu machen sein wird wie die der Andern. Alle unsere Linien braucht man offenbar nur so weit zu verfolgen, als sie einerseits physikalisch zur Entstehung kommen, (z. B. von den Ellipsen nur die Theile, welche auf den materiellen Ring,

*) Wenn ich von Projection schlechtweg rede, so bezeichne ich damit hier und im Folgenden immer diejenige Projection, welche sich für den Beobachter auf der Erde bildet.

d. h. zwischen zwei concentrische Kreise, fallen), und als sie andererseits für die Begrenzung der zugleich beleuchteten und sichtbaren Regionen von Kugel oder Ring wirklich entscheidend sind; so ist es nicht nöthig, dem Rande des Kugelschattens auf dem Ringe auch da nachzugehen, wo er sich für den Beobachter hinter der Kugel versteckt, oder die Linie, welche auf dem Planeten die vom Ringe gedeckten Theile von den frei sichtbaren scheidet, bis in die von der Sonne abgewendete Hemisphäre zu verfolgen, u. dgl.

Man erkennt leicht, dass die Lösung Einer Aufgabe Alles in sich schliesst, was zur Berechnung der verschiedenen Curven erforderlich ist: der Aufgabe nämlich, den Zusammenhang herzustellen zwischen den Coordinaten eines Punctes A auf der Kugeloberfläche und denjenigen eines Punctes B in der Ringebene, welcher Letztere mit dem Ersteren in derselben nach einem gegebenen unendlich entfernten Puncte (Erde oder Sonne) gerichteten Geraden liegt. Wählt man z. B. für den gegebenen unendlich entfernten Punct den Ort der Sonne, nimmt man die Coordinaten des Punctes B in der Ringebene als gegeben an, und zwar so, dass er an einem der Ringränder gelegen ist, und rechnet die dazu gehörigen Coordinaten des Punctes A der Kugelfläche, so wird der Letztere ein Punct des entsprechenden Schattenrandes sein, und auf ähnliche Weise kann man alle Puncte des Schattenrandes finden. Wenn man im Gegentheil die Coordinaten des Punctes A wählt, und zwar so, dass er in demjenigen grössten Kreise der Planetenkugel liegt, welcher Tag und Nacht auf derselben scheidet, und berechnet man die entsprechenden Coordinaten des Punctes B, so wird der Letztere im Rande des Schlagschattens liegen, welchen die Kugel auf die Ringebene wirft, und dessen Begrenzung man auf solche Art vollständig kennen lernt. Wird nicht der Ort der Sonne, sondern der der Erde für den gegebenen vom Centrum des Planeten unendlich entfernten Punct gewählt, so erhält man auf ganz analoge Weise die Curven, welche die Projection des Ringes auf die Kugel oder der Kugel auf den Ring umfassen.

Was die Wahl der sphärischen Coordinaten angeht, mittelst welcher der Ort unseres Punctes A fixirt werden soll, so ist man durch die Natur der Sache genöthigt, zur fundamentalen Ebene für dieselben diejenige zu wählen, welche durch die Centra von Sonne, Erde, Saturn gelegt ist („Ebene der drei Körper“). Wollte man eine andere, etwa die Ringebene, dafür nehmen, so erhielte man zu complicirte Ausdrücke für die Cosinus der Neigungswinkel der nach Sonne oder Erde gerichteten Geraden mit den Normalen der verschiedenen Flächenelemente, — welche Cosinus in der zu integrirenden Function eine Hauptrolle spielen (s. oben §. 2.). Auch würde schon die Lage der beiden grössten Kreise unbequem bestimmt werden, welche die der Sonne und resp. die der Erde zugewendete Planetenhälfte von der anderen trennen, und diesseits deren allein der uns leuchtende Kugeltheil sich ausdehnt.

Unsere Fundamentalebene schneidet die Ekliptik in derjenigen Geraden, welche die Erde mit der Sonne verbindet; um die Neigung der beiden Ebenen gegen einander und die Stellung der 3 Himmelskörper in der Ebene ihrer Centra zu bestimmen, mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \text{heliocentrische Länge des Saturn} \\ \delta = \text{„ „ Breite „ „} \\ a = \text{heliocentrische Länge der Erde} \\ \quad = \text{geocentrische Länge der Sonne } \pm \pi; \end{array} \right.$$

(die heliocentrische Breite der Erde wird vernachlässigt)

S = Winkel $\text{h} \odot \oplus$ oder helioc. Länge des Saturn in der Dreikörper-Ebene, rechläufig gezählt von demjenigen ihrer Knoten mit der Ekliptik, in welchem die Erde steht.

ε = Neigungswinkel der Dreikörper-Ebene gegen die Ekliptik, genommen zwischen $\pm 90^\circ$ und positiv, wenn die Erde im aufsteigenden Knoten der Dreikörper-Ebene auf der Ekliptik steht, negativ, wenn sie im niedersteigenden sich befindet.*)

*) Es ist unnöthig, hier den ganz speciellen Fall besonders zu besprechen, in welchem die Ebene der drei Körper genau senkrecht auf der Ekliptik stünde (Augenblick der

Man hat alsdann für S und ε die Gleichungen:

$$1) \quad \begin{cases} \cos S = \cos (\alpha - a) \cos \delta \\ \sin S \cos \varepsilon = \sin (\alpha - a) \cos \delta \\ \sin S \sin \varepsilon = \sin \delta. \end{cases}$$

Bezeichnet man nunmehr mit

$\odot$... die kronocentrische Länge der Sonne in der Ebene der drei Körper, rechläufig gezählt von derjenigen Geraden aus, welche durch den Mittelpunkt des Saturn parallel mit der Linie von der Sonne zur Erde (und nach derselben Seite wie diese Letztere) gezogen ist,

$\oplus$... die kronocentrische Länge der Erde, ähnlich gerechnet,

v' ... den Winkel $\odot \mp \oplus$ (immer klein),

so hat man

$$2) \quad \begin{cases} \sin v = \frac{\text{Entf. } \odot \oplus}{\text{Entf. } \oplus \mp} \sin S \\ \odot = S \pm \pi \\ \oplus = \odot + v', \end{cases}$$

wobei v' algebraisch zu nehmen ist, mit dem Zeichen, welches ihm vermöge der ersten dieser drei Gleichungen zukommt.

Es muss nun auch die Lage der Ringebene auf die Dreikörper-Ebene bezogen werden; wir denken uns zu dem Ende einen Augenblick durch den Mittelpunkt des Saturn eine Ebene der Ekliptik parallel gelegt; dieselbe schneidet die Dreikörper-Ebene längs der Linie, von welcher aus wir in dieser die Winkel $\odot$ und $\oplus$ gerechnet haben. Man kennt alsdann aus Bessel's Arbeiten die Stücke (s. u.)...

Ω ... die Länge des aufsteigenden Knotens der Ringebene auf der der Ekliptik parallelen Ebene (gezählt von der Richtung nach dem Frühlingspunkte),

ω ... den Neigungswinkel zwischen diesen beiden Ebenen;

bezeichnet man ferner mit

Opposition) und in welchem die Unterscheidung zwischen rechläufiger und rückläufiger Richtung in ihr willkürlich wird. Für diesen Fall vereinfachen sich die Formeln.

λ ... die Länge, in der Dreikörper-Ebene, des Nordpols der Ringebene, — gerechnet wie oben $\odot$ und $\oplus$,

β ... die Entfernung eben dieses auf der Nordseite der Ekliptik gelegenen Pols der Ringebene vom ähnlich gelegenen Pol der Dreikörper-Ebene (also einen Winkel, der positiv ist und zwischen 0 und 180° liegt),

so erhält man aus der Betrachtung des Dreiecks, welches die drei Ebenen, nämlich die der Ekliptik parallele, die Ebene der drei Körper, und die Ringebene, ausschneiden (oder auch seines Polardreieckes) folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos \omega \cos \varepsilon + \sin \omega \sin \varepsilon \cos (\Omega - a) \\ 3) \quad \sin \beta \sin \lambda &= \cos \omega \sin \varepsilon - \sin \omega \cos \varepsilon \cos (\Omega - a) \\ \sin \beta \cos \lambda &= \sin \omega \sin (\Omega - a), \end{aligned}$$

oder, wenn man lieber nach den Gauss'schen Formeln rechnet und zu dem Ende noch ein Zeichen für das sechste Stück im Dreiecke einführt:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} (n - \lambda) &= \cos \frac{1}{2} (\Omega - a) \sin \frac{1}{2} (\omega - \varepsilon) \\ \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} (n - \lambda) &= \sin \frac{1}{2} (\Omega - a) \sin \frac{1}{2} (\omega + \varepsilon) \\ 3') \quad \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} (n + \lambda) &= \cos \frac{1}{2} (\Omega - a) \cos \frac{1}{2} (\omega - \varepsilon) \\ \cos \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} (n + \lambda) &= \sin \frac{1}{2} (\Omega - a) \cos \frac{1}{2} (\omega + \varepsilon). \end{aligned}$$

Die Gleichungen sind in der aufgestellten Form gültig für die verschiedenen Fälle (vor und nach der Opposition), welche möglich sind, obgleich dieselben sich insofern unterscheiden, als die verschiedenen in dem Dreiecke vorkommenden Stücke durch unsere Buchstaben nicht immer auf dieselbe Weise zu benennen sind. Eine ausführlichere Erörterung dieses Punctes wird nicht nöthig sein. Die in der Form 3') mitgeführte Grösse n , welche sich gleichzeitig mit λ ergibt, hat übrigens für die weitere Rechnung kein Interesse.

Nachdem durch die Berechnung der Grössen $\odot$, $\oplus$, λ , β die Stellung der Himmelskörper und der Ringebene auf die Dreikörper-Ebene und auf das Centrum des Saturn bezogen worden ist, kann man sogleich einige Hilfsgrössen bilden, deren Werth für die Vereinfachung der spä-

teren Ausdrücke sich nachher zeigt, nämlich die Grössen u , U ; w , W aus folgenden Formeln:*)

$$\begin{array}{l}
 \cos (\lambda - \odot) = U_{\odot} \cos u_{\odot} \quad \Bigg| \quad \cos (\lambda - \oplus) = U_{\oplus} \cos u_{\oplus} \\
 \sin (\lambda - \odot) \cos \beta = U_{\odot} \sin u_{\odot} \quad \Bigg| \quad \sin (\lambda - \oplus) \cos \beta = U_{\oplus} \sin u_{\oplus} \\
 4) \quad \begin{array}{l} - \sin (\lambda - \odot) = W_{\odot} \cos w_{\odot} \quad \Bigg| \quad - \sin (\lambda - \oplus) = W_{\oplus} \cos w_{\oplus} \\ - \cos (\lambda - \odot) \cos \beta = W_{\odot} \sin w_{\odot} \quad \Bigg| \quad - \cos (\lambda - \oplus) \cos \beta = W_{\oplus} \sin w_{\oplus} \end{array}
 \end{array}$$

Die Grössen U , W werden dabei positiv genommen, und man hat die Controlen, dass $U_{\odot}$ der Cosinus ist eines Winkels, dessen Sinus $= \sin (\lambda - \odot) \sin \beta$, und $U_{\oplus}$ der Cosinus eines Winkels vom Sinus $= \sin (\lambda - \oplus) \sin \beta$. Ganz analog ist

$$4') \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{\odot} = \cos H_{\odot} \\ \text{wobei} \\ \sin H_{\odot} = \cos (\lambda - \odot) \sin \beta \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} W_{\oplus} = \cos H_{\oplus} \\ \sin H_{\oplus} = \cos (\lambda - \oplus) \sin \beta \end{array} \right.$$

Hier stellen $H_{\odot}$ und $H_{\oplus}$, wie man aus den Gleichungen leicht erkennt, die Höhe der Sonne und respective der Erde über der Ringebene dar, positiv wenn die Eine und die Andere die Nordseite des Ringes sehen. Den berechneten Werth von $H_{\oplus}$ kann man vergleichen mit der Angabe des Berliner Jahrbuches für diese Grösse (Tafel am Ende der Planetenephemeride); er muss mit dem interpolirten Werthe genau übereinstimmen, wenn bei der Rechnung die Data der Berliner Ephemeride zu Grunde gelegt sind. Der Winkel $w_{\odot}$ ist die Länge der Sonne, bezogen auf die Ebene des Ringes und gerechnet von der Knotenlinie derselben mit der Dreikörper-Ebene;**) die ganz entsprechende Bedeutung hat $w_{\oplus}$ für die Erde. Auch für die Grössen U , u lässt sich die geometrische Bedeutung aus ihren Definitionsgleichungen leicht nachweisen, doch übergehe ich dieselbe, da sie für uns nicht von Belang ist.

*) Bei derjenigen Anordnung der späteren Rechnung, welche ich nachher als die meiner Meinung nach passendste bezeichnen werde, kann man übrigens die vier Grössen u , U entbehren.

**) Und zwar rechtläufig gerechnet von demjenigen Ende dieser Linie aus, welches, selbst im rechtläufigen Sinne, der Projection des nördlichen Poles der Dreikörper-Ebene auf die Ringebene um 90° vorausgeht.

