Abhandlungen
der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
XXVIII. Band, 7. Abhandlung

Flächenteilung mit kürzesten Grenzen

Von

Sebastian Finsterwalder

Vorgelegt am 5. Mai 1916

München 1916
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Einleitung.

Die Frage nach der Teilung einer Fläche durch ein System von Teilungslinien mit geringster Länge scheint bisher nicht eingehend erörtert worden zu sein, wie naheliegend sie auch auf den ersten Blick ist. Das ist schon daraus zu schließen, daß das wichtigste und überraschendste Ergebnis einer solchen Erörterung so gut wie unbekannt ist, obwohl es in den elementarsten Teilen der Geometrie seinen Platz finden könnte. Dieses Ergebnis geht dahin, daß die bei der Lösung der Frage auftretenden Teilungslinien nur in Ausnahmefällen kürzeste Linien sind und daß beispielsweise die Halbierung eines ebenen Dreiecks durch eine kürzeste Teilungslinie nicht mittels einer Geraden, sondern mittels eines Kreisbogens bewirkt wird. Ich beschäftige mich mit den einschlägigen Fragen seit etwa sieben Jahren, angeregt durch ein kartographisches Problem, nämlich die Oberfläche der Erdkugel so in eine gegebene Anzahl von Kartenblättern zu teilen, daß die Grenzlinien in ihrer Gesamtheit möglichst kurz ausfallen. Erst später bin ich zur gleichen Fragestellung in der Ebene und auf beliebige Flächen übergegangen. Das ganze Gebiet der Teilung mit kürzesten Grenzen ist so ausgedehnt und im Einzelnen verwickelt, daß eine Beschränkung bei der Behandlung dringend nötig ist. Ich habe sie darin gesucht, daß ich vorerst charakteristische Beispiele behandelte und an ihnen die Grundzüge einer allgemeinen Theorie klar zu machen suchte, ohne irgendwie die Forderung der Vollständigkeit der Aufzählung der möglichen Fälle oder die Strenge der Beweisführung zu stellen. Auch wenn solche Forderungen leichter zu erfüllen wären als im vorliegenden Falle, tut man gut die Tragweite der Fragestellung an Beispielen zu prüfen, ehe man an die Führung von Existenzbeweisen und ähnliches geht. Wenn dabei mechanische Analogien mehr als es bei dem rein geometrischen Charakter des Problems unbedingt nötig erscheint, herangezogen werden, so dürfte die Rechtfertigung hiefür in dem damit erzielten Gewinn an Anschaulichkeit zu finden sein. Im folgenden wird vielfach zwischen Teilungen mit kürzesten und solchen mit

allerkürzesten Grenzen unterschieden. Bei den ersteren ist der Vergleich nur in Bezug auf die Nachbarteilungen, bei den letzteren unbeschränkt gezogen. Den ersteren haftet mehr theoretisches, den letzteren mehr praktisches Interesse an.

1. Zweiteilung des Dreiecks und anderer ebener Figuren.

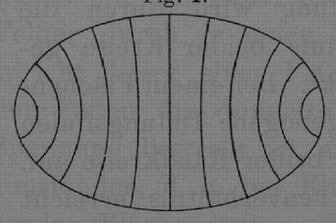
Um ein Dreieck in zwei Teile von gegebenem Verhältnis bei geringster Länge der Teilungslinie zu teilen, denken wir uns die Teilungslinie durch einen homogenen elastischen biegsamen Faden ersetzt, welcher zwei Punkte des Umfanges miteinander verbindet. Die Enden des Fadens können auf dem Umfang beliebig gleiten, was wir durch punktförmige Ösen, die keinen Reibungswiderstand an dem aus dünnem Draht hergestellten Dreiecksumfang finden sollen, bewirken wollen. Um nun durch diesen beweglichen Faden den vorgegebenen Teilungsinhalt abzugrenzen, denken wir uns denselben mit einer fast unzusammendrückbaren, elastischen Flüssigkeit von nur zwei Dimensionen gefüllt und diese solange vermehrt bis der vorgegebene Teilungsinhalt erreicht wird. Das ist nur unter Anwendung eines gewissen Flüssigkeitsdruckes möglich, welcher sowohl zu einer elastischen Dehnung des teilenden Fadens wie auch zu einer Durchbiegung desselben führt, wodurch schließlich ein stabiler Gleichgewichtszustand erreicht wird, in dem der gespannte Faden die gewünschte Fläche mit möglichst kurzer Länge abgrenzt. Aus den Eigenschaften dieses Gleichgewichtes können die geometrischen Bedingungen für die Teilungslinie leicht entnommen werden. Ist p der Flüssigkeitsdruck auf die Längeneinheit und S die Spannung des Fadens, so fordert das Gleichgewicht, daß an der beweglichen Teilungslinie überall $k \cdot S = p$ ist, wo k die Krümmung der Teilungslinie bedeutet. Bezeichnet man nämlich mit ds ein Linienelement dieser Linie, dem der Kontingenzwinkel $d\tau$ zugehört, so muß der im Gleichgewichtsfalle auf das Element senkrecht wirkende Druck $p\,ds$ von der entgegengesetzt gerichteten Resultante $S\,d\tau$ der an den Enden des Elements nach außen wirkenden Spannungen aufgehoben werden. Aus der Gleichung $p\,ds = S\,d\tau$ ergibt sich die obige Beziehung. Da p und S im Verlaufe des Fadens sich gleich bleiben, muß ein Gleiches auch mit der Krümmung k der Fall sein, woraus die Kreisform des Fadens folgt. Betrachten wir schließlich das Gleichgewicht an den Ösen, mit denen die Fadenenden an dem Dreiecksumfang aufsitzen, so ergibt sich, daß die letzte Fadentangente rechtwinklig zum Dreiecksumfang sein muß, weil nur in diesem Falle die in ihrer Richtung wirkende Spannung S keine Komponente in der Richtung des Dreiecksumfanges hat (neben jener senkrecht dazu), die eine Verschiebung des Fadenendes bewirken könnte. Hieraus ergibt sich der Satz:

Die kürzesten Zweiteilungslinien einer Dreiecksfläche sind Kreisbogen, welche auf dem Dreiecksumfang senkrecht aufsitzen, deren Mittelpunkt also entweder in einer Ecke oder auf dem Umfang des Dreiecks liegt.

Unter den möglichen kürzesten Teilungslinien eines Dreiecks ist die allerkürzeste offenbar ein Kreisbogen, der die spitzeste Ecke des Dreiecks zum Mittelpunkt hat und von ihr einen Sektor abschneidet, der dem kleineren Teil der zu teilenden Dreiecksfläche inhaltsgleich ist. Ist das Dreieck gleichschenklig mit Basiswinkel kleiner als 60^0, so gibt es zwei gleich lange symmetrisch gelegene allerkürzeste krumme Teilungslinien, aber niemals ist etwa die Höhe zur Basis eine solche. Im gleichseitigen Dreieck endlich gibt es drei symmetrische allerkürzeste Teilungslinien. Im Falle der Gleichteilung wird jede von ihnen 0,676 der Seitenlänge, während die kürzeste gerade Halbierungslinie parallel einer Seite 0,708 der Seitenlänge oder fast 5% länger als die entsprechende krumme Halbierungslinie ist.

Die kürzesten Zweiteilungslinien eines ebenen Bereichs vom Zusammenhang einer Kreisfläche werden durch die gleichen Schlüsse, die vorher für das Dreieck ausgeführt wurden, als Kreisbogen erkannt, die mit beiden Enden am Umfang des Bereiches senkrecht aufsitzen. Besonders einfach sind die kürzesten Zweiteilunglinien der Kreisfläche selbst; sie werden von den im Innern verlaufenden Bogen der Orthogonalkreise des Umfangs gebildet. Ihre Anzahl ist ∞^2 im Gegensatz zu den anders begrenzten Flächen, wo sie nur ∞^1 beträgt. Nur wenn dieser Umfang selbst kreisförmig ist oder aus kreisförmigen oder geradlinigen Stücken zusammengesetzt ist, gehen von einem Punkte desselben unendlich viele solche Teillinien aus, die einem Kreisbüschel mit zusammenfallenden Grundpunkten angehören. Wechselt jedoch die Krümmung des Umfanges stetig, so geht von einem Punkt desselben nur eine endliche Zahl von kürzesten Zweiteilungslinien aus. Zum Beispiele bei einer Ellipse sind die in der Figur 1 dargestellten zur langen Achse symmetrischen Kreisbogen solche Teilungslinien, unter denen die allerkürzesten enthalten sind, während eine andere Schar, die zur kurzen Achse symmetrisch liegt, keine allerkürzesten enthält. Durch jeden Punkt des Umfanges gehen hier zwei kürzeste Zweiteilungslinien, von welchen jene die allerkürzeste ist, die den Scheitel am Ende der langen Achse mit ihrer hohlen Seite einschließt. Es gibt keine Kreisbogen, welche mit den Enden senkrecht auf dem Ellipsenbogen aufsitzen und keinen Scheitel in ihrer hohlen Seite

Fig. 1.



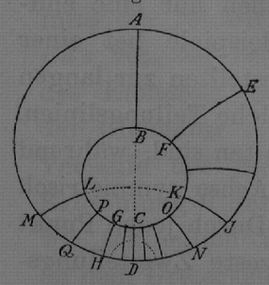
Zweiteilung der Ellipse.

einschließen. Es müßten sonst die beiden Endtangenten des Ellipsenbogens als Radien des betreffenden Teilungskreisbogens von den Berührpunkten bis zu ihrem Schnittpunkt gleich lang sein, was nicht der Fall ist. Die Punkte nämlich, von welchen aus gleich lange Tangenten an die Ellipse gehen und die als Mittelpunkte von Kreisbogen, die auf dem Ellipsenumfang senkrecht aufsitzen, in Betracht kommen können, liegen auf den Achsen außerhalb der Ellipse, falls man sich auf reelle Kreise beschränkt.

Bei einem nichtsymmetrischen Bereich werden die Verhältnisse verwickelter. Der geometrische Ort der Mittelpunkte der Zweiteilungskreisbogen, von denen aus je zwei gleichlange Tangenten an den Umfang der zu teilenden Fläche gehen, besteht hier aus einer Anzahl von Kurvenzweigen, die in den Krümmungsscheiteln auf dem Umfang aufsitzen. Die allerkürzesten Teilungslinien haben ihre Mittelpunkte auf dem Zweige, der zu dem stärkst gekrümmten Scheitel gehört.

Noch umständlicher wird die Sache bei Flächen von ringförmigem oder höherem Zusammenhang. Hier kommen sowohl einfache Zweiteilungslinien vor, die von einem Punkt des Außen- oder Innenrandes nach einem Punkt des gleichen Randes führen, wie auch Zweiteilungslinienpaare, die von einem Rand zum andern laufen. Außerdem gibt es noch gegabelte Zweiteilungslinien, die einen Punkt des innern mit zwei Punkten des äußeren Randes verbinden, deren Charakter im nächsten Abschnitt genauer untersucht wird. Die Zweiteilungslinien sind natürlich auch hier Kreisbögen und sitzen senkrecht auf den Rändern auf; diejenigen eines Paares haben außerdem gleiche Krümmung. Bei einer Kreisringfläche (Fig. 2), die von zwei Kreisen, von denen einer innerhalb des andern gelegen ist, begrenzt wird, setzen sich die Zweiteilungslinienpaare aus Bögen der Kreise des den Umfangkreisen gemeinsamen Orthogonalkreisbüschels zusammen. Die Verteilung der allerkürzesten Zweiteilungslinien für die verschiedenen Flächenteilungsverhältnisse ist dabei folgende. Die allerkürzeste Gleichteilung wird durch die beiden geraden, in der Symmetrielinie beider Kreise gelegenen Teilungslinien AB, CD bewirkt. Bei einem Flächenverhältnis nahe an Eins treten zwei gebogene Teilungslinien EF, GH desselben Orthogonalkreises beider Randkreise auf. Das dauert so lange bis jenes Flächenverhältnis erreicht wird, das von dem Teilungslinienpaar IK, LM abgegrenzt wird, das auf dem kleinsten gemeinsamen Orthogonalkreis gelegen ist. Für extremere Flächenverhältnisse treten nun allerkleinste Teilungslinienpaare auf,

Fig. 2.



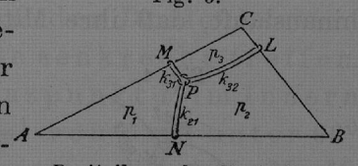
Zweiteilung des Kreisrings.

die nicht mehr ein und demselben, sondern zwei verschiedenen symmetrisch zur Zentrale der Randkreise gelegenen gemeinsamen Orthogonalkreisen angehören wie *NO*, *PQ*. Schließlich rücken diese so nahe zusammen, daß die kleinere Fläche günstiger durch einen Orthogonalkreis des äußeren Randkreises abgetrennt wird, der auch für noch extremere Flächenteilungsverhältnisse bis zu $1 : \infty$ herab der günstigste bleibt.

2. Die Dreiteilung des geradlinigen Dreiecks.

Bei der Dreiteilung einer Figur können die drei Teile hintereinander liegen, so daß der erste an den zweiten, der zweite an den dritten, dieser aber nicht mehr an den ersten grenzt. Sie können aber auch so liegen, daß jeder Teil an jeden andern grenzt und das ist insbesondere dann der Fall, wenn ein gemeinsamer Grenzpunkt aller drei Teile vorhanden ist, an welchem drei Teilungslinien zusammentreffen. Diesen letzteren Fall wollen wir für das Dreieck ins Auge fassen und außerdem noch annehmen, daß die drei Teilungslinien vom gemeinsamen Grenzpunkt *P* nach den drei verschiedenen Seiten des Dreiecks hinlaufen. Um die Form der kürzesten Teilungslinien für diesen Fall zu erhalten, denken wir uns folgendes Gedankenexperiment ausgeführt (Fig. 3). Der Dreiecksumfang *ABC* sei wieder aus starrem Draht hergestellt. Wir betrachten nun einen in sich geschlossenen, homogenen, elastischen, reibungslosen Faden, der bei *LMN* um die drei Dreiecksseiten geschlungen ist und in der Mitte bei *P* dreimal durch eine kleine Öse geht, wie das in der Figur 3 angedeutet ist. Nun füllt man die drei entstandenen Felder mit der zweidimensialen fast unzusammendrückbaren Flüssigkeit, so daß jedes Feld, das seinem Teilungsverhältnis entsprechende Quantum erhält, was durch Regulierung des Druckes in den drei Feldern ermöglicht wird. Stellt sich hiebei ein elastischer Gleichgewichtszustand ein, bei welchem die benachbarten Felder durch je einen Doppelfaden gegeneinander abgegrenzt sind, so entspricht dieser einer Flächenteilung mit kürzesten Teilungslinien, da offenbar der Faden die doppelte Länge der Teilungslinien annimmt und infolge der Spannung bestrebt ist, sich soweit zu verkürzen als es unter den obwaltenden Umständen, d. h. bei Einhaltung der vorgeschriebenen Größen der abzugrenzenden Flächenräume, die durch die eingeschlossenen Flüssigkeitsmengen gegeben sind, möglich ist.

