Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 18. Abhandlung

Elementare Herleitung des Weierstrass'schen „Vorbereitungssatzes"

von

G. Dumas

Vorgelegt am 4. Dezember 1909

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 11 2, 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. A. 11 3, 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 14 3, 1883 ℳ —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 14 2, 1883 ℳ 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 17 1, 1889 ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 ℳ —.40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 ℳ 1.20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 ℳ 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 ℳ —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 ℳ —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 ℳ —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 ℳ —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 ℳ —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 18. Abhandlung

Elementare Herleitung des Weierstrass'schen „Vorbereitungssatzes“

von

G. Dumas

Vorgelegt am 4. Dezember 1909

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Es handelt sich hier um einen wohlbekannten und fundamentalen Satz der Theorie der analytischen Funktionen, den man folgendermaßen aussprechen kann:

Ist $F(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine in der Umgebung der Stelle $x = x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$ konvergente[1]) gewönliche Potenzreihe von $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ und verschwindet die Funktion $F(x, 0, 0, \ldots 0)$ von x für $x = 0$ von der m^{ten} Ordnung, $m \geq 1$, so gilt für eine gewisse Umgebung der betrachteten Stelle $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ die Beziehung:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &F(x, x_1, x_2, \ldots x_n) \\ &= (x^m + f_1 x^{m-1} + \cdots + f_m) \cdot \Phi(x, x_1, x_2, \ldots x_n). \end{aligned}$$

Dabei bedeuten:

$f_1, f_2, \ldots f_m$ gewöhnliche Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche an der Stelle $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ verschwinden und in deren Umgebung konvergieren;

$\Phi(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine in der Umgebung der Stelle $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ konvergente und an dieser Stelle selbst von Null verschiedene gewöhnliche Potenzreihe von $x, x_1, x_2, \ldots x_n$.

Die Zerlegung (1) ist eine völlig bestimmte.

Dieser Satz, den Weierstraß schon 1860 in seinen Vorlesungen gegeben hat, läßt sich verschiedenartig und in ein-

[1]) Eine Potenzreihe soll in der Umgebung einer Stelle konvergent heißen, wenn sich positive Zahlen $\varrho, r_1, r_2, \ldots r_n$ so bestimmen lassen, daß die Reihe für $|x| < \varrho$, $|x_i| < r_i$ konvergiert. Die Reihe konvergiert dann absolut und es können ihre Glieder beliebig angeordnet werden.

facher Weise beweisen. Die folgende Überlegung hat den Vorzug, frei von jeder transzendenten Betrachtung zu sein; auch gibt sie ein Mittel, beliebig viele Glieder der Potenzreihen der rechten Seite von (1) unmittelbar zu berechnen.[1])

§ 1.

Wir zeigen zunächst, wie man formal zu der Zerlegung (1) gelangen kann. Wir setzen:

$$F(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = F(x \mid x_i) = x^m \varphi(x) + \sum_{\substack{\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n \geq 1)}} A_{\mu, \mu_1, \ldots \mu_n} x^{\mu} x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n},$$

wo die $A_{\mu, \mu_1, \ldots \mu_n}$ numerische Koeffizienten bedeuten und $\varphi(x)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von x darstellt.

Da nach Voraussetzung $F(x \mid 0)$ von der m^{ten} $(m \geq 1)$ Ordnung Null wird, so beginnt $\varphi(x)$ mit einem von Null verschiedenen Gliede. Man kann also die Funktion $\frac{1}{\varphi(x)}$ in eine gewöhnliche Potenzreihe $\varphi_1(x)$ entwickeln. Multipliziert man die Funktion $F(x \mid x_i)$ mit $\varphi_1(x)$, so bekommt man:

$$\varphi_1(x) F(x \mid x_i) = x^m \cdot 1 + \sum_{\substack{\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n = 0, 1, 2, \ldots \\ (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n \geq 1)}} A'_{\mu, \mu_1, \ldots \mu_n} x^{\mu} x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n}.$$

Wir beweisen die Richtigkeit des Satzes für die einfachere Funktion $F(x \mid x_i)$. Der Übergang von der Funktion F zur Funk-

---

[1]) Bezüglich der klassischen Beweise dieses Satzes vergleiche man die Bemerkungen des Herrn **Goursat** in seiner Abhandlung „Démonstration élémentaire d'un théorème de Weierstrass" (Bull. Soc math. 36 (1908), p. 209—215).