Es mögen nunmehr r , l , b Polarcoordinaten eines auf der Planetenkugel gelegenen Punctes A vorstellen, nämlich r den Halbmesser dieser Kugel, l die Länge, bezogen auf die Ebene der drei Körper und so gerechnet wie oben bei $\odot$ und $\oplus$ angegeben worden ist, b den angularen Abstand von demjenigen Pol dieser Ebene, welcher auf der Nordseite der Ekliptik liegt. Für einen Punct B ausserhalb der Planetenkugel mögen R , L , B die analoge Bedeutung haben. Wenn dieser letztere Punct in der Ringebene gelegen sein soll, so sind seine beiden Coordinaten L , B nicht unabhängig von einander, sondern die Eine kann durch die Andere ausgedrückt werden, oder auch beide durch eine dritte Grösse, am bequemsten durch die Länge des Punctes in der Ringebene selbst, ϑ , welche von dem Knoten derselben mit der Dreikörper-Ebene an so gerechnet werden soll, wie es soeben bei w erläutert worden ist. Man hat alsdann:

$$\begin{cases} \cos B = \sin \beta \sin \vartheta \\ \sin B \cos (L - \lambda) = -\cos \beta \sin \vartheta \\ \sin B \sin (L - \lambda) = \cos \vartheta. \end{cases}$$

Sollen die beiden Puncte r , l , b und R , L , B in derselben nach der Sonne gerichteten Geraden liegen, d. h. soll der Eine von ihnen seinen Schatten auf den Andern werfen, so muss ihre Verbindungslinie parallel der Geraden sein, welche vom Centrum des Planeten nach der Sonne führt (weil wir die Entfernung derselben von Saturn als unendlich gross gegen die Dimensionen des Letzteren ansehen); es müssen also Beide gleich grossen Abstand von jeder Ebene haben, welche durch diese Gerade gelegt wird. Sobald für zwei verschiedene solche Ebenen die Bedingung erfüllt ist, so ist dadurch der Parallelismus zwischen der Verbindungslinie unserer beiden Puncte und der Linie — Saturnsmittelpunct — Sonne — gesichert, und die Gleichheit der beiden Abstände wird demnach für alle anderen ähnlichen Ebenen von selbst sich ergeben. Am bequemsten wählen wir für die Eine der beiden Ebenen, welche den Planetenmittelpunct und die Sonne zugleich enthalten, unsere Dreikörper-Ebene selbst, und stellen die Andere senkrecht auf diese.

Alsdann ist $r \cos b$ der Abstand des Punctes A von der ersten und $r \sin b \sin (l - \odot)$ der Abstand desselben Punctes von der zweiten Ebene; für den Punct B haben $R \cos B$ und $R \sin B \sin (L - \odot)$ dieselbe Bedeutung. Die Bedingung, dass der Schatten des Einen Punctes auf den Andern fällt, wird also das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen erfordern

$$r \cos b = R \cos B$$

$$r \sin b \sin (l - \odot) = R \sin B \sin (L - \odot)$$

oder, wenn man B und L vermöge der obigen Relationen durch ϑ ersetzt, folgender Gleichungen:

$$r \cos b = R \sin \vartheta \sin \beta$$

$$5) \quad r \sin b \sin (l - \odot) = R \{ \cos (\lambda - \odot) \cos \vartheta - \sin (\lambda - \odot) \sin \vartheta \cos \beta \}$$

welche den Zusammenhang zwischen den beiderseitigen Coordinaten enthalten.

Sollen diese Formeln angewendet werden, um die Begrenzung des Ringschattens auf der Kugel zu verfolgen, so wird man, da diese Grenze natürlich von den Schattenlinien der Ringränder gebildet wird, unter R einen von zwei Zahlenwerthen zu verstehen haben, nämlich entweder den grössten oder den kleinsten Werth, welcher noch dem materiellen Ringe angehört. Für den äusseren Ringrand kann es sich übrigens ereignen, dass er, von der Sonne (oder auch von der Erde) aus gesehen sich gar nicht auf die Kugel projicirt, sondern sie völlig zu umgeben scheint. In diesem Falle wird der Schlagschatten auf der Kugel nicht eine Zone, sondern eine Calotte bedecken, und die Berechnung der Einen Curve fällt weg. Geometrische Betrachtungen der einfachsten Art lassen erkennen, dass es sich so verhalten wird, wenn $\pm \sin H_{\odot} > \frac{r}{R_a}$, wo R_a den Radius des äusseren Ringrandes vorstellt. Diese Form der Bedingung setzt die Kugelgestalt des Planeten voraus; will man bei der Unterscheidung der Fälle auf seine Abplattung Rücksicht nehmen, und ihn als ein Rotationsellipsoid ansehen, vom Aequatorealradius a und Polarradius b ,*) so muss die Ungleichheit

*) Eine Verwechslung obiger momentan eingeführter linearen Grössen a und b mit unseren durch die gleichen Buchstaben bezeichneten Winkeln ist nicht möglich.

$$\operatorname{tg} H_{\odot} > \frac{b}{\sqrt{R_a^2 - a^2}}$$

bestehen, wenn der Schatten des äusseren Ringrandes völlig ausserhalb der Kugel vorbeigehen soll.

Wenn man die Gleichungen 5) benützen will, um für Eine unserer Curven entweder zu angenommenen ϑ die Werthe von l und b zu berechnen und sich auf diese Art eine beliebige Anzahl von Puncten mittelst ihrer Coordinatenpaare zu verschaffen, oder auch, um zu bestimmten b die l zu finden, so kann die zweite von ihnen mittelst der Hilfs-Constanten U , u aus 4) in eine sehr bequeme Form gebracht werden, indem man erhält:

$$\begin{aligned} 5^*) \quad & r \cos b = R \sin \beta \sin \vartheta \\ & r \sin b \sin (l - \odot) = R U_{\odot} \cos (u_{\odot} + \vartheta) \end{aligned}$$

Will man hingegen zu ausgewählten l die entsprechenden b berechnen, so gibt ϑ keinen bequemen Uebergang und muss aus den Gleichungen 5) eliminirt werden. Man findet auf diesem Wege

$$\begin{aligned} 5^{**}) \quad & \frac{1}{\sin \beta} G_{\odot} \cotg b = -\cos \beta \sin (\lambda - \odot) \sin (l - \odot) \\ & \pm \cos (\lambda - \odot) \sqrt{\frac{R^2}{r^2} G_{\odot} - \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \beta\right) \sin^2 (l - \odot)} \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\begin{aligned} G_{\odot} &= 1 - \sin^2 \beta \sin^2 (\lambda - \odot) - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \beta \cos^2 (\lambda - \odot) \\ &= \cos^2 \beta - \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) \sin^2 H_{\odot} \end{aligned}$$

Die hier vorkommende Wurzelgrösse kann man auch in die folgende etwas elegantere Form bringen

$$\sqrt{\left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) \left\{1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 H_{\odot}\right\} + \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \beta\right) \cos^2 (l - \odot)};$$

über das derselben zu gebende Vorzeichen siehe unten.

Auch wenn man diesen letzten Weg für die Rechnung wählt, ist es doch zum Behufe einer sogleich anzustellenden Untersuchung von Interesse, die beiden extremen Werthe zu kennen, innerhalb deren ϑ ge-

halten werden muss, wenn die dazu gehörigen Coordinaten l und b reell werden sollen. Es sind dies die ϑ derjenigen beiden Punkte an dem betreffenden Ringrande, welche ihren Schatten auf den Grenzmeridian der der Sonne zugewendeten Halbkugel werfen, d. h. welche machen $\sin(l - \odot) = \pm 1$. Wenn man diesen Werth in die 2. Gleichung 5) substituirt, dann die Quadrate beider Gleichungen zusammen addirt, und sich der Hilfsgrössen W , w aus 4) bedient, so findet man für unseren besonderen Fall

$$6) \quad \cos(\vartheta - w_{\odot}) = \frac{1}{W_{\odot}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}$$

Man muss diese Wurzel positiv nehmen; denn vermöge der oben angeführten geometrischen Bedeutung der Grösse $w_{\odot}$ ist es klar, dass $\vartheta - w_{\odot}$ zwischen den Grenzen $\pm \frac{\pi}{2}$ eingeschlossen ist für alle diejenigen Punkte des Ringrandes, welche auf der der Sonne zugewendeten Hälfte liegen, und welche allein ihre Schatten nach der Kugel werfen können. Die Gleichung wird also für ϑ nur zwei Werthe Θ liefern, welche die beiden extremen sind, nach denen gefragt worden ist.

Wenn man anstatt der Begrenzung des Schlagschattens auf der Kugel diejenige des Gürtels sucht, welcher dem irdischen Beobachter verdeckt ist, so hat man offenbar Gleichungen, welche sich von 5) etc. nur dadurch unterscheiden, dass überall $\odot$ an die Stelle von $\odot$ zu setzen ist. Es wird nun darauf ankommen, zu wissen, ob die Grenze des verdeckten, oder die des beschatteten Stückes sich auf der Kugel am weitesten nach Norden und respective nach Süden erstreckt; auf jeder Seite wird die ausgedehnteste Grenze für die Integration die entscheidende sein. Weiss man, dass die Eine der Linien ganz auf die Eine Seite der Andern fällt, so braucht man überhaupt nur Eine von ihnen zu berechnen, z. B. die südlicher fallende, wenn es sich um die Südgrenze des für den Beobachter nicht leuchtenden Gürtels handelt. Auch wird man, wenn im Voraus gewiss ist, dass sich die zwei Linien nicht schneiden, kaum in Zweifel darüber sein können, welche von ihnen die maassgebende ist;

man wird hierüber in's Reine kommen, sobald man sich, $\bar{\lambda}$ mittelst der geometrischen Bedeutung der in Zahlen bekannten Grössen λ , β , $\odot$, $\oplus$ eine Vorstellung von der Lage des Ringes gegen Sonne und Erde macht. Nur der Fall, wo die beiden Curven einander passiren, wird etwas mehr Aufmerksamkeit erfordern: d. h. der Fall, in welchem der Beobachter die Projection des Ringrandes auf der Kugel an einem Theile ihres Zuges, aber nicht ihrer ganzen Länge nach, von einem Schattenstreife begleitet sieht. Wenn dieser Fall vorhanden sein soll, so muss es einen Werth von ϑ geben, welcher, in die Gleichungen 5) gesetzt, bei der Rechnung für $\odot$ auf dasselbe Paar von Werthen b , l führt, auf welches man mit einem zweiten Werthe von ϑ bei der Rechnung für $\oplus$ gelangt. Aus der ersten Gleichung in 5) erkennt man sogleich, dass diese beiden Werthe von ϑ entweder den Werth $\frac{\pi}{2}$, oder den Werth $\frac{3\pi}{2}$ zum arithmetischen Mittel haben müssen, indem sie sonst nicht auf dasselbe b führen könnten. *) Hieraus folgt, dass ein Durchschnitt unserer Linien gewiss nicht existiren kann, wenn nicht Einer der Werthe $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ zwischen die äussersten Schranken Θ fällt, welche nach der obigen Vorschrift (6), indem man dieselbe für $\odot$ und für $\oplus$ anwendet, sich ergeben. **) Wenn durch diese vorläufige Betrachtung das Weitere nicht abgeschnitten wird, so hat man nun noch die Bedingung zu verfolgen, dass die beiden einander zu π ergänzenden Werthe von ϑ in den zwei Rechnungen für $\odot$ und für $\oplus$

*) Dass die beiden Werthe von ϑ , nach welchen gefragt wird, einander nicht gleich sein können, sieht man nämlich ohne Weiteres ein, weil es offenbar unmöglich ist, dass derselbe Punct des Ringes, von Sonne und von Erde aus gesehen, seine Projection auf denselben Punct der Kugel wirft; — abgesehen von dem ganz besonderen Falle, wo die drei Himmelskörper genau in einer Geraden stünden, und wo die beiderseitigen Projectionslinien vollständig coincidiren würden.

**) Oder anders ausgedrückt: soll ein Durchschnitt vorhanden sein, so muss wenigstens für Einen der beiden Standorte auf $\odot$ und $\oplus$ derjenige Punct am Ringrande, welcher sich am weitesten von der Dreikörper-Ebene entfernt, sich auf die Kugel projiciren. (Vgl. die Gleich. 5.)

auch auf dasselbe l führen; nennt man ϑ_0 den Werth, welcher zu $\odot$ gehört, und also $\pi - \vartheta_0$ den zu $\ominus$ gehörigen, so kann man nach Elimination von b und l die betreffende Gleichung in folgende Form bringen:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{r}{R} \right)^2 \sin v'^2 - \cos(\lambda - \odot)^2 - \cos(\lambda - \ominus)^2 = \\ & 2 \cos(\lambda - \odot) \cos(\lambda - \ominus) \{ \cos 2 \vartheta_0 \cos v' - \sin 2 \vartheta_0 \sin v' \cos \beta \}, \end{aligned} \right.$$

deren Einrichtung für die bequemere Zahlenrechnung sich von selbst ergibt.*) Uebrigens liefert diese Gleichung für ϑ_0 vier Werthe, nämlich für's erste enthält sie zu ϑ_0 den Werth $\pi + \vartheta_0$, welcher einem diametral gegenüberliegenden Punkte am Ringrande zugehört, der nur geometrisch, nicht physikalisch, der Aufgabe genügt, weil die Schatten nicht rückwärts fallen; sodann aber stecken in der Gleichung noch zwei falsche Wurzeln, die ebenfalls um π auseinander liegen, und welche die Bedeutung haben, dass sie nicht, wie die ersten, auf zwei Werthe von l führen, die einander gleich sind, $l = l'$, oder welche machen $(l - \odot) - (l' - \ominus) = +v'$, sondern dass mit ihnen wird $(l - \odot) - (l' - \ominus) = -v'$.**) Da von jedem der zwei Wurzelpaare höchstens Ein Werth innerhalb der vorhin schon aufgestellten Schranken der ϑ fallen kann, so kann nur unter zweien die Wahl bleiben; den richtigen wird man durch die Vorstellung von der Lage der verschiedenen Stücke, vermöge der Kenntniss der von uns angegebenen Bedeutung des falschen, leicht erkennen; sollte ein Zweifel übrig bleiben, so würde die für beide Werthe nach den Gleichungen 5*) zu führende Berechnung von b , $l - \odot$, nebst der Berechnung der zu ihren Suppleментарwerthen gehörigen $l - \ominus$, denselben entscheiden.