Fig. 3.

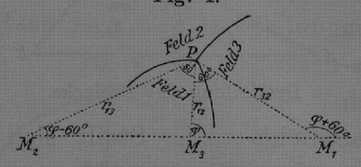


Dreiteilung des Dreiecks.

Aus den mechanischen Bedingungen des Gleichgewichts lassen sich auch hier die geometrischen für die Dreiteilung mit kürzesten Grenzen ermitteln.

Zuerst ist zu bemerken, daß die Spannung in dem in sich zurücklaufenden reibungslosen Faden, an dem nur Druckkräfte senkrecht zu seiner Richtung angreifen, überall gleich sein muß; wir bezeichnen sie mit $^1/_2\ S$. Die Spannung des Doppelfadens, der die Grenze zweier Felder bildet, ist dann S. Nennen wir die Drucke in den drei Feldern p_1, p_2, p_3, so wirken auf die Grenzen die Differenzen von je zweien derselben. Die Krümmung einer Grenzlinie, welche das Feld 1 gegen das Feld 2 abgrenzt, werde mit k_{12} bezeichnet und positiv gezählt, wenn sie dem Feld 1 die hohle Seite zukehrt. k_{21} ist dann der entgegengesetzte Wert von k_{12} und bezieht sich auf die Abgrenzung des Feldes 2 gegen das Feld 1. Es besteht dann wieder die Beziehung: $k_{12}\,S = p_1 - p_2$, sowie die entsprechenden für die beiden anderen Grenzlinien $k_{23}\,S = p_2 - p_3$, $k_{31}\,S = p_3 - p_1$. Jede der drei Teilungslinien ist ein Kreis, aber die Radien der drei Kreise sind verschieden. Im gemeinsamen Grenzpunkte P erfordert das Gleichgewicht der drei gleichen Spannungen S in den Doppelfäden, daß die Winkel der Grenzlinien gegeneinander gleich und infolgedessen jeder gleich 120^0 seien. An den Dreieckseiten sitzen die Teilungslinien in L, M, N senkrecht auf, woraus folgt, daß die Kreisbogen ihre Mittelpunkte auf den betreffenden Dreiecksseiten haben. Aus den Formeln für die Krümmungen der drei im gemeinsamen Grenzpunkt P zusammenstoßenden Kreisbögen folgt: $k_{12} + k_{23} + k_{31} = 0$. Im Zusammenhang mit der Forderung, daß sich die drei Bögen unter 120^0 treffen sollen, bedeutet das aber, daß die drei Kreisbogen einem Büschel angehören oder, was auf das Gleiche hinausläuft, daß ihre Mittelpunkte auf einer Geraden liegen.

Fig. 4.



Krümmungsbedingung in einer Ecke.

Wir wollen zuerst zeigen, daß die Bedingung $k_{12} + k_{23} + k_{31} = 0$ für drei unter 120^0 sich treffende Kreise eines Büschels erfüllt ist. Die Umkehrung ergibt sich daraus auf einfachste Weise. M_1, M_2, M_3 seien die Mittelpunkte der in P zusammentreffenden Teilungskreise. Die Radien schließen in P Winkel von 60^0 ein.

Es bestehen dann die Beziehungen in den Dreiecken M_1PM_3 und M_2PM_3:

$$r_{32} = \frac{r_{12}\sin\varphi}{\sin(\varphi+60^0)} \qquad \text{und:} \qquad r_{13} = \frac{r_{12}\sin\varphi}{\sin(\varphi-60^0)},$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{r_{32}} = \frac{\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi}{r_{12}\sin\varphi} \qquad \text{und:} \qquad \frac{1}{r_{13}} = \frac{\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi}{r_{12}\sin\varphi}.$$

Durch Addition folgt: $\frac{1}{r_{32}} + \frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{r_{12}}$, was der Beziehung: $k_{32} + k_{13} = k_{12}$ oder: $k_{12} + k_{23} + k_{31} = 0$ entspricht. Läge unter Voraussetzung von: $k_{12} + k_{23} + k_{31} = 0$ der Punkt M_2 mit M_1 und M_3 nicht auf einer Geraden, sondern ein Punkt M' auf der durch den Winkel von 60^0 schon bestimmten Linie PM', so würde auch für ihn die soeben abgeleitete Beziehung gelten und dann PM' den Wert r_{32} annehmen, der aus ihr folgt. M' muß also mit M_2 zusammenfallen, sobald die Beziehung besteht.

Nachdem wir gesehen haben, daß die drei Kreismittelpunkte der Teilungslinien, die auf den Dreiecksseiten liegen, außerdem in einer Geraden liegen, können wir folgendes Verfahren zur Auffindung einer kürzesten Dreiteilung eines Dreiecks (mit noch unbekanntem Teilungsverhältnis) angeben:

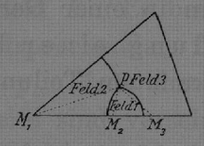
Man zieht eine beliebige Transversale durch das Dreieck und bezeichnet die Schnittpunkte mit den Seiten mit M_1 M_2 M_3. Man sucht jetzt durch Rückwärtseinschneiden einen Punkt P so, daß die drei Geraden, die von P nach M_1, M_2 und M_3 gehen, ein Büschel mit 60^0 Winckel zwischen je zwei Geraden bilden, was auf doppelte Art möglich ist. Der so bestimmte Punkt P kann nun gemeinsamer Grenzpunkt einer Dreiteilung sein, falls er im Innern des Dreiecks liegt und die drei Kreisbogen mit den Mittelpunkten M_1 M_2 M_3, die von ihm unter 120^0 Neigung gegeneinander ausgehen, im Innern des Dreiecks verlaufen, bis sie die zugehörige Dreiecksseite senkrecht treffen.

Oder: Man wählt den gemeinsamen Grenzpunkt P im Innern des Dreiecks und dreht um ihn ein Büschel von drei unter 60^0 geneigten Geraden so lange bis ihre Schnittpunkte M_1 M_2 M_3 mit den Dreiecksseiten auf einer Geraden liegen. Diese Schnittpunkte sind dann Mittelpunkte der von P ausgehenden kreisförmigen Teilungslinien. Eine wirkliche Dreiteilung des Dreiecks mit kürzesten Grenzen kommt aber auch hier wieder erst dann zustande, wenn die Kreisbogen von P bis zu ihrem senkrechten Aufsitzen auf der zugehörigen Dreiecksseite ganz im Innern des Dreiecks verlaufen.

Ist letztere Bedingung nicht erfüllbar, so gibt es mit dem gegebenen Teilungspunkt keine kürzeste Teilung, deren Grenzen auf den drei verschiedenen Dreiecksseiten aufsitzen. Wohl aber kann eine solche Teilung von P aus so vor sich gehen, daß zwei Teilbögen auf der gleichen Dreiecksseite

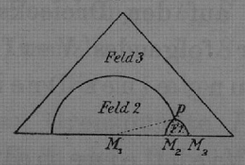
aufsitzen und der dritte auf einer der beiden andern, wobei dann einer der Bogenmittelpunkte in eine Ecke und die beiden andern auf eine ausstoßende Seite fallen (Fig. 5). Ja es ist auch der Fall möglich, daß die drei von P ausgehenden Kreisbogen ihre Mittelpunkte auf der gleichen Dreiecksseite haben, auf der sie auch senkrecht aufsitzen. Zu einem solchen Grenzpunkt, der in der Nähe einer Seite, aber fern von deren Ecken gelegen sein muß, sind dann unendlich viele kürzeste Teilungen (mit verschiedenem Verhältnis der abzuteilenden Flächen) möglich (Fig. 6).

Fig. 5.



Dreiecksteilung.
Zwei Kreise senkrecht zu einer Seite.

Fig. 6.



Dreiecksteilung.
Drei Kreise senkrecht zu einer Seite.

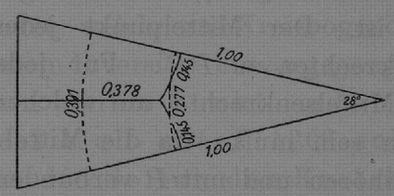
Eine ganz merkwürdige Ausnahmestellung bei der Dreiteilung mit kürzesten Grenzen genießt das gleichseitige Dreieck. Hier läßt nicht nur jeder Punkt im Innern als gemeinsamer Grenzpunkt eine kürzeste Dreiteilung, deren Grenzlinien nach den drei verschiedenen Dreiecksseiten laufen, zu, es sind auch noch diese Grenzlinien stets gerade, aber nicht jedes vorgeschriebene Teilverhältnis kann durch solche gerade Grenzlinien erzielt werden. Man kann offenbar nicht zwei von den drei Teilstücken beliebig klein gegen das dritte machen. Für solche Teilverhältnisse treten dann die in Figur 5 und 6 gekennzeichneten Teilungsarten ein.

Die Beantwortung der Frage nach der allerkürzesten Dreiteilung eines Dreiecks in gegebenem Verhältnis ist nach dem Vorausgehenden augenscheinlich sehr verwickelt. Man muß nicht nur für die zahlreichen möglichen Klassen der Dreiteilung untersuchen, ob einer oder mehrere Fälle mit dem gegebenen Teilverhältnis darunter sind, man muß auch für jeden solchen Fall die Grenzlänge bestimmen und den mit der kürzesten daraus aussuchen. Die Aussonderung eines Falles von gegebenem Teilungsverhältnis aus einer Klasse erfordert die Lösung von zwei transzendenten Gleichungen mit zwei Unbekannten (den Koordinaten des Grenzpunktes), welche ausdrücken, daß zwei von den drei Feldern gegebene Flächeninhalte haben.

Um doch einiges Material zur Frage nach der allerkürzesten Dreiteilung eines Dreiecks beizubringen, habe ich einige Fälle der Gleichteilung untersucht, und zwar solche, bei welchen die allerkürzeste Teilung von einer Klasse

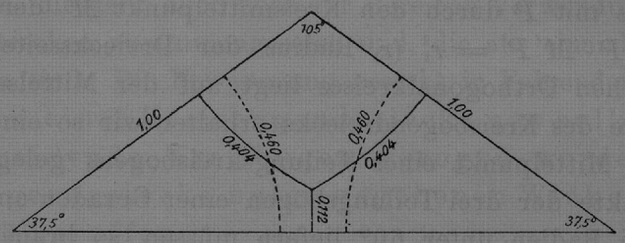
zur andern übergeht. In solchen Übergangsfällen gibt es zwei gleiche allerkürzeste Teilungen verschiedener Klassen. Wählen wir der Einfachheit halber das Dreieck gleichschenklig mit einem kleinen Winkel an der Spitze, so ist die allerkürzeste Teilung in drei gleiche Teile durch zwei konzentrische, um die Spitze als Mittelpunkt geschlagene Kreisbogen gegeben, welche ein Drittel bzw. zwei Drittel der Dreiecksfläche abgrenzen. Wächst der kleine Winkel an der Spitze bis 28^0, so tritt eine symmetrische Dreiteilung mit einem gemeinsamen Grenzpunkt auf der Winkelhalbierenden in Konkurrenz und beiderlei Dreiteilungen haben dann die gleiche Länge der Teilungslinien = 0,668 der Schenkellänge (Fig. 7). Geht man umgekehrt von einem gleichschenkligen Dreieck mit ganz stumpfen Winkel an der Spitze aus, so wird dessen allerkürzeste Dreiteilung durch zwei Kreisbogen bewirkt, die ihre Mittelpunkte an den Enden der Basis haben. Verringert sich der stumpfe Winkel auf 105^0, so gibt es wieder eine gleichlange Dreiteilung mit gemeinsamem Grenzpunkt auf der Winkelhalbierungslinie; in beiden Fällen ist die Länge der Teilungslinie 0,920 der Schenkellänge (Fig. 8).

Fig. 7.



Übergang zweier kürzester Dreiteilungen beim spitzwinklig-gleichschenkligem Dreieck.
Radius der ausgezogenen Teilung 0,591.

Fig. 8.



Übergang zweier kürzester Dreiteilungen beim stumpfwinklig gleichschenkligen Dreieck.
Radius der ausgezogenen Teilung 1,030.

3. Die Dreiteilung des ebenen Kreisbogendreiecks.

Unterwirft man die Figur eines mit kürzesten Grenzen geteilten geradlinigen Dreiecks einer Inversion (Transformation mittels reziproker Radien), so entsteht aus dem Dreieck ein besonderes Kreisbogendreieck. Die wesentlichen geometrischen Eigenschaften der Teilungslinien, wie: Gleichheit der Krümmung innerhalb einer Teilstrecke, rechtwinkliges Aufsitzen auf dem Rande der zu teilenden Fläche, Gabelung der Teillinien an einem gemeinsamen Grenzpunkt unter 120^0 und die Zugehörigkeit der sich gabelnden Teilungslinien zu einem Kreisbüschel bleiben sämtlich erhalten, so daß die transformierten Teilungslinien des geradlinigen Dreiecks ein System von kürzesten Teilungslinien des transformierten Kreisbogendreiecks bilden. Verändert

wird allerdings das Teilungsverhältnis und die Drucke p_1 p_2 p_3, die den einzelnen Feldern zuzuweisen sind, desgleichen auch die Radien der teilenden Kreisbögen, nicht aber die Eigenschaft, daß die Summe der Krümmungen der im gemeinsamen Grenzpunkt zusammenlaufenden Bögen gleich Null ist, da diese eine Folge der bei der Inversion invariant bleibenden Büscheleigenschaft ist. Die Eigenschaft einer Dreiteilung allerkürzeste zu sein bleibt bei der Inversion im allgemeinen nicht erhalten.

Es liege nun ein allgemeines Kreisbogendreieck vor, das von einem gemeinsamen Grenzpunkt P aus durch kürzeste Teilungslinien nach einem erst hinterher sich ergebenden Flächenverhältnis geteilt werden soll, so besteht die Aufgabe darin, ein passendes Büschel aus drei unter 120^0 sich schneidenden Kreisen um den Punkt P so zu drehen, daß die Kreise des Büschels senkrecht auf dem Umfang des Kreisbogendreiecks aufsitzen. Diese Aufgabe kann auf doppelte Weise gelöst werden:

1. durch Zurückführung auf die entsprechende Aufgabe für ein ebenes Dreieck. Jeder Kreis, der durch P geht und eine Seite des Kreisbogendreiecks senkrecht schneidet, geht auch durch einen Punkt P', dessen Verbindungslinie mit P durch den Kreismittelpunkt M' der Dreiecksseite geht und wobei $M'P \cdot M'P' = r_1^2$ (r_1 Radius der Dreiecksseite) ist. Der Mittelpunkt jedes solchen Orthogonalkreises liegt auf der Mittelsenkrechten zu PP'. Für jede Seite des Kreisbogendreiecks erhalten wir so eine Mittelsenkrechte, auf welcher der Mittelpunkt eines Teilungskreisbogens gelegen sein muß. Da die Mittelpunkte der drei Teilungsbögen einer Geraden angehören und mit P verbunden drei Radien unter 60^0 liefern müssen, so braucht man nur um P ein Büschel von drei unter 60^0 geneigten Strahlen so lange zu drehen, bis deren Schnittpunkte mit den drei Mittelsenkrechten auf eine Gerade zu liegen kommen. Diese Schnittpunkte sind die Mittelpunkte der Teilkreisbögen, die allerdings nur dann eine brauchbare Lösung der Teilungsaufgabe liefern, wenn sie innerhalb des zu teilenden Kreisbogendreiecks verlaufen.