Von dem Hauptsatze über implizite Funktionen, den Herrn Goursat in seinem eigenen Beweise benützt (p. 213 der zitierten Abhandlung), wird hier kein Gebrauch gemacht. Siehe auch: **Hartogs**, „Über die elementare Herleitung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes" (München, Ber. 39 (1909), 3. Abhandlung), nebst Bemerkung vom 3. Juli 1909, wo sich verschiedene Literaturangaben finden; **Stickelberger** „Über einen Satz des Herrn Noether" (Math. Ann. 30 (1887), p. 403); **Pellet**, „Des équations majorantes" (Bull. Soc. math. 37 (1909), p. 97).

tion $\overline{F}$ ist zwar nicht notwendig, erlaubt aber eine elegantere Darstellung der ganzen Rechnung.

Fassen wir in der Funktion $\overline{F}(x \mid x_i)$ die Glieder derselben Dimension in $x_1, x_2, \ldots x_n$ zusammen, und ordnen wir diese Glieder nach steigender Dimension, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\overline{F}(x \mid x_i) = x^m \cdot 1 &+ x_1 \varphi_{1,0,\ldots 0} + x_2 \varphi_{0,1,\ldots 0} + \cdots + x_n \varphi_{0,0,\ldots 1} \\ &+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ + x_1^k \varphi_{k,0,0,\ldots 0} &+ x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \varphi_{k_1,k_2,\ldots k_n} + \cdots + x_n^k \varphi_{0,0,\ldots k} \\ &+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\end{aligned}$$

oder kürzer:

$$\overline{F}(x \mid x_i) = x^m \cdot 1 + \sum_{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n \geqq 1)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \varphi_{k_1,k_2,\ldots k_n}.$$

Der Koeffizient $\varphi_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ ist eine gewöhnliche Potenzreihe von x. Die zu den Zeichen φ hinzugefügten n Indizes $k_1, k_2, \ldots k_n$ sollen andeuten, daß $\varphi_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ Koeffizient von $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ in $\overline{F}(x \mid x_i)$ ist.

Ebenso soll in

$$\Psi(x \mid x_i) = 1 + \sum_{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n \geqq 1)}' x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \psi_{k_1,k_2,\ldots k_n}$$

$\psi_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ eine gewöhnliche Potenzreihe von x bedeuten, mit welcher der Ausdruck $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ multipliziert ist. In

$$G(x \mid x_i) = x^m + \sum_{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n \geqq 1)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} g_{k_1,k_2,\ldots k_n}$$

möge $g_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ zwar noch Faktor des ähnlichen Ausdrucks in $x_1, x_2, \ldots x_n$ sein, aber nicht mehr eine Potenzreihe, sondern nur noch ein Polynom von höchstens dem $(m-1)$. Grade in x, also eine ganze rationale Funktion bedeuten.

Unter dieser Annahme brauchen wir nur zu zeigen, wie die Funktionen $\psi_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ und $g_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ in eindeutiger Weise so bestimmt werden können, daß die Beziehung

$$\overline{F}(x \mid x_i) = G(x \mid x_i)\, \Psi(x \mid x_i) \tag{2}$$

erfüllt wird.

Die Beziehung (2) kann nur bestehen, wenn, nach Ausführung der Multiplikation rechts, die Koeffizienten entsprechender Glieder der beiden Seiten identisch sind.

Somit haben wir:

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad \varphi_{k_1, k_2, \ldots k_n} &= x^m \psi_{k_1, k_2, \ldots k_n} + 1 \cdot g_{k_1, k_2, \ldots k_n} \\
&+ \sum \psi_{k'_1, k'_2, \ldots k'_n} g_{k''_1, k''_2, \ldots k''_n},
\end{aligned}
$$

wo die Summe über eine endliche Anzahl von Produkten ψg, für welche

$$
(4) \qquad \begin{cases} k'_1 + k'_2 + \cdots + k'_n < k_1 + k_2 + \cdots + k_n, \\ k''_1 + k''_2 + \cdots + k''_n < k_1 + k_2 + \cdots + k_n \end{cases}
$$