Durch diese vorläufigen Betrachtungen erfährt man, mit welcher von

*) Bei den wirklich stattfindenden kosmischen Verhältnissen, welche bewirken, dass v' immer klein ist, wird ϑ_0 nahe an $\frac{\pi}{2}$ oder an $\frac{3\pi}{2}$ liegen.

**) Dieses zweite Paar von Werthen kommt mit herein durch die Quadrirungen, welche mit den ursprünglichen Gleichungen zum Zwecke rationaler Elimination vorgenommen werden müssen. — Man erkennt übrigens aus der angegebenen Bedeutung der vier Wurzeln, dass nie mehr als Ein Durchschnitt unserer zwei Curven wirklich existiren kann.

den Linien, oder mit welchem Stücke einer jeden, man wegen der gehörigen Begrenzung der Integration zu thun hat. Da das Integral selbst, genommen über ein Kugelstück, welches von der Curve der Gl. 5**) auf Einer Seite eingefasst wird, nicht in geschlossener Form darstellbar ist, so wird man es am besten durch mechanische Quadratur erhalten. Zu dem Ende ist es nothwendig, für einige besondere Werthe der Variabeln Alles in Zahlen zu berechnen. Bei der hernach näher zu erörternden Anordnung, welche mir die passendste schien, braucht man zu vorgegebenen Werthen von l die entsprechenden b , welche am besten direct aus der Gleichung 5**) berechnet werden. Es ist ziemlich gleichgiltig, ob man zur wirklichen Berechnung des Ausdrucks zur Rechten in 5**) sich nur trigonometrischer Substitutionen bedienen, oder dabei die Gauss'schen Tafeln für Logarithmen der Summen und Differenzen benutzen will; man wird immer, nachdem zuerst die von $(l - \odot)$ unabhängigen Stücke gehörig gebildet und dann zu einem angenommenen Werthe von l die log. des Sin. und cos $(l - \odot)$ angesetzt sind,*) nach weiterem dreimaligen Aufschlagen der Tafeln den Werth von b erhalten. In Betreff der Doppeldeutigkeit des Ausdrucks für $\cotg b$ ist dabei Folgendes zu bemerken. Man muss zunächst zwei Hauptfälle unterscheiden, je nachdem die Curve, in welcher sich von $\odot$ (oder resp. von $\oplus$) aus der eben betrachtete Ringrand auf die Planetenkugel projicirt, zwischen dem auf eben dieser Kugel genommenen Nordpol und Südpol der Dreikörper-Ebene hindurchgeht, oder beide auf Einer Seite lässt. Der erste Fall ist der gewöhnlich vorkommende; der zweite kann sich jedoch um die Zeit der Opposition (wo die Dreikörper-Ebene starke Neigungen gegen die Ringebene annimmt) und besonders leicht für den äusseren Ringrand ergeben. Das Criterium der beiden Fälle ist in der Beantwortung der Frage enthalten, ob zu allen Werthen von $(l - \odot)$ oder nur zu den grossen Werthen dieses Winkels reelle b sich ergeben.**)

*) Man braucht in jedem Falle auch den Logarithmus des Cosinus, weil dieser unter dem Integral noch selbst als Factor vorkommt.

**) Wenn die Linie zwischen beiden Polen hindurchgeht, muss sie natürlich jeden Halb-

letztere Fall vorhanden sein soll, so wird für den kleinsten zulässigen Werth von $(l - \odot)$ die in 5**) vorkommende Wurzel verschwinden; es wird daher (vgl. die 2^{te} oben gegebene Form des Wurzelausdruckes) für diesen ausgezeichneten Werth von $l - \odot$ sein müssen

$$\cos (l - \odot) = V \left\{ \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \frac{1 - \frac{R^2}{r^2} \sin H_{\odot}^2}{1 - \frac{R^2}{r^2} \sin \beta^2} \right\}$$

Wenn diese Gleichung keinen reellen Werth des Bogens $(l - \odot)$ liefert,*) so hat man also unseren ersten Fall; wenn das Gegentheil stattfindet, den zweiten; wobei zu bemerken ist (weil $\frac{R}{r} > 1$ und nach 4') $\sin H^2 < \sin \beta^2$), dass letzteres nur dann sich ereignen kann, wenn $\frac{R}{r} \sin \beta$ grösser ist als 1. Nehmen wir nun zunächst an, dass

A) der erste Fall wirklich vorhanden sei, so wird also jeder auf der Dreikörper-Ebene senkrecht stehende und der Sonne zugewendete Halbmeridian die von der Vorderseite des Ringes herrührende Projectioncurve Einmal schneiden; geometrisch hat er auch noch einen Durchschnitt mit der Projection, welche (ebenfalls mittelst nach der Sonne gezogener Parallelen) zu dem hinter dem Planeten liegenden Stücke des Ringrandes construirt wird. Die Eine, für uns unbrauchbare, Wurzel der Gleichung 5**) wird sich auf diese letztere Projection beziehen. Weil b den angulären Abstand des Punctes der Kugel vom Nordpol der Dreikörper-Ebene vorstellt, so ist es klar, dass man den grösseren der beiden Werthe von b anwenden muss, wenn die Sonne (respective $\odot$)

meridian, der dieselben verbindet, durchschneiden. — Andererseits sieht man a priori ein, und es ist auch in den Formeln leicht nachweisbar, dass, wenn nur der Ringrand sich überhaupt auf die Kugel projicirt, er jedenfalls den Meridian, welcher die der $\odot$ (oder der $\oslash$) zugewandte Halbkugel begrenzt, scheinbar durchschneiden muss, d. h.

dass zu $l - \odot = \pm \frac{\pi}{2}$ sicher reelle b gehören.

*) Es versteht sich von selbst, dass nach Umständen $\oslash$ statt $\odot$ zu setzen ist.

dieselbe Ringseite sieht, wie dieser Pol, hingegen den kleineren im anderen Falle. Diese Unterscheidung hängt ab von dem Vorzeichen der Grösse $\cos \beta \cos (\lambda - \odot)$; man erhält daher die Regel, dass die in 5**) stehende Wurzel das Zeichen bekommen muss, welches demjenigen von $\cos \beta$ entgegengesetzt ist.

B) Wenn der zweite Fall stattfindet, und die von uns gesuchte Curve beide Pole der Dreikörper-Ebene auf Einer Seite lässt, so muss sie von jedem Halbmeridian, der sie überhaupt trifft, zweimal passirt werden. Es sind also in diesem Falle die beiden Werthe von b , welche sich zu demselben l ergeben, gleichzeitig anzuwenden. Die Projection von dem hinteren Stücke des Ringrandes, welche nothwendig immer in unseren Gleichungen auch mitenthalten ist, wird hier von derjenigen des vorderen dadurch geschieden sein, dass sie zu den entgegengesetzten Werthen von $l - \odot$ sich ergibt. Unsere obige Gleichung, welche den ausgezeichneten oder kleinsten zulässigen Werth von $(l - \odot)$ gibt, führt nämlich auf zwei gleich grosse und entgegengesetzte Werthe des Bogens, die beide zu demselben (natürlich positiven) Werthe des Cosinus gehören; man wird also reelle b ebensowohl erhalten, wenn man $l - \odot$ zwischen dem positiven Grenzwerte und $\frac{\pi}{2}$ annimmt, als auch dann, wenn man es zwischen dem negativen Werthe und $-\frac{\pi}{2}$ wählt. Es ist auch hier wieder einleuchtend, dass die Projectioncurve des vorderen Ringstückes (welche allein physikalische Bedeutung hat) mehr auf die südliche als auf die nördliche Seite fallen muss, wenn die Sonne dieselbe Ringseite sieht, wie der Nordpol der Dreikörper-Ebene; aus der Verfolgung dieser Betrachtung ergibt sich (mittelst der Bemerkung, dass G für diesen unseren zweiten Fall immer negativ wird), dass man $l - \odot$ im positiven Intervalle zu wählen hat, wenn $\sin 2 (\lambda - \odot)$ negativ ist; und umgekehrt.

Die ganze Lichtmenge, welche von der Saturnskugel aus dem Beobachter zugesendet wird, ist in dem Anfangs hiefür festgestellten Maasse ausgedrückt durch das Integral (s. §. 2. I.)

$$7) \quad \Pi = A \left(\frac{r}{AA'} \right)^2 \frac{1}{\pi} \int \int dl db \sin b^3 \cos (l - \odot) \cos (l - \oplus),$$

welches ausgedehnt werden muss über diejenigen Theile der Oberfläche, welche gleichzeitig beleuchtet und von der Erde aus sichtbar sind. Man wird am bequemsten auch bei der Anwendung auf Saturn dasselbe zuerst über das ganze Kugelstück ausdehnen, welches zugleich der Sonne und der Erde zugewendet ist, — wodurch man, ebenso wie bei den übrigen Planeten, erhält

$$A \left(\frac{r}{AA'} \right)^2 \frac{2}{3\pi} (\sin v - v \cos v) = A \left(\frac{r}{AA'} \right)^2 \Phi$$

(s. §. 2. II.), — und von dem so gefundenen Werthe nachträglich abziehen denjenigen des Integrales, welches genommen ist über die Theile der Oberfläche, welche ebenfalls auf der der Sonne und auch der Erde zugewandten Seite der Kugel liegen, aber für die Eine oder die Andere (oder für Beide zugleich) vom Ringe verdeckt sind. Der subtractive Theil wird die Quantität desjenigen Lichtes vorstellen, welches (wenn man den Ausdruck erlauben will) in Folge des Zwischentrittes des Ringes der Kugel für das Auge des Beobachters fehlt. Auch für diesen Theil lässt sich die Eine der Integrationen, nach b oder nach l , ohne Schwierigkeit ausführen; die zweite muss durch mechanische Quadratur gemacht werden. Wenn man die erstere Wahl trifft, so ergibt sich (falls die Constante so bestimmt wird, dass für $b = 0$ der Ausdruck verschwindet)

$$8) \quad \int db \sin b^3 = \frac{4}{3} (\sin \frac{1}{2} b)^4 (2 + \cos b);$$

wenn man hingegen erst nach l summiren will, so ist

$$8') \quad \int dl \cos (l - \odot) \cos (l - \oplus) = \frac{1}{4} \sin (2l - \odot - \oplus) + \frac{1}{2} l \cos v'.$$

Die erste Anordnung lässt nun noch eine Quadratur nach l auszuführen, die letztere eine solche nach b . Diese würde einen kleinen Vorzug vor der Ersteren in soferne haben, als die Berechnung der l , welche zu gegebenen b gehören, nach den Formeln 5*) etwas bequemer geführt wird, als die umgekehrte Rechnung nach der Gleichung 5**). Indessen glaube ich, dass es sich im Ganzen mehr empfiehlt, nach b analytisch, und nach l mechanisch zu integrieren. Einerseits wird der

eben bezeichnete Vorthail der entgegengesetzten Wahl schon dadurch so ziemlich aufgewogen, dass der Ausdruck 8') für die numerische Rechnung weniger geschickt ist als 8); dann würde man auch bei der mechanischen Quadratur nach b wohl in den meisten Fällen, gemäss der eigenthümlichen Begrenzung unseres Zonenstückes, zu einer mehrfältigeren Zerlegung des Integrales genöthigt werden, als wenn dasselbe nach l zu nehmen ist. *) Auch noch ein theoretischer Grund könnte geltend gemacht werden, welcher dafür spricht, lieber nach l als nach b mechanisch zu quadriren. Man wird nämlich ein Integral $\int y \, dx$ durch Quadratur ziemlich vortheilhaft bestimmen können, wenn $\frac{dy}{dx}$ kleine Werthe hat; dagegen mit viel geringerer Annäherung, wenn dieses Differentialverhältniss auch grosse oder gar unendliche Werthe annehmen kann. Denn unsere gewöhnlichen Quadraturformeln, sowohl die Cotes'schen als die von Gauss verbesserten, beruhen bekanntlich darauf, dass an die Stelle der wahren Function y von x eine rationale ganze Function gesetzt wird, welche mit ihr eine Anzahl Werthe gemein hat; wenn aber $\frac{dy}{dx}$ gross ist, so wird die vorgelegte Function sich sehr rasch ändern, und es wird aus der Uebereinstimmung einiger ihrer Werthe mit denjenigen einer anderen nur mit wenig Sicherheit darauf geschlossen werden können, dass beide Functionen überhaupt sehr nahe gleich sind; wie denn auch bei der rationalen ganzen Function $\frac{dy}{dx}$ nie für einen endlichen Werth von x unendlich werden kann. Nun ist an unseren Curven, welche das vom Ringe verdeckte Kugelstück begrenzen, b immer in viel engere Grenzen

*) Wenn die zuletzt auszuführende Integration diejenige nach b ist, so muss man darauf achten, dass b , ausser den Grenz-Maximis oder Minimis, welche zu $l - \odot = \pm \frac{\pi}{2}$ und resp. zu $l - \oslash = \pm \frac{\pi}{2}$ gehören (oder zu denjenigen Werthen von ϑ , welche sich aus Gl. 6. ergeben), auch ein eigentliches Maximum oder Minimum haben kann, zu $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$ gehörig, wenn Einer dieser beiden Werthe innerhalb der früher für ϑ gefundenen Schranken θ fällt.

eingeschlossen als l , wie man dies im Voraus erwarten kann bei der mässigen Neigung des Saturnsrings gegen die Ekliptik und der im Allgemeinen noch geringeren der Dreikörper-Ebene gegen die Ekliptik; alle Variationen, welche an der zu integrierenden Function vorkommen, werden daher durch ziemlich kleine Aenderungen von b , dagegen durch viel grössere von l hervorgerufen, und es wird demnach die mechanische Quadratur, nach der letzteren Grösse ausgeführt, eine bessere Approximation versprechen als nach der ersteren. Sehr viel Gewicht ist allerdings für uns auf diesen Umstand nicht zu legen, weil überhaupt eine ziemlich rohe Approximation für den Zweck der Reduction der Beobachtungen völlig ausreichend ist. Unter den verschiedenen Fällen, welche mir in Zahlen vorgekommen sind, befand sich keiner, in welchem die Quantität des von der Kugel nach der Erde gehenden Lichtes in Folge der Interception eines Theiles desselben durch den Ring um mehr als $\frac{1}{7.5}$ ihres ganzen Betrages zu vermindern gewesen wäre; und selbst bei unseren drei ersten Messungen, bei welchen der Bruch $\frac{1}{7.5}$ sich eben erreicht fand, würde ein in der Berechnung der interceptirten Lichtmenge begangener Fehler, der sich auf $\frac{1}{70}$ derselben belaufen hätte, den Logarithmus der übrig bleibenden Grösse nur um 0.0001 entstellt haben.