2. Durch Inversion. Man wählt P als Inversionszentrum, wodurch die zu suchenden Teilungslinien in Gerade übergehen, die auf den invertierten Kreisbogendreieckseiten senkrecht stehen, also durch deren Mittelpunkte gehen müssen. Man schneidet nach diesen drei Mittelpunkten einen Punkt P' mittels dreier unter 120^0 geneigter Linien rückwärts ein und transformiert diese drei Linien zurück, welche dann Kreise durch das Inversionszentrum P von der gewünschten Eigenschaft der Teilungskreise geben.

Bemerkung: Die Methode der Inversion gibt auch eine Möglichkeit die kürzeste Dreiteilung einer beliebig begrenzten ebenen Figur

bei gegebenem gemeinsamen Grenzpunkt zu finden. Man transformiert die Figur vom Grenzpunkt P als Inversionszentrum aus. Die Teilungslinien gehen dabei in drei unter 120^0 sich schneidende Gerade über, die auf dem Umfang der transformierten Figur senkrecht aufsitzen müssen. Konstruiert man die Evolute dieser transformierten Figur, so kann man an diese Evolute das Büschel der drei unter 120^0 sich schneidenden Geraden so anlegen, daß die Geraden Tangenten werden. Werden sie in dieser Lage zurücktransformiert, so liefern sie drei Teilungslinien durch P, die allerdings, um brauchbar zu sein, noch die Bedingung erfüllen müssen, von P bis zum senkrechten Aufsitzen innerhalb des zu teilenden Bereiches zu verlaufen.

Zu den Kreisbogendreiecken, die nach der soeben angegebenen Methode dreigeteilt werden können, gehören insbesondere auch die Kreissektoren, bei welchen zwei Seiten geradlinig und zwei Winkel gleich einem Rechten sind. Durch Aneinanderlegen solcher Sektoren mit passenden Zentriwinkeln entstehen Kreise, und wenn man symmetrische Wiederholungen der Teilungen solcher Sektoren zu einer Vielteilung des Kreises mit kürzesten Grenzen benützen will, so bedarf es einer Erweiterung der eben behandelten Dreiteilungsaufgabe von Kreisbogendreiecken, die dann auch noch für Bereiche Verwendung findet, welche aus Kreisbogendreiecken zusammengesetzt sind, die aus einander durch Inversion hervorgegangen sind. Die Erweiterung besteht in Folgendem: Von einem Punkt im Innern eines Kreisbogendreiecks aus sollen drei sich unter 120^0 schneidende Kreisbogen gezogen werden, die die Seiten des Kreisbogendreiecks unter gegebenen Winkeln (später meist 60^0, 90^0 oder 120^0) treffen.

Wir gehen von dem bekannten Satz aus, daß alle Kreise K durch einen Punkt P, die einen gegebenen Kreis K' unter konstantem Winkel φ oder $180^0 - \varphi$ schneiden, einen Kreis K'' berühren und ihre Mittelpunkte auf einer Hyperbel haben. In der Tat denken wir uns von P aus die entstehende Figur durch Inversion transformiert, so werden die Kreise K zu Geraden, die den Kreis K_1', der durch Inversion aus K' entstanden ist, unter dem Winkel φ schneiden und infolgedessen einen zu K_1' konzentrischen Kreis K_1'' berühren, welcher durch Rückinversion wieder in K'' übergeht. Daß die Mittelpunkte aller Kreise durch P, die K'' berühren, auf einer Hyperbel liegen, ist ohne weiteres einzusehen. Ihre Asymptoten stehen senkrecht zu den Tangenten, die von P an K'' gehen und die Enden der reellen Achse werden von den Halbierungspunkten der Strecken von P nach dem nächsten und fernsten Punkt von K'' gebildet.

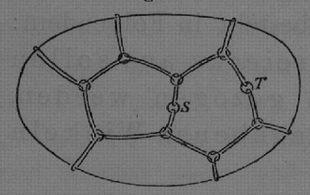
Hiernach kann die erweiterte Teilungsaufgabe des Kreisbogendreiecks

folgende Lösung finden. Man konstruiert die zum gemeinsamen Teilungspunkt P und zu jeder Seite des Dreiecks gehörige Hyperbel und dreht dann um P ein Büschel von drei unter 60^0 geneigten Geraden solange, bis die drei Schnittpunkte von je einer der Geraden des Büschels mit einer der Hyperbeln wieder auf einer Geraden liegen. Diese Schnittpunkte sind die Mittelpunkte der drei durch P gehenden Teilungskreise. Für den Winkel $\varphi = 90^0$ artet die entsprechende Hyperbel in eine Gerade aus.

4. Die Vielteilung ebener Bereiche.

Es soll nunmehr ein ebenes Flächenstück in eine Vielzahl von Teilen mit gegebenem Flächenverhältnis nnd kürzesten Teilungslinien geteilt werden. Um die geometrischen Eigenschaften des Netzes der Teilungslinien zu übersehen, bedienen wir uns wieder des mechanischen Bildes. Wir wollen annehmen, wir wüßten bereits die Anordnung der einzelnen Felder und die Zahl ihrer Ecken und Seiten. Wir nehmen außerdem an, daß in jeder gemeinsamen Ecke nur drei Felder zusammenstoßen und von ihr also auch nur drei Teilungslinien ausgehen. Das soweit entworfene Netz von Teilungslinien denken wir uns nun durch Schnitte derart zerlegt, daß keine geschlossenen Netzmaschen mehr vorkommen und das Liniensystem nur mehr verzweigt, aber nirgends mehr doppelt zusammenhängend ist. Mann kann dann von einem Punkt des Liniensystems nur mehr auf einem Wege nach irgend einem andern gelangen (In der Figur 9 sind dazu zwei Schnitte, z. B. bei S und T nötig). Wege auf der gleichen Linie, hin und zurück, gelten dabei als nicht gemacht. Nunmehr wird das Liniensystem mit einem in sich geschlossenen, homogenen, elastischen Faden doppelt umgeben. Dort, wo der Faden an die Randlinie des Flächenstückes kommt, sei er um diese, die wir uns wieder aus glattem Draht hergestellt denken, geschlungen. An den Teilungspunkten werden die drei dort vorbeilaufenden Fadenteile durch einen Ring zusammengehalten und ebenso an den früheren Schnittstellen, wo die beiderseitigen Schleifen durch einen Ring laufen sollen (Fig. 9 bei S und T). Nunmehr werden die Felder mit der ihnen zukommenden Menge fast unzusammendrückbarer, zweidimensionaler Flüssigkeit gefüllt, wobei sich die von je zwei unendlich nahen Fäden gebildeten Feldgrenzen unter der Einwirkung des Flüssigkeitsdruckes und der Fadenspannung verschieben. Tritt ein elastischer Gleichgewichtszustand ein, bei welchem die Feldgrenzen die ursprünglich angenom-

Fig. 9.



Vielteilung eines Bereiches.

mene Einteilung, was Anordnung, Ecken- und Seitenzahl betrifft, beibehalten, so ist bei dieser Art von Einteilung ein kürzestes Teilliniennetz möglich und wird durch den gespannten Doppelfaden gegeben. Hätte die Art der Einteilung kein kürzestes Teilliniennetz zugelassen, so hätte sich das bei dem Gedankenexperiment dadurch verraten, daß zwei von den Ringen, die im Entwurf getrennten Eckpunkten angehörten, zusammenrücken und von dem vereinten Endpunkt vier Teile ausgehen. Dieser Netzform würde aber in der Regel keine geringste Netzlänge entsprechen, vielmehr ist zu erwarten, daß eine benachbarte Netzform, bei der die zusammengerückten Ecken unter Bildung einer neuen Seite in anderer Richtung wieder auseinanderrücken, ein günstigeres Ergebnis in Bezug auf kleinste Länge liefert. Die experimentelle Aufsuchung dieser Form hätte allerdings eine neue Art der Verknüpfung des elastischen Fadens zur Voraussetzung.

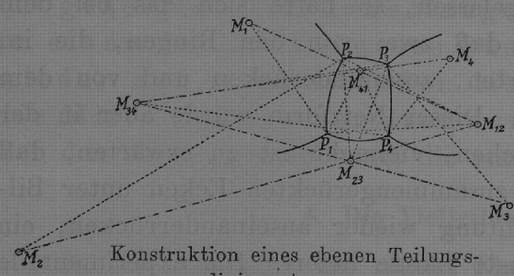
Nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes herrscht in den verschiedenen Feldern verschiedener Flüssigkeitsdruck p. Dagegen ist die Spannung des einzelnen Fadens überall konstant $\frac{1}{2} S$ und die des Doppelfadens S. Die Krümmung jeder Teilungslinie zwischen zwei Eckpunkten ist konstant: $k_{nm} = \frac{p_n - p_m}{S}$, wo p_n und p_m die Drucke in den beiden durch sie geschiedenen Feldern bedeuten. Die Teilungslinien sind also Kreisbogen. Die Summe der Krümmungen der drei Teilungslinien, die von einer Ecke ausgehen, ist wieder gleich Null. Die Winkel der Teilungslinien in einem Eckpunkt sind gleich und gleich 120^0. Am Umfang der zu teilenden Fläche sitzen die Teilungslinien senkrecht auf. Die Punkte S und T spielen in der geometrischen Form des Teilungsliniennetzes keine ausgezeichnete Rolle.

Jedes Teilliniennetz, das aus Kreisbogen besteht, die in den Eckpunkten zu dreien unter 120^0 sich treffen, deren algebraische Krümmungssumme für jeden Eckpunkt Null ist und die auf dem Umfang der zu teilende Fläche senkrecht aufsitzen, hat in Bezug auf die Nachbarformen kürzeste Länge.

An die soeben ausgesprochene Erkenntnis der geometrischen Eigenschaften eines Teilungsliniennetzes von kürzester Länge knüpfen sich naturgemäß eine Reihe von Aufgaben. Die nächstliegende ist wohl die ein solches Teilliniennetz konstruieren und zwar zunächst ohne Rücksicht auf das Verhältnis der Teilflächen und den Umfang des zu teilenden Gebietes. Man konstruiert zuerst eine Netzmasche, das heißt ein Vieleck aus Kreisbogen, die unter Winkeln von 120^0 aneinanderstoßen. Dies geschieht für ein Viereck folgendermaßen (Fig. 10). Es werden die Ecken mit P_1, P_2, P_3, P_4 und die Krümmungsmittel-

punkte der Seiten mit M_{12}, M_{23}, M_{34}, M_{41} bezeichnet. Man geht von P_1 aus, wählt M_{12} beliebig und auf dem zugehörigen Kreisbogen ebenso P_2. Für M_{23} ist nun schon ein geometrischer Ort vorhanden, nämlich eine der beiden Geraden durch P_2, die mit $M_{12}\,P_2$ Winkel von 60^0 einschließen. Wird M_{23} auf diesem Ort beliebig gewählt, so kann man P_3 auf dem zugehörigen Kreisbogen durch P_2 annehmen und erhält einen Ort für M_{34} in einer der beiden Geraden durch P_3, die mit $M_{23}\,P_3$ Winkel von 60^0 einschließen. Nach entsprechender Wahl von M_{34} auf diesem Ort ist M_{41} und damit P_4 bestimmt. Für M_{41} liegt als geometrischer Ort bereits ein Geradenpaar durch P_1 vor, welches mit $M_{12}\,P_1$ 60^0 einschließt. Auf ihm hat man M_{41} so zu wählen, daß der durch P_1 gehende Kreis mit dem Kreis um $P\,M_{34}$ durch P_3 den Winkel von 120^0 einschließt. Diese Kreise schneiden sich dann in P_4. Alle durch P_1 gehenden Kreise, deren Mittelpunkte M_{41} auf einer Geraden durch P_1 liegen, bilden ein Büschel mit zusammenfallenden Grundpunkten, das bei jeder Inversion um P_1 in ein Parallelenbüschel von bekannter Richtung übergeht. Jede solche Inversion verwandelt den Kreis durch P_3 um M_{34} in einen andern Kreis, der von zwei Parallelen des Büschels unter dem Winkel von 120^0 geschnitten wird. Aus einer dieser Parallelen geht durch Rückinversion der gesuchte Kreis hervor.

Fig. 10.



Konstruktion eines ebenen Teilungsliniennetzes.

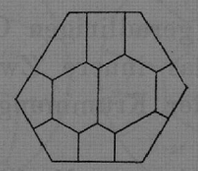
Hat man auf solche Weise ein Kreisbogenvieleck mit lauter Winkeln von 120^0 gefunden, so sind damit auch gleichzeitig die Fortsetzungen des Netzes über die Ecken der gefundenen Masche bestimmt, da nach der geometrischen Konfiguration Richtung und Krümmung der von jeder Ecke ausgehenden Teilungslinie festliegt. Man braucht nur zu den Radien der beiden Kreise, die in einer Ecke unter 60^0 zusammentreffen, die dritte Linie, die mit beiden 60^0 einschließt, hinzuzunehmen, so schneidet sie auf der Zentrale der beiden Kreise den Mittelpunkt des Kreisbogens aus, der die Netzfortsetzung bildet, wie aus dem Büschelsatz S. 8 hervorgeht. So sind in Figur 10 die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 auf den Verbindungslinien $M_{12}\,M_{41}$, $M_{12}\,M_{23}$, $M_{23}\,M_{34}$, $M_{34}\,M_{41}$ gelegen. In die Lücken zwischen zwei von benachbarten Ecken der ersten Masche ausgehenden Teilungslinien werden nun neue Netzmaschen gesetzt, wobei allerdings zu beachten ist, daß beim Schluß eines Kranzes von Netzmaschen, der sich um eine feste Masche oder eine Gruppe

von solchen herumschlingt, eine Bedingung des Zusammenfallens zweier Eckpunkte auf der gleichen Teilungslinie zu erfüllen ist, was unter Umständen die Vermehrung der Eckenzahl der letzten Masche des Kranzes erfordert. Hat man so ein Teilungsliniennetz von beliebiger Ausdehnung gefunden, so sind an den freien Ecken der äußeren Netzmaschen die Fortsetzungen immer mitbestimmt und man kann, um zu einem Abschluß zu gelangen, schließlich einen Bereich annehmen, dessen Umfang sämtliche Fortsetzungen senkrecht durchschneidet. Für diesen Bereich ist dann das Netz ein Teilungsliniennetz von kürzester Länge bei dem Flächenteilungsverhältnis, das seine Maschen abgrenzen.