zu erstrecken ist. Indem man in $\overline{F}(x \mid x_i)$ von den homogenen Gliedern niedrigster Dimension in $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu Gliedern von immer höherer Dimension übergeht, kann man mittelst (3) wegen der Ungleichungen (4) die Koeffizienten ψ und g in Ψ und G ermitteln. Die Potenzreihen ψ und die ganzen rationalen Funktionen g sind eindeutig bestimmt. In der Tat, schreiben wir (3) in der Form

$$
(5) \qquad \overline{\varphi}_{k_1, k_2, \ldots k_n} = x^m \psi_{k_1, k_2, \ldots k_n} + 1 \cdot g_{k_1, k_2, \ldots k_n}
$$

und denken wir uns $\overline{\varphi}, \psi, g$ nach steigenden Potenzen von x geordnet:

$$
\overline{\varphi} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l,
$$

$$
\psi = \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l,
$$

$$
g = \sum_{l=0}^{m-1} c_l x^l,
$$

so hat man:

$$
(6) \qquad \begin{cases} c_l = a_l \ (l = 0, 1, 2, \ldots (m-1)) \\ b_l = a_{m+l} (l = 0, 1, 2, \ldots \ldots \ldots). \end{cases}
$$

Dabei ist für das Folgende zu beachten, daß die Koeffizienten a_l von $\overline{\varphi}_{k_1, k_2, \ldots k_n}$ zusammengesetzt sind aus den Koeffizienten von $\varphi_{k_1, k_2, \dots k_n}$ und den Koeffizienten der Funktionen $\psi_{k'_1, k'_2, \dots k'_n}$ und $g_{k''_1, k''_2, \dots k''_n}$, die man schrittweise berechnen und somit als bekannt voraussetzen kann.

Somit ist bewiesen, daß die Zerlegung (2) in eindeutiger Weise möglich ist. Daraus folgt aber sofort die Möglichkeit und Eindeutigkeit der Zerlegung (1), wo die Koeffizienten f_1, $f_2, \dots f_m$ und die Funktion Φ, wie man durch eine andere Anordnung der Glieder von G und Ψ einsieht, die angegebene Bedeutung haben.

§ 2.

Da $F(x \mid x_i)$ in der Umgebung des Punktes $x = 0$, $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$ konvergiert, so ist dies auch für die Funktion $\overline{F}(x \mid x_i)$ der Fall.

Macht man daher nötigenfalls in $\overline{F}(x \mid x_i)$ eine Transformation von der Form $x = \varrho\, x'$, $x_i = \varrho_i x'_i$ und dividiert man den erhaltenen Ausdruck durch ϱ^m, so gelangt man zu einer Funktion von derselben Struktur wie $F(x \mid x_i)$, in welcher, infolge eines bekannten Satzes der Funktionentheorie, alle Koeffizienten absolut genommen kleiner oder gleich sind einer gewissen positiven Größe a.[1]) Dies werden wir also auch von der Funktion $F(x \mid x_i)$ selbst voraussetzen können.

Bezeichnen wir mit $d_{k_1, k_2, \dots k_n}$ bzw. $d_{k'_1, k'_2, \dots k'_n}$ u. s. w. ganze positive Zahlen, die größer sind als der absolute Wert irgend eines Koeffizienten der Funktionen $\psi_{k_1, k_2, \dots k_n}$ und $g_{k_1, k_2, \dots k_n}$ bzw. $\psi_{k'_1, k'_2, \dots k'_n}$ und $g_{k'_1, k'_2, \dots k'_n}$ u. s. w., so sehen wir, da diese Größen durch die Beziehung

$$(7) \qquad d_{k_1, k_2, \dots k_n} = a + m \sum d_{k'_1, k'_2, \dots k'_n}\, d_{k''_1, k''_2, \dots k''_n}$$

definiert werden können, daß solche Zahlen tatsächlich existieren.