Um nun den Fortgang des Calcüls unter der Voraussetzung zu besprechen, dass man sich dafür entschieden hätte, die Integration nach l zuletzt (also durch die mechanische Quadratur) auszuführen, so wird man die Quantität des an der Kugel fehlenden Lichtes auf die Art finden, dass man zuerst die ganze Grösse desselben berechnet, wie sie dem Kugelstücke zwischen dem Nordpol der Dreikörper-Ebene und der südlichen Grenze der verdeckten Zone entspricht, und davon abzieht die Lichtmenge, welche dem Stücke zwischen Nordpol und nördlicher Grenze unserer Zone zugehört. Wenn nicht beide Ringränder sich auf die Kugel projiciren, und man also nicht ein gürtelförmiges Stück hat, so existirt entweder im Süden oder im Norden keine andere Begrenzung, als diejenige, welche die beiden Halbmeridiane ergeben, die den der Erde und der Sonne zugleich zugewendeten Kugeltheil zwischen sich haben; das

Doppelintegral, vom Nordpol bis an diese Grenze ausgedehnt und schon mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirt, ist Φ für den ersten und 0 für den zweiten dieser besonderen Fälle. Hingegen wird man da, wo wirklich unsere Projectionscurven der Ringränder die Grenze der Zone bestimmen, zu berechnen haben den Werth des Integrales

$$\frac{1}{\pi} \int dl \frac{4}{3} \sin \frac{1}{2} b^4 (2 + \cos b) \cos (l - \odot) \cos (l - \ominus)$$

in welchem b diejenige Function von l ist, welche durch die Gleichung der betreffenden Curve bestimmt wird. Das Intervall der Werthe von l , über welches die Integration zu erstrecken ist, wird im Allgemeinen dasjenige sein, welches durch die beiden soeben erwähnten Halbmeridiane bestimmt wird, d. h. das engere von den beiden Intervallen

$$\odot - \frac{\pi}{2} \text{ bis } \ominus + \frac{\pi}{2}$$

und

$$\ominus - \frac{\pi}{2} \text{ bis } \odot + \frac{\pi}{2},$$

oder dasjenige dieser beiden Intervalle, welches die Differenz der zwei Grenzen $= v$ macht. Wenn jedoch der oben von uns mit B) bezeichnete Fall sich ergibt (was mir bisher nur für die nördliche Gürtelgrenze zur Beob. No. 210 vorgekommen ist), so verhält es sich anders; hierüber siehe hernach. Im Hauptfalle kann es nun wieder geschehen, entweder dass die Linie, welche auf der Einen Seite (für die man eben rechnet) die Zone begrenzt, eine continuirliche ist, oder — (wenn die Projection des Ringrandes von Sonne aus, und die von Erde aus genommene sich auf der Kugel schneiden) — dass sie gebildet wird von zwei Stücken verschiedener Curven. Ereignet sich der letztere Fall, so muss man, um strenge zu gehen, abtheilen, und das ganze Integral zerlegen in Eines, welches sich erstreckt von der unteren Grenze bis zu demjenigen Werthe von l , welcher dem Intersectionspuncte entspricht, und in ein zweites, welches sich von hier bis zur oberen Grenze erstreckt.*)

*) Die Gleichung, welche das zu dem Durchschnittspuncte gehörige ϑ_0 liefert, ist oben

Nachdem auf solche Art die Grenzen festgestellt sind, schaltet man, entweder nach der Cotes'schen oder besser nach der Gauss'schen Anordnung, zwischen dieselben einige Werthe von l ein, für welche man zunächst aus Gleichung 5**) (oder aus der ihr analogen Gleichung, in welcher $\ominus$ an die Stelle von $\odot$ gesetzt ist) die zugehörigen b berechnet; man bildet hierauf für jedes dieser l den Werth der Function unterm Integralzeichen, multiplicirt mit dem entsprechenden Coefficienten der Quadraturformel, und bildet die Summe, welche der genäherte Werth des Integrales ist. Dabei ist zu beachten, dass als die Normalgestalt eines Integrales, welches durch die mechanische Quadratur gefunden wird, nach den gewöhnlichen Formeln diejenige angesehen wird, in welcher die Differenz der Grenzen 1 beträgt, und dass man, wenn diese Differenz einen anderen Werth hat, denselben als Factor beifügen muss. In unserem Falle wäre also der Unterschied der beiden Werthe von l anzuwenden (welcher immer $= v$ ist, wenn nicht eine Zerlegung des Integrales in zwei nöthig war), und zwar natürlich in Einheiten des Radius; weil aber das Integral noch mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirt werden muss, so kann man die Verwandlung in Bogen ersparen, indem man mit der in Graden ausgedrückten Differenz multiplicirt und dann, statt mit π , mit der Zahl 180 dividirt.

Im gewöhnlichen Falle, wo kein Intersectionspunct der Curven vorhanden ist, hat man noch den kleinen Vorthail, welcher eine Folge der symmetrischen Anordnung der Argumente in den Cotes'schen und Gauss'schen Formeln und der symmetrischen Lage unserer Integrationsgrenzen gegen $\odot$ und $\ominus$ ist, — dass der erste Werth von $\cos(l - \odot)$ und der letzte von $\cos(l - \ominus)$ dieselben sind, ebenso der 2^{te} von $\cos(l - \odot)$

aufgestellt worden; ist sie gelöst, so findet man (erst b und dann) das betreffende l aus 5*), wobei man auf denselben Werth kommen muss, man mag mit ϑ_0 für $\odot$ oder mit $\pi - \vartheta_0$ für $\ominus$ rechnen; oder auch, wenn man lieber will, aus folgender Gleichung

$$\frac{r}{R} \sin b \sin v' \sin(\lambda - l) = \sin(2\lambda - \odot - \ominus) \cos \vartheta_0,$$

welche für diesen speciellen Werth von ϑ aus den anderen abgeleitet werden kann.

und der vorletzte von $\cos(l - \frac{\pi}{2})$, etc. Diese Werthe werden gleich bei der Berechnung von b aus Gl. 5**) angesetzt, in welcher $\sin(l - \odot)$ ohnehin gebraucht wird.

Wenn sich ergibt (Fall B), dass eine der Curven, die unsere Zone begrenzen, sich nicht zwischen beiden Polen der Dreikörper-Ebene hindurchzieht, so hat man an derselben nur zu integrieren zwischen demjenigen Meridiane, welcher die Curve berührt (und für welchen der Werth von $\cos(l - \odot)$, oder resp. von $\cos(l - \frac{\pi}{2})$ aus der weiter oben aufgestellten Gleichung sich ergibt) einerseits, — und zwischen der ihm zunächst fallenden Grenze der beleuchteten oder der sichtbaren Halbkugel andererseits. Innerhalb dieser Grenzen wird man einen südlichen und einen nördlichen Arm der Curve haben, welche sich, nach den früheren Betrachtungen, unterscheiden durch das in 5**) anzuwendende Vorzeichen. Man wird wieder durch Einschaltung einiger Zwischenargumente zwischen die beiden extremen l und durch Berechnung, erst der zugehörigen b aus Gleich. 5**) und dann der ganzen Function unter unserem Integralzeichen etc., auf dem Wege mechanischer Quadratur finden: zuerst das Integral über den Raum, welcher eingeschlossen ist von den zwei zu den extremen l gehörigen Halbmeridianen und dem südlichen Curvenarme, dann das ähnliche für den nördlichen Zweig; die Differenz beider Werthe ist das Integral, genommen über das Kugelstück, welches von der Curve umfasst wird.

In den Rechnungen habe ich mich für die mechanische Quadratur der Gauss'schen Formeln bedient, und bisher stets sieben Argumente eingeschaltet, wenn die Differenz der Grenzen von $l - v$ (d. h. nahe 180°) war; in dem einzigen Beispiele, welches mir für den Fall B vorlag, (Schatten des äusseren Ringrandes bei Beob. No. 210) und in welchem das Intervall nur $62^\circ 43'.4$ betrug, bediente ich mich dreier Argumente. Uebrigens würde eine geringere Zahl derselben auch im ersten Fall eine für den Zweck vollkommen ausreichende Genauigkeit gewähren.

Wenn man mit J unser Integral bezeichnet, ausgedehnt über diejenige Kugelzone, welche nicht für Sonne und Erde gleichzeitig unver-

deckt vom Ringe bleibt, und schon multiplicirt mit dem Factor $\frac{1}{\pi}$, so wird, nachdem dasselbe gefunden ist, der Ausdruck

$$9) \quad \Pi = A \left(\frac{r}{A'} \right)^2 (\Phi - J)$$

die Quantität des Lichtes vorstellen, welches von dem Saturnsballe nach der Erde gesandt wird, ausgedrückt wie immer in Theilen der mittleren Sonnenhelligkeit.

Es bleibt nun noch die analoge Quantität für den Ring aufzusuchen; wesshalb zunächst auch hier die Gleichungen der Curven zu ermitteln sind, welche das entweder für Sonne oder für Erde (durch die Projection des Sphäroids) gedeckte Stück umschreiben. Für die Berechnung derselben bilden wieder unsere Gleichungen 5) die Grundlage, indem dieselben überhaupt ganz allgemein den Zusammenhang der Coordinaten eines Punctes auf dem Ringe und eines Punctes auf der Kugel darstellen, welche in derselben nach der $\odot$ gerichteten Geraden liegen. Für die gegenwärtige Anwendung muss man $l - \odot = \pm \frac{\pi}{2}$ setzen; denn der Rand des von der Kugel auf den Ring geworfenen Schlagschattens ist offenbar der Schatten desjenigen Meridians, welcher die beleuchtete Halbkugel von der nicht erleuchteten trennt. Dagegen ist unter R jetzt nicht gerade einer der beiden Werthe R_a oder R_i zu verstehen, die den zwei Ringrändern entsprechen, sondern diese Grösse wird an der gesuchten Curve den variablen zu dem Polarwinkel ϑ gehörigen Radiusvector vorstellen. Eliminirt man b , so erlangt man die Gleichung derselben (identisch mit Gleichung 6))

$$10) \quad RR = \frac{rr}{1 - W_{\odot}^2 \cos(\vartheta - w_{\odot})^2}$$

und erkennt, dass dieselbe, wie es sein muss, einer Ellipse zugehört, deren halbe kleine Axe $= r$, und halbe grosse Axe $= r : \sqrt{1 - W_{\odot}^2} = r : \sin H_{\odot}$ ist. Der Grösse ϑ hat man für unseren Gebrauch nur solche Werthe zu geben, für welche R zwischen die den beiden Ringrändern zugehörigen extremen Werthe R_a und R_i hineinfällt; zugleich muss $\cos(\vartheta - w_{\odot})$

negativ sein (vermöge der oben angegebenen geometrischen Bedeutung des Winkels $w_{\odot}$), weil der beschattete Theil des Ringes natürlich der von der Sonne abgewendeten Seite angehört. Hiernach wird man die für $\vartheta - w_{\odot}$ zulässigen äussersten Werthe aus einer Gleichung erhalten, welche mit Gleichung 6) übereinstimmt, mit dem Unterschiede, dass jetzt die Wurzel negativ genommen werden muss, und in welcher auch, wie dort, für die dermalige Frage R einen seiner beiden extremen Werthe vorstellt; man hat daher keine neue Rechnung nöthig, indem es einleuchtend ist, dass die verlangten Werthe von ϑ einfach um $\pm \pi$ verschieden sind von den zuvor gefundenen und von uns oben mit Θ bezeichneten. Weil übrigens die Gleichung zu jedem der zwei Werthe von R zwei Werthe von $\vartheta - w_{\odot}$ liefert, so wird man zwei Durchschnitte unserer Ellipse mit dem inneren, und ähnlich zwei solche mit dem äusseren Ringrande erhalten; Einer von jedem Paare wird einem Endpunkte der Schattengrenze an der vorausgehenden, und Einer dem entsprechenden Endpunkte an der nachfolgenden Ring-Anse entsprechen. Wenn jedoch der äussere Ringrand die Kugel frei zu umgeben scheint, (d. h. wenn $\sin H_{\odot} > \frac{r}{R_a}$ ist) so wird dieser Rand von der Ellipse, welche den Schlagschatten der Kugel begrenzt, gar nicht erreicht, und das Stück dieser Linie, welches überhaupt auf den materiellen Ring fällt, bildet alsdann ein einziges Continuum, während im anderen Falle zwei getrennte Stücke derselben Ellipse sich für die zwei Ansen ergeben.