Da die Winkel einer Masche stets genau 120^0 sind, so wird eine Masche „im Durchschnitt“ nach außen konvexe Seiten haben, wenn die Eckenzahl kleiner als sechs ist und konkave, wenn sie größer als sechs ist. Für sechseckige Maschen können alle Seiten geradlinig sein und ein sehr einfaches Teilungsnetz ergibt sich aus geraden Seiten, die zu drei um 60^0 verschiedenen Richtungen parallel sind und sonst beliebig gestaltete Sechsecke bilden, welche zu dreien um eine Ecke herum liegen. In allen Maschen eines solchen Netzes ist der Druck derselbe. Als Umfang eines zu teilenden Bereiches, zu dem ein solches Teilungsnetz gehört, kann ein geradliniges Vieleck genommen werden, dessen Seiten senkrecht auf den drei ausgezeichneten Richtungen stehen (Fig. 11).

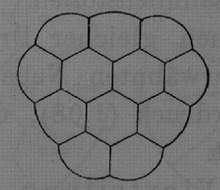
Es gibt indessen auch noch eine andere Möglichkeit ein Teilliniennetz zum Abschluß zu bringen. Es können sich die freien Enden, welche von den Ecken der Maschen ausgehen, so zusammenschließen, daß sie keine Ecken mehr bilden, und daß demnach auch keine Ansätze für neue Maschen mehr auftreten. Ein Beispiel dieser Art bietet die Figur 12.

Fig. 11.



Kürzeste Teilung mittels gerader Teilungslinien.

Fig. 12.



Freies ebenes Schaumgebilde.

Hier haben wir eine Anzahl von Zellen mit gegebenem Inhalt, welche unter sich und nach außen so abgegrenzt sind, daß die Summe der Grenzlinien möglichst klein wird. Diese Figuren lassen noch eine andere physikalische Deutung zu, welche sich dann auf die früher behandelten, randlich begrenzten Teilungsfiguren übertragen läßt. Man denke an die Schaum-

zellen, welche geeignete Flüssigkeitshäutchen, wie Seifenblasen bilden. Infolge der Oberflächenspannung formt sich ein solches Schaumgebilde nach dem Gesetz der kleinsten Gesamtoberfläche bei gegebenen Inhalts- beziehungsweise Randbedingungen. Übertragen wird dieses Gesetz vom dreidimensialen Raum auf die zweidimensionale Ebene, so tritt an Stelle des Zellvolumens, die Fläche und an Stelle der Zelloberfläche der Umfang des ebenen Zellgebildes. Figur 12 kann dann als zweidimensionales freischwebendes Schaumgebilde aufgefaßt werden, während die früheren Teilungsfiguren solche Schaumgebilde darstellen, die zwischen festen Wänden (nämlich in den Umfang der zu teilenden Figur) eingespannt sind.

5. Die Gleichteilung der Kreisfläche.

Als Beispiel für die Flächenteilung mit kürzesten Grenzen sollen eine Reihe von Gleichteilungen der Kreisfläche betrachtet und deren Ergebnis bildlich und zahlenmäßig dargestellt werden (Fig. 13).

a) Die kürzeste Halbierung der Kreisfläche wird durch einen Durchmesser bewirkt. Sie ist insbesondere kürzer als jene durch einen Innenvollkreis, der die Hälfte der Fläche abgrenzt (2 Radien gegen 4,42).

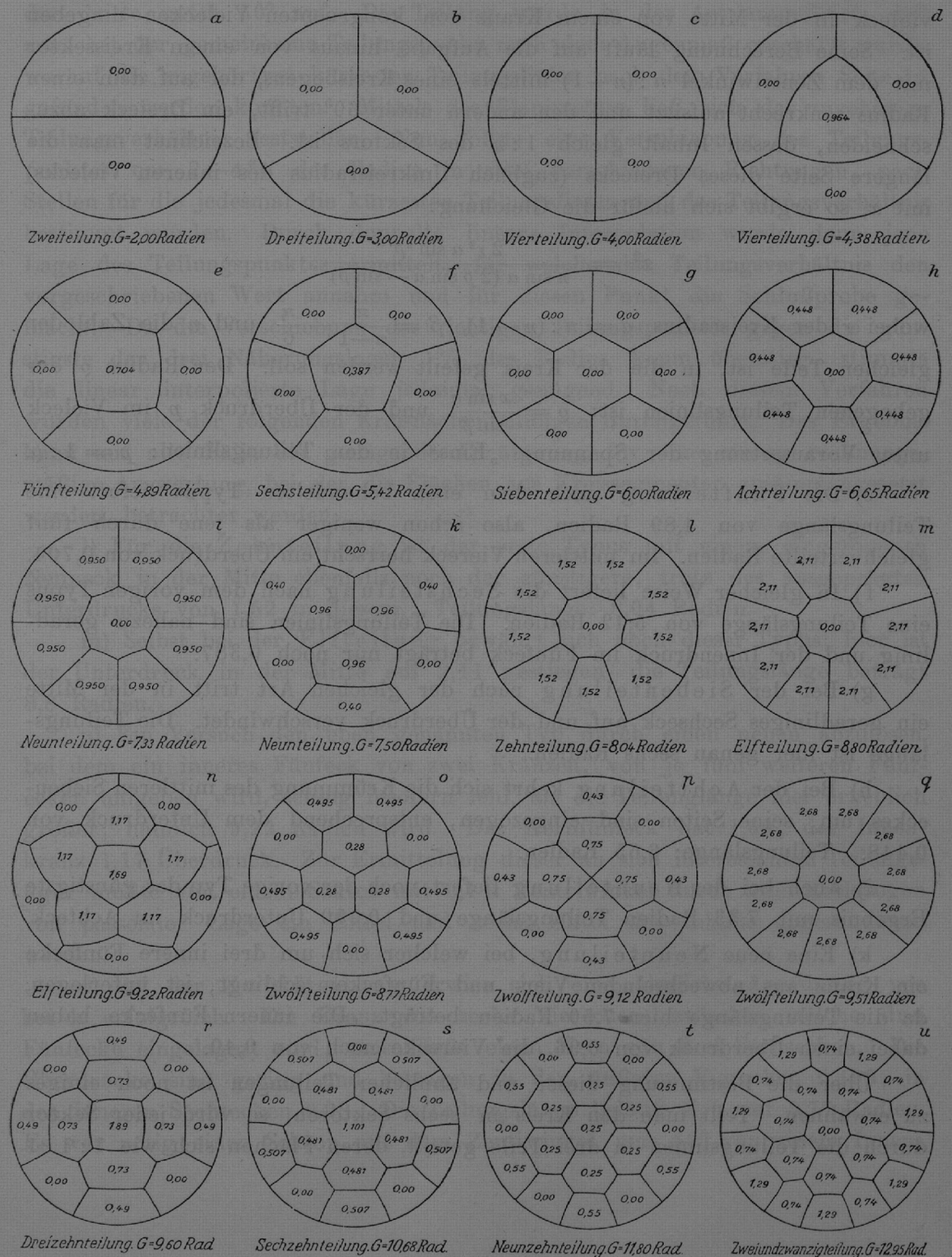
b) Die kürzeste Dreiteilung der Kreisfläche geben drei Radien unter 120^0, die sie in gleiche Sektoren zerschneiden. Eine andere mögliche Teilung in ein inneres Kreiszweieck mit Winkeln von 120^0 und anschließenden stark gebogenen Vierecken hat entschieden längere Teilungslinien (4,28 Radien gegen 3,00).

c) Bei der Vierteilung der Kreisfläche tritt die Zerschneidung in vier rechtwinklige Sektoren in erfolgreichen Wettbewerb mit anderen Teilungen, obwohl sie einen Ausnahmefall insofern darstellt, als im Mittelpunkt vier Bereiche zusammenstoßen. Bei den Teilungen *a*, *b*, *c* herrscht in den einzelnen Maschen gleicher Druck, entsprechend den geradlinigen Grenzen; bei dem eben erwähnten Nebenfall zu *b* unterliegt das innere Zweieck einem starken Überdruck (1,08), der sich in entsprechender Krümmung der Grenzlinien äußert.

d) Die Vierteilung des Kreises, wobei ein inneres Kreisbogendreieck mit drei Winkeln von 120^0 von drei Vierecken umgeben wird, hat etwas längere Grenzen (4,38 Radien gegen 4).

Es ist sehr naheliegend, obwohl durch nichts bewiesen, anzunehmen, daß die allerkürzesten Teilungen unter den möglichst symmetrischen kürzesten zu suchen sind. Es sollen daher im folgenden diese bevorzugt werden, zumal sie auch weit einfacher zu ermitteln sind. Die eben genannte Vierteilung

Fig. 13.



Gleichteilung der Kreisfläche.

stellt einen solchen Teilungstypus dar, bei welchem ein reguläres Kreisbogenvieleck in der Mitte von einem Kranz von kongruenten Vielecken umgeben ist. Seine Berechnung läuft auf die Aufgabe hinaus von einem Kreissektor mit dem Zentriwinkel $\pi : (n-1)$ mittels eines Kreisbogens, der auf dem einen Radius senkrecht aufsitzt und den andern unter 60^0 trifft, ein Dreieck abzuschneiden, dessen Inhalt gleich $1 : n$ des Sektors ist. Bezeichnet man die längere Seite dieses Dreiecks (zugleich Umkreisradius des inneren Vielecks) mit x, so ergibt sich hiefür die Gleichung:

$$x^2 = \frac{2\, r^2\, \alpha \sin^2\beta}{n \sin\alpha\, (2\,\beta \sin\alpha - \sin\beta)},$$

wobei r der Kreisradius, $\alpha = \pi : (n-1)$, $\beta = \frac{\pi}{n-1} - \frac{\pi}{6}$ und n die Zahl der gleichen Teile ist, in die der Kreis geteilt werden soll. Der Radius ϱ der gebogenen Teilungslinien ist: $\varrho = \frac{x \sin\alpha}{\sin\beta}$ und der Überdruck p im Vieleck unter Voraussetzung der Spannung „Eins“ in den Teilungslinien: $p = 1 : \varrho$.

e) Die Fünfteilung nach dem eben behandelten Typus liefert eine Teilungslänge von 4,89 Radien, also schon weniger als jene durch fünf gleichverteilte Radien. Im mittleren Viereck herrscht ein Überdruck von 0,704.

f) In gleicher Weise liefert die Sechsteilung nach dem vorigen Typus eine Teilungslänge von 5,42 Radien. Die Teilungslinien sind nahezu geradlinig und der Innendruck im Fünfeck beträgt nur noch 0,387.

g) Bei der Siebenteilung nach der gleichen Art tritt in der Mitte ein geradliniges Sechseck auf und der Überdruck verschwindet. Die Teilungslänge ist hier genau sechs Radien.

h) Bei der Achtteilung kehrt sich die Krümmung des mittleren Siebeneckes um, seine Seiten sind eingezogen, entsprechend dem Unterdruck von 0,448. Teilungslänge: 6,65 Radien.

i) Auch bei der Neunteilung liefert noch der vorige Typ das günstigste Ergebnis mit 7,33 Radien Teilungslänge und 0,950 Unterdruck im Achteck.

k) Eine neue Neunteilung, bei welcher sich um drei innere Fünfecke ein Kranz aus abwechselnden Vier- und Fünfecken schlingt, ist unterlegen, da die Teilungslänge hier 7,50 Radien beträgt. Die innern Fünfecke haben dabei einen Überdruck von 0,96, die Vierecke noch von 0,40.

Über die Bestimmung dieser und ähnlicher Teilungen ist noch einiges zu erwähnen. Teilt man den Kreis in sechs Sektoren, so wird jeder Sektor durch die Teilungslinien in drei Teile geteilt, deren Flächen sich wie 1 : 1 : 1

verhalten. Zwei der Teilungsbögen sitzen am Umfang des Sektors senkrecht, der dritte unter 60^0 auf. Die Teilung wurde in der Art ausgeführt, daß zunächst der gemeinsame Teilungspunkt nach dem Augenmaß geschätzt wurde, worauf die zugehörigen kürzesten Teilungslinien nach dem Verfahren Seite 14 gefunden werden konnten. Mittels des Planimeters ließ sich das zugehörige Teilungsverhältnis feststellen. Nun folgte eine Verschiebung des Teilungspunktes um 2—4 % des Radius in zwei verschiedenen Richtungen, nach Stellen für die jedesmal die kürzesten Teilungslinien und das Teilungsverhältnis bestimmt wurden. Durch doppelte lineare Interpolation wurde dann jene Lage des Teilungspunktes ermittelt, für welche das Teilungsverhältnis den vorgeschriebenen Wert annahm und für diesen Punkt die Schlußprobe gemacht. Da die Verschiebung des richtigen Teilungspunktes gegen die günstigste der drei Näherungslagen 1% des Radius kaum überstieg, stimmte die linear interpolierte Lage jedesmal genügend. Nach diesem Verfahren wurden viele der folgenden Kreisflächenteilungen durchgeführt. Das Ergebnis kann auf alle Fälle als genügende Annäherung für eine streng rechnungsmäßige Auswertung, bei der die Flächen aus Kreissegmenten zusammengesetzt werden, betrachtet werden.

l) Für die Zehnteilung ist der erste Typus mit einem eingezogenen Neuneck in der Mitte ebenfalls noch der günstigere, trotz des ausgeprägten Unterdrucks von 1,52 in diesem. Teilungslänge: 8,04 Radien.

m) Selbst bei der Elfteilung bewährt sich noch dieser Typus; hier ist der Unterdruck in der Mitte auf 2,11 gestiegen, die Teilungslänge beträgt 8,8 Radien.

n) Ein Versuch den eben genannten Typ durch einen neuen abzulösen, bei dem ein inneres Fünfeck von zwei Kränzen, von je fünf weiteren Fünfecken umgeben wird, schlug insofern fehl, als die Teilunglänge hier erheblich größer, nämlich 9,22 Radien wird. Das Kernfünfeck hat 1,69, der Innenkranz 1,17 Überdruck. Zur Ermittelung dieser an sich interessanten Teilungsfigur mußte von einem Sektor mit 0,1 π Zentriwinkel durch zwei Kreisbogen von passender Lage ein Elftel und sechs Elftel des Inhalts abgeschnitten werden.

o) Bei der Zwölfteilung erwies sich eine ähnliche Anordnung wie bei k erfolgreich. Ein Kranz von sechs Vierecken, zwischen welche drei Fünfecke eingelagert sind, umschließt einen Kern von drei Sechsecken. Die Überdrucke sind gering und betragen in den äußeren Vierecken 0,495, in den inneren Sechsecken 0,28. Die Teilungslänge beläuft sich auf 8,77 Radien. Es war nötig einen Sektor mit dem Zentiwinkel von 60^0 von einem Innen-

punkt aus in Verhältnis 1 : 2 : 1 zu teilen, wobei zwei Teilungslinien die Radien unter 60° treffen und die dritte auf dem Kreis senkrecht aufsitzt.

p) Weniger günstig ist eine Anordnung, wobei ein Kranz von vier Vierecken und vier Fünfecken einen Kern von vier Fünfecken umgibt. Es treten im Kern der Überdruck 0,75 in den Vierecken des Kranzes der von 0,43 auf und die Teilungslinie steigt auf 9,12 Radien. In den Kernfünfecken findet sich der außergewöhnliche Winkel von 90°, da im Kreismittelpunkt vier Felder zusammenstoßen.