(7) geht nämlich aus (3) hervor. Führt man auf der rechten Seite von (3) unter dem Summenzeichen eine der Multi-

[1]) Vgl. Brill, „Über das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle“ (München, Ber. 31 (1891), p. 217).

plikationen von ψ und g aus, so setzt sich der Koeffizient irgend einer Potenz von x im Produkte ψg aus höchstens m Ausdrücken zusammen, da g eine ganze rationale Funktion von niedrigerem als dem m^{ten} Grade ist. Wird also jeder Koeffizient in ψ und in g mittelst der entsprechenden d majoriert, so bekommt man als majorierten Koeffizienten von

$$\psi_{k'_1, k'_2, \ldots k'_n} \cdot g_{k''_1, \ldots k''_n}$$

den Ausdruck:

$$m\, d_{k'_1, k'_2, \ldots k'_n}\, d_{k''_1, k''_2, \ldots k''_n}.$$

In Gleichung (7) bezieht sich die endliche Summe rechts auf dieselben Produkte von ψ und g wie die Summe rechts in der Gleichung (3).

Schreiben wir nun:

$$D(x_1, x_2, \ldots x_n) = D(x_i) = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots k_n = 0, 1, 2, \ldots \\ (k_1 + k_2 + \cdots + k_n \geqq 1)}} d_{k_1, k_2, \ldots k_n}\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

so haben wir, indem wir eine bekannte Bezeichnung einführen, die besagt, daß eine Reihe Majorante einer anderen ist:

$$(8)\quad \begin{cases} x^m + (1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})\, D(x_i) \gg G(x \mid x_i), \\ 1 + (1 + x + x^2 + \cdots)\, D(x_i) \gg \Psi(x \mid x_i). \end{cases}$$

Die Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ konvergiert aber für $|x| < 1$, während $1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}$ eine ganze rationale Funktion ist. Können wir zeigen, daß die Reihe $D(x_i)$ in einer gewissen Umgebung des Punktes $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ konvergiert, so erhellt sofort daraus, daß die beiden Potenzreihen $G(x \mid x_i)$ und $\Psi(x \mid x_i)$ in der Umgebung des Punktes $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ auch konvergieren.[1])

Setzen wir jetzt von der Reihe $D(x_i)$, die wir kurz mit D

---

[1]) G. **Dumas**, „Sur les fonctions à caractère algébrique dans le voisinage d'un point donné" (Paris 1904). In dieser Arbeit (p. 55) wird eine mit D analoge Reihe verwendet, die ich damals nach einer Angabe von Herrn **J. Franel** summiert hatte. Derselbe Weg wird hier eingeschlagen.

bezeichnen wollen, für einen Augenblick die Konvergenz voraus, so bekommen wir durch Multiplikation von D mit sich selbst eine neue Reihe:

$$D^2 = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots k_n = 0, 1, 2, \ldots \\ (k_1 + k_2 \ldots + k_n \geq 1)}} \bar{d}_{k_1, k_2, \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

in welcher:

$$\bar{d}_{k_1, k_2, \ldots k_n} = \sum d_{k_1', k_2', \ldots k_n'} d_{k_1'', k_2'', \ldots k_n''}. \tag{9}$$

Die endliche Summe rechts in (9) entsteht aus den beiden Faktoren D ganz in derselben Weise, wie die entsprechenden Summen in den rechten Seiten von (3) oder (7). Daher hat man

$$d_{k_1, k_2, \ldots k_n} = m \bar{d}_{k_1, k_2, \ldots k_n} + a$$

und daher auch:

$$D = m D^2 + a \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots k_n = 0, 1, 2, \ldots \\ (k_1 + k_2 + \ldots + k_n \geq 1)}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

d. h.:

$$m D^2 - D + a \left[\frac{1}{1 - x_1} \frac{1}{1 - x_2} \cdots \frac{1}{1 - x_n} - 1 \right] = 0, \tag{10}$$

wenn

$$\underset{(i = 1, 2, \ldots n)}{|x_i| < 1}$$

ist.

D ist Wurzel der Gleichung (10) und zwar ist diese Reihe gleich derjenigen Wurzel, welche für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ selbst Null wird.

Demnach hat man:

$$D = \frac{1}{2m} \left[1 - \sqrt{1 - 4 m a \left(\frac{1}{1 - x_1} \frac{1}{1 - x_2} \cdots \frac{1}{1 - x_n} - 1 \right)} \right],$$

woraus folgt, daß D tatsächlich in einer gewissen Umgebung des Punktes $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ konvergiert. Wegen (8) konvergieren auch die Potenzreihen G und Ψ in der Umgebung des Punktes $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, und somit ist der Weierstraßsche Satz bewiesen.