Es versteht sich, dass man in Gleichung 10) nur $W_{\ddagger}$, $w_{\ddagger}$ an die Stelle von $W_{\odot}$, $w_{\odot}$ zu setzen hat, wenn man die Begrenzung des für den irdischen Beobachter hinter der Kugel liegenden Ringstückes suchen will, — und dass im Uebrigen Alles analog bleibt. Für die wirkliche Einfassung der ganzen Ringpartie, welche kein Licht nach der Erde sendet, kann nun an der vorausgehenden und an der nachfolgenden Seite entweder die eine oder die andere Ellipse maassgebend sein, oder auch Stücke von beiden — nämlich an der vorausgehenden Seite diejenige beider Linien, an welcher zu demselben Werthe von R das kleinere ϑ

gehört (im rechtläufigen Sinne gerechnet), an der nachfolgenden umgekehrt. Wenn die beiden Ellipsen einen Durchschnitt haben, der auf den materiell existirenden Ring fällt, so wird unter demjenigen ϑ , welches diesem Durchschnitte entspricht, die eine Curve die andere überholen und sie da in der Rolle, welche ihr für die Umfassung des nichtleuchtenden Ringtheiles zukam, ablösen; ob ein solcher Durchschnitt existirt oder nicht, wird man, sobald die Schranken der ϑ für beide Curvenstücke an beiden Ansen vorliegen, aus der Aufeinanderfolge derselben von selbst erkennen; die Berechnung des ϑ für den Durchschnittspunct ergibt sich übrigens (indem man die Bedingung aufstellt, dass die Werthe von R^2 aus der Gleichung 10) und aus der analogen für $\oplus$ einander gleich werden) aus der Formel

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{Sec} \beta \cotg \left(\lambda - \frac{1}{2} (\odot + \oplus) \right)$$

ohne Zweideutigkeit.*)

Die Integration für die Lichtmenge, welche vom Ringe aus nach der Erde gesandt wird, kann ohne Schwierigkeit in Buchstaben ausgeführt werden. Weil wir den Ring als eben betrachten, und Sonne und Erde als unendlich entfernt im Verhältnisse zu seinen Dimensionen, so werden alle auffallenden Strahlen denselben Winkel mit den betreffenden Normalen bilden, und Gleiches wird auch der Fall sein in Bezug auf die nach der Erde reflectirten Strahlen. Es werden also nach der in §. 2. gebrauchten Bezeichnung die Grössen $\cos p$ und $\cos q$ Constanten sein, und, abgesehen vom Zeichen, gleich den Grössen $\sin H_{\odot}$ und $\sin H_{\oplus}$. Nach den a. a. O. erörterten Principien wird also die ganze apparente Lichtmenge des Ringes, in unserer hiefür festgestellten Einheit, werden

$$II' = \frac{A'}{\pi} \frac{\sin H_{\odot} \sin H_{\oplus}}{(AA')^2} S\mu$$

*) Diese Gleichung gibt immer reelle ϑ , weil die beiden Ellipsen, vollständig gedacht, sich immer schneiden; wenn aber der Durchschnitt nicht auf dem materiell existirenden Theile der Ringebene liegt (d. h. wenn das zu ϑ an beiden Curven gemeinschaftlich sich ergebende R nicht zwischen die extremen Werthe der beiden Ringränder fällt), so ist er für uns ohne Bedeutung.

wobei A' die Albedo des Ringes vorstellt, und $S\mu$ die Summe der Grössen aller seiner zugleich beleuchteten und für die Erde sichtbaren Flächenelemente, — d. h. den ganzen Flächeninhalt des Ringstückes, welches Licht nach der Erde sendet. Jedoch ist zu bemerken, dass, wenn das Product $\sin H_{\odot} \sin H_{\oplus}$ negativ würde, an die Stelle des ganzen Ausdrucks Null gesetzt werden müsste, weil in diesem Falle die Erde die von der Sonne abgewandte Ringseite sehen würde.

Um $S\mu$ zu bilden, wird man wieder am bequemsten von der vollständigen Grösse des materiellen Ringes diejenigen Stücke in Abzug bringen, welche wenigstens für Einen der Standorte auf $\odot$ oder auf $\oplus$ von der Kugel verdeckt sind. Jene Grösse ist $\pi (R_a^2 - R_i^2)$ wenn R_a , R_i , wie schon oben den Radius des äusseren und des inneren Ringrandes bezeichnen. Die Flächenstücke, welche hievon abgezogen werden müssen, werden nach innen Alle vom inneren Ringrande begrenzt; nach aussen aber von Bögen der Einen oder der Anderen unserer beiden Ellipsen (immer von derjenigen, welche, bei gleichem ϑ , das grössere R hat), — oder, wenn diese Grenze stellenweise über den äusseren Ringrand hinausgreift, auf so weit als dieses der Fall ist, vom äusseren Ringrande selbst. Um die Grössen aller dieser Stücke bequem zu berechnen, ergänzt man dieselben zuerst zu Sektoren, indem man zu einem jeden noch den Flächenraum hinzuschlägt, welcher von den beiden äussersten ihm angehörigen Radienvectoren und von dem kreisförmigen inneren Ringrande eingeschlossen wird. Die Grösse eines Sectors der Ellipse von der Gleichung 10) wird alsdann dargestellt durch die positive Differenz der beiden Werthe, welche das unbestimmte Integral $\frac{1}{2} \int R R d\vartheta$ oder

$$\frac{r^2}{2 \sin H} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left\{ \frac{\operatorname{tg} (\vartheta - w)}{\sin H} \right\}$$

dann annimmt, wenn man für ϑ die beiden den Sector begrenzenden Werthe nach einander setzt (von welchen jeder entweder einem Durchschnitte der betreffenden Ellipse mit einem der kreisförmigen Ringränder, oder dem Durchschnitte der zwei Ellipsen unter sich zugehört). Dabei hat man unter H und w entweder die für $\odot$ oder die für $\oplus$ giltigen

Grössen zu verstehen, je nachdem die äussere Grenze des betreffenden Sectors vom Saume des Schattens oder von demjenigen der Projection der Kugel gebildet wird; und man muss den Arcus immer in solchem Intervalle wählen, dass er innerhalb der beiden eben gedachten Werthe von ϑ eine continuirliche Function von ϑ bleibt. — Wenn auch ein solches subtractives Stück vorkommt, dessen äussere Begrenzung der äussere Ringrand bildet, so ist die Grösse desselben

$$\frac{1}{2} R_a^2 \times \text{Differenz der beiden diesen Kreis-Sector einschliessenden Werthe von } \vartheta.$$

Weil man endlich bei dieser Rechnung jedes der Stücke, welche von der ganzen Ringfläche abzuziehen sind, zu gross genommen hat um denjenigen Theil des betreffenden Sectors, welcher innerhalb der inneren Ringgrenze fällt, so wird man zuletzt wieder addiren müssen einen Kreissector vom Radius R_i , dessen Grösse gemessen wird durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2} R_i^2 \times \text{Differenz zwischen dem grössten und kleinsten aller der Werthe von } \vartheta, \text{ welche bei den verschiedenen zuvor berechneten Sectors in Betracht gekommen sind.}$$

Die sämmtlichen in diesen Formeln vorkommenden Kreisbögen sind natürlich in Theilen des Radius zu verstehen; weil übrigens der Ausdruck Π' noch einen Divisor π in sich schliesst, so erspart man auch hier die Umwandlung aus Graden in Theile des Radius, wenn man statt π die Zahl 180 setzt. Die ganze vom Ringe nach dem Auge des Beobachters gesendete Lichtmenge wird demnach erscheinen in der Form

$$11) \quad \Pi' = A' \left(\frac{r}{AA'} \right)^2 M \sin H_\odot \sin H_\star;$$

wobei M das positive Hauptglied enthält

$$11^a) \quad \left(\frac{R_a}{r} \right)^2 - \left(\frac{R_i}{r} \right)^2$$

ferner subtractive Glieder, deren jedes entweder eine Differenz ist zweier Werthe von der Form

$$11^b) \quad \frac{1}{360} \frac{1}{\sin H} \text{Arc tg} \left\{ \frac{\text{tg}(\vartheta - w)}{\sin H} \right\} \quad (\text{in Graden})$$

oder eine Differenz zweier Werthe der Form

$$11^c) \quad \frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 0} \left(\frac{R_a}{r} \right)^2 \vartheta \text{ (in Graden), —}$$

und endlich noch ein additives Glied, welches eine Differenz ist von zwei Werthen des Ausdruckes

$$11^d) \quad \frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 0} \left(\frac{R_i}{r} \right)^2 \vartheta.$$

Schliesslich wird die ganze vom Saturnsballe und Saturnsringe zusammen nach dem Auge gesendete Lichtmenge, ausgedrückt in Theilen der mittleren Helligkeit der Sonne, sein

$$12) \quad II + II' = \left(\frac{r}{AA'} \right)^2 \{ A (\Phi - J) + A' M \sin H_{\odot} \sin H_{\frac{\pi}{2}} \}.$$

Man kann an den beiden Bestandtheilen dieses Ausdruckes noch leichte Correctionen anbringen, durch welche unsere Theorie den wirklich stattfindenden Verhältnissen noch etwas mehr angeschlossen wird. Was nämlich zuerst den Ausdruck II betrifft, so liegt unseren Formeln die Voraussetzung der Kugelgestalt für den Hauptkörper des Planeten zu Grunde, während derselbe eine ziemlich bedeutende Abplattung hat. Wollte man auf diese, unter der Annahme, dass der Saturnsball ein Rotationsellipsoid sei, strenge Rücksicht nehmen, so würde dadurch die Theorie in solchem Grade complicirter gemacht, dass der Aufwand von Mühe bei der Reduction ausser allem Verhältnisse zu der möglicher Weise erreichbaren Genauigkeit der Endresultate stehen würde. Man sieht übrigens leicht ein, dass der Uebergang von der sphärischen Form zur ellipsoidischen (obgleich er auch die Richtungen der Normalen der einzelnen Flächenelemente und die Lage unserer Projectionscurven etwas verändert) doch hauptsächlich insoferne seine Wirkung auf die apparente Helligkeit des Planeten äussert, als er eine Aenderung der scheinbaren Grösse desselben bedingt; und dass die Helligkeit nahezu in demselben Verhältnisse wie die scheinbare Grösse sich ändern muss. Hiernach kann man einen corrigirenden Factor bilden, welcher, an II angebracht, den wichtigsten Theil des Einflusses der elliptischen Gestalt miteinführt. Bezeichnet man (wie schon oben) einen Augenblick mit a , b die halbe grosse

und halbe kleine Axe des Planetenellipsoids, so wird dasselbe, von der Erde aus gesehen, sich auf die Himmelskugel in Gestalt einer Ellipse projiciren, deren halbe grosse Axe proportional ist der Grösse a , während die halbe kleine ebenso proportional gefunden wird dem Ausdrucke $\sqrt{a^2 \sin H_\odot^2 + b^2 \cos H_\odot^2}$; die scheinbare Grösse des Ellipsoids wird also proportional sein $\pi a \sqrt{a^2 \sin H_\odot^2 + b^2 \cos H_\odot^2}$, während sie sich ergeben würde proportional πab nach einer Betrachtung, welche an die Stelle des Sphäroids eine Kugel setzt, deren Radius $= \sqrt{ab}$ ist. Wenn man also, wie ich es in den Zahlenrechnungen gethan habe, unter r das geometrische Mittel aus a und b versteht, so wird die scheinbare Grösse des Ellipsoids, und nahezu auch die apparente Helligkeit desselben, grösser sein, als für die Kugel, im Verhältnisse

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \sin H_\odot^2 + \cos H_\odot^2} : 1 \quad \text{oder} \quad \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \sin H_\odot^2} : 1.$$

Man wird also den Logarithmus dieser Wurzel noch zu $\log H$ addiren müssen, um mit annähernder Berücksichtigung der elliptischen Form die Helligkeit des Sphäroids zu erhalten; wenn man zu dem Ende setzt

$$\sqrt{\frac{aa}{bb} - 1} \cdot \sin H_\odot = \operatorname{tg} E$$

so wird demnach für die logarithmische Rechnung sein

$$13) \text{ Reduct. wegen ellipt. Gestalt} = \log \operatorname{Sec} E$$

— immer additiv zum $\log H$, d. h. zum Logarithmus des mit A multiplicirten Theiles in 12).*)