q) Noch ungünstiger wird bei der Zwölfteilung der erste Typ mit dem starken Unterdruck im mittleren Elfeck von 2,68 und der Teilungslänge 9,51 Radien.

r) Für die günstigste Dreizehnteilung tritt eine neue Anordnung in Kraft, bei welcher um ein zentrales Vieleck (hier Viereck) zwei Kränze von Feldern gelegt sind, von denen der äußere doppelt so viele Felder zählt, als der innere. Die Felder des inneren Kranzes sind Sechsecke, die des äußern abwechseld Fünf- und Vierecke. Das innere Viereck hat 1,89 Überdruck, der erste Kranz 0,73, die Vierecke des zweiten Kranzes haben 0,49 gegenüber den dazwischen gelegenen Fünfecken. Die Teilungslänge beträgt 9,60 Radien. Es mußte ein Sektor mit 45° Zentriwinkel von einem Innenpunkte im Verhältnis 4 : 4 : 5 geteilt und außerdem noch an der Spitze $^1/_{13}$ der Fläche abgeschnitten werden.

s) Mit Umgehung der 14 und 15 Teilung, von denen besonders die erstere schwierig zu sein scheint, ist hier die Sechzehnteilung nach der gleichen Anordnung wie die Dreizehnteilung ausgeführt. Die Überdrucke 1,10 in der Mitte, 0,48 im Innenkranz und 0,51 in den äußeren Vierecken sind geringer und die Teilungslinien dementsprechend geradliniger geworden. Teilungslänge: 10,68 Radien.

t) Die Neunzehnteilung, nach der gleichen Anordnung wie die Dreizehn und Sechzehnteilung, ist dadurch ausgezeichnet, daß das zentrale Sechseck und der es umgebende Kranz gleichen geringen Überdruck von 0,25 aufweisen und gegen einander geradlinig abgegrenzt sind. Auch der Überdruck in den Vierecken des äußeren Kranzes mit 0,55 ist mäßig, so daß nur ganz schwach gebogene Grenzen auftreten. Gesamtteilungslänge: 11,80 Radien.

u) Schließlich folgt noch die Zweiundzwanzigteilung von derselben Anordnung, mit einem schwach eingezogenen Siebeneck in der Mitte. Die Überdrucke finden sich jetzt im Außenkranz (0,74 in den Fünfecken, 1,29 in den Vierecken) und im Innenkranz (0,74 in den Sechsecken). Die Teilungslänge mißt 12,95 Radien.

Die hier behandelten einfacheren Fälle der Gleichteilung der Kreisfläche erfordern nur einen inneren Teilungspunkt des kleinsten Kreissektors, der durch kongruente und symmetrische Wiederholung die Kreisfläche bedeckt. Dementsprechend ist bei der Berechnung auch nur die Lösung von zwei transzendenten Gleichungen mit zwei Unbekannten erforderlich. Bei zwei Teilungspunkten im Kreissektor treten drei Unbekannte und ebensoviele Gleichungen dafür auf. Als Unbekannte können etwa die beiden Koordinaten des ersten Teilpunktes und eine dritte Koordinate angenommen werden, welche den zweiten Teilpunkt auf jenem Kreis festlegt, der die Netzfortsetzung im ersten Teilpunkt bildet. Die zu erfüllenden Gleichungen sagen aus, daß von den vier Feldern, in welche die Sektorfläche durch das Netz mit den zwei Teilpunkten zerschnitten wird, drei (und damit von selbst das vierte) den gegebenen Inhalt zugewiesen erhalten. Die graphische Ermittelung gelingt ähnlich wie bei dem Beispiel S. 21. Man muß nur für vier Näherungslagen der zwei Teilpunkte die Teilungskonstruktion und die Flächenermittelung durchführen und die richtige Lage durch dreifache Interpolation feststellen. Ich hoffe bei den durchgeführten Beispielen jeweils die allerkürzesten Teilungen gefunden zu haben. Nur bei der Zehn- und Elfteilung scheint mir eine günstigere Teilung von niedrigerer Symmetrie nicht ganz ausgeschlossen. Einen Beweis hiefür habe ich freilich nicht.

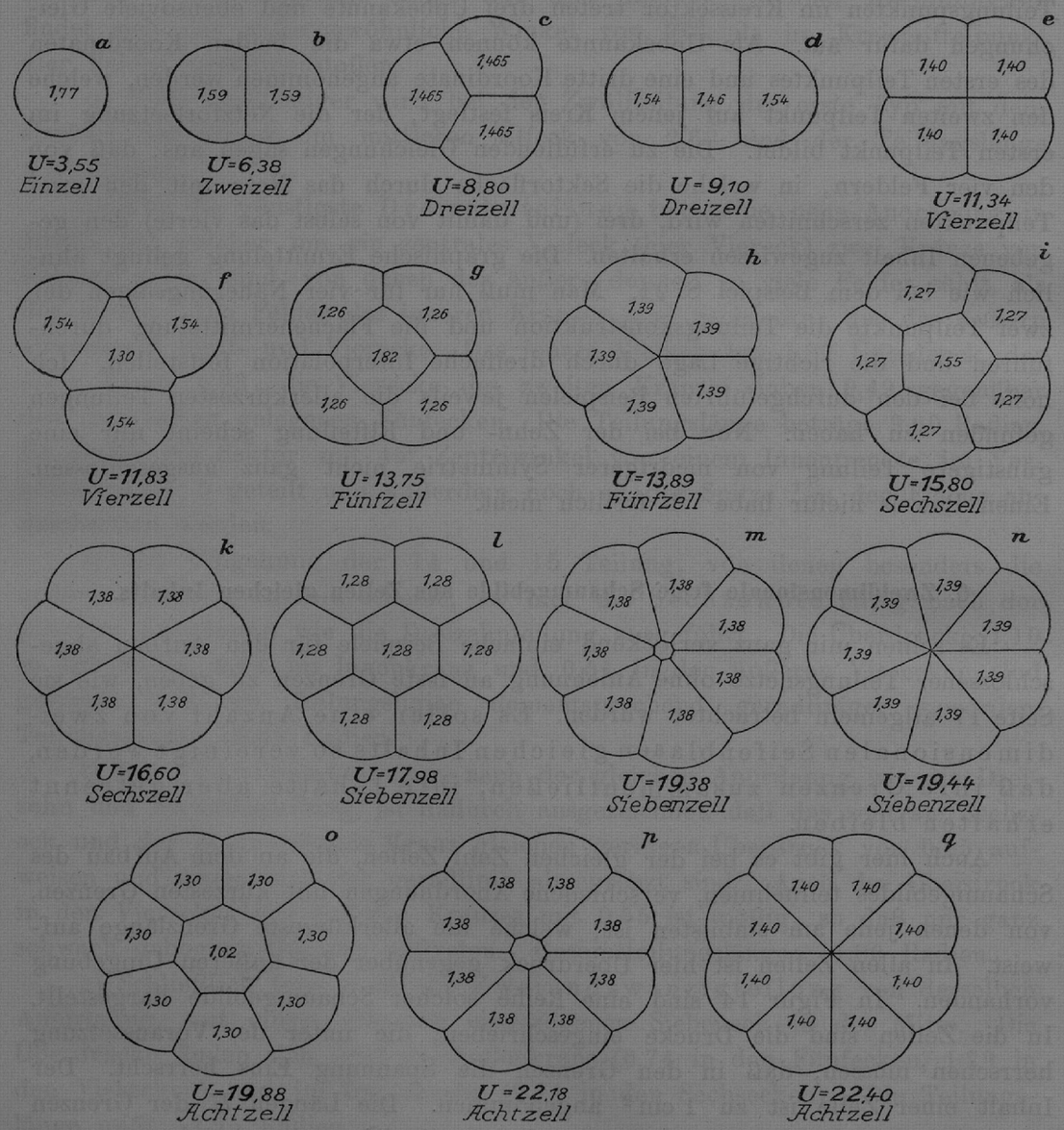
6. Zweidimensionale freie Schaumgebilde aus Zellen gleichen Inhalts.

Es schien mir ganz verlockend einfache Beispiele für den Aufbau abgeschlossener Teilungsnetze ohne Anlehnung an feste Grenzen zu geben, wie sie Seite 17 allgemein betrachtet wurden. Es sollen eine Anzahl von zweidimensionalen Seifenblasen gleichen Inhalts so vereinigt werden, daß ihre Grenzen zusammenfließen, ihre Inhalte aber getrennt erhalten bleiben.

Auch hier gibt es bei der gleichen Zahl Zellen, die an dem Aufbau des Schaumgebildes teilnehmen, verschiedene Anordnungen mit kürzesten Grenzen, von denen jene am stabilsten ist, welche die allerkürzeste Grenzlänge aufweist. In allen Zellen ist hier Überdruck gegenüber der äußeren Umgebung vorhanden. In Figur 14 sind eine Reihe solcher Schaumgebilde dargestellt. In die Zellen sind die Drucke eingeschrieben, die unter der Voraussetzung herrschen müssen, daß in den Grenzen die Spannung Eins herrscht. Der Inhalt einer Zelle ist zu $1\,\mathrm{cm}^2$ angenommen. Die Längen U der Grenzen sind in cm angegeben. Die Drucke p haben die Dimension cm^{-1}.

Beim Dreizell (Fig. 14*c* und *d*) gibt es bereits zweierlei Anordnungen, nämlich die im Kreis herum und nebeneinander. Erstere ist die stabilere mit der Grenzlänge $U = 8{,}80$ gegen 9,10 bei der zweiten. Bei der letzteren müssen die äußeren Grenzbögen der Mittelzelle ein und demselben Kreis an-

Fig. 14.



Ebene Schaumgebilde aus Zellen gleichen Iltsnha.

gehören. Die symmetrische Anordnung, wonach beide Grenzbögen gleich groß sind, ist nicht notwendig; es muß nur ihre Summe dieselbe sein. Es können also die Außenzellen ohne Änderung der Grenzlänge um das Zentrum der Mittelzelle rotieren. Wenn dabei ein Grenzbogen der Mittelzelle verschwindet und zwei von den vier Ecken zusammenstoßen, so fließen von den dort zusammentreffenden vier Teilungslinien die beiden äußeren sich berührenden zu einer inneren Scheidelinie zusammen und es entsteht die stabilere Form des Dreizells, bei dem die Zellen um einen gemeinsamen Punkt herum angeordnet sind (Fig. 14 *c*).

Beim Vierzell (Fig. 14 *f* und *g*) ist die Anordnung um einen Punkt herum ebenfalls die stabilere, obwohl da wieder vier Bereiche zusammenstoßen. Die weniger stabile Form (Fig. 14 *f*), bei der drei äußere Zellen um eine mittlere in indifferentem Gleichgewicht gelagert sind, hat allerdings nur unbedeutend längere Grenzen (11,83 gegen 11,34).

Beim Fünfzell liegt die Sache bereits umgekehrt. Hier ist die Anordnung mit einer quadratischen Mittelzelle günstiger (Fig. 14 *g*). Allerdings sind hier die vier Außenzellen nicht mehr verschiebbar angelagert, wie die drei Außenzellen des instabilen Vierzells. Immerhin ist der Unterschied in der Grenzlänge gegenüber der Anordnung von fünf Zellen um einen Punkt herum sehr gering (13,75 gegen 13,89, Fig. 14 *h*).

Erheblicher ist dieser Unterschied bei den ähnlichen Anordnungen des Sechszells (15,80 gegen 16,60, Fig. 14 *i* und *k*). Beim Siebenzell (Fig. 14 *l*, *m*, *n*) tritt wieder der Fall ein, daß bei der günstigeren Anordnung (*l*) mit einem Sechseck in der Mitte dieses geradlinig und der Druck in allen Zellen gleich groß sein wird. Hier ist außerdem bereits eine dritte Anordnung (*m*) möglich, die bei den Schaumgebilden mit geringerer Zellzahl fehlte, nämlich die ringförmige mit einem siebeneckigen leeren Zwischenraum in der Mitte. Diese ist sogar ein klein wenig günstiger als die sternförmige (n), bei der sieben Zellen um einen Punkt herum liegen. Die Grenzlängen sind der Reihe nach: 17,98, 19,38, 19,44. Beim Achtzell (Fig. 14 *o*, *p* und *q*) liegen die Verhältnisse noch ebenso, nur wird bei der günstigsten Anordnung das mittlere Siebeneck bereits schwach eingezogen sein. Die Grenzlängen betragen hier: 19,88, 22,18, 22,40.

Bei der Steigerung der Zellzahl treten bald neue Anordnungen in Wettbewerb, deren Auswertung immer schwieriger wird, wie sich auch herausstellt, daß die Ermittlung eines freien Schaumgebildes bei gleicher Zellenzahl meist umständlicher ist, als jene eines solchen, wie es bei der Kreisflächenteilung auftritt.

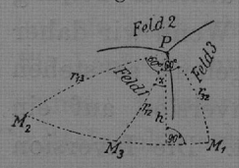
7. Teilung von krummen Flächen.