*) Eine solche Correction wegen Abplattung habe ich auch bei der Reduction der $\mathcal{Q}$ Beobachtungen angebracht, indem ich für $\mathcal{Q}$ annahm (nach Kaiser) $\log \frac{a}{b} = 0.0286$. Da die Höhe der $\odot$ über dem $\mathcal{Q}$ Aequator nicht, wie der ähnliche Winkel für $\mathfrak{h}$, schon sonst in der Rechnung gebraucht wird, so wurde sie besonders berechnet; zu dem Ende dient die Betrachtung, dass jene Höhe um 90° kleiner ist als der Winkel, welchen die Linie $\odot \mathcal{Q}$ bildet mit dem Nordende einer Geraden die, der $\mathcal{Q}$ Axe parallel, durch den Erdmittelpunct gelegt wird. Die Lage dieser Geraden nahm ich in der Rechnung so an, wie sie aus den Angaben bei Bessel, Astr. Unt. IX. §. 12 für 1850 sich fand, nämlich für ihren Nordpol

$$\text{AR} = 268^\circ 31'.8; \quad \text{Decl.} = + 64^\circ 21'.2.$$

In ähnlicher Weise habe ich an II' , oder an dem mit A' multiplicirten Gliede in Gl. 12), einen corrigirenden Factor angebracht, um auf die Spaltung des Ringes eine approximative Rücksicht zu nehmen. Es würde nicht schwer sein, dieselbe in genaue Betrachtung zu ziehen, indem man für jeden der einzelnen concentrischen Ringe selbstständig rechnet, und also nach und nach die Radien der inneren und äusseren Ränder aller derselben in unsere Formeln einführen würde. Auch den neuerlich entdeckten dunklen Ring könnte man leicht in die Rechnung aufnehmen; wollte man ihn als undurchsichtig und schwarz betrachten, so müsste man bei der Berechnung des Lichtes von der Kugel unter R_i den Radius der inneren Grenze des dunklen Ringes, bei der Berechnung des Lichtes vom Ringe aber unter demselben Buchstaben den Radius der inneren Grenze des leuchtenden Theiles verstehen, — und in analoger Weise würde man zum Ziele kommen, wenn man ihm einen gewissen Grad von Transparenz und zugleich eine von 0 verschiedene Albedo beilegen wollte. Allein die Verfolgung aller solcher Details wird wohl nicht sobald nothwendig werden; für die Bearbeitung unseres dermaligen Materiales ist es gewiss vollkommen ausreichend, auf die Haupttheilung des Ringes nur in so weit Rücksicht zu nehmen, dass man bei der Berechnung des der Kugel entzogenen Lichtes den Ring als ein einziges Continuum betrachtet, und bei der Berechnung der Helligkeit des Ringes die unter der gleichen Annahme gefundene Quantität einfach vermindert in demjenigen Verhältnisse, in welchem die ganze Ringfläche durch den Zwischentritt der grossen Spalte verringert wird. *) Ohnehin erlaubt die Unsicherheit der auf mikrometrischer Messung beruhenden Data nicht, den verkleinernden Factor, wie er nach dieser Betrachtung sich für unsere Grösse II' ergibt, mit einiger Sicherheit anzugeben, — es wäre daher vergebliche Mühe, wenn man auf einem umständlicheren Wege versuchen wollte, auch noch Das zu berücksichtigen, was in eine

*) Diese Correction würde genau sein, wenn verdeckte und unverdeckte Theile der Spalte in demselben Flächenverhältnisse stehen würden, wie verdeckte und unverdeckte Theile des ganzen Ringes.

höhere Ordnung kleiner Grössen zu rechnen ist. Für meinen numerischen Gebrauch habe ich den Logarithmus des an Π' , oder an dem mit A' multiplicirten Theile in 12), anzubringenden constanten Factors gesetzt $= 9.97330$, wie ich ihn aus den Angaben bei Arago, Astr. pop. IV. p. 439 (welche auf Struve's Messungen zu beruhen scheinen) abgeleitet hatte.

Die Zahlen, welche in Col. 9 und resp. Col. 10 unserer Tafel der Saturnsbeobachtungen angesetzt sind, enthalten durchaus schon die beiden hier besprochenen Correctionen, obgleich derselben in der Ueberschrift der betreffenden Spalten nicht besonders Erwähnung gethan ist.

Als Normalort für die Saturnsbeobachtungen habe ich eine solche Stellung der drei Körper angenommen, nach welcher sie sich in Einer Geraden befinden, Saturn in der Entfernung von der Sonne, deren Logarithmus gleich ist 0.97965, und Erde zwischen Sonne und Saturn in ihrer mittleren Entfernung $= 1$ von der ersteren, — bei welcher ferner der Ring kein Licht empfängt und nichts von der Kugel verdeckt. Diese Position ist als „mittlere Opposition ohne Ring“ bezeichnet worden. Man erhält aus Gleichung 12) die ihr zugehörige Helligkeit Π_0 des Planeten, indem man setzt $\Phi = \frac{2}{3}$, $J = 0$, $M \sin H \sin H' = 0$, und zugleich für A und A' die geeigneten Zahlen substituirt. Es ergibt sich

$$14) \quad \log \Pi_0 = 6.00148 - 10 + \log r^2 + \log A.$$

Indem man von diesem Logarithmus der Normalhelligkeit Saturns abzieht den aus 12) gebildeten Logarithmus der Helligkeit des Planeten zur Zeit der Beobachtung, erhält man den Logarithmus der Zahl, mit welcher die gemessene Helligkeit multiplicirt werden muss, um sie auf die Normalstellung zu reduciren:

$$\begin{aligned} 15) \quad & \text{Reduction auf mittlere } \odot \text{ ohne Ring} \\ & = \log \Pi_0 - \log (\Pi + \Pi') \\ & = 6.00148 + \log (AA')^2 - \log \left\{ \Phi - J + \frac{A'}{A} M \sin H_{\odot} \sin H_{\oplus} \right\} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält noch die Unbekannte $\frac{A'}{A}$, deren Werth

selbst gesucht werden kann, wenn mehrere Beobachtungen vorliegen, welche, sämmtlich auf mittlere Opposition ohne Ring reducirt, übereinstimmende Resultate geben sollen. Es ist aber klar, dass man nur dann mit einiger Sicherheit das Verhältniss der Albedo des Ringes zu der des Sphäroids wird ableiten können, wenn sich unter den Beobachtungen neben solchen, für welche das Licht vom Ringe einen bedeutenden Theil der ganzen planetarischen Helligkeit erzeugte, andere befinden aus Epochen, in welchen der Glanz des Ringes wenig zum Ganzen beitrug. Unsere bisherigen Messungen sind für diesen Zweck noch zu wenig vortheilhaft vertheilt, und lassen sich, wie oben gezeigt worden ist, vollkommen befriedigend durch die Annahme $A' = A$ darstellen.*) Die Zahlen, welche in Sp. 7. der Tabelle der Saturnsbeobachtungen für die Reduction auf mittlere Opposition ohne Ring angesetzt sind, wurden daher berechnet in der Hypothese $\frac{A'}{A} = 1$; sobald spätere Beobachtungen eine Veranlassung geben, diese Annahme zu verlassen, ist es leicht, auch in den jetzt vorliegenden die Trennung vorzunehmen, weil erst der letzte Schritt der ganzen Rechnung eine Annahme über den Werth von $\frac{A'}{A}$ erfordert, und demgemäss auch unsere Columnen 9) und 10) separirt enthalten, was sich auf den Planetenball und was sich auf den Ring bezieht. — Die übrigen Rubriken der Tafel bedürfen keiner besonderen Erläuterung.

Endlich versteht es sich, dass man die Gleichung 15), analog der entsprechenden für die übrigen Planeten, auch benützen kann, um mittelst der bekannten Helligkeit Saturns in der Normalstellung diejenige vor auszuberechnen, welche er zu irgend einer anderen Epoche auf-

*) Ich habe, nur aus einem Interesse der Curiosität und um mir den Gang der Rechnung vorläufig klar zu machen, den Zahlenwerth von $A' : A$ gesucht, welcher den bisherigen Beobachtungen am besten entsprechen würde. Ich finde denselben $= 1.1404$, wornach die Weisse des Ringes sich zu der des Balles sehr nahe verhalten würde wie 8 : 7. Aber die wahrscheinliche Unsicherheit dieser Zahl ist mehr als doppelt so gross als ihre Abweichung von 1, wesshalb ich auf ihre Ableitung nur etwa insoferne einigen Werth legen möchte, als sie darthut, dass ein der Eins sehr nahe kommender Werth die Beobachtungen zur Zeit am besten darstellt.

weisen wird. Man wird zu dem Ende nur den Werth der Reduction, wie er sich für den angenommenen Zeitpunkt aus Gleichung 15) berechnet, abziehen müssen vom Logarithmus der Helligkeit in der Normalstellung, welcher bis auf weitere Beobachtung aus der 4^{ten} unserer Gleichungen A. in §. 5. zu entnehmen ist.

Bei der ganzen Rechnung bis einschliesslich zur Reduction auf die mittl. $\odot$ ohne Ring braucht man nicht die absoluten Maasse der Grössen r , R etc., sondern nur ihre Verhältnisse. Die absoluten Dimensionen haben keinen Einfluss auf die Vergleichung der verschiedenen Beobachtungen unter sich; sie kommen erst dann in Betracht, wenn man zu solchen Betrachtungen übergehen will, wie sie in §. 7. angestellt sind. Die verschiedenen mir vorliegenden Data (beruhend auf den Messungen von Bessel, von Encke, von Struve bei Arago a. a. O. und die Angaben bei Mädler, Astron. Briefe 1846) stimmen auch besser über die relativen Grössen überein als über die absoluten; in einem Mittel aus denselben legte ich bei der Rechnung folgende Zahlen zu Grunde:

$$\begin{aligned}\log \frac{\text{Polar-Durchm. } h}{\text{Aequat.-Durchm. } h} &= 9.95795 \\ \log \frac{\text{Aeuss. Ring-Durchm.}}{\text{Aequat.-Durchm. } h} &= 0.35954 \\ \log \frac{\text{Innerer Ring-Durchm.}}{\text{Aequat.-Durchm. } h} &= 0.17839.\end{aligned}$$

Unter r , dem Radius der Kugel, welche in der Betrachtung an die Stelle des Sphäroids gesetzt wird, verstand ich das geometrische Mittel aus den Hälften des grössten und kleinsten Durchmessers; es fand sich daher

$$\begin{aligned}\log \frac{R_a}{r} &= 0.38056 \\ \log \frac{R_i}{r} &= 0.19941.\end{aligned}$$

Derjenige Werth von H , welcher nicht überschritten werden darf, wenn Sonne oder Erde das Sphäroid auf beiden Seiten über den Ring sollen hervorragend sehen, ergab sich hiemit (s. die Formel nach Gleichung 5.) = $23^{\circ} 47'.8$ (ohne Rücksicht auf die abgeplattete Form würde

er werden $24^{\circ} 36'.2$); und die Constante für die „Reduction weg. ellipt. Gest.“ nämlich die Grösse $\log \sqrt{\frac{aa}{bb}} - 1$ (s. d. Gleich. unmittelbar vor No. 13) nahm den Werth an **9.66487**.

Was noch den in §. 7. der Abhandlung angenommenen absoluten Werth von r betrifft, so erhielt ich aus den verschiedenen mir vorliegenden Angaben für den Aequatoreal-Durchmesser des Planeten, gesehen aus seiner mittleren Entfernung von der Sonne, im Mittel die Zahl von $17''.4395$; daher den Logarithmus des Aequatoreal-Radius in Secunden $= 0.94050$; und da nach dem Obigen derjenige unseres mittleren Kugelradius um 0.02102 kleiner anzunehmen war, so fand er sich $= 0.91948$. Der Logarithmus der wirklichen Grösse, ausgedrückt, wie es unsere Formeln fordern, in Theilen der mittleren Entfernung $\odot \oplus$, wurde hiermit*) $\log r = \mathbf{6.58470} - \mathbf{10}$; sowie in §. 7. angenommen war.

Um endlich auch in Betreff der Reduction der Saturnsbeobachtungen wenigstens an Einem Beispiele von der Entstehung der Zahlen, wie sie in unserer Tabelle niedergelegt sind, vollständige Rechenschaft abzulegen, und zugleich die Anwendung unserer Theorie desto deutlicher vor Augen zu stellen, führe ich zum Schlusse die Zahlenwerthe für die verschiedenen Grössen an, wie sie in der für die drei ersten Saturnsbeobachtungen (No. 118, 132, 141) gemeinschaftlich geführten Rechnung der Reihe nach auftreten. Die beiden äusseren dieser drei Messungen liegen um 12 Tage auseinander; die Veränderung der Grössen ϕ , J , M ist aber bei der beträchtlichen Entfernung des Planeten eine so langsame, dass ich es für genügend hielt, dieselben für alle drei Beobachtungen so anzuwenden, wie sie für das arithmetische Mittel der drei Zeiten sich ergeben, und nur das Product $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ für jede besonders zu bilden. Bei Gelegenheit der getrennt geführten Rechnung für die beiden Beobachtungen No. 238 und 240 hatte sich nämlich schon vorher gezeigt, dass innerhalb der 24 Tage, welche zwischen diesen beiden Beobachtungen

*) Den Logarithmus derjenigen Entfernung Saturns von Sonne, für welche obige Zahlen gelten, angenommen $= 0.97965$

liegen, der Logarithmus der in der Hauptklammer in Gleichung 12) stehenden Grösse sich nur um 0.0048, also für jeden Tag im Durchschnitte um 0.0002 geändert hatte. *)

Das arithmetische Mittel der drei in Tabl. VI. einzeln aufgeführten Beobachtungszeiten, ist 1852 März 15 15^h 35'.6 Münchener Zeit, oder 15^h 42'.7 mittlere Berliner Zeit. Für den Saturnsort muss diese Zeit um 1^h 22'.2 verkleinert werden, weil gemäss der damaligen Entfernung des Planeten das Licht um so viel verspätet zur Erde kam. Aus dem Berliner Jahrbuche erhielt ich hiermit durch Interpolation:

$$\begin{aligned} \text{helioc. Länge } \mathfrak{h} \dots \alpha &= 35^{\circ} 57' 16'' \\ \text{,, Breite } \mathfrak{h} \dots \delta &= - 2 \ 25 \ 17.1 \\ \text{,, Länge } \odot \dots a &= 175 \ 42 \ 19 \end{aligned}$$

und für die Distanzen

$$\begin{aligned} \log \odot \mathfrak{h} &= 0.96440 \\ \log \odot \mathfrak{h} &= 0.99969 \\ \log \odot \odot &= 9.99804. \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich aus den Gleichungen 1) und 2)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= + 3^{\circ} 44' 40''.9 & \odot &= 40^{\circ} 18'.6 \\ v' &= - 3^{\circ} 41' 42'.3 \end{aligned}$$

$$S = 220 \ 18.6 \qquad \odot = 36 \ 36.9.$$

Die Grössen Ω und ω , welche die Lage des $\mathfrak{h}$ Ringes gegen die Ekliptik bestimmen, finden sich nach Bessel (vergl. Berl. Jahrb. bei den Erläuterungen zur Ring-Ephemeride) für unsere Epoche

$$\Omega = 167^{\circ} 33' 34''; \quad \omega = 28^{\circ} 10' 26''.4.$$

Hiermit erhielt ich nach den Gleichungen 3')

$$\lambda = 260 \ 42.4; \quad \beta = 24 \ 28.4$$

und dann weiter aus 4) und 4')

$$\begin{aligned} \log W_{\odot} &= 9.97723 & \log W_{\mathfrak{h}} &= 9.97987 \\ w_{\odot} &= 46^{\circ} 55'.5 & w_{\mathfrak{h}} &= 43^{\circ} 12'.8 \\ H_{\odot} &= -18 \ 23.45 & H_{\mathfrak{h}} &= -17 \ 18.6 \end{aligned}$$

*) Analog habe ich bei der Berechnung auch die zwei Beobachtungen No. 218 und 222,

die letzte dieser Grössen genau übereinstimmend mit dem Werthe, welcher aus den Daten des Jahrbuches direct interpolirt wird. — Sonne und Erde sehen beide die Südseite des Ringes; beide Ränder desselben projiciren sich für jeden dieser Standorte auf die Saturnskugel (weil beide Werthe von H den Grenzwert $23^{\circ} 47'.8$ nicht erreichen), und zwar, da sie von Süden her gesehen werden, auf die nördliche Hälfte derselben. Weil zugleich der absolute Werth von $H_{\odot}$ grösser ist als der von $H_{\oplus}$, so werden, von $\odot$ aus gesehen, die Projectionen beider Ringränder weiter nördlich fallen als von $\oplus$ aus gesehen; es wird daher von der Letzteren aus der innere Ringrand sich auf die erleuchtete Kugel projiciren, der äussere aber im Norden noch von einem Schattenstreife begleitet sein. Jedoch wäre es möglich, dass dieses Verhalten nicht längs des ganzen Zuges unserer Projectionscurven, sondern nur längs seines grössten Theiles stattfände; wenn nämlich die beiden von $\odot$ und von $\oplus$ aus genommenen Projectionen desselben Ringrandes sich auf der Kugel schneiden würden. Nun finden sich aber die extremen Werthe Θ , innerhalb welcher allein die ϑ solcher Punkte fallen, welche sich wirklich auf die Kugel projiciren, aus der für diese Schranken gegebenen Gleichung 6) wie folgt:

	Innerer Ringrand	Äusserer Ringrand
Rechnung für $\odot$	$\left\{ \begin{array}{l} 11^{\circ} 41'.7 \\ 82 \quad 9.3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 30^{\circ} 17'.5 \\ 63 \quad 33.5 \end{array} \right.$
Rechnung für $\oplus$	$\left\{ \begin{array}{l} 7 \quad 29.7 \\ 78 \quad 55.9 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 25 \quad 27.3 \\ 60 \quad 58.3. \end{array} \right.$

In keines dieser vier Intervalle der ϑ fällt Einer der beiden Werthe 90° oder 270° ; also existiren keine Durchschnitte unserer Curven, und es wird daher die südliche Grenze desjenigen Kugelstückes, welches kein Licht nach der Erde sendet, wirklich ganz (und nicht bloss dem grössten Theile nach) von der tellurischen Projection des inneren Ringrandes, und

welche nur vier Tage auseinanderfallen, zusammengekommen, wie dies für dieselben ebenso wie für die obengenannten schon aus Tabl. VI. ersichtlich ist. Die anderen wurden einzeln reducirt.

die nördliche ganz von der Schattenlinie des äusseren Ringrandes gebildet werden; also jede von beiden von Einer völlig continuirlichen Linie. Zugleich hat man für die Berechnung jeder dieser beiden Linien unseren Fall A, indem $\frac{R}{r} \sin \beta$ für beide Ringränder < 1 wird. (Der Logarithmus ist, bei der Rechnung für den inneren Ringrand, 9.81669 und für den äusseren 9.99784.) Folglich sind die äussersten Werthe von l , bis zu welchen man beide Linien zu verfolgen hat, diejenigen, welche die Grenzen des der Sonne und der Erde zugleich zugewendeten Kugelstückes bestimmen; für unseren Fall die Werthe $\odot - \frac{\pi}{2}$ und $\odot + \frac{\pi}{2}$, oder die Zahlen $-49^\circ 41'.4$ und $+126^\circ 36'.9$, welche um $\nu = 176^\circ 18'.3$ von einander entfernt sind. Wenn man für die mechanische Quadratur die siebente Gauss'sche Formel benützt,*) so erhält man die sieben zwischen jenen Grenzen einzuschaltenden Argumente so, wie sie in der ersten Zeile nachstehender Zusammenstellung aufgeführt sind; die zweite Zeile gibt die Werthe von b , welche an der Südgrenze des nicht leuchtenden Gürtels zu jenen l gehören, und die dritte diejenigen b , welche an der Nordgrenze dieser Zone denselben l entsprechen. Beide sind aus der Gleichung 5**) (mit der gehörigen Wahl des Zeichens vor der Wurzel) berechnet, und zwar, wie es nach dem soeben Gesagten sein musste, die Ersteren, indem die der Erde und dem inneren Ringrande entsprechenden Werthe der Constanten angewandt wurden, die Letzteren dagegen für Sonne und äusseren Ringrand.

Werthe von l		$-45^\circ 12'.2$	$-26^\circ 54'.3$	$+ 2^\circ 41'.2$	$+38^\circ 27'.75$	$+74^\circ 14'.3$	$+103^\circ 49'.8$	$+122^\circ 7'.7$
Werthe von b {	Südgrenze	84 44.8	81 37.1	72 1 0	60 1.2	52 47.5	50 22.9	49 57.8
	Nordgrenze	62 0.2	59 33.5	50 38.4	38 39.2	30 39.2	27 19.3	26 30.2

Unser Integral J wird, weil der verdeckte Kugeltheil wirklich gürtelförmig ist, die Differenz zweier durch mechanische Quadratur zu findenden Integrale, deren erstes berechnet wird, indem man mit jedem l das der Südgrenze entsprechende b verbindet, während bei dem zweiten das

*) Vgl. Comment. Societ. Gotting. recent. Vol. III. math. p. 39 ff.

b der Nordgrenze angewandt werden muss. Die sieben Glieder, aus welchen sich der approximative Werth des Einen und des anderen Integrales zusammensetzt, d. h. die sieben Werthe des Productes

$$\frac{4}{3} \frac{v}{180} K \cos(l - \odot) \cos(l - \ominus) \sin \frac{1}{2} b^4 (2 + \cos b)$$

(in welchem K den von Gauss mit R bezeichneten Quadraturcoefficienten vorstellt), finde ich wie folgt:

Südgrenze	Nordgrenze
0.00040 62	0.00016 36
0.01234 51	0.00481 01
0.04519 30	0.01443 97
0.04264 80	0.00909 66
0.01667 15	0.00228 78
0.00273 06	0.00028 34
0.00007 92	0.00000 75
Summe 0.12007 36	0.03108 87.

Demnach wird $J = 0.08898\ 49$. Den Logarithmus von Φ findet man, zu $v = 176^{\circ}.30$, aus unserer am Ende beigelegten Tafel $= 9.82302$; daher wird $\log(\Phi - J) = 9.76066$, und wenn man dazu noch die Reduction wegen elliptischer Gestalt legt (welche nach Gleichung 13) für unseren Fall sich ergibt $= 0.00407$), so erhält man den corrigirten Werth **9.76473**, sowie er in Col. 9 des Tabl. VI. (p. 22) sich eingetragen findet.

Um nunmehr auch die Quantität des Lichtes zu finden, welches vom Ringe aus nach der Erde geht, muss man zunächst die ϑ derjenigen Punkte aufstellen, in welchen die beiden Ringränder von der Grenze des Kugelschattens und von der Grenze der Kugelprojection geschnitten werden. Diese ϑ sind um 180° verschieden von denjenigen, welche schon oben, als die extremen Θ für die Berechnung der Curven auf der Kugel, angeführt wurden; man erhält daher folgende Zusammenstellung:

Vorausgehende Anse.)* Die Ellipse, welche die tellurische Pro-

*) Die bei der täglichen Bewegung vorausgehende Ring-Anse ist (weil unsere ϑ etc. recht-

jection der Kugel begrenzt, tritt am inneren Ringrande ein unter $\vartheta = 187^\circ 29'.7$ und am äusseren aus unter $\vartheta = 205^\circ 27'.3$; dagegen tritt die Ellipse, welche den Schlagschatten der Kugel begrenzt ein und aus unter grösseren ϑ , nämlich respective $191^\circ 41'.7$ und $210^\circ 17'.5$. Diese letzteren ϑ entsprechen also solchen Punkten der beiden Ringränder, welche für den Beobachter auf der Erde schon hinter der Kugel liegen; daher wird auf dieser Seite kein Schatten gesehen, sondern der Planetenball projecirt sich auf den erleuchteten Ring.

Nachfolgende Anse. An dieser Anse tritt die erste unserer beiden Ellipsen wieder von aussen her in den Ring unter $\vartheta = 240^\circ 58'.3$, und erreicht den inneren Rand unter $258^\circ 55'.9$. Dagegen beginnt die Ostgrenze des beschatteten Ringstückes am äusseren Rande erst unter $243^\circ 33'.5$ und endigt am inneren erst unter $262^\circ 9'.3$; sie liegt also überhaupt mehr östlich als die andere Linie, und folglich wird an dieser Anse der Beobachter die Kugel, soweit sie sich für ihn auf den Ring projecirt, noch von einem Schattenstreife begleitet sehen.

Man sieht schon hieraus, dass ein Durchschnitt der zwei Ellipsen, der eine physikalische Bedeutung hätte, nicht existirt. In der That ergibt sich, wenn man den geometrischen Durchschnitt aus unserer dafür aufgestellten Gleichung sucht, dass derselbe ausserhalb des materiellen Ringes fällt, nämlich an eine Stelle, welcher $\log \frac{R}{r} = 0.49391 > \log \frac{R_a}{r}$ entspricht.

Wir finden also, dass dasjenige Stück des Ringes, welches uns kein Licht sendet, und dessen innere Grenze der innere Ringrand bildet, nach aussen begrenzt ist wie folgt:

- a) Zwischen $\vartheta = 187^\circ 29'.7$ und $\vartheta = 205^\circ 27'.3$ von der Ellipse, welche die tellurische Projection der Kugel auf die Ringebene umsäumt.
- b) Zwischen $\vartheta = 205^\circ 27'.3$ und $\vartheta = 243^\circ 33'.5$ vom äusseren Ringrande.

läufig gezählt werden, und weil $w_\pm$ der Werth von ϑ ist, welcher der Richtung nach der Erde entspricht) diejenige von beiden, welcher die positiven Werthe von $\vartheta - w_\pm < 180^\circ$ entsprechen.

c) Zwischen $\vartheta = 243^{\circ} 33'.5$ und $\vartheta = 262^{\circ} 9'.3$ von der Ellipse, welche den Schlagschatten der Kugel bezeichnet.

Zerlegen wir uns also dieses Stück in Sektoren, so erhalten wir, wegen a) und c), zwei elliptische Sektoren; dazu dann zwei Kreissektoren, den Einen, vom Radius R_a , wegen b) und den Andern, vom Radius R_i und sich erstreckend von $\vartheta = 187^{\circ} 29'.7$ bis $262^{\circ} 9'.3$, welcher mit entgegengesetztem Zeichen aufzuführen ist, um die Theile der drei anderen Sektoren, welche innerhalb des inneren Ringrandes fallen, wieder zu compensiren. Die Grösse M in Gleichung 11) wird demnach für uns, wenn man Alles in Zahlen zusammenstellt, aus folgenden Theilen gebildet:

$$\begin{aligned} &+ 3.2642 \quad [\text{ist der Theil } 11^a] \\ &- 0.1906 \ 0 \quad [\text{Ellipt. Sect. a) Rechnung nach } 11^b \text{ für } \odot] \\ &- 0.6106 \ 1 \quad [\text{Kreis-Sect. b). Formel } 11^c] \\ &- 0.1980 \ 1 \quad [\text{Ellipt. Sect. c) Rechnung nach } 11^b \text{ für } \odot] \\ &+ 0.5196 \ 0 \quad [\text{Compensirender Kreis-Sector. Formel } 11^d] \end{aligned}$$

$$M = + 2.7845 \ 8 \text{ oder } \log M = 0.44476.$$

Legt man zu diesem Logarithmus noch die Correction wegen Ringpalte 9.97330 (s. ob.) und den Logarithmus des Productes $\sin H_{\odot} \sin H_{\frac{1}{2}}$, welcher ist 8.97253, so erhält man **9.39059**, welche Zahl (auf 4 Decimalen reducirt) sich in Columne 10. des Tableau's eingetragen findet. Setzt man endlich, bis auf bessere Bestimmung, $A' = A$, so erhält man für die ganze Lichtstärke des Planeten (Kugel und Ring) nach Gleichung 12) den Ausdruck

$$\log (II + II') = 9.91779 - \log (AA')^2 + \log r^2 + \log A,$$

wobei der Werth von $\log (AA')$ für jede der drei Beobachtungen besonders*) sich ergeben hat wie folgt:

No. 118 . . .	$\log AA' =$	1.96076
132 . . . „ „		1.96515
141 . . . „ „		1.96593

*) Auch die in Columne 13. aufgeführten Zenitdistanzen des Saturn sind für jede der drei Beobachtungen mit dem ihrem Momente entsprechenden geocentrischen Orte des Planeten berechnet.