Die mechanische Analogie, welche zur Aufstellung der Gesetze für die Teilung mit kürzesten Grenzen ebener Flächenstücke führte, bewährt sich nach bei der gleichen Aufgabe für krumme Flächen. Wir brauchen uns nur die krumme Fläche als unendlich dünnen Zwischenraum von gleicher Breite zwischen zwei starren krummen Wänden von entsprechender Form vergegenständlicht zu denken. Diesen Zwischenraum begrenzen wir am Rande durch einen starren Draht und unterteilen ihn mittels eines in sich geschlossenen elastischen Fadens, der an den Grenzen überall doppelt liegt, am Rande über den Draht gezogen ist, so daß er dort frei gleiten kann und der an den Eckpunkten der Teilung durch Ringe zusammengehalten wird (Vgl. Fig. 9 Seite 14). Solche Ringe dienen auch zur Wiederzusammenfügung an den Schnitten, die an dem Teilungsliniennetz anzubringen sind, um es in ein solches zu verwandeln, in dem jeder Punkt von jedem aus nur auf einerlei Weg zu erreichen ist. Wie früher denken wir uns die Maschen zwischen den Fäden mit fast unzusammendrückbarer Flüssigkeit erfüllt, welche den abzugrenzenden Inhalt darstellt und beobachten das Gleichgewicht, das sich unter der Spannung des Fadens einstellt, wobei die Flüssigkeit in den einzelnen Maschen unter verschiedenen Druck gerät. Aus der überall konstanten Spannung des Doppelfadens und aus der längs der Grenze zweier Maschen konstanten Druckdifferenz ergibt sich alsdann die Konstanz der geodätischen Krümmung jedes Grenzlinienstückes zwischen zwei Grenzpunkten. Daß hier die geodätische Krümmung der Grenzlinie maßgebend ist, folgt daraus, daß alle Reaktionen von Flüssigkeit und Fadenspannung senkrecht zur jeweiligen Tangentialebene an die Fläche von den beiderseitigen starren Wänden des Zwischenraumes aufgenommen werden und nur das Kräftespiel in der Tangentialebene in Frage kommt. Dieses führt zu dem Schluße, daß die unter dem Kontingenzwinkel der geodätischen Krümmung gegeneinander geneigten Fadenspannungen an den Enden eines Grenzlinienelementes, mit dem auf das Element treffenden Teil der Druckdifferenz, das Gleichgewicht halten müssen, was die Gleichung $S \cdot k_{mn} = p_m - p_n$ zur Folge hat. Dabei ist S die Spannung des Doppelfadens, k_{mn} die geodätische Krümmung und $p_m - p_n$ der Druckunterschied beiderseits der Grenzlinie. An den Grenzpunkten müssen sich die drei (im Ausnahmefall auch mehr) gleichen Spannungen der durch den kleinen Ring gezogenen Doppelfäden das Gleichgewicht halten, was zur Gleichheit der Winkel, unter denen die Fäden vom Ring auslaufen, führt. Der Unterschied der Drucke in den drei Winkelräumen ändert an dieser Tatsache deshalb nichts, weil der Druck senkrecht zu den Fäden wirkt und daher nur deren

Krümmung nicht aber deren Spannung beeinflussen kann. An den Stellen, wo der Grenzfaden um den Rand des zu teilenden Gebietes geschlungen ist, fordert auch hier das Gleichgewicht ein senkrechtes Aufsitzen der Grenze auf jenen Rand. Die Druckunterschiede der in einem Maschenknotenpunkte zusammenstoßenden drei Felder kommen in den Krümmungen der drei sich dort gabelnden Grenzlinienstücke zum Ausdruck und da die algebraische Summe jener drei Druckunterschiede Null ist, so folgt dies auch für die Summe der geodätischen Krümmungen der drei in einem Grenzpunkt sich gabelnden Teilungslinienstücke. Die Krümmungskreise der auf die Tangentialebene im Grenzpunkt projizierten Teilungslinien bilden dann ein Kreisbüschel (vgl. S. 8).

Die Anwendung dieser Gesetze zur Aufstellung von Flächenteilungen mit kürzesten Grenzen gelingt natürlich am leichtesten bei solchen Flächen, auf welchen die Linien konstanter geodätischer Krümmung allgemein angegeben werden können und das sind vor allem die Flächen konstanter Gaußscher Krümmung. Diese lassen sich konform so in die Ebene abbilden, daß die Linien konstanter geodätischer Krümmung in Kreise übergehen. Ein Teilungsnetz mit kürzesten Grenzen geht daher bei dieser Abbildung in ein Kreisbogennetz der Ebene über, wobei die Winkelbedingungen an den Eckpunkten und Randpunkten wegen der Konformität erfüllt bleiben. Besonders einfach liegen die Verhältnisse bei den auf die Kugel abwickelbaren Flächen konstanter positiver Krümmung und speziell bei der Kugel selbst, bei welcher die stereographische Projektion die Abbildung der Linien konstanter geodätischer Krümmung in Kreise der Ebene besorgt. Hier läßt sich auch ganz elementar zeigen, daß die Krümmungsbedingung für die drei von einer Ecke ausgehenden Teilungslinien bei dieser Abbildung erhalten bleibt. Zuerst bemerken wir, daß bei der stereographischen Projektion einem Kreisbüschel in der Ebene ein solches auf der Kugel entspricht und umgekehrt. Sodann erinnern wir uns daran, daß die Krümmungsbedingung stets erfüllt ist für drei Kreise eines ebenen Büschels, die sich unter 120^0 schneiden (S. 8). Betrachten wir nun drei Kreise eines Büschels auf der Kugel (Fig. 15), die sich in P unter 120^0 schneiden und ihre Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 auf einem größten Kreise haben. Ihre Radien bilden Winkel von 60^0 miteinander.

Fig. 15.



Krümmungsbedingung bei der Kugelteilung.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken, die durch Fällen des Lotes von P auf $M_1 M_2$ entstehen, folgt:

$$\operatorname{tg} h = \operatorname{tg} r_{12} \cos x = \operatorname{tg} r_{13} \cos (60^0 + x)$$
$$\operatorname{tg} h = \operatorname{tg} r_{12} \cos x = \operatorname{tg} r_{32} \cos (60^0 - x)$$

oder:
$$\operatorname{ctg} r_{13} = \frac{\cos(60^0 + x)}{\cos x} \operatorname{ctg} r_{12} = \frac{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2} \operatorname{ctg} r_{12},$$
$$\operatorname{ctg} r_{32} = \frac{\cos(60^0 + x)}{\cos x} \operatorname{ctg} r_{12} = \frac{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2} \operatorname{ctg} r_{12}.$$

Hieraus:
$$\operatorname{ctg} r_{13} + \operatorname{ctg} r_{32} = \operatorname{ctg} r_{12}.$$

Nun ist die geodätische Krümmung eines Kreises auf der Kugel gleich dem Produkt aus dem reziproken Kugelradius in die Kotangente des sphärischen Kreisradius, wobei noch, je nach den zugewiesenen Umlaufsinn, das Vorzeichen zu wählen ist. Dividieren wir daher die letzte Gleichung mit dem Kugelradius und berücksichtigen wir das Vorzeichen, so folgt aus ihr: $k_{13} + k_{32} = k_{12}$ oder: $k_{12} + k_{23} + k_{31} = 0$, wo die k die geodätischen Krümmungen der drei in P zusammenstoßenden Feldergrenzen bedeuten. Damit ist bewiesen, daß auch auf der Kugel drei unter 120^0 sich schneidende Kreise eines Büschels die Krümmungsbedingung erfüllen und mithin diese Bedingung bei der stereographischen Projektion von Ebene und Kugel ebenso erhalten bleibt, wie wir früher sahen, daß sie gegenüber der ebenen Inversion invariant ist.

Hieraus folgt der Satz: Wird ein ebenes oder sphärisches Teilungsnetz mit kürzesten Grenzen durch Inversion transformiert, so geht es stets in ein neues ebenes oder sphärisches Teilungsnetz mit kürzesten Grenzen über.

8. Die Gleichteilung der Kugel.

Durch den Satz am Schlusse des vorigen Abschnittes sind ebene und sphärische Teilungsnetze aufs engste mit einander verbunden. Freilich bleibt bei der Inversion nur die Eigenschaft einer Figur ein Netz kürzester Teilung zu sein erhalten, dagegen ändert sich das Teilungsverhältnis. Wenn wir daher jetzt zur Gleichteilung der ganzen Kugelfläche übergehen, so stehen wir vor einer besonderen Aufgabe, die sich nicht durch Inversion auf ein schon gelöstes Problem der ebenen Teilung zurückführen läßt. Die Inversion jeder Teilung der ganzen Kugelfläche, die überhaupt eine ebene Teilung liefert, gibt Anlaß zu einem ebenen freien Schaumgebilde, dessen Zelleninhalte aber in keinem einfachen Zusammenhang mit jenen der sphärischen Einteilung stehen. Bei der Aufsuchung von Kugelteilungen entfällt eine Bequemlichkeit, die wenigstens die näherungsweise graphische Bestimmung der ebenen Flächenteilung erheblich erleichterte. Das ist der Gebrauch des Polarplanimeters. Man sieht sich infolgedessen hier stets zur Rechnung genötigt, wodurch in

den verwickelteren Fällen ein sehr erheblicher Mehraufwand an Arbeit entsteht, der nur durch größere Genauigkeit des Ergebnisses ausgeglichen wird. Infolgedessen sind nur ausnahmsweise Kugelteilungen bestimmt worden, bei welchen zwei transzendente Gleichungen mit zwei Unbekannten durch Näherung zu lösen waren. Die Rechnungen wurden fünfstellig mit der Bremikerschen Tafel für Dezimalteilung des Sexagesimalgrades durchgeführt. Die Genauigkeit der Ergebnisse ist aber nur vierstellig. Die Benützung der Dezimalteilung des Sexagesimalgrades verbindet Bequemlichkeit der Rechnung mit der Anlehnung an die gewohnte Teilung des Kreisumfangs in 360 Grade.

Bezüglich der Darstellung der Ergebnisse ist zu bemerken, daß sie zuerst auf Gipskugeln von etwa 100 mm Durchmesser erfolgte. Eine photographische Abbildung der Kugeln zum Zwecke der Veröffentlichung erwies sich als unpraktisch, da namentlich bei den geringeren Teilungszahlen das Teilungsnetz nur überblickt werden kann, wenn man die Kugel von allen Seiten betrachtet. Ich habe daher eine stereographische Abbildung der Kugelteilung vorgenommen, obwohl ihre zeichnerische Herstellung viele Mühe kostete (Fig. 16). Es wurden die beiden Halbkugeln auf das Innere des Großkreises, den die gemeinsame Äquatorebene ausschneidet, projiziert und die beiden Bilder in diesem Zusammenhang belassen. Jede Linie, welche von der einen Halbkugel zur andern zieht und dabei den Äquator überschreitet, erfährt in der Abbildung am Äquator einen zum Radius nach dem Äquatorpunkt symmetrischen Knick und beispielsweise wird ein Großkreis durch ein symmetrisches Kreisbogenzweieck, dessen Ecken auf einem Durchmesser der Äquators liegen, abgebildet. Nur bei den höheren Teilungszahlen von 20 ab begnügte ich mich mit der Darstellung einer Kugelhälfte, um die Figur nicht zu überladen. Neben den günstigen Eigenschaften der stereographischen Projektion konform zu sein und Kreise in Kreise überzuführen, hat sie auch einige für unseren Zweck nachteilige, nämlich den Mangel an Flächentreue und den noch empfindlicheren der Änderung des Krümmungssinnes. Letzterer würde nur der perspektivischen Abbildung vom Kugelmittelpunkt aus nicht anhaften, aber diese würde noch viel umständlicher durchzuführen und dabei doch kaum anschaulicher sein, da ja schon die Halbkugel in die unendliche Ebene ausgebreitet wird.

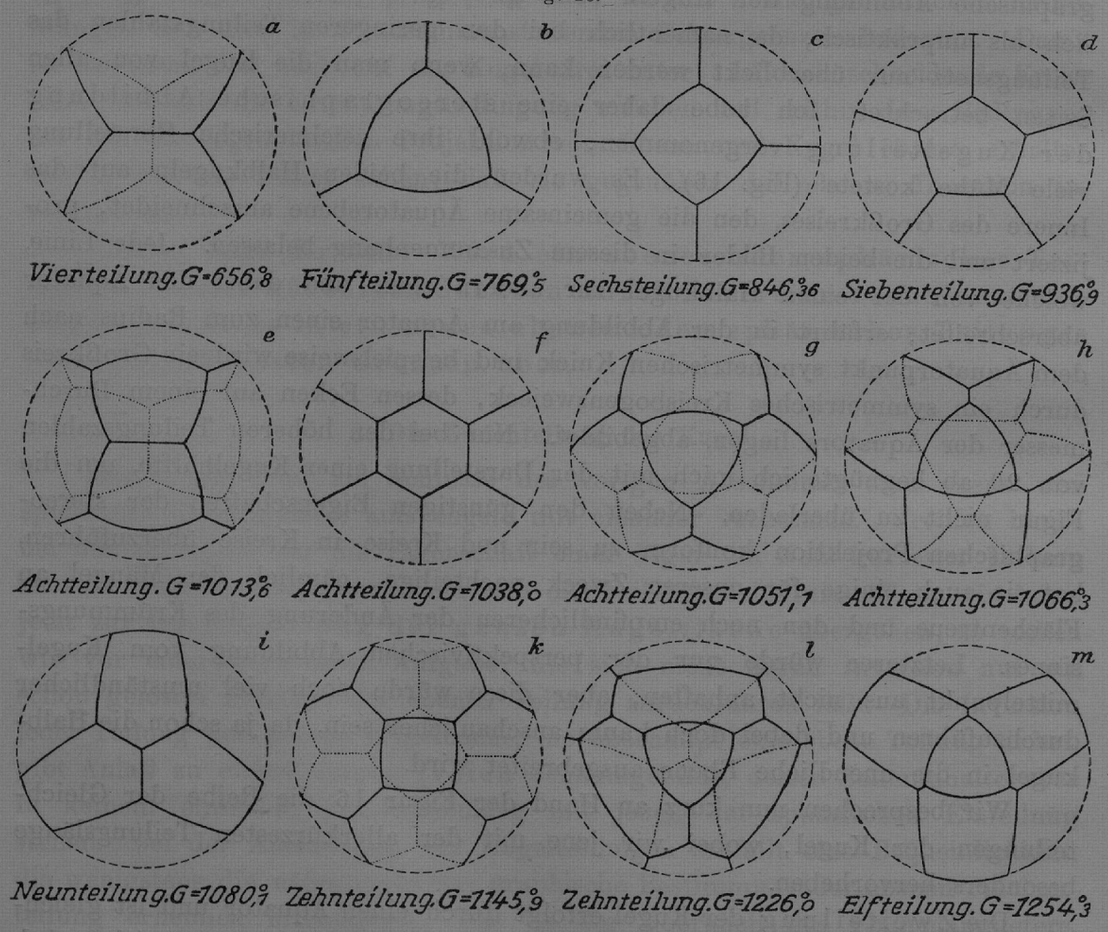
Wir besprechen nun kurz an Hand der Figur 16 die Reihe der Gleichteilungen der Kugel, wobei wir jene mit der allerkürzesten Teilungslänge besonders hervorheben.

Die Zweiteilung der Kugel erfolgt durch einen Äquator und ist gleichzeitig die allerkürzeste, da sie ja durch eine geodätische Linie bewirkt wird.

Für die Dreiteilung kommt neben der durch drei um 120° gegeneinander geneigte Halbkreise, die von zwei Polen ausgehen, noch jene in Betracht, bei welcher durch kleine Kreise von passendem Radius zwei Kugelhauben von je ein Drittel des Oberflächeninhalts abgetrennt werden und der Rest eine ringförmige Zone darstellt. Die erstgenannte ist die günstigere. Teilungslänge: 540° gegen 678°,4 bei der zweiten.

Die Vierteilung der Kugel (Fig. 16 *a*) erfolgt am günstigsten durch sechs Großkreisbogen, die die Ecken eines ihr eingeschriebenen regulären Tetraeders verbinden. Sie treffen sich allenthalben unter 120° und die von ihnen eingeschlossenen Felder stehen alle unter gleichem Druck. Die Teilungslänge beträgt 656°,8.

Fig. 16.



Gleichteilung der Kugel in stereographischer Projektion.

Die Fünfteilung (Fig. 16 *b*) wird am günstigsten so vorgenommen, daß man zwei gleichseitige Kreisbogendreiecke mit Winkeln von 120^0 einander so gegenüberstellt, daß die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken parallel und gleich lang werden und dann diese Ecken durch größte Kugelkreise verbindet. Es entstehen dann zwei dreieckige und drei viereckige Felder; in den ersteren herrscht Überdruck. Diese Fünfteilung stellt den einfachsten Fall einer Anordnung vor, der wir wiederholt begegnen werden. Zwei gegenüberliegende Felder sind regelmäßige Kreisbogenpolygone mit n Winkeln von 120^0, zwischen welche sich eine Zone von n Vierecken einlagert, die durch Großkreisbogen von einander getrennt sind.

Zu ihrer Berechnung zerlegt man die Teilungsfigur durch Großkreise, welche durch die Mittelpunkte der Kreisbogenpolygone gehen, in $2n$ gleiche und symmetrische Teile und drückt aus, daß der Inhalt des $2n$ten Teils eines Kreisbogenpolygons gleich dem $2(n+2)$ten Teil der Kugelfläche ist. Der genannte Teil des Kreisbogenpolygons wird, je nachdem jenes Polygon auswärts oder einwärts gebogene Seiten hat, als positive oder negative Differenz eines sphärischen Sektors vom Zentriwinkel β und eines Dreiecks berechnet, dessen Ecken der Polygonmittelpunkt, eine Polygonecke und der sphärische Krümmungsmittelpunkt der Polygonseite sind. Für diesen Zentriwinkel β ergibt sich hieraus die transzendente Gleichung:

$$\beta\left\{4\,\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\beta}-1\right\}=\frac{n-4}{6(n+2)}\,\pi,$$

die durch Probieren zu lösen ist. Ist β gefunden, so ergibt sich der sphärische Radius a der Polygonseite und der sphärische Radius b des dem Polygon umschriebenen Kreises durch Auflösung eines sphärischen Dreiecks, dessen Winkel bekannt sind.

Im Falle der Fünfteilung wird $n=3$, $\beta=50^0{,}94$, $a=83^0{,}23$, $b=62^0{,}92$. Die Länge der halben Dreiecksseite wird: $50^0{,}94 \sin 83^0{,}23 = 50^0{,}585$, der Umfang beider Dreiecke $607^0{,}0$. Die Länge eines Verbindungskreises zwischen den Ecken der beiden Dreiecke ist: $180^0 - 2 \cdot 62^0{,}92 = 54^0{,}166$, für alle drei $162^0{,}50$. Die gesamte Teilungslänge beträgt hiernach: $607^0{,}0 + 162^0{,}5 = 769{,}^0 5$. Setzen wir den Kugelradius gleich Eins und ebenso die Spannung in den Teilungslinien, so wird die Krümmung der Dreiecksseiten $\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} 83^0{,}23 = 0{,}1187$. Diese Zahl drückt dann auch den Betrag des Überdruckes in den dreieckigen Feldern gegenüber den viereckigen aus.

Die kürzeste Sechsteilung der Kugelfläche (Fig. 16 *c*) wird augenscheinlich durch die sechs Großkreisbogen gegeben, welche die Ecken eines

der Kugel einbeschriebenen Würfels so verbinden, wie es dessen Kanten tun. Die Länge der sphärischen Würfelkante beträgt: $70^0,53$. Die gesamte Teilungslänge beläuft sich auf $846^0,36$. In den sechs kongruenten Feldern ist der Druck natürlich gleich.

Für die Siebenteilung (Fig. 16 *d*) der Kugel kommt die bei der Fünfteilung besprochene Anordnung in Betracht mit $n = 5$. Es treten zwei gegenüberliegende Kreisbogenfünfecke mit eingezogenen Seiten auf, zwischen welche sich eine Zone von Vierecken lagert. Die Rechnung nach der vorigen Formel ergibt $\beta = 26^0,805$, $a = 80^0,798$, $b = 49^0,23$. Die ganze Teilungslänge wird $936^0,9$, der Überdruck in den fünf Vierecken gegenüber den beiden Fünfecken: $\operatorname{ctg} a = 0,1709$.

Ein besonderes Interesse verdient die Achtteilung der Kugel, die mancherlei Überraschungen brachte. Eine sehr naheliegende Möglichkeit ist die durch drei Großkreise, deren Ebenen senkrecht zu einander sind und die Oktaedereinteilung in acht gleichseitig rechtwinklige Dreiecke ergeben. Die Länge der Teilungslinien ist 1080^0, Überdruck ist nirgends vorhanden. An den acht Ecken tritt aber der Ausnahmefall ein, daß dort jeweils vier Felder mit Winkeln von 90^0 zusammenstoßen, statt drei mit Winkeln von 120^0. Dieser Umstand legt es nahe zu untersuchen, ob mit dieser Einteilung schon das Mindestmaß der Grenzlänge erreicht ist. Gehen wir von der früheren Tetraedereinteilung aus und legen wir über die vier Ecken derselben gleichseitige dreieckige Felder mit Winkeln von 120^0, welche den achten Teil der Kugelfläche einnehmen und ihre Ecken auf den Tetraederteilungslinien haben, so bleiben von den Feldern der Tetraedereinteilung sechseckige Reste, mit abwechselnd längeren eingezogenen und kürzeren geradlinigen Seiten übrig, wodurch eine normale Kugelteilung in vier Dreiecke und vier Sechsecke mit zwölf Knotenpunkten entsteht (Fig. 16 *h*). Für die Dreiecke ergibt sich nach einer ähnlichen Formel, wie die voranstehende, bei der nur die rechte Seite geändert ist, $\beta = 44^0,456$, $a = 70^0,28$, $b = 49^0,58$, woraus der Dreiecksumfang zu $251^0,094$ und die Länge der geodätischen Sechseckseiten zu $10^0,318$ folgt. Dies ganze Teilungsnetz mißt $1066^0,29$, ist also um 1,3% kürzer als das Oktaedernetz. Der Überdruck in den Dreiecken ist: $\operatorname{ctg} a = 0,3584$, also ganz erheblich.

Es gibt aber andere Möglichkeiten, die noch günstiger sind. Man stellt zwei gleichseitige Kreisbogendreiecke der vorigen Art einander so gegenüber, daß die Verbindungsgeraden der Ecken durch den Kugelmittelpunkt gehen und teilt den zonenförmigen Rest der Kugeloberfläche in sechs kongruente und symmetrische Fünfecke von folgender Eigenschaft (Fig. 16 *g*). Eine

krumme Seite fällt mit einer Dreiecksseite zusammen, die übrigen sind geodätisch und schließen mit ihnen und unter sich Winkel von 120^0 ein. So entsteht ein kürzestes Teilungsnetz mit zwei dreieckigen und sechs fünfeckigen Feldern, zwölf Knoten, sechs krummen und zwölf geodätischen Grenzlinien. In den Dreiecken herrscht der gleiche Überdruck, wie bei der vorigen Achtteilung, in den Fünfecken ist kein Überdruck. Die kurzen Fünfeckseiten messen $20^0,95$, die langen $70^0,53$, das ganze Netz $1051^0,1$. Es ist also günstiger als das vorhergehende.

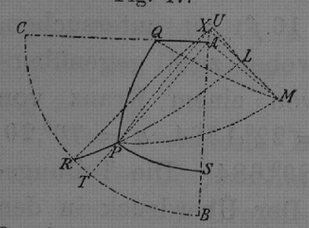
Wir haben indessen noch die Anordnung (Fig. 16 *f*) zu untersuchen, welche der letzten Formel für $n = 6$ entspricht und wobei zwei gegenüberliegende reguläre, eingezogene Kreisbogensechsecke von einem Kranz von sechs Vierecken umgeben sind. Die Formel ergibt: $\beta = 22^0,1364$, $a = 70^0,20$, $b = 45^0,16$. Die geodätischen Teilungslinien messen $89^0,684$. Die Teilungslänge wird: $1038^0,0$, also nochmals erheblich kleiner. Der Überdruck in den sechs Vierecken ist erheblich: $\operatorname{ctg} a = 0,3600$.

Man wird erwarten und ich war lange der Meinung, daß damit die allerkürzeste Teilungslänge für die Achtteilung erreicht ist. Durch eine Bemerkung von Herrn Kollegen Dr. Rosenthal wurde ich jedoch darauf aufmerksam, daß noch eine Achtteilung der Kugel mit vier Vierecken und vier Fünfecken möglich ist. Ich versuchte diese zunächst möglichst symmetrisch zu gestalten und dann den Bedingungen einer kürzesten Teilung (Fig. 16 *e*) anzupassen. Legt man zwei symmetrische Vierecke neben einander in die Mitte einer Halbkugel und dieselben zwei um 180^0 gedreht, in die Mitte der anderen Halbkugel, so bleibt von der Kugelfläche ein ringförmiger Rest, der durch geodätische Verbindung passender Ecken der beiden sechseckigen Grenzpolygone des Ringes in zwei Paare von kongruenten und symmetrischen Fünfecken aufgeteilt wird. Es gibt nur eine mögliche Teilung nach diesem Schema, welche den Bedingungen der kürzesten Teilung entspricht. Ihre Ausrechnung ist wirklich umständlich, da sie die Auflösung zweier sehr verwickelter Gleichungen mit zwei Unbekannten verlangt, deren explizite Aufstellung kaum tunlich ist. Ich habe das Schlußergebnis der langwierigen Rechnung in nachfolgender Figur 17 zusammengefaßt, welche ein Achtel der Kugelteilung in stereograpischer Projektion darstellt. Die ausgezogenen Linien sind Teilungslinien, darunter PQ und PS Kreisbogen. Sämtliche anderen Linien sind Geodätische. M ist der sphärische Mittelpunkt des Kreises PQ, X jener des Kreises PS.

Berechnet man schließlich den Flächeninhalt der Felder dieser Teilung, so findet sich für das halbe Viereck der Exzeß zu $45^0,01$ und für das halbe

Fünfeck zu $44^0,99$, also innerhalb der Rechengenauigkeit, der Flächeninhalt beider Art von Feldern zu einem Achtel der Kugelfläche. Es hat sich also die einzig mögliche Teilung mit kürzesten Grenzen von dem vorgegebenen Schema und der angenommenen Symmetrie als Gleichteilung erwiesen. In den Vierecken herrscht ein Überdruck von 0,1605; die Grenzlänge beträgt nur $1013^0,6$ und ist damit noch bedeutend kürzer, als bei den früher behandelten Achtteilungen.

Fig. 17.



Berechnung der allerkürzesten Achtteilung der Kugel.

$AB = AC = 90^0$; $CR = RB = 45^0$; $PM = PX = XS = 80^0,88$; $XL = LM = 29^0,58$; $RP = 17^0,25$; $RL = 96^0,75$; $AX = 8^0,28$; $XU = 1^0,92$; $RU = 97^0,765$; $UL = 29^0,53$; $AM = 53^0,85$; $RT = 7^0,22$; $PT = 15^0,12$; $AP = 74^0,28$; $AQ = 32^0,21^0$; $AS = 72^0,60$. Winkel: $CAB = CAX = PLN = PLM = PUL = RTS = 90^0$; $AQM = XPL = LPM = 30^0$; $PRT = 66^0,91$; $MAS = 52^0,31$; $AMX = 7^0,63$; $XLU = 3^0,89$; $QMA = 19^0,27$; $QMP = 57^0,87$; $PXS = 36^0,68$; $PAS = 37^0,78$; $AXM = 48^0,09$.

Für die Neunteilung der Kugelfläche gibt es eine sehr günstige Anordnung, die voraussichtlich nicht übertroffen werden kann. Um den Äquator sind in gleichen Abständen drei über Eck gestellte Kreisbogenquadrate mit Winkeln von 120^0 und dem richtigen Inhalt so angeordnet, daß die eine Diagonale in den Äquator fällt. Zwischen diese Vierecke sind auf jeder Halbkugel drei Fünfecke eingeschaltet, deren neue Grenzen Großkreisbogen sind. Es gibt somit drei Vierecke und sechs Fünfecke, sowie 14 gemeinsame Eckpunkte. Die Zahlen für ein Achtel des Quadrats sind: $\beta = 30^0,166$, $a = 80^0,462$ $b = 44^0,49$. Der Überdruck in den Quadraten beläuft sich auf $\operatorname{ctg} a = 0,1681$, die Grenzlänge auf $1080^0,1$.

Um die günstigste Zehnteilung der Kugelfläche treten zwei Anordnungen in Wettbewerb. Die erste geht von der Tetraedereinteilung aus (Fig. 16 *l*). Über jede Ecke wird ein gleichseitiges Kreisbogendreieck mit Winkeln von 120^0 und passendem Inhalt so gelegt, daß dessen Ecken mitten zwischen die Teilungslinien der Tetraederteilung zu liegen kommen. Die drei in jedes Tetraederfeld ragenden Dreiecksecken werden nun durch drei unter 120^0 sich gabelnde Großkreisbogen verbunden, wodurch in der Mitte jedes Tetraederfeldes ein neuer Knoten der Netzteilung entsteht. Zwischen die Dreiecke lagern sich dann Sechsecke ein, die von den Seiten der Tetraedereinteilung symmetrisch halbiert werden. Das Teilungsnetz hat 18 Knoten, vier dreieckige und sechs sechseckige Felder. Die Zahlen für ein Sechstel eines dreieckigen Feldes sind: $\beta = 42^0,02$, $a = 64^0,63$, $b = 44^0,30$. In den

Dreiecken herrscht der hohe Überdruck $\operatorname{ctg} a = 0{,}4782$, die Grenzlänge ist $1226^0{,}0$.

Besser als diese Anordnung erweist sich eine andere, die die Weiterbildung des drittbesten Typus der Achtteilung darstellt (Fig. 16 *k*). Zwei Kreisbogenquadrate mit Winkeln von 120^0 und passendem Inhalt werden so gelegt, daß entsprechende Ecken auf Kugeldurchmessern liegen. Der ringförmige Zwischenraum wird durch acht kongruente Fünfecke, die auf den Seiten der Quadrate aufsitzen und im übrigen durch Geodätische begrenzt sind, die sich unter 120^0 treffen, aufgeteilt. Das Teilungsnetz besteht aus zwei viereckigen und acht fünfeckigen Feldern und hat 16 Knoten. Die Werte für ein Achtel des Quadrates sind: $\beta = 29^0{,}026$, $a = 78^0{,}07$, $b = 42^0{,}17$. Die geodätischen Teilungslinien betragen $33^0{,}994$ und $52^0{,}45$. Der Überdruck in den Quadraten beläuft sich auf $\operatorname{ctg} a = 0{,}2113$, die Grenzlänge auf $1145^0{,}9$.

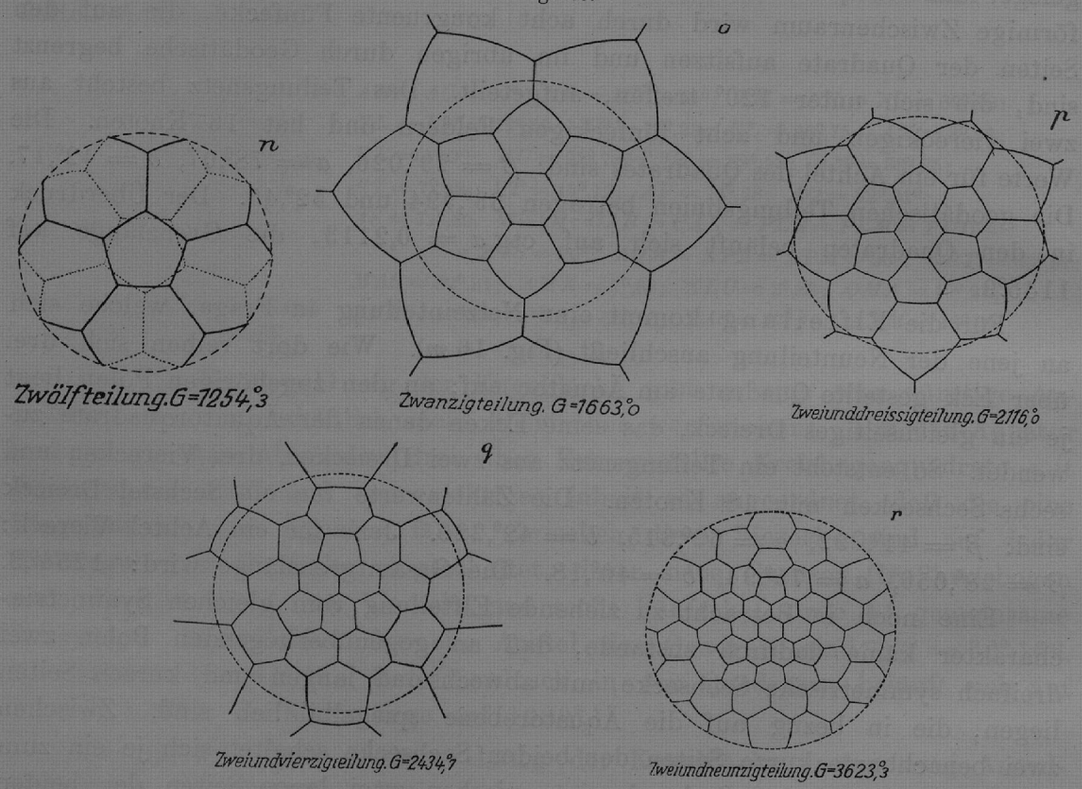
Für die Elfteilung kommt eine Netzeinteilung in Frage, welche sich an jene der Neunteilung anschließt (Fig. 16 *m*). Wie dort reihen sich drei über Eck gestellte Quadrate am Äquator auf; an den zugehörigen Polen liegt je ein gleichseitiges Dreieck, das seine Ecken denen der Äquatorquadrate zuwendet. So entsteht ein Teilungsnetz aus zwei Dreiecken, drei Vierecken und sechs Sechsecken mit 18 Knoten. Die Zahlenwerte für ein Sechstel Dreieck sind: $\beta = 41^0{,}092$, $a = 62^0{,}315$, $b = 42^0{,}226$. Jene für ein Achtel Viereck: $\beta = 28^0{,}056$, $a = 75^0{,}94$, $b = 40^0{,}18$. Die Gesamtgrenzlänge wird: $1254^0{,}3$.

Eine noch in Betracht zu ziehende Elfteilung vom gleichen Symmetriecharakter käme dadurch zustande, daß an gegenüberliegenden Polen zwei dreifach symmetrische Sechsecke, mit abwechselnd langen und kurzen Seiten liegen, die in bezug auf die Äquatorebene spiegelbildlich sind. Zwischen zwei benachbarte kurze Seiten der beiden Sechsecke schaltet sich je ein zum Äquator symmetrisches Sechseck ein, zwischen zwei lange Seiten der beiden Sechsecke zwei zum Äquator symmetrisch gelegene Vierecke, die eine geodätische Seite auf dem Äquator gemeinsam haben. So entsteht ein Teilungsnetz aus fünf Sechsecken (zwei dreifach und zwei zweifach symmetrisch) und sechs Vierecken (einfach symmetrisch) mit 18 Knoten. In den Vierecken ist Überdruck. Die Berechnung dieses Netzes ist sehr umständlich. Es muß ein sphärisches Dreieck mit den Seiten 60^0, 90^0, 90^0 von einem innern Punkt aus, im Verhältnis $2:3:6$ so geteilt werden, daß die erste Seite unter 120^0 die beiden andern senkrecht geschnitten werden. Ich habe die Berechnung unterlassen, obwohl das zugehörige Netz vielleicht kürzer ist, als das vorige.

Die natürliche Zwölfteilung der Kugel ist die Pentagondodekaeder-

einteilung (Fig. 16 *n*), die alle Merkmale der kürzesten Teilung aufweist und ausschließlich aus geodätischen Linien besteht, die zwischen den Ecken eines der Kugel einbeschriebenen regulären Dodekaeders gezogen sind. Sie ist jedenfalls auch die allerkürzeste. Überdruck ist nicht vorhanden; die Netzlänge beträgt: 1254°,3, also zufällig genau soviel wie bei der gerechneten Elfteilung.

Fig. 16.



Von einer Fortsetzung der Reihe der Teilungen über zwölf hinaus wurde abgesehen, schon aus dem Grunde, weil die Dreizehnteilung erhebliche Rechenschwierigkeiten bietet. Dagegen sollen noch einige typische Teilungen mit höheren Teilungszahlen Erwähnung finden.

Die Zwanzigteilung der Kugelfläche legt ohne weiters den Gedanken an die Ikosaederteilung nahe, welche zwar die Bedingungen einer kürzesten Teilung erfüllt, jedoch in den zwölf Ecken Ausnahmestellen insofern hat, als hier je fünf Grenzen zusammenstoßen. Die Teilungslänge für die Ikosaedereinteilung beläuft sich auf 1903°,0. Sie kann durch eine andere Anordnung, bei welcher statt der ungünstigen dreieckigen Felder fünf- oder sechs-

eckige auftreten, ganz bedeutend herabgesetzt werden. Legt man auf gegenüberliegende Pole je ein reguläres eingezogenes Kreisbogensechseck mit Winkeln von 120^0 und ein Zwanzigstel Inhalt der Kugelfläche, umgibt man jedes derselben mit einem Kranz von sechs symmetrischen Fünfecken und legt man zwischen die zwei so entstandenen sechszackigen Sterne einen Gürtel von sechs Sechsecken, so erhält man ein Netz mit acht Sechsecken und zwölf Fünfecken, das 36 Knoten hat und den Bedingungen der kürzesten Teilung angepaßt werden kann (Fig. 16 *o*). Die etwas umständliche Berechnung, die doppelte Interpolation zwischen drei Näherungsrechnungen erfordert, übergehe ich. Das Endergebnis ist für die mittleren Sechsecke $\beta = 14^0{,}056$, $a = 77^0{,}67$, $b = 28^0{,}33$. Ferner ist der Abstand der Fünfecksecken vom Mittelpunkt des nächsten zentralen Sechseckes $64^0{,}12$ und $81^0{,}035$. Der sphärische Radius der krummen Gürtelsechsecksseiten ergibt sich zu $74^0{,}81$. Der Überdruck in den Fünfecken über die Gürtelsechsecke ist $\operatorname{ctg} 74^0{,}81 = 0{,}2715$, der Unterdruck des zentralen eingezogenen Sechsecks gegenüber den umgebenden Fünfecken $\operatorname{ctg} a = 0{,}2186$. Herrscht also in den Gürtelsechsecken der Druck 0, so beträgt er in den Fünfecken 0,2715, in den zentralen Sechsecken 0,0529. Die ganze Teilungslänge verringert sich auf 1663^0, also um 240^0 gegenüber der Ikosaedereinteilung.

Um zu Kugelteilungen mit noch höheren Teilungszahlen zu gelangen, die für das eingangs erwähnte kartographische Problem von praktischer Bedeutung sein können, geht man zweckmäßig von der Ikosaedereinteilung aus und unterteilt eines der 20 Felder derart, daß aus der kongruenten und symmetrischen Wiederholung dieser Einteilung eine Gleichteilung der Kugel mit kürzesten Grenzen entsteht, die dann die volle Ikosaedersymmetrie besitzt. Für das Folgende sei bemerkt, daß die Ikosaederseite $63^0{,}435$, der obere Höhenabschnitt des Ikosaederdreiecks $37^0{,}3766$, der untere $20^0{,}9054$ mißt.

Auf diesem Wege entsteht zuerst eine Zweiunddreißigteilung (Fig. 16 *p*). Man legt über die zwölf Ecken der Ikosaedereinteilung passende reguläre Kreisbogenfünfecke mit Winkeln von 120^0, die ihre Ecken auf den Ikosaederkanten haben. Auf den 20 Dreiecken der Ikosaederteilung entstehen dann sechseckige Restflächen von gleichem Inhalt wie die Fünfecke. Das Teilungsnetz hat 60 Knoten. Die Zahlenwerte für ein Zehntel des ausgebauchten Fünfecks werden: $\beta = 13^0{,}688$, $a = 74^0{,}10$, $b = 22^0{,}78$. Der Überdruck in den zwölf Fünfecken gegenüber den 20 Sechsecken beträgt: $\operatorname{ctg} a = 0{,}2849$, die gesamte Teilungslänge $2116^0{,}0$.

Zu einer Zweiundvierzigteilung der Kugelfläche (Fig. 16 *q*) gelangen wir dadurch, daß wir über die Ecken der Ikosaederteilung passende Kreis-

bogenfünfecke so legen, daß deren Ecken mitten zwischen die Ikosaederkanten fallen und dann die drei in ein Ikosaederfeld hineinragenden Fünfecksecken durch ein unter 120^0 gegabeltes geodätisches Dreilinienstück verbinden. Es liegen dann über den 30 Ikosaederkanten ebensoviele durch sie halbierte Sechsecke. Das Teilungsnetz hat 90 Knoten, 12 Fünfecke und 30 Sechsecke. Die Werte für ein Zehntel des ausgebauchten Fünfecks sind: $\beta = 12^0{,}307$, $a = 69^0{,}624$, $b = 19^0{,}873$. Der Überdruck in den Fünfecken beträgt: ctg $a = 0{,}3714$, die Gesamtlänge des Netzes $2434^0{,}7$.

Eine Zweiundneunzigteilung der Kugelfläche (Fig. 16 *r*) entsteht in der Weise, daß man wie bei der Zweiundvierzigteilung ausgebauchte Kreisbogenfünfecke, nur entsprechend kleineren Inhalts, über die Ikosaederecken legt, wobei deren Ecken in die Ikosaederflächen hineinragen. Auf die Mittelpunkte der Ikosaederflächen werden dann eingezogene reguläre Kreisbogensechsecke gleichen Inhalts mit 120^0-Winkeln gelegt, deren Ecken auf den Höhen der Ikosaederdreiecke liegen. Das Netz wird dann durch geodätische Stücke der Ikosaederhöhen, die benachbarte Polygonecken verbinden, vervollständigt und enthält 92 Maschen (12 ausgebauchte reguläre Fünfecke, 20 eingezogene reguläre Sechsecke und 60 gemischte einfach symmetrische Sechsecke, die von den Ikosaederkanten halbiert werden), 180 Knoten und 270 Seiten. Die Zahlenwerte für ein Zehntel ausgebauchtes Fünfeck sind: $\beta = 9^0{,}423$, $a = 56^0{,}38$, $b = 13^0{,}41$; jene für ein Zwölftel eingezogenes Sechseck: $\beta = 6^0{,}565$, $a = 84^0{,}30$, $b = 13^0{,}15$. Der Druck in den 60 einfach-symmetrischen Sechsecken ist ctg $84^0{,}30 = 0{,}0998$, in den ausgebauchten Fünfecken ctg $56^0{,}38 +$ ctg $84^0{,}30 = 0{,}6649 + 0{,}0998 = 0{,}7647$, in den eingezogenen Sechsecken Null. Die Teilungslänge macht $3623^0{,}3$ aus.

Am Schluße möge noch eine kurze Zusammenstellung der gerechneten Teilungslängen folgen, wobei wir uns auf die jeweilig kürzesten beschränken wollen.

Teilungszahl	2	3	4	5	6	7	8	9
Teilungslänge	$360^0{,}0$	$540^0{,}0$	$656^0{,}8$	$769^0{,}5$	$846^0{,}4$	$936^0{,}9$	$1013^0{,}6$	$1080^0{,}1$
Durchschnittl. Maschenumfang	$360^0{,}0$	$360^0{,}0$	$328^0{,}4$	$307^0{,}8$	$282^0{,}1$	$267^0{,}7$	$253^0{,}4$	$240^0{,}0$
Umfang einer Kugelhaube	$360^0{,}0$	$339^0{,}4$	$311^0{,}8$	$288^0{,}0$	$268^0{,}3$	$252^0{,}0$	$238^0{,}1$	$226^0{,}3$
Verhältniszahl	1,000	1,061	1,053	1,069	1,051	1,062	1,064	1,061

10	11	12	20	32	42	92
$1145^0{,}9$	$1254^0{,}3$	$1254^0{,}3$	$1663^0{,}0$	$2116^0{,}0$	$2434^0{,}7$	$3623^0{,}3$
$229^0{,}2$	$228^0{,}1$	$209^0{,}1$	$166^0{,}3$	$132^0{,}25$	$115^0{,}94$	$78^0{,}77$
$216^0{,}0$	$207^0{,}0$	$199^0{,}0$	$156^0{,}9$	$125^0{,}27$	$109^0{,}77$	$74^0{,}66$
1,062	1,102	1,051	1,060	1,056	1,056	1,055

Selbstverständlich nimmt die Teilungslänge mit der Teilungszahl zu und der durchschnittliche Maschenumfang (Teilungslänge, geteilt durch die halbe Teilungszahl) ab. Vergleicht man aber den Maschenumfang mit dem Umfang einer Kugelhaube, die gleichen Inhalt wie eine Masche der zugehörigen Teilung hat, so findet sich ein merkwürdig konstantes Verhältnis, nämlich mit zwei Ausnahmen zwischen 1,051 und 1,069. Die eine Ausnahme betrifft die Zweiteilung, bei der das Verhältnis von vorneherein gleich Eins ist und die Elfteilung, bei welcher der schon angedeutete Verdacht besteht, daß die gerechnete Teilung nicht die allerkürzeste ist, welcher Verdacht natürlich dadurch bestärkt erscheint. Man sieht aus der Zusammenstellung ferner, daß die rein geodätischen Teilungen, wie Tetraeder-, Würfel- und Dodekaedereinteilung die günstigsten Verhältnisse (1,053—1,051) aufweisen. Außerdem bemerkt man für die großen Teilungszahlen ein deutliches Abnehmen dieses Verhältnisses. Es ist leicht anzugeben, welchem Wert das Verhältnis bei unbegrenzter Vermehrung der Teilungszahl zustrebt. Offenbar überwiegen dann die Sechsecke und werden in der Überzahl immer regelmäßiger. Betrachten wir als Grenzfall ein sehr großes Stück einer Ebene, die durch lauter kongruente regelmäßige Sechsecke wabenartig eingeteilt ist, so wird für diese Teilung das Verhältnis des Sechsecksumfangs zum Kreisumfang, der die gleiche Fläche einschließt, 1,050. Dieser Wert ist bei der Zweiundneunzigteilung schon bis auf ein halbes Prozent erreicht.