(Vgl. Col. 11. des Tableau's). Es wird daher für die drei Beobachtungen der Reihe nach

$$\log (II + II') = \left\{ \begin{array}{l} 5.99627 \\ 5.98749 \\ 5.98593 \end{array} \right\} + \log r^2 + \log A$$

und endlich erhält man aus den Gleichungen 14) und 15) die

$$\text{Reduction auf mittlere } \odot \text{ ohne Ring} = \left\{ \begin{array}{l} 0.00521 \\ 0.01399 \\ 0.01555 \end{array} \right.$$

sowie dieselbe, auf vier Stellen abgekürzt, unter der betreffenden Ueberschrift in Columnne 7. der Zusammenstellung eingetragen ist. —

Man wird in Zukunft Veranlassung haben, unsere Theorie noch dadurch zu vervollständigen, dass in der Rechnung auch noch die Verstärkung aufgenommen wird, welche das Licht der Sonne auf dem Planeten durch den Widerschein vom Ringe her, und ihr Licht auf dem Ringe durch das vom Planetenballe daraufgeworfene Licht erhält. Es ist mir wahrscheinlich, dass die Vergrößerung der apparenten Helligkeit Saturns, welche von solchem doppelt reflectirten Lichte herrührt, sich den Messungen nicht entzieht; und vielleicht ist es ihr Einfluss, welcher uns für Saturn dormalen eine etwas grössere Albedo finden liess als für Jupiter und Venus. Aber für jetzt könnte ihr Betrag nicht numerisch ermittelt werden; denn es ist klar, dass derselbe den Ausdruck in 12) vergrössern würde um ein Glied mit dem Factor AA' , oder den Ausdruck in 15) um ein Glied, welches nicht mit dem Verhältnisse der Albedo des Ringes zu der des Sphäroids, sondern mit dem absoluten Werthe der ersteren multiplicirt wäre. Diesen absoluten Werth zu beurtheilen, fehlt uns gegenwärtig jeder Anhalt; man wird also das entsprechende Glied erst dann aufzustellen veranlasst sein, wenn entweder, durch zuverlässige Vergleichen mit dem directen Sonnenlichte, die Albedo Eines unserer Planeten (und hierdurch nach den Gleichungen §. 7. *E.* auch die der anderen) bekannt sein wird, oder wenn man glauben darf, in einer geraume Zeit

hindurch fortgesetzten Reihe der Saturnsbeobachtungen selbst ausreichendes Material zu besitzen, um aus ihrer Vergleichung unter sich auf den absoluten Werth der Albedo des Ringes zu schliessen, mit Hilfe deren alsdann auch die des Saturnsballes und die der anderen Planeten bekannt werden würde. Dieser Zeitpunkt ist noch nicht gekommen.

Tafel für den Lambert'schen Factor der Phase

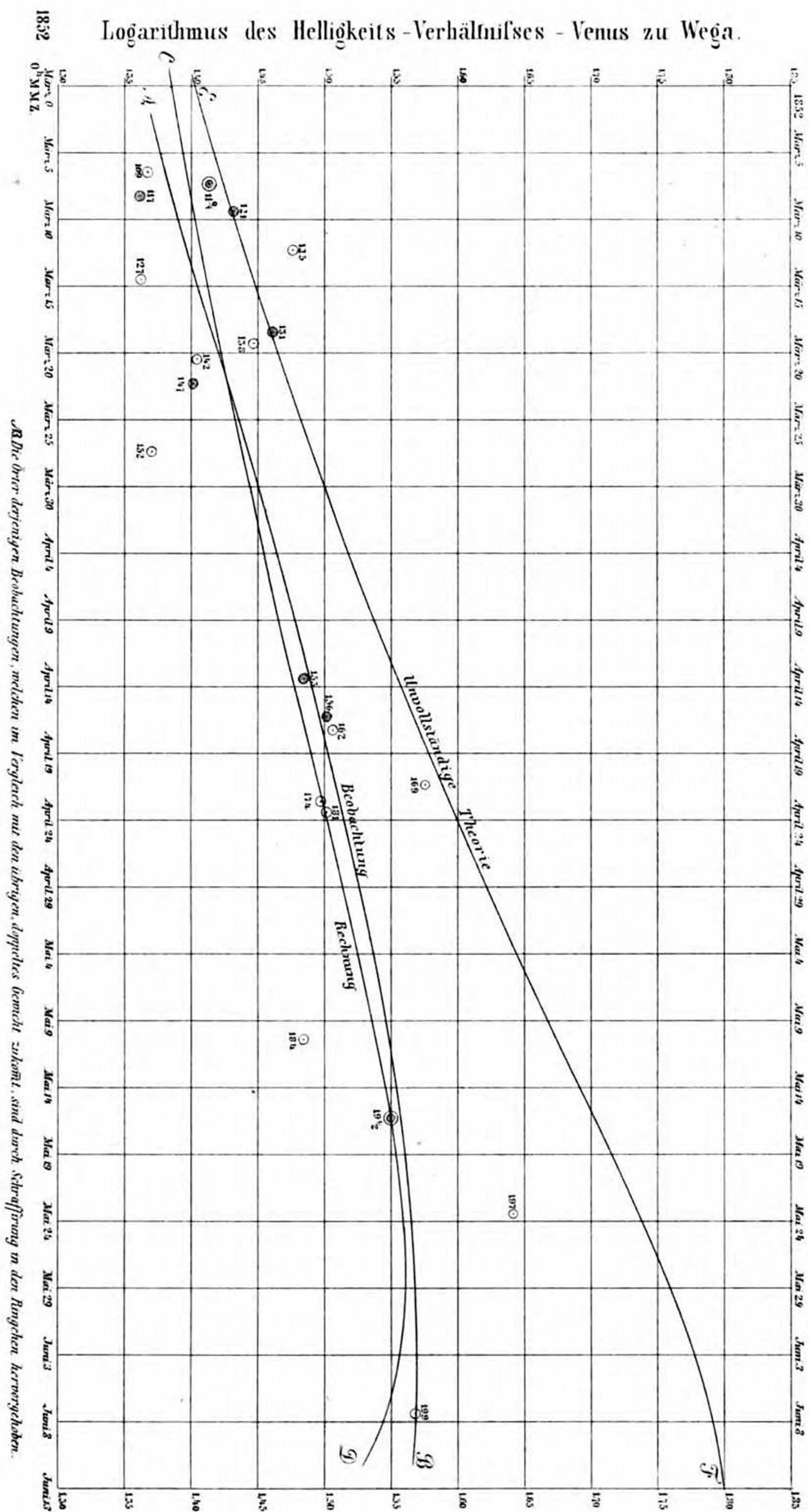
$$\Phi = \frac{2}{3\pi} (\sin v - v \cos v).$$

v	$\log \Phi$	Diff. I.	Diff. II.	Diff. III.	v	$\log \Phi$	Diff. I.	Diff. II.	Diff. III.
0 ⁰	*	*	*	*	30 ⁰	7.99468	+0.04191	-147	+9
1	3.57525	+ 0.90305	*	*	31	8.03659	0.04053	138	6
2	4.47830	0.52822	-37483	+ 22113	32	8.07712	0.03921	132	11
3	5.00652	0.37452	15370	6998	33	8.11633	0.03800	121	6
4	5.38104	0.29080	8372	3032	34	8.15433	0.03685	115	6
5	5.67184	0.23740	5340	1666	35	8.19118	0.03576	109	4
6	5.90924	0.20066	3674	986	36	8.22694	0.03471	105	8
7	6.10990	0.17378	2688	634	37	8.26165	0.03374	97	5
8	6.28368	0.15324	2054	433	38	8.29539	0.03282	92	2
9	6.43692	0.13703	1621	308	39	8.32821	0.03192	90	7
10	6.57395	0.12390	1313	228	40	8.36013	0.03109	83	2
11	6.69785	0.11305	1085	177	41	8.39122	0.03028	81	5
12	6.81090	0.10397	908	129	42	8.42150	0.02952	76	2
13	6.91487	0.09618	779	113	43	8.45102	0.02878	74	4
14	7.01105	0.08952	666	81	44	8.47980	0.02808	70	3
15	7.10057	0.08367	585	74	45	8.50788	0.02741	67	2
16	7.18424	0.07856	511	55	46	8.53529	0.02676	65	4
17	7.26280	0.07400	456	51	47	8.56205	0.02615	61	2
18	7.33680	0.06995	405	41	48	8.58820	0.02556	59	1
19	7.40675	0.06631	364	31	49	8.61376	0.02498	58	3
20	7.47306	0.06298	333	39	50	8.63874	0.02443	55	3
21	7.53608	0.06004	294	22	51	8.66317	0.02391	52	0
22	7.59612	0.05732	272	22	52	8.68708	0.02339	52	3
23	7.65344	0.05482	250	23	53	8.71047	0.02290	49	2
24	7.70826	0.05255	227	13	54	8.73337	0.02242	48	3
25	7.76081	0.05041	214	20	55	8.75579	0.02197	45	1
26	7.81122	0.04847	194	11	56	8.77776	0.02153	44	0
27	7.85969	0.04664	183	16	57	8.79929	0.02109	44	2
28	7.90633	0.04497	167	8	58	8.82038	0.02067	42	2
29	7.95130	0.04338	159	12	59	8.84105	0.02027	40	1
30 ⁰	7.99468		147		60 ⁰	8.86132		39	

v	$\log \Phi$	Diff. I.	Diff. II.	v	$\log \Phi$	Diff. I.	Diff. II.
60 ⁰	8.86132		-39	90 ⁰	9.32676	+1181	-19
61	8.88120	+1988	37	91	9.33857	1162	19
62	8.90071	1951	37	92	9.35019	1143	19
63	8.91985	1914	37	93	9.36162	1124	19
64	8.93862	1877	34	94	9.37286		17
		1843				1107	
65	8.95705		34	95	9.38393		18
66	8.97514	1809	33	96	9.39482	1089	18
67	8.99290	1776	32	97	9.40553	1071	17
68	9.01034	1744	31	98	9.41607	1054	17
69	9.02747	1713	31	99	9.42644	1037	17
		1682				1020	
70	9.04429		29	100	9.43664		17
71	9.06082	1653	29	101	9.44667	1003	16
72	9.07706	1624	28	102	9.45654	987	16
73	9.09302	1596	28	103	9.46625	971	16
74	9.10870	1568	26	104	9.47580	955	15
		1542				940	
75	9.12412		27	105	9.48520		16
76	9.13927	1515	25	106	9.49444	924	16
77	9.15417	1490	25	107	9.50352	908	15
78	9.16882	1465	25	108	9.51245	893	14
79	9.18322	1440	25	109	9.52124	879	15
		1415				864	
80	9.19737		23	110	9.52988		15
81	9.21129	1392	22	111	9.53837	849	14
82	9.22499	1370	23	112	9.54672	835	15
83	9.23846	1347	23	113	9.55492	820	13
84	9.25170	1324	22	114	9.56299	807	14
		1302				793	
85	9.26472		20	115	9.57092		13
86	9.27754	1282	21	116	9.57872	780	15
87	9.29015	1261	20	117	9.58637	765	13
88	9.30256	1241	21	118	9.59389	752	14
89	9.31476	1220	20	119	9.60127	738	13
		1200				725	
90 ⁰	9.32676		19	120 ⁰	9.60852		13

v	$\log \Phi$	Diff. I.	Diff. II.	v	$\log \Phi$	Diff. I.	Diff. II.
120 ⁰	9.60852			150 ⁰	9.76881		
121	9.61564	+712	-13	151	9.77234	+353	-11
122	9.62264	700	12	152	9.77575	341	12
123	9.62950	686	14	153	9.77905	330	11
124	9.63623	673	13	154	9.78224	319	11
			12			307	12
		661					
125	9.64284		13	155	9.78531		11
126	9.64932	648	13	156	9.78827	296	11
127	9.65567	635	12	157	9.79112	285	13
128	9.66190	623	12	158	9.79384	272	11
129	9.66801	611	13	159	9.79645	261	10
		598				251	
130	9.67399		12	160	9.79896		14
131	9.67985	586	12	161	9.80133	237	9
132	9.68559	574	12	162	9.80361	228	13
133	9.69121	562	12	163	9.80576	215	13
134	9.69671	550	12	164	9.80778	202	10
		538				192	
135	9.70209		12	165	9.80970		12
136	9.70735	526	11	166	9.81150	180	12
137	9.71250	515	13	167	9.81318	168	13
138	9.71752	502	10	168	9.81473	155	9
139	9.72244	492	14	169	9.81619	146	14
		478				132	
140	9.72722		10	170	9.81751		12
141	9.73190	468	11	171	9.81871	120	12
142	9.73647	457	13	172	9.81979	108	13
143	9.74091	444	11	173	9.82074	95	12
144	9.74524	433	12	174	9.82157	83	12
		421				71	
145	9.74945		11	175	9.82228		12
146	9.75355	410	11	176	9.82287	59	14
147	9.75754	399	12	177	9.82332	45	12
148	9.76141	387	11	178	9.82365	33	14
149	9.76517	376	12	179	9.82384	19	12
		364				7	
150 ⁰	9.76881		11	180 ⁰	9.82391		14

Zur Seidel's Abhandlung über die Lichtstärke der Planeten etc. (p. 39 ff.)



Druck von C. R. Schurich in